Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Barbora Zavadilová

Logaritmicko-konkávní rozdělení pravděpodobnosti a jejich aplikace

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce:	prof. RNDr. Jitka Dupačová, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Praha 2014

Na tomto místě bych ráda poděkovala prof. RNDr. Jitce Dupačové, DrSc. za laskavou pomoc, ochotu a čas, který mi při vypracování této diplomové práce věnovala.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 10. dubna 2014 Barbora Zavadilová

Název práce: Logaritmicko-konkávní rozdělení pravděpodobnosti a jejich aplikace

Autor: Barbora Zavadilová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Jitka Dupačová, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V předložené práci studujeme vlastnosti log-konkávních pravděpodobnostních rozdělení. Shrneme základní definice a věty v jedno- i vícerozměrném případě a aplikujeme je na příklady konkrétních rozdělení. Mezi log-konkávní rozdělení patří řada známých a hojně používaných rozdělení, například normální, exponenciální, pro určité hodnoty parametrů také Gamma, Beta a spousta dalších.

Log-konkávní rozdělení mají řadu aplikací v ekonomii, teorii spolehlivosti, stochastickém programování či optimalizaci. Zaměříme se na neparametrický odhad log-konkávní hustoty metodou maximální věrohodnosti s využitím softwaru `R`.

Klíčová slova: log-konkávní rozdělení, teorie spolehlivosti, maximálně věrohodný odhad log-konkávní hustoty

Title: Logarithmic-concave probability distributions and their applications

Author: Barbora Zavadilová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Jitka Dupačová, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In present work we study properties of log-concave probability distributions. We summarize basic definitions and theorems in one and also multidimensional space and apply them to the specific distributions. The class of log-concave densities includes most of well-known and frequently used probability distributions, examples include normal, exponential, for certain values of parameters also Gamma, Beta and many others.

The assumption about the log-concavity of a probability distribution appears in various applications, e.g. in econometrics, reliability theory, stochastic programming or optimization. We are interested in the nonparametric maximum likelihood estimation of log-concave probability densities using the software `R`.

Keywords: log-concave distributions, reliability theory, maximum likelihood estimation of log-concave density

Obsah

Úvod

Cílem práce je shrnout teorii log-konkávních pravděpodobnostních rozdělení a seznámit se s jejich aplikacemi. Práce je rozdělena do tří kapitol.

V první kapitole práce jsou vyloženy základy teorie log-konkávních rozdělení v jednorozměrném případě. Začneme vztahem monotónnosti a log-konkávnosti. Podkapitola 1.2 je věnována teorii spolehlivosti. Zde se zaměříme na spolehlivostní funkce, intenzitu poruch a očekávanou dobu do poruchy stroje. Mezi log-konkávní rozdělení patří řada známých a hojně používaných rozdělení, například normální, exponenciální, pro určité hodnoty parametrů také Gamma, Beta a spousta dalších. V sekci 1.4 na několika konkrétních příkladech podrobně ilustrujeme teorii první kapitoly. Vlastnosti uvedených funkcí přiblížíme obrázky. Jsou zde uvedeny tabulky, které přehledně shrnují log-konkávní rozdělení (viz Tabulka 1.1), rozdělení, které nemají log-konkávní hustotu (viz Tabulka 1.2) a jejich vlastnosti (Tabulka 1.3). V části 1.5 uvedeme pár poznámek o diskrétních rozděleních, binomické, či Poissonovo rozdělení jsou také log-konkávní.

Cílem kapitoly druhé je seznámení s log-konkávními funkcemi ve vícerozměrném prostoru. Zajímavou vlastností, která je odvozena v Důsledku 2.1.5, je, že součet dvou nezávislých náhodných vektorů s log-konkávním rozdělením je náhodný vektor, který má opět log-konkávní rozdělení. Část 2.2 je věnována několika konkrétním příkladům rozdělení. Dále v podkapitole 2.3 dokážeme zajímavé nerovnosti, pomocí kterých dojdeme k závěru, že všechny log-konkávní funkce jsou nutně subexponenciální a unimodální.

Log-konkávní rozdělení mají řadu aplikací v ekonomii, teorii spolehlivosti a teorii her. My se ve třetí kapitole zaměříme na aplikaci ve stochastickém programování (podkapitola 3.1), dále v části 3.2 budeme hledat neparametrický odhad log-konkávní hustoty metodou maximální věrohodnosti v jedno- i vícerozměrném případě. Log-konkávní funkce jsou podtřídou unimodálních funkcí. Pro unimodální hustoty s neznámým modem odhad metodou maximální věrohodnosti neexistuje, ale pro funkci log-konkávní odhad existuje a je určen jednoznačně. Toto tvrzení je pro jednorozměrné hustoty dokázáno ve Větě 3.2.8, pro vícerozměrná rozdělení uvedeme tuto vlastnost bez důkazu ve Větě 3.2.13. S použitím softwaru `R` odhady ilustrujeme několika obrázky a ukážeme srovnání s jádrovým odhadem.

Výklad v první kapitole je založen především na práci [1]. Mnohorozměrný případ v kapitole druhé vychází z knihy [12], část týkající se nerovností je inspirována článkem [13]. Aplikace log-konkávních rozdělení ve stochastickém programování je zpracována podle [4]. Maximálně věrohodný odhad jednorozměrné log-konkávní hustoty je odvozen z prací [11], [6] a [5], odhad vícerozměrné hustoty je inspirován [2].

K výpočtům a generování obrázků používáme statistický software `R`. Zdrojový kód je součástí Přílohy A.

Seznam použitých symbolů

$\mathrm{Dom}(\cdot)$	definiční obor funkce
f	hustota rozdělení
F	distribuční funkce
F^*	zrcadlová distribuční funkce
$\bar{F}$	spolehlivostní funkce
r	intenzita poruch (hazardní funkce)
MRL	střední zbytkový čas
P	pravděpodobnostní míra na $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{P}_n$	množina všech rozdělení na $\mathbb{R}^n$, která mají log-konkávní hustotu
$\mathbb{F}_n$	empirická distribuční funkce náhodného výběru $X_1, \ldots, X_n$
L_n	logaritmická věrohodnost
Ψ_n	modifikovaná logaritmická věrohodnost
$\hat{f}_n$	maximálně věrohodný odhad hustoty f
$\|\cdot\|$	Euklidovská norma vektoru
$\lvert \cdot \rvert$	Lebesgueova míra množiny
$\mathrm{conv}(\cdot)$	konvexní obal množiny

1. Jednorozměrný případ

V první kapitole se budeme věnovat vlastnostem log-konkávních funkcí v jednorozměrném případě, budeme vycházet z práce [1]. V celém textu budeme předpokládat existenci všech potřebných derivací. Začněme definicí:

Definice 1.0.1. *Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je log-konkávní (nebo také logaritmicko-konkávní), jestliže $f(x) \geq 0$ a pro všechna $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$, $0 < \lambda < 1$ platí*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^{\lambda} f(y)^{(1-\lambda)}. \tag{1.1}$$

Řekneme, že f je log-konvexní (logaritmicko-konvexní), jestliže v (1.1) platí obrácená nerovnost.

