

**Mgr. Markéta Zikmundová: Interacting spatial particle systems**

Předložená disertační práce se zabývá konečnými bodovými procesy částic v euklidovském prostoru. Je zkoumán případ, kdy částice (náhodné kompaktní množiny) jsou navzájem závislé. Tato závislost je modelována předepsáním hustoty vzhledem k rozdělení vztažného Poissonova procesu. Ve studiu těchto modelů vidím hlavní přínos práce. Doposud byla pozornost v literatuře v převážné míře věnována procesům částic vzniklých nezávislým kótováním.

Práce je rozdělena do šesti kapitol. Po úvodu následuje kapitola, ve které jsou shrnuty potřebné základy z teorie bodových procesů. Ve třetí kapitole jsou studovány funkcionály konečných bodových procesů daných hustotou. Hlavní pozornost je věnována  $U$ -statistikám. Čtvrtá kapitola přináší podrobnější rozebrání tří konkrétních příkladů procesů interagujících částic (kruhů a úseček v  $\mathbb{R}^2$  a destiček v  $\mathbb{R}^3$ ). V následující kapitole je model kruhů rozšířen o časovou složku. Je popsána simulace modelu a provedena simulační studie porovnávající různé odhady parametrů modelu. Poslední kapitola obsahuje diskusi dosažených výsledků a závěrečné poznámky.

Druhá kapitola je složena ze základních definic a známých výsledků (věta 2.1, lemma 2.2), u kterých by čtenář jistě ocenil přesnější odkaz na to, kde lze nalézt jejich důkazy.

Ve třetí kapitole je odvozeno vyjádření momentů  $U$ -statistik pomocí Papangelouových podmíněných intenzit. Hlavními vlastními výsledky jsou věta 3.5 (první momenty) a věta 3.7 (druhé momenty). Induktivní rozšíření pro (smíšené) momenty vyššího řádu je formulováno ve větě 3.8 a v explicitnějším tvaru ve větě 3.10. Důkazy jsou založeny na identitě (3.2) pro kovarianci funkcionálů Poissonova procesu, která pochází z článku Last, Penrose (2011). Tento postup nabízí alternativu k jinému způsobu odvození podobných vztahů pro momenty, který vychází z Georgiiho-Nguyenovy-Zessinovy identity. Podstatná část třetí kapitoly práce je obsažena v článku autorky a jejího školitele, který byl přijat k publikaci v časopise *Kybernetika*.

Ve čtvrté kapitole autorka uvažuje konkrétní parametrické modely procesů částic daných hustotou v exponenciálním tvaru. Ve větě 4.1 je rozepsána Papangelouova podmíněná intenzita vyšších řádů. Tvzení z třetí kapitoly jsou formulována pro funkcionály z  $L^2$ , a tak tvrzení 4.2 a 4.4 ověřují, že funkcionály spojené s procesem úseček a procesem destiček jsou v  $L^2$ . Aplikováním vět z kapitoly 3 se dostávají tvrzení 4.3 (momenty pro celkovou délku a počet průsečíků procesu interagujících úseček), tvrzení 4.5 a 4.6 (momenty pro celkový povrch, celkovou délku průsečnic a počet průsečíků procesu interagujících destiček). Na závěr kapitoly je diskutováno limitní chování při zvětšujícím se parametru intenzity vztažného Poissonova procesu. Je rozebrán speciální příklad procesu úseček konstantní délky a dvou možných ortogonálních orientací.

Pátá kapitola je praktičtěji zaměřena. Vychází ze dvou článků, ve kterých Markéta Zikmundová vystupuje jako první autor a které byly publikované v časopise *Methodology and Computing in Applied Probability*. Nejprve jsou popsány sekvenční Monte Carlo metody. Poté je vysvětlen simulační algoritmus pro generování časoprostorového modelu interagujících kruhů. Parametry hustoty se mění v čase podle náhodné procházky s gaussovským krokem. V simulační studii jsou porovnány odhady těchto parametrů třemi různými metodami (maximální věrohodnost, částicový filtr a kombinace částicového filtru a Metropolisova-Hastingsova algoritmu). Výsledky jsou prezentovány pomocí tabulek a grafů. Stručný slovní komentář výsledků je přesunut až do závěrečné kapitoly.

Po matematické stránce je práce na dobré úrovni. Důkazy vět i teoretické příklady jsou korektně zpracovány. Vyjádření momentů  $U$ -statistik je celkem očekávané, ale aplikaci na konkrétní modely stochastické geometrie shledávám jako zajímavou a přínosnou. Je škoda, že hezký dojem z obsahu práce kazí několik překlepů a nepřesností ve vzorcích, např. chybějící dolní indexy skalárních součinu na konci str. 20 a na str. 21;  $\mathbf{I}_{\{u_1, u_2\} \in C}$  na str. 21;  $\int_C$  na str. 21; přebytečné  $\gamma$  na str. 21, ř.  $-4$  a  $-3$ ; chybějící  $\log \gamma$  ve vzorci pro  $\text{var}[\log p(\eta)]$  na str. 29; nesprávné označení některých integračních proměnných v důkazu věty 3.5; přebytečné  $\Lambda^n(E)$  v druhém a předposledním řádku důkazu tvrzení 4.2;  $D_o$  místo  $D_0$  v důkazu tvrzení 4.2;  $\mu$  místo  $\eta$  v důkazech tvrzení 4.2 a 4.4; několikerá záměna  $s$  za  $o$  v podkapitole 4.2.2 a na str. 56;  $y$  místo  $y_1$  v (4.30); vzorce v podkapitole 4.3.2 neodpovídají vztahu (4.13); chybějící dolní index u  $\varrho_2$  v (4.22), (4.23) a na str. 46; nesprávný sčítací index v (5.3) a na konci str. 52;  $\mathbf{x}_{t-1}$  místo  $\mathbf{y}_{t-1}$  v důkazu tvrzení 5.1.

