

Posudek diplomové práce "Gradientové zobrazení funkcí více proměnných" studentky Aleny Skálové

Hlavním obsahem práce je důkaz věty, která říká, že pro neprázdную otevřenou omezenou množinu $U \subset \mathbb{R}^d$ a F_σ -množinu $F \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, existuje funkce $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, která je všude diferencovatelná, gradient $\nabla f(x)$ je prvkem uzávěru U pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$, $\nabla f(x) \in U$ pro $x \in F$ a $\nabla f(x) \in \partial U$ pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}^d \setminus F$.

Důkaz této věty je založen na metodě z článku [6], klíčové lemma vychází z práce [8]. Významným konstruktivním prvkem je Lemma 3 převzaté z článku [6].

Důkaz není mechanickým modifikováním uvedených zdrojů. Jeho hlavní myšlenky a ingredience jsou asi ty převzaté, ale přesto je dost technický a obtížný. V práci zabírá rozhodujících asi 10 stran.

Vůči prezentaci mám několik výhrad jednak k přesnosti vyjadřování, jednak ke strukturování a přehlednosti důkazu.

Celkově jde o pěknou práci, kterou doporučuji v případě přiměřené reakce na uvedené připomínky uznat jako diplomovou.

V Praze dne 22.5.2014.

Doc. RNDr. Petr Holický, CSc.

Připomínky k textu.

1. Poznámka 1, str. 12 ... proč se inkluze značí jiným symbolem?
2. Pojmy dělení a rozdělení. Považuji za nevhodné a zavádějící. Proč nemluvit o dělení, jak je zvykem a o dělení podmnožiny tam, kde se mluví o (krychlovém) dělení množiny?
3. Str. 12 ... $Q \neq Q'$ chybí v (ii).
4. Poznámka 2, str. 12 ... "cenou za tuto vlastnost je ..." - neobratná formulace?, uvedený požadavek není nutný.
5. Str. 13 ... Definice h a j užívá, že jde o maximum a minimum. Konstatovat dodatečně, že se extrémů nabývá je asi nadbytečné nebo opožděné.
6. Pojem "oscilace funkce ... definujeme pro každé ε " - buď ε do pojmu nebo je to funkce proměnné ε ?
7. Lemma 3 dává funkci nulovou i vně Q . Mohlo by být ve formulaci, zdá se, že se ale opravdu nepoužívá?
8. Co je $F \subset \mathbb{R}^d$ uzavřená v C^z ? Proč ne v Lemmatu jen pro $F \subset C^z$?
9. Lemma 6 ... μ na \mathbb{R}^d ; f_n z \mathbb{R}^d - co je definičním oborem?
10. $(d_D) u_n$ omezené a nenulové? (kvůli oscilaci $\text{osc}(\dots, \|u\|_\infty)$).
11. $u_n^z(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R}^d \setminus C^z$ na str. 19 srovnejte s $u_0(x) = c_0 \neq 0$ na \mathbb{R}^d na str. 20.
12. $(iii)_n$ by mělo formulovat podmínku jen pro $n > 0$. Podobně v některých dalších podmínkách. Věta o tom, že podmínky jsou "jako takové považovány za splněné" nepůsobí v důkazu dobře.
13. Str. 21₁₁ ... v případě hodnoty $\sigma_n(r_Q)$ nejde o označení, ale jde o zřejmé tvrzení užívající dříve zavedené značení.
14. Str. 21 ... domnívám se, že volba t dle Lemmatu 5 bude společná pro celý důkaz nezávisle na z . Bylo by přehlednější ji proto udělat dříve.
15. Logice označení bodů 1) Indukční krok a dalším moc nerozumím. V 1) je definice Q'_n podstatná pro velkou část další konstrukce, pak je tam podstatná část definice u_{n+1} , v_{n+1} a w_{n+1} , funkce s vlnovkou a c_n ? V 1a) jsou tyto funkce definovány. V 1b) jsou některé jejich vlastnosti dokazovány, ale zbytečně částečně i ty, které zatím nemají smysl. Např. u (viii) by mělo být dodáno, že bude platit, ať bude $k(n+1)$ definováno jakkoliv. Konstatování, že podmínku (vii) zatím nemůžeme ověřit, by bylo lepší nahradit vyjmenováním podmínek, které se v tomto odstavci skutečně dokazují. Podmínky (xv) a (xvi) by měly být ověřeny až po definici pojmu $k(n+1)$. Vhodnější by bylo nazvat další odstavec 1c) Definice Q_{n+1} , $k(n+1)$ (a potažmo Z_{n+1}) a ověřit tam či v další části podmínky, které se jich týkají. Navíc na str. 24 jsme (viii) _{$n+1$} neověřili, ale zadefinovali jsme $k(n+1)$ tak, aby podmínka platila.
15. Str. 24₁ ... ověříme též, že k je na.
16. Na konci 1. varianty by neškodilo připomenout, že $\varepsilon_{-1} = 1$ a na začátku druhé, že $k(n+1) = k(n) + 1$.
17. Str. 25₃ ... odkazy na to, odkud to plyne by pomohly.
18. Str. 26₆ ... neškodilo by připomenout, že jde o Q' ze (4.3)?
19. Str. 26¹⁰, 26₂ ... jde spíš o definici $k(n+1)$ a ne o ověření (xvi).
20. Str. 27² ... odkaz na odhady by neškodil.
21. Str. 28 ... odhad na λ_d by mohl být označen a bylo by možné se odvolat v odhadech o pár řádků níže.
22. Str. 29 ... Formulace "můžeme uzavřít, že funkce u splňuje" mi nezní libě. Např. vyvodit, usoudit ap. by mi znělo lépe.