Posudek diplomové práce Aleny Skálové
Gradientové zobrazení funkcí více proměnných

Je-li funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencovatelná, potom má zobrazení $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ následující vlastnost, kterou dokázal Denjoy ([3]) a nezávisle Clarkson ([2]): pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$ je množina $(f')^{-1}(G)$ prázdná nebo má kladnou Lebesgueovu míru. Tato vlastnost se nazývá *Denjoy-Clarksonova*. V roce 1990 C. Weil položil otázku ([6]), zda pro každou fréchetovsky diferencovatelnou funkci $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ($d \geq 2$) má odpovídající gradientové zobrazení Denjoy-Clarksonovu vlastnost, tj. zda pro každou otevřenou $G \subset \mathbb{R}^d$ je množina $(\nabla f)^{-1}(G)$ buď prázdná nebo má kladnou d-dimenzionální Lebesgueovu míru. Tento problém byl vyřešen negativně Z. Buczolichem ([1]), který zkonstruoval diferencovatelnou funkci $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takovou, že $(\nabla f)^{-1}(B(0,1))$ je neprázdná množina Lebesgueovy 2-dimenzionální míry nula. Další zesilující výsledky byly obdrženy v [5], [4] a [7].

A. Skálová ve své práci Buczolichův výsledek zobecňuje v následujícím smyslu. Pro každou množinu $F \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$) typu F_σ a každou omezenou otevřenou množinu $U \subset \mathbb{R}^d$ obsahující počátek konstruuje omezenou diferencovatelnou funkci $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ splňující

- $\nabla u(x) \in \overline{U}$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$,
- $\nabla u(x) \in U$ pro každé $x \in F$,
- $\nabla u(x) \in \partial U$ pro λ_d-skoro všechna $x \in \mathbb{R}^d \setminus F$.

Zvolíme-li $F = \{0\}$ a $U = B(0,1)$, dostaneme výše uvedený Buczolichův výsledek.

Konstrukce uvedené v [1, 5, 4, 7] jsou technicky náročné a využívají existence vítězné strategie v jisté geometrické hře pro dva hráče. Autorka použila modifikaci konstrukce uvedené v [4]. Tato modifikace je oproti původní konstrukci ještě nesnadnější, neboť je třeba brát do úvahy množinu F. Výsledek samotný je pěkným příspěvkem ke studiu gradientových zobrazení funkcí více proměnných. Zvládnutí technicky náročné konstrukce otevírá možnost pro další ještě přesnější výsledky o povaze vzorů otevřených množin při gradientovém zobrazení. Práci lze vytknout jisté formulační neobratnosti a zejména nedostatky v organizaci důkazu hlavního výsledku.

A. Skálová pracovala velmi samostatně a její práce splňuje podmínky kladené na diplomovou práci.

Reference

[1] Z. Buczolich, *Solution to the gradient problem of C. E. Weil*, Rev. Mat. Iberoamericana 21 (2005), no. 3, 889–910.
[2] J. A. Clarkson, *A property of derivatives*, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 124–125.
[3] A. Denjoy, *Sur une proprieté des fonctions dérivées*, Enseignement Math. 18 (1916), no. 3, 320–328.
[4] R. Deville, É. Matheron, *Infinite games, Banach space geometry and the Eikonal equation*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 95 (2007), no. 1, 49–68.
[5] J. Malý, M. Zelený, *A note on Buczolich's solution of the Weil gradient problem: a construction based on an infinite game*, Acta Math. Hungar. 113 (2006), no. 1-2, 145–158.
[6] C. E. Weil, *Query 1*, Real Anal. Exchange 16 (1990/91), 373.
[7] M. Zelený, *The Denjoy-Clarkson property with respect to Hausdorff measures for the gradient mapping of functions of several variables*, Ann. Inst. Fourier. 58 (2008), 405–428.

Doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.
vedoucí práce