K obsahu práce mám následující konkrétní připomínky a dotazy:

1. V definici  $s(\mathbf{y})$  u Straussova procesu na str. 21 by se mělo počítat přes neuspořádané dvojice různých bodů, jinak by neseděl tvar podmíněné intenzity  $\lambda^*(u; \mathbf{y})$ . Ve vyjádření  $\mathbb{E}\mu(C)^2$  na str. 22 jsou členy se záporným znaménkem navíc a  $x$  má být  $\mu$ . Podobně, aby odpovídal tvar  $\lambda^*(u; \mathbf{y})$ , muselo by být  $V_2(u, v)$  na str. 29 vyděleno dvěma.
2. Značení  $\Pi_{k_1, \dots, k_m}$  a  $\Pi_q$  v definici 3.3 není zrovna šťastné, protože pro  $m = 1$  a  $k_1 = q$  značí  $\Pi_{k_1, \dots, k_m}$  něco jiného než  $\Pi_q$ . V důkazu tvrzení 3.9 se pak tvrdí, že  $\Pi_{k_1} = 1$ , což má zřejmě znamenat, že kardinalita  $\Pi_{k_1}$  je rovna 1. Zdůvodnění prvního indukčního kroku je pak zvláštní, protože pro  $m = 1$  není jasné, co znamená  $\sum_{j_2, \dots, j_m} A(j_2 : j_m)$ .
3. K čemu je potřeba předpoklad  $H_m(\eta) \in L_m(P_\eta)$  na str. 28? Nemá zde být  $F \in L^m(\mathbb{P}_\eta)$ ?
4. Podle seznamu zkratk je operátor diference řádu  $m$  značen jako  $D_{u_1, \dots, u_m}^m$ . To je ale dodržováno (až na výjimky) pouze ve čtvrté kapitole. V celé třetí kapitole je horní index  $m$  vypouštěn.
5. Tvrzení 4.2 a 4.4 začínají tak, že se předpokládá tvar  $\mathcal{X}$ . Za předpokladů  $D_0 < \infty$  resp.  $R_0 < \infty$  určitě platí, že množina  $\mathcal{X}$  daná vztahem (4.2) obsahuje (4.11) resp. (4.14). Nešly by najít nějaké postačující podmínky zaručující, že  $\mathcal{X}$  je přímo rovno (4.11) resp. (4.14)?
6. Poslední integrál v tvrzení 4.5 má být nejspíš vynásoben  $1/12$ .
7. Proč je v příkladu 4.1 u kovariance  $C_{12}$  integrál vynásoben dvěma?
8. Jak se má rozumět tomu, že trojice veličin  $X_1(\mu_a)$ ,  $X_{2,3}(\mu_a)$  a  $X_{1,2,3}(\mu_a)$  je korelovaná (str. 45)? Z toho, že jsou všechny funkcí  $\mu_a$  ještě neplyne, že  $\mathbb{E}e^{x_2 X_{1,2,3}} \neq \mathbb{E}e^{x_2 X_1} \mathbb{E}e^{x_2 X_{2,3}}$ . Pokud  $x_2 = 0$ , potom rovnost  $\varrho_3(y_1, y_2, y_3; \mu_a) = \varrho_1(y_1; \mu_a) \varrho_2(y_2, y_3; \mu_a)$  je splněna a proces  $\mu_a$  ani nemusí být Poissonův.
9. Označení *germ-grain model* se obvykle používá pro případ, kdy částice jsou nezávislé stejně rozdělené a nezávislé na polohách, viz např. podkapitola 4.3 v knize Schneider, Weil (2008). Proto asi není vhodné v kapitole 5 používat toto označení, které ostatně nebylo v práci zavedeno.

Grafická a formální úprava textu je kvalitní. Z typografických prohrěšků bych upozornil na občasně chybné používání pomlček a rozdělovníků, věty začínající symbolem nebo nepoužívání stojatého písma pro matematické funkce jako `card`, `cov`, `inf`, `max`, `min`. Na řadu číselovaných vzorců se nikde v textu neodkazuje. Stejně tak autorka nikde necituje položky [16], [17], [18], [21] a [35] ze seznamu literatury, a tak není důvod, aby tam byly uváděny. U [16] se navíc objevuje překlep. Po jazykové stránce by bylo co zlepšovat. Některé anglické věty jsou dost krkolomně zformulovány.

Hlavní přednosti práce spočívají v teoretickém rozvíjení aktuálního tématu týkajícího se modelování navzájem se ovlivňujících geometrických struktur s využitím nových metod založených na Wienerově-Itôově rozkladu chaosu pro funkcionály Poissonova procesu. Dalším důležitým příspěvkem doktorandky je rozsáhlá simulační studie, která je dost náročná a jistě vyžadovala spoustu úsilí. Nedostatky zmiňuji výše, dalo by se jim předejít pečlivějším zpracováním. Nemění to však nic na celkovém kladném hodnocení práce. Mohu tedy prohlásit, že předložená disertační práce prokazuje předpoklady Mgr. Markéty Zikmundové k samostatné tvořivé práci a doporučuji ji k obhajobě.

V Praze, 31. října 2014

doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.  
KPMS MFF UK  
pawlas@karlin.mff.cuni.cz