# Posudek diplomové práce

## Posudek oponenta

| | |
|---|---|
| Autor: | Bc. Vojtěch Kaluža |
| Název práce: | Lipschitz mappings in the plane |
| Školitel: | Prof. RNDr. Jiří Matoušek, DrSc. |
| Stud. program a obor: | Informatika, Diskrétní modely a algoritmy |
| Rok odevzdání: | 2014 |
| Oponent: | Mgr. Robert Šámal, Ph.D. |

Práce je motivována dvěma fascinujícími geometrickými otázkami o diskrétních množinách bodů. První je Feigeho otázka, zda každá podmnožina $\mathbb{Z}^2$ velikosti $n^2$ jde zobrazit na čtvercovou mřížku $[n]^2$ pomocí $C$-Lipschitzovského zobrazení (pro univerzální konstantu $C$). Druhou je Furstenbergova otázka, zda jsou každé dvě separované sítě v $\mathbb{R}^2$ bilipschitzovsky ekvivalentní.

V Kapitole 1 je předvedeno řešení Buraga a Kleinera, kteří Furstenbergův problém negativně řeší pomocí spojité verze: najdou funkci $\varrho : [0,1]^2 \to (c, \infty)$ (pro $c > 0$), která není Jacobiánem žádného bilipschitzovského zobrazení. Ekvivalentně: obraz míry s hustotou $\varrho$ pomocí bilipschitzovského zobrazení ($f_*(\nu_\varrho)$) není Lebesgueova míra.

Konstrukce této anomální funkce $\varrho$ je prezentována se všemi detaily, použítí na vyřešení Furstenbergovy je jen naznačeno.

Dále se autor pouští do vlastních modifikací: Burago–Kleinerovu konstrukci modifikuje tak, že funkce $\varrho$ je anomální na jakékoli otevřené množině. Zejména se pak, v Kapitole 2, snaží konstrukci využít pro řešení Otázky 1 – která se ptá, zda lze sestrojit dva hustoty $\varrho_1$, $\varrho_2$ takové, že pro žádná dvě bilipschitovská zobrazení $f^1$, $f^2$ není součet obrazů měr $f^1_*(\nu_{\varrho_1}) + f^2_*(\nu_{\varrho_2})$ roven Lebesgueově míře.

Pan Kaluža suverénně pracuje s vlastnostmi bilipschitzovských zobrazení a sledoval zajímavý postup, který použitím anomální míry získané modifikací konstrukce Buraga a Kleinera měl Otázku 1 zodpovědět. Bohužel tento postup neuspěl, protože bilipschitzovské zobrazení nemusí mít Jakobián esenciálně spojitý v žádném bodě.

Práce se dobře četla. Definice i postup byl sice místy komplikovaný, ale autor se snažil byt ke čtenáři vlídný, konstrukci ilustroval vhodnými obrázky a u obtížných důkazů napřed naznačil hlavní ideu. Zmíním několik konkrétních (drobných) nedostatků:

- Na straně 6 má zobrazení $\varphi_k$ vést z $S_k$ do $[0,1]^2$, jinak není definováno složení $\varrho \circ \varphi_k$.
- Na téže stránce "similitude" by mělo být "homothety".
- Několik málo dalších překlepů nevypisuji, ale musím konstatovat, že jich je velice málo s ohledem na délku práce (která je navíc psaná anglicky).

Po stránce věcné mám dvě doplňující otázky:

Jak souvisí původní Feigeho otázka s Otázkou 1? Jonesova Věta 0.1 naznačuje, že souvislosti zde jsou, ale uvítal bych podrobnější rozvedení.

Je Otázka 1 relevantní pro Feigeho otázku i v případě, že by Feigeho otázka měla kladnou odpověď?

Je škoda, že se nepodařilo Feigeho otázku vyřešit, ale to patrně jen ukazuje na její obtížnost. Práci považuji za velice zdařilou a navrhuji ji uznat za práci diplomovou.

V Praze dne 19. května 2014

Robert Šámal