Jestliže $f(x) > 0$ pro všechna $x \in \mathrm{Dom}(f)$, pak f je log-konkávní, pokud $\log f$ je konkávní funkce a log-konvexní, pokud $\log f$ je konvexní. Tedy f je log-konkávní právě tehdy, když $\frac{1}{f}$ je log-konvexní. Jestliže připustíme nulovou hodnotu funkce f a v takovém případě položíme $\log f(x) = -\infty$, můžeme říkat, že f je log-konkávní, jestliže rozšířená funkce $\log f$ je konkávní.

Všimněme si, že nerovnost (1.1) pro log-konkávní funkci říká, že hodnota funkce v bodě, který je aritmetickým průměrem dvou hodnot, je větší nebo rovna geometrickému průměru funkčních hodnot v těchto bodech.

Každou log-konvexní funkci f můžeme zapsat ve tvaru $f = \mathrm{e}^g$, kde $g = \log f$ je konvexní. Pro každou konvexní funkci g je e^g také konvexní, proto každá log-konvexní funkce je také konvexní. Podobně platí, že každá nezáporná log-konkávní funkce je konkávní.

Poznamenejme ještě, že spojitá náhodná veličina má log-konkávní rozdělení jestliže její hustota je log-konkávní.

1.1 Log-konkávní hustota a distribuční funkce

Budeme zkoumat log-konkávnost a log-konvexitu jednorozměrné hustoty, distribuční funkce a jejich integrálů. Nejprve uvedeme několik poznámek a lemmat, které dále využijeme v důkazech důležitých tvrzení.

Poznámka 1.1.1. Spojitě diferencovatelná funkce f je log-konkávní na (a, b) právě tehdy, když pro všechna $x \in (a, b)$ je

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \tag{1.2}$$

nerostoucí funkce. Na intervalu (a, b) je f log-konvexní právě tehdy, když (1.2) je neklesající pro všechna $x \in (a, b)$.

Důkaz. $\ln f(x)$ je konkávní právě tehdy, když

$$(\ln f(x))'' = \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' \leq 0.$$

□

Poznámka 1.1.2. $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ je log-konkávní (log-konvexní) na (a,b) právě tehdy, když pro všechna $x \in (a,b)$ je $f'(x)F(x) - f(x)^2$ nekladná (nezáporná) funkce.

Důkaz. Funkce $\ln F(x)$ je konkávní právě tehdy, když

$$(\ln F(x))'' = \left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)' = \frac{f'(x)F(x) - f(x)^2}{F(x)^2} \leq 0.$$

□

Lemma 1.1.3. *Nechť f je spojitě diferencovatelná funkce na (a,b), položme $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ pro všechna $x \in (a,b)$. Označme $f(a) = \lim_{x\to a+} f(x)$, potom platí:*

(i) Jestliže $f(x)$ je log-konkávní na (a,b), potom $F(x)$ je také log-konkávní na (a,b).

(ii) Jestliže $F(x)$ je log-konvexní na (a,b) a $f(a) = 0$, potom $F(x)$ je také log-konvexní na (a,b).

Důkaz. (i) Jestliže f je log-konkávní, potom pro všechna $x \in (a,b)$ platí

$$\frac{f'(x)}{f(x)}F(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)}f(t)dt = \int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a),$$

nerovnost plyne z toho, že $\frac{f'(x)}{f(x)}$ je nerostoucí podle Poznámky 1.1.1. Protože f je nezáporná, je $f(a) \geq 0$, a tedy

$$\frac{f'(x)}{f(x)}F(x) \leq f(x) - f(a) \leq f(x).$$

Z nerovnosti $f'(x)F(x) - f(x)^2 \leq 0$ plyne log-konkávnost funkce F podle Poznámky 1.1.2.
(ii) Podobnou úvahou za předpokladu, že f je log-konvexní a $f(a) = 0$, dostaneme

$$\frac{f'(x)}{f(x)}F(x) \geq f(x) - f(a) = f(x),$$

odkud plyne, že $f'(x)F(x) - f(x)^2 \geq 0$, podle Poznámky 1.1.2 je F log-konvexní.

□

Ověřit log-konkávnost funkce můžeme i tehdy, když nevíme jak vypadá její logaritmus. Mnoho běžných rozdělení nemá uzavřený tvar pro distribuční funkci, ale jejich hustota má jednoduchý předpis. Jedním z triků, jak rozeznat log-konkávnost, je, že rozdělení s log-konkávní hustotu má log-konkávní i distribuční funkci. Navíc log-konkávnost distribuční funkce je postačující podmínkou pro log-konkávnost jejího integrálu.

Distribuční funkci normálního rozdělení nelze vyjádřit elementárními funkcemi a přímé ověření log-konkávnosti je obtížné. Ale hustota normálního rozdělení je log-konkávní, protože její logaritmus je kvadratická funkce.

Tvrzení, že integrál z log-konkávní funkce je log-konkávní uvedeme v části 2.1. Zatím si vystačíme s případem jednorozměrné diferencovatelné hustoty.

Věta 1.1.4. *Nechť f je hustota na (a, b) a F je odpovídající distribuční funkce. Potom platí:*

(i) Jestliže f je spojitě diferencovatelná a log-konkávní na (a, b), potom F je také log-konkávní na (a, b).

(ii) Jestliže F je log-konkávní na (a, b), potom $G(x) = \int_a^x F(t)dt$ je také log-konkávní funkce na (a, b).

Důkaz. Tvrzení (i) je speciálním případem Lemmatu 1.1.3 (i). Protože F je distribuční funkce rozdělení s hustotou f, je absolutně spojitá (tedy i spojitá) a diferencovatelná ($F' = f$). Tvrzení (ii) opět plyne z Lemmatu 1.1.3 (i). □

Důsledek 1.1.5. *Jestliže hustota f je klesající, potom distribuční funkce F i její integrál G je log-konkávní.*

Důkaz. F je distribuční funkce, je tedy rostoucí. Jestliže f je klesající, potom $\frac{f(x)}{F(x)}$ je klesající. Protože

$$\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)' = (\ln F(x))'' \leq 0,$$

je F log-konkávní. G je log-konkávní podle Věty 1.1.4. □

Distribuční funkce může být log-konvexní či log-konkávní, přestože hustota příslušného rozdělení tuto vlastnost nemá.

V Tabulce 1.3 jsou uvedeny příklady rozdělení s log-konvexní hustotou a log-konkávní distribuční funkcí. Množinu všech rozdělení s log-konvexní hustotou, které mají log-konvexní i distribuční funkci, rozeznáme snadno:

Věta 1.1.6. *Nechť f je hustota na (a, b) a F je odpovídající distribuční funkce. Potom platí:*

(i) Jestliže f je spojitě diferencovatelná a log-konvexní na (a, b) a $f(a) = 0$, potom F je také log-konvexní na (a, b).

(ii) Jestliže F je log-konvexní na (a, b), potom $G(x) = \int_a^x F(t)dt$ je také log-konvexní na (a, b).

Důkaz. Tvrzení (i) plyne ihned z Lemmatu 1.1.3 (ii). Protože F je distribuční funkce rozdělení s hustotou f, je tedy spojitá, diferencovatelná a platí

$$\lim_{x \to a+} F(x) = 0.$$

Tvrzení (ii) splňuje předpoklady Lemmatu 1.1.3 (ii), proto je funkce G log-konvexní. □

1.2 Teorie spolehlivosti

Log-konkávní funkce mají řadu aplikací v teorii spolehlivosti, která se zabývá životností a poruchovostí nějakého stroje či organismu.

Nechť a je čas uvedení stroje do provozu a b je okamžik, o kterém buď víme, že se ho stroj „nedožije", anebo ve kterém stroj bude vyřazen z provozu (například již bude zastaralý). Předpokládejme, že se stroj porouchá v nějakém časovém okamžiku během intervalu (a, b). Hustota poruch $f(x)$ je definována jako pravděpodobnost, že se stroj v čase x porouchá. Pravděpodobnost, že porucha nastane dříve než v čase x, je dána distribuční funkcí

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in (a, b).$$

Definice 1.2.1. *Spolehlivostní funkce je definována jako*

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x), \quad x \in (a, b)$$

a udává pravděpodobnost, že v intervalu (a, x) nedojde k poruše.

Integrál ze spolehlivostní funkce budeme značit jako $H(x) = \int_x^b \bar{F}(t)dt$.

Definice 1.2.2. *Poměr hustoty poruch a příslušné spolehlivosti*

$$r(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}$$

se nazývá intenzita poruch nebo také hazardní funkce.

Intenzita poruch udává pravděpodobnost, že stroj, který přežil do času x, se porouchá právě v tomto okamžiku.

Poznámka 1.2.3. Spolehlivostní funkce

$$\bar{F}(x) = \int_x^b f(t)dt$$

je log-konkávní (log-konvexní) na intervalu (a, b) právě tehdy, když pro všechna $x \in (a, b)$ je

$$f'(x)\bar{F}(x) + f(x)^2$$

nezáporná (nekladná) funkce.

Důkaz. Protože $\bar{F}'(x) = -f(x)$, kde f je hustota, je tedy diferencovatelná. Podobně jako v Poznámce 1.1.2 je funkce $\ln \bar{F}(x)$ je konkávní právě tehdy, když

$$(\ln \bar{F}(x))'' = \left(\frac{-f(x)}{\bar{F}(x)}\right)' = -\frac{f'(x)\bar{F}(x) + f(x)^2}{\bar{F}(x)^2} \leq 0.$$

□

Lemma 1.2.4. *Nechť f je spojitě diferencovatelná funkce na (a,b), položme $\bar{F}(x) = \int_x^b f(t)dt$ pro všechna $x \in (a,b)$. Označme $f(b) = \lim_{x \to b-} f(x)$, potom platí:*

(i) Jestliže $f(x)$ je log-konkávní na (a,b), potom $\bar{F}(x)$ je také log-konkávní na (a,b).

(ii) Jestliže $F(x)$ je log-konvexní na (a,b) a $f(b) = 0$, potom $\bar{F}(x)$ je také log-konvexní na (a,b).

Důkaz. (i) Jestliže f je log-konkávní, potom pro všechna $x \in (a,b)$ platí

$$\frac{f'(x)}{f(x)}\bar{F}(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \int_x^b f(t)dt \geq \int_x^b \frac{f'(t)}{f(t)} f(t)dt = \int_x^b f'(t)dt = f(b) - f(x),$$

nerovnost plyne z toho, že $\frac{f'(x)}{f(x)}$ je nerostoucí podle Poznámky 1.1.1. Protože f je nezáporná, je $f(b) \geq 0$, a tedy

$$\frac{f'(x)}{f(x)}\bar{F}(x) \geq f(b) - f(x) \geq -f(x).$$

Z nerovnosti $f'(x)F(x)+f(x)^2 \geq 0$ plyne log-konkávnost $\bar{F}$ podle Poznámky 1.1.2.
(ii) Podobnou úvahou za předpokladu, že f je log-konvexní a $f(b) = 0$, dostaneme

$$\frac{f'(x)}{f(x)}\bar{F}(x) \leq f(b) - f(x) = -f(x),$$

odkud plyne, že $f'(x)\bar{F}(x) + f(x)^2 \leq 0$, podle Poznámky 1.1.2 je F log-konvexní. □

Věta 1.2.5. *Nechť f je hustota na intervalu (a,b) a $\bar{F}$ je odpovídající spolehlivostní funkce. Potom platí:*

(i) Jestliže f je spojitě diferencovatelná a log-konkávní na (a,b), potom $\bar{F}$ je také log-konkávní na (a,b).

(ii) Jestliže $\bar{F}$ je log-konkávní na (a,b), potom $H(x) = \int_x^b \bar{F}(t)dt$ je také log-konkávní na (a,b).

Důkaz. Tvrzení (i) plyne ihned z Lemmatu 1.2.4 (i). Spolehlivostní funkce $\bar{F}$ je spojitá (neboť F je absolutně spojitá), je diferencovatelná ($\bar{F}' = -f$). Podle Lemma 1.2.4 (i) je funkce H v části (ii) log-konkávní. □

Důsledek 1.2.6. *Jestliže hustota f je log-konkávní na (a,b), potom intenzita poruch r je rostoucí na (a,b).*

Důkaz. Platí

$$r(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = -\frac{\bar{F}'(x)}{\bar{F}(x)}.$$

Z Věty 1.2.5 plyne, že pokud f je log-konkávní, potom také $\bar{F}$ je log-konkávní. Tudíž

$$(\ln \bar{F}(x))' = \frac{\bar{F}'(x)}{\bar{F}(x)} = -r(x)$$

je klesající v x, proto r je rostoucí v x. □

Poznámka 1.2.7. Obrácené tvrzení Důsledku 1.2.6 neplatí. Existuje rozdělení s rostoucí intenzitou poruch, jehož hustota není log-konkávní. Takovým rozdělením je například zrcadlové Paretovo, ke kterému se dostaneme v příkladu 1.4.4.

Důsledek 1.2.8. *Jestliže hustota f je rostoucí, potom spolehlivostní funkce $\bar{F}$ je log-konkávní a intenzita poruch r rostoucí.*

Důkaz. Protože $\bar{F}$ je spolehlivostní funkce, podle definice musí být klesající. Jestliže f je rostoucí, intenzita poruch $\frac{f}{\bar{F}}$ musí být také rostoucí. Ale rostoucí intenzita poruch je ekvivalentní s log-konkávností spolehlivostní funkce. □

Věta 1.2.9. *Nechť f je hustota na intervalu (a,b) a $\bar{F}$ odpovídající spolehlivostní funkce. Potom platí:*

(i) Jestliže f je spojitě diferencovatelná a log-konvexní na (a,b) a $f(b)=0$, potom $\bar{F}$ je také log-konvexní na (a,b).

(ii) Jestliže $\bar{F}$ je log-konvexní na (a,b), potom $H(x)=\int_x^b \bar{F}(t)dt$ je také log-konvexní na (a,b).

Důkaz. Tvrzení (i) plyne ihned z Lemmatu 1.2.4 (ii). Protože $\bar{F}$ je spolehlivostní funkce rozdělení s hustotou f, je tedy spojitá, diferencovatelná a navíc platí

$$\lim_{x\to b-} \bar{F}(x) = 1 - \lim_{x\to b-} F(x) = 0.$$

Tvrzení (ii) splňuje předpoklady Lemma 1.2.4 (ii), proto je funkce H log-konvexní. □

Definice 1.2.10. *Nechť f je hustota poruch definovaná na (a,b) a $\bar{F}$ je odpovídající spolehlivostní funkce, potom $\frac{f(t)}{\bar{F}(x)}$ je hustota podmíněné pravděpodobnosti, že stroj v čase x přežije do času $t>x$. Funkce definovaná předpisem*

$$MRL(x) = \int_x^b t\frac{f(t)}{\bar{F}(x)}dt - x$$

udává očekávanou dobu do poruchy stroje, který je nyní ve věku x, a nazývá se střední zbytkový čas.

Jestliže střední zbytkový čas MRL je klesající funkce, znamená to, že se očekávaná zbývající životnost stroje snižuje, když stroj stárne.

Jedním z důvodů, proč se zajímáme o log-konkávnost integrálu ze spolehlivostní funkce $H(x)$, je ten, že tato vlastnost je ekvivalentní s monotónností $MRL(x)$.

Lemma 1.2.11. *MRL je klesající právě tehdy, když H je log-konkávní.*

Důkaz. Všimněme si, že $f(t) = -\bar{F}(t)$. Integrací per partes dostaneme

$$MRL(x) = \frac{-\int_x^b \bar{F}(t)dt}{\bar{F}(x)} = -\frac{H(x)}{H'(x)}.$$

Odtud vidíme, že $MRL(x)$ je rostoucí právě tehdy, když $\frac{H'(x)}{H(x)}$ je klesající, tedy $H(x)$ log-konkávní podle Poznámky 1.1.1. □

Věta 1.2.12. *Jestliže hustota $f(x)$ anebo spolehlivostní funkce $\bar{F}(x)$ je log-konkávní, potom $MRL(x)$ je klesající.*

Důkaz. Z Věty 1.2.5 (ii) plyne, že log-konkávnost $\bar{F}$ implikuje log-konkávnost H, potom je podle Lemmatu 1.2.11 funkce MRL rostoucí. Z Věty 1.2.5 (i) také plyne, že log-konkávnost hustoty f implikuje log-konkávnost spolehlivostní funkce $\bar{F}$, tím je tvrzení dokázáno. □

Spolehlivostní funkce $\bar{F}$ je log-konkávní právě tehdy, když intenzita poruch r je neklesající. Musí tedy platit:

Důsledek 1.2.13. *Jestliže je intenzita poruch r rostoucí, potom střední zbytkový čas MRL je klesající.*

1.3 Transformace, krácení a zrcadlový obraz

Některá pravděpodobnostní rozdělení vycházejí z jednoduššího rozdělení aplikací na transformovanou proměnnou. Například lognormální rozdělení je definováno na $(0, +\infty)$ a distribuční funkce je $F(x) = \Phi(\ln x)$, kde Φ je distribuční funkce normálního rozdělení. Normální rozdělení má log-konkávní distribuční funkci a funkce $\ln(x)$ je konkávní rostoucí, proto distribuční funkce lognormálního rozdělení je log-konkávní, avšak hustota lognormálního rozdělení log-konkávní není. K lognormálnímu rozdělení se ještě vrátíme v části 3.1.

Věta 1.3.1. *Nechť F je funkce definovaná na (a, b) a t je monotónní funkce z (a', b') do $(a, b) = (t(a'), t(b'))$. Definujme funkci $\hat{F}$ předpisem*

$$\hat{F}(x) = F(t(x)), \quad x \in (a', b').$$

(i) Jestliže F je rostoucí log-konkávní a t je konkávní funkce, potom $\hat{F}$ je log-konkávní.

(ii) Jestliže F je klesající log-konvexní a t je konvexní funkce, potom $\hat{F}$ je log-konvexní.

Důkaz. (i) Protože t je konkávní, platí pro všechna $x, y \in (a', b')$, $\lambda \in (0, 1)$

$$t(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda t(x) + (1 - \lambda)t(y).$$

F je rostoucí, proto pro všechna $x, y \in (a', b')$, $\lambda \in (0, 1)$ musí platit

$$F(t(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \geq F(\lambda t(x) + (1 - \lambda)t(y)) \geq F(t(x))^{\lambda} F(t(y))^{(1-\lambda)},$$

druhá nerovnost plyne z toho, že F je log-konkávní. Podle Definice 1.0.1 je funkce $\hat{F} = F(t(x))$ log-konkávní.
(ii) Podobně jako v (i) dostaneme pro všechna $x, y \in (a', b')$, $\lambda \in (0, 1)$

$$F(t(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq F(\lambda t(x) + (1 - \lambda)t(y)) \leq F(t(x))^{\lambda} F(t(y))^{(1-\lambda)}.$$

První nerovnost plyne z toho, že t je konvexní a F rostoucí, druhá nerovnost plyne z log-konkávnosti F. Podle definice je $\hat{F} = F(t(x))$ log-konvexní funkce. □

Důsledek 1.3.2. *Nechť t je lineární transformace z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ a F je funkce na $(t(a), t(b))$. Definujme funkci $\hat{F}$ na (a, b) předpisem $\hat{F}(x) = F(t(x))$.*

(i) Jestliže F je log-konkávní, potom $\hat{F}$ je log-konkávní.

(ii) Jestliže F je log-konvexní, potom $\hat{F}$ je log-konvexní.

Důkaz. t je lineární transformace, můžeme ji zapsat jako

$$t(x) = ax + b, \quad \text{kde } a, b \in \mathbb{R}.$$

Potom pro všechna $x \in (a, b)$ platí

$$(\ln \hat{F}(x))'' = a^2 (\ln F(ax + b))''.$$

□

Máme distribuční funkci F libovolného rozdělení na intervalu (a, b). Tuto distribuční funkci můžeme použít ke konstrukci distribuční funkce F^* jiného rozdělení na intervalu $(-b, -a)$. Položme

$$F^*(x) = \bar{F}(-x) = 1 - F(-x).$$

Funkci F^* nazveme zrcadlovým obrazem F, neboť grafy jejich hustot jsou symetrické kolem přímky $x = 0$.

Věta 1.3.3. *Nechť F a F^* jsou zrcadlové distribuční funkce. Příslušné hustoty označme f a f^*.*

(i) Jestliže hustota f je log-konkávní (nebo log-konvexní), pak je log-konkávní (log-konvexní) i hustota f^* a naopak.

(ii) Distribuční funkce F je log-konkávní právě tehdy, když je spolehlivostní funkce $\bar{F}^*$ log-konkávní, a naopak.

Důkaz. (i) Protože

$$F^*(x) = 1 - F(-x) = \bar{F}(-x), \tag{1.3}$$

musí platit $F^{*\prime}(x) = F'(x)$. Pro hustoty platí $f^*(x) = f(-x)$ pro všechna x. Funkce f^* vznikne z f lineární transformací, proto závěr plyne z Důsledku 1.3.2. (ii) Z (1.3) a Důsledku 1.3.2 také plyne, že F^* je log-konkávní (log-konvexní) právě tehdy, když $\bar{F}$ je log-konkávní (log-konvexní).

□

Jestliže rozdělení má hustotu symetrickou kolem nuly, je distribuční funkce sama svým zrcadlovým obrazem.

Důsledek 1.3.4. *Jestliže rozdělení má hustotu symetrickou kolem bodu 0, pak distribuční funkce je log-konkávní (log-konvexní) právě tehdy, když spolehlivostní funkce je log-konkávní (log-konvexní).*

Pomocí libovolné distribuční funkce F na intervalu (a, b) lze také zkonstruovat novou distribuční funkci zkrácením na podinterval (a^*, b^*) intervalu (a, b) tak, že relativní vzdálenost dvou bodů zůstane nezměněna. Nechť F je původní distribuční funkce a F^* je zkrácená distribuční funkce, potom

$$F^*(x) = \frac{F(x) - F(a^*)}{F(b^*) - F(a^*)}.$$

Distribuční funkce F^* je tedy lineární transformací funkce F. Odpovídající hustoty jsou také lineární transformací jedna druhé a z Důsledku 1.3.2 dostaneme následující tvrzení:

Věta 1.3.5. *Jestliže rozdělení má log-konkávní (log-konvexní) hustotu (příp. distribuční funkci), potom jakékoli zkrácení tohoto rozdělení má také log-konkávní (log-konvexní) hustotu (příp. distribuční funkci).*

1.4 Příklady rozdělení

Jestliže hustota rozdělení f je log-konkávní, potom z Věty 1.1.4 víme, že distribuční funkce F i její integrál G jsou také log-konkávní. Z Věty 1.2.5 a jejího důsledku plyne, že spolehlivostní funkce $\bar{F}$ i její integrál H jsou log-konkávní a intenzita poruch r je rostoucí. Z Věty 1.2.12 víme, že MRL je klesající.

V Tabulce 1.1 jsou uvedeny příklady spojitých jednorozměrných rozdělení s log-konkávní hustotou.

Jestliže hustota rozdělení f není log-konkávní, rozhodnout o vlastnostech funkcí F, $\bar{F}$ a MRL není vůbec jednoznačné, jak vidíme v Tabulce 1.3. Příklady rozdělení, jejichž hustota není log-konkávní, jsou uvedeny v Tabulce 1.2.

Na několika rozděleních si ukážeme aplikaci výše dokázaných tvrzení.

1.4.1 Mocninné rozdělení

Mocninné rozdělení je definováno na intervalu $(0, 1]$, hustota je rovna

$$f(x) = cx^{c-1}$$

a distribuční funkce $F(x) = x^c$. Protože

$$(\ln f(x))'' = \frac{1-c}{x^2},$$

vidíme, že f je striktně log-konkávní pro $c > 1$, striktně log-konvexní pro $0 < c < 1$ a log-lineární (tj. log-konkávní i log-konvexní) pro $c = 1$.

Pro $0 < c < 1$ je $f(0) = \infty$ a $f(1) = c$, proto k rozhodnutí, zda F a $\bar{F}$ je log-konvexní, nemůžeme použít Větu 1.1.6 ani Větu 1.2.9. V tomto případě log-konkávnost F můžeme ověřit přímo

$$(\ln F(x))'' = -\frac{c}{x} < 0.$$

Rozdělení	Nosič rozdělení	Hustota $f(x)$	Distribuční funkce $F(x)$	$(\ln f(x))''$
Rovnoměrné	[0,1]	1	x	0
Normální	$(-\infty, \infty)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$	*	-1
Exponenciální	$(0, \infty)$	$\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$	$1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$	0
Logistické	$(-\infty, \infty)$	$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$	$\frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$	$-2f(x)$
Extrémních hodnot	$(-\infty, \infty)$	$\mathrm{e}^{-x}\exp\{-\mathrm{e}^{-x}\}$	$\exp\{-\mathrm{e}^{-x}\}$	$-\mathrm{e}^{-x}$
Laplaceovo	$(-\infty, \infty)$	$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lvert x\rvert}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x)(1-\mathrm{e})^{-\lvert x\rvert}$	0 pro $x \neq 0$
Mocninné ($c \geq 1$)	$(0, 1]$	cx^{c-1}	x^c	$\frac{1-c}{x^2}$
Weibullovo ($c \geq 1$)	$[0, \infty)$	$cx^{c-1}\mathrm{e}^{-x^c}$	$1 - \mathrm{e}^{-x^c}$	$\frac{1-c}{x^2}(1+cx^c)$
Gamma ($c \geq 1$)	$[0, \infty)$	$\frac{x^{c-1}\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(c)}$	*	$\frac{1-c}{x^2}$
χ^2 ($c \geq 2$)	$[0, \infty)$	$\frac{x^{(c-2)/2}\mathrm{e}^{-x/2}}{2^{c/2}\Gamma(c/2)}$	*	$\frac{2-c}{2x^2}$
χ ($c \geq 1$)	$[0, \infty)$	$\frac{x^{c-1}\mathrm{e}^{-x^2/2}}{2^{(c-2)/2}\Gamma(c/2)}$	*	$\frac{1-c}{x^2} - 1$
Beta ($\nu \geq 1$ & $\omega \geq 1$)	$[0, 1]$	$\frac{x^{\nu-1}(1-x)^{\omega-1}}{\mathrm{B}(\nu,\omega)}$	*	$\frac{1-\nu}{x^2} + \frac{1-\omega}{(1-x)^2}$
Maxwellovo	Jedná se o χ rozdělení pro c=3.			
Rayleighovo	Jedná se o χ rozdělení pro c=2.			

Tabulka 1.1: Rozdělení s log-konkávní hustotou, tabulka převzata z [1]
$*$ znamená, že distribuční funkci nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí

Rozdělení	Nosič rozdělení	Hustota $f(x)$	Distribuční funkce $F(x)$	$(\ln f(x))''$
Mocninné $(0 < c < 1)$	$(0,1]$	cx^{c-1}	x^c	$\frac{1-c}{x^2}$
Weibullovo $(0 < c < 1)$	$(0,\infty)$	$cx^{c-1}\mathrm{e}^{-x^c}$	$1-\mathrm{e}^{-x^c}$	$\frac{1-c}{x^2}(1+cx^c)$
Gamma $(0 < c < 1)$	$(0,\infty)$	$\frac{x^{c-1}\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(c)}$	*	$\frac{1-c}{x^2}$
Beta $(\nu < 1 \vee \omega < 1)$	$[0,1]$	$\frac{x^{\nu-1}(1-x)^{\omega-1}}{\mathrm{B}(\nu,\omega)}$	*	$\frac{1-\nu}{x^2}+\frac{1-\omega}{(1-x)^2}$
Arcsin	$[0,1]$	$\frac{1}{\pi\sqrt{x(x-1)}}$	$\frac{2}{\pi}\arcsin(x)$	$\frac{1-2x}{2x^2(1-x^2)}$
Paretovo	$[1,\infty)$	$\beta x^{-\beta-1}$	$1-x^{-\beta}$	$(\frac{\beta+1}{x})^2$
Logaritmicko normální	$(0,\infty)$	$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(\ln x)^2/2}$	*	$\frac{\ln x}{x^2}$
Studentovo t	$(-\infty,\infty)$	$\frac{(1+\frac{x^2}{n})^{-(n+1)/2}}{\sqrt{n}\mathrm{B}(1/2,n/2)}$	*	$(1-n)\frac{n-x^2}{(n+x^2)^2}$
Cauchyho	$(-\infty,\infty)$	$\frac{1}{\pi(1+x^2)}$	$\frac{1}{2}+\frac{\arctan(x)}{\pi}$	$2\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$
Zrcadlové Paretovo	$(-\infty,-1)$	$\beta x^{-\beta-1}$	$(-x)^{\beta}$	$(\frac{\beta+1}{x})^2$

Tabulka 1.2: Rozdělení, která nemají log-konkávní hustotu, tabulka převzata z [1]
$*$ znamená, že distribuční funkci nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí

Rozdělení	f(x)	F(x)	r(x)	MRL(x)
Mocninné $(0 < c < 1)$	log-konvexní	log-konkávní	-	nemonotónní
Weibullovo $(0 < c < 1)$	log-konvexní	log-konkávní	log-konvexní	klesající
Gamma $(0 < c < 1)$	log-konvexní	log-konkávní	log-konvexní	rostoucí
Arcsin	log-konvexní	-	-	nemonotónní
Paretovo	log-konvexní	log-konkávní	log-konvexní	rostoucí
Logaritmicko normální	-	log-konkávní	-	nemonotónní
Studentovo t	-	-	-	nemonotónní
Cauchyho	-	-	-	nemonotónní
Zrcadlové Paretovo	log-konvexní	log-konvexní	log-konkávní	klesající

Tabulka 1.3: Vlastnosti rozdělení, která nemají log-konkávní hustotu, tabulka převzata z [1] – znamená, že funkce není ani log-konkávní ani log-konvexní

Platí $\bar{F} = 1 - x^c$ a spočteme, že

$$(\ln \bar{F}(x))'' = \frac{cx^{c-2}(1 - c - x^c)}{(1 - x^c)^2}.$$

Výraz $(\ln \bar{F}(x))''$ je záporný pro x blízko 1 a kladný pro x blízké 0, proto $\bar{F}$ není ani log-konkávní ani log-konvexní.
Integrál ze spolehlivostní funkce

$$H(x) = \frac{c + x^{c+1}}{1 + c} - x$$

také není ani log-konkávní ani log-konvexní. Proto také MRL není klesající ani rostoucí.

1.4.2 Gamma rozdělení

Gamma rozdělení je definováno na intervalu $(0, \infty)$, hustota je rovna

$$f(x) = \frac{x^{c-1}\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(c)}.$$

Znaménko

$$(\ln f(x))'' = \frac{1 - c}{x^2}$$

je záporné, nula nebo kladné pro $c > 1$, $c = 1$ nebo pro $c < 1$. Proto Gamma rozdělení je log-konkávní pro $c > 1$, log-lineární pro $c = 1$ a log-konvexní pro $c < 1$.

Pro $c < 1$ máme $f(0) = \infty$ a $f(\infty) = 0$. Můžeme použít Větu 1.2.9, podle které je $\bar{F}$ i její integrál H log-konvexní. Odtud plyne, že $r(x)$ je klesající a $MRL(x)$ rostoucí v x.

Protože $f(0) \neq 0$, nemůžeme podle Věty 1.1.6 rozhodnout, zda F je log-konvexní. Ale pro $0 < c < 1$ je $(\ln f(x))' < 0$ pro $x > 0$, takže f je klesající na $(0, \infty)$. Z Důsledku 1.1.5 plyne, že F je log-konkávní a z Věty 1.1.4 plyne log-konkávnost G. Tyto vlastnosti jsou pro $c = 0.5$ zobrazeny na Obrázku 1.1.

Vlastnosti těchto funkcí pro rozdělení Gamma(2) ilustruje Obrázek 1.2: f i F jsou log-konkávní, intenzita poruch r a střední zbytkový čas MRL klesající.

1.4.3 Paretovo rozdělení

Hustota Paretova rozdělení

$$f(x) = \beta x^{-\beta-1}$$

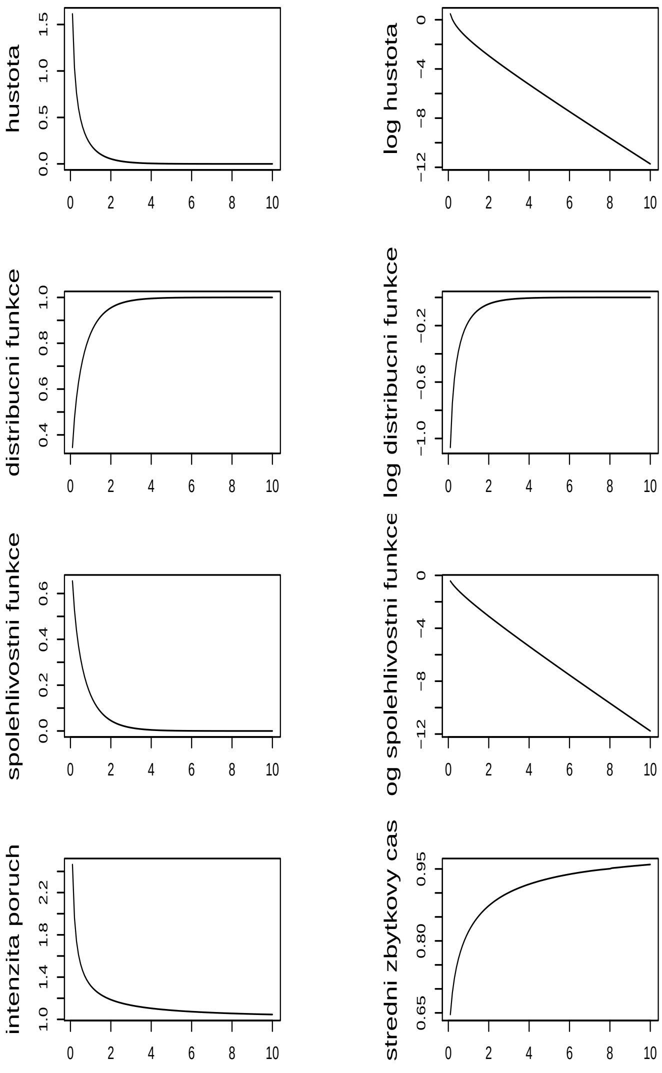
je definována na $[1, \infty)$, platí

$$(\ln f(x))' = -\frac{\beta + 1}{x}$$

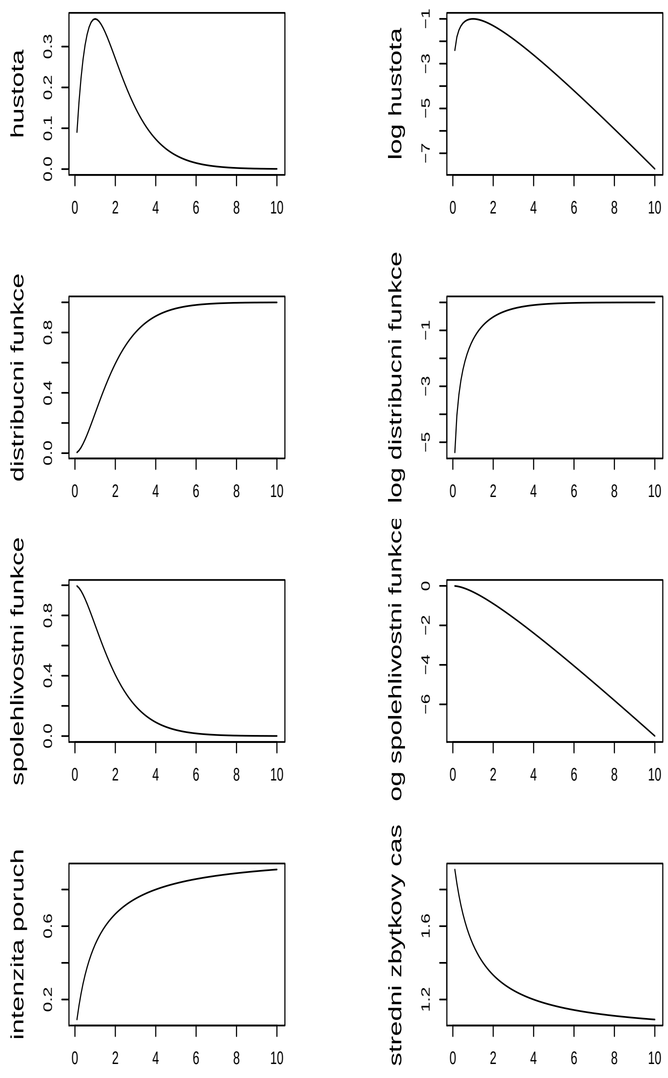
a

$$(\ln f(x))'' = \frac{\beta + 1}{x^2} > 0.$$

Proto je hustota pro všechna $x \in [1, \infty)$ klesající a log-kovexní. Z Důsledku 1.1.5 plyne, že F je log-konkávní.



Obrázek 1.1: Vlastnosti funkcí f, F, $\bar{F}$, r, MRL rozdělení Gamma(0.5)



Obrázek 1.2: Vlastnosti funkcí f, F, $\bar{F}$, r, MRL rozdělení Gamma(2)

Spolehlivostní funkce má tvar

$$\bar{F}(x) = x^{-\beta}.$$

Protože

$$(\ln \bar{F}(x))'' = \frac{\beta}{x^2} > 0,$$

je spolehlivostní funkce log-konvexní. Integrál ze spolehlivostní funkce konverguje jen pro $\beta > 1$ a je roven

$$H(x) = \int_x^\infty \bar{F}(t)dt = \frac{1}{\beta - 1} x^{1-\beta}.$$

Protože

$$(\ln H(x))'' = \frac{\beta - 1}{x^2} > 0,$$

je $H(x)$ log-konvexní a MRL je klesající v x.

1.4.4 Zrcadlové Paretovo rozdělení

Zrcadlové Paretovo rozdělení je definováno na intervalu $(-\infty, -1)$ a pro distribuční funkci platí

$$F(x) = (-x)^{-\beta}, \quad \text{kde } \beta > 0.$$

Pro $\beta > 1$ integrál G konverguje a je roven

$$G(x) = \int_{-\infty}^x F(t)dt = (\beta - 1)^{-1}(-x)^{1-\beta}.$$

Podle Věty 1.3.3 musí mít Paretovo rozdělení rostoucí MRL.

1.5 Diskrétní rozdělení

Z Definice 1.0.1 plyne, že pro log-konkávní funkci f platí

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{f(x)f(y)},$$

log-konkávní posloupnost definujeme podle knihy [12] zcela analogicky.

Definice 1.5.1. *Posloupnost $\{p_n, n \in \mathbb{Z}\}$ nezáporných reálných čísel je log-konkávní, jestliže platí*

$$p_n^2 \geq p_{n-1}p_{n+1}, \quad n = 0, \pm 1, \ldots$$

Definice 1.5.2. *Náhodná veličina s diskrétním rozdělením $\{p_n, n \in \mathbb{Z}\}$ je log-konkávní, jestliže $\{p_n\}$ je log-konkávní posloupnost.*

Rozdělení	Parametry	p_k	
Binomické (n, p)	$n \geq 1,\, p \in [0, 1]$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$0 \leq k \leq n$
Poissonovo (λ)	$\lambda > 0$	$\frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}$	$k \geq 0$
Negativně binomické (n, p)	$n \geq 1,\, p \in [0, 1]$	$\binom{n+k-1}{n-1} (1-p)^k p^n$	$k \geq 0$
Geometrické (p)	$p \in (0, 1]$	$(1-p)^k p$	$k \geq 0$
Logaritmická řada (p)	$p \in (0, 1)$	$\frac{p^k}{-\log(1-p)k!}$	$k \geq 1$
Trojúhelníkové (a, b)	$a, b \in \mathbb{N},\, a \leq b$	$\frac{1}{b-a+1}$	$a \leq k \leq b$

Tabulka 1.4: Diskrétní log-konkávní rozdělení, tabulka převzata z [3]

Analogicky jako pro spojitá rozdělení platí, že součet dvou nezávislých diskrétních náhodných veličin s log-konkávním rozdělením je náhodná veličina, která má také log-konkávní rozdělení. Toto tvrzení bude dokázáno v části 2.1 jako Tvrzení 2.1.6.

Příklady diskrétních log-konkávních rozdělení najdeme v Tabulce 1.4. Následující definicí se pomalu přesuneme k vícerozměrným rozdělením.

Definice 1.5.3. *Mnohorozměrné diskrétní rozdělení $p(k)$ je log-konkávní, jestliže existuje log-konkávní funkce $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ tak, že*

$$p(k) = f(k) \quad \textit{pro každý bod } k \in \mathbb{R}^n.$$

V Tvrzení 2.1.6 ještě dokážeme, že konvoluce dvou log-konkávních posloupností je opět log-konkávní.

2. Vícerozměrný případ

Nyní se budeme věnovat vlastnostem log-konkávních funkcí ve vícerozměrném prostoru. Začněme jejich definicí podle knihy [12], která je zcela analogická Definici 1.0.1 pro jednorozměrný případ.

Definice 2.0.4. *Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je log-konkávní (nebo také logaritmicko-konkávní), jestliže $f(x) \geq 0$ a pro všechna $x, y \in \mathrm{Dom}(f)$, $0 < \lambda < 1$ platí*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda f(y)^{(1-\lambda)}. \tag{2.1}$$

Řekneme, že f je log-konvexní (logaritmicko-konvexní), jestliže v (2.1) platí obrácená nerovnost.
Pro $f > 0$ definice říká, že $\log f$ je konkávní funkce v $\mathbb{R}^n$.

2.1 Log-konkávní pravděpodobnostní míra a hustota

Zadefinujeme, kdy je pravděpodobnostní míra log-konkávní, a uvedeme tvrzení, které ji dává do souvislosti s log-konkávní hustotou:

Definice 2.1.1. *Pravděpodobností míra definovaná na Borelovských podmnožinách $\mathbb{R}^n$ je log-konkávní, jestliže pro A, B libovolné konvexní Borelovské podmnožiny $\mathbb{R}^n$ a $0 < \lambda < 1$ platí*

$$P(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq [P(A)]^\lambda [P(B)]^{(1-\lambda)}, \tag{2.2}$$

kde

$$\lambda A + (1-\lambda)B = \{\lambda x + (1-\lambda)y \mid x \in A, y \in B\}.$$

Věta 2.1.2. *Nechť P je pravděpodobnostní míra na $\mathbb{R}^n$ generovaná hustotou f, která je tvaru*

$$f(x) = \exp(-Q(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

kde Q je konvexní funkce (f je log-konkávní). Potom P je log-konkávní pravděpodobnostní míra.

Důkaz. Důkaz je uveden v [9]. □

Uvedeme nerovnost, pomocí které dokážeme, že je-li sdružené rozdělení náhodného vektoru log-konkávní, pak všechna jeho marginální rozdělení jsou také log-konkávní.

Tvrzení 2.1.3. *Nechť $f_1, \dots, f_k$ jsou nezáporné Borelovsky měřitelné funkce v $\mathbb{R}^n$, definujme*

$$r(t) = \sup\{f_1(x)\dots f_k(x) : \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = t\},$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ dané konstanty splňující $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Pak $r(t)$ je Borelovsky měřitelná a platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} r(t)dt \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_1^{\frac{1}{\lambda_1}}(x_1)dx\right)^{\lambda_1} \cdots \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_k^{\frac{1}{\lambda_k}}(x_k)dx\right)^{\lambda_k}.$$

Důkaz. Důkaz je uveden v [10]. □

Věta 2.1.4. *Nechť $f(x, y)$ je log-konkávní hustota rozdělení náhodného vektoru (ξ, η) na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Pak hustota marginálního rozdělení náhodného vektoru ξ*

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y)dy$$

a hustota podmíněného rozdělení ξ za podmínky $\eta = y$ jsou log-konkávní.

Důkaz. Podle předpokladu pro libovolné $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \geq f(x_1, y_1)^\lambda f(x_2, y_2)^{1-\lambda}.$$

Hustota marginálního rozdělení

$$\begin{aligned} g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= \int_{\mathbb{R}^m} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, y)dy \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^m} \sup\{f(x_1, y_1)^\lambda f(x_2, y_2)^{1-\lambda}\}dy \\ &\geq \left[\int_{\mathbb{R}^m} f(x_1, y)dy\right]^\lambda \left[\int_{\mathbb{R}^m} f(x_2, y)dy\right]^{1-\lambda} \\ &= g(x_1)^\lambda g(x_2)^{1-\lambda} \end{aligned}$$

je podle Tvrzení 2.1.3 log-konkávní.

Hustota podmíněného rozdělení ξ za podmínky $\eta = y$ je dána vztahem

$$f(x \,|\, y) = \frac{f(x, y)}{g(y)}, \quad \text{pokud } g(y) > 0,$$

jinak $f(x \,|\, y) = 0$. Protože $f(x, y)$ je log-konkávní, pro libovolné $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ a $\lambda \in (0, 1)$ podle Definice 2.0.4 platí

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \,|\, y) &= \frac{f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, y)}{g(y)} \\ &\geq \frac{f(x_1, y)^\lambda f(x_2, y)^{1-\lambda}}{g(y)} \\ &= f(x_1 \,|\, y)^\lambda f(x_2 \,|\, y)^{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Jestliže $g(y) = 0$, položíme $\log f(x \,|\, y) = -\infty$ a proto je $f(x \,|\, y)$ log-konkávní na $\mathbb{R}^n$. □

Důsledek 2.1.5. *Součet dvou nezávislých náhodných vektorů s log-konkávním rozdělením je náhodný vektor, který má také log-konkávní rozdělení.*

Důkaz. Nechť $g(x)$, $h(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, jsou log-konkávní hustoty, potom jejich konvoluce

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(x-y)h(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

je také log-konkávní. V předchozí Větě 2.1.4 položíme

$$f(x,y) = g(x-y)h(y),$$

potom je $\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy$ log-konkávní. □

Podobné tvrzení platí i pro diskrétní rozdělení.

Tvrzení 2.1.6. *Jestliže $\{p_n, n \in \mathbb{Z}\}$ a $\{q_n, n \in \mathbb{Z}\}$ jsou dvě log-konkávní posloupnosti, potom jejich konvoluce*

$$r_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{n-k}q_k, \quad n = 0, \pm 1, \ldots$$

je také log-konkávní.

Důkaz. Důkaz plyne z Důsledku 2.1.5, který říká, že konvoluce dvou log-konkávních funkcí je log-konkávní. Opravdu máme dvě log-konkávní funkce $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ a $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, místo Lebesgueovy míry pracujeme s aritmetickou mírou na $\mathbb{Z}$. □

Důsledek 2.1.7. *Jestliže $\{p_n, n \in \mathbb{Z}\}$ je log-konkávní posloupnost, potom obě posloupnosti*

$$F(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} p_k, \quad 1 - F(n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k$$

jsou také log-konkávní.

Důkaz. Stačí v Tvrzení 2.1.6 za druhou posloupnost zvolit

$$q_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = -\infty, \ldots, -1, \\ 1 & \text{pro } k = 0, \ldots, +\infty, \end{cases}$$

případně

$$r_k = \begin{cases} 1 & \text{pro } k = -\infty, \ldots, -1, \\ 0 & \text{pro } k = 0, \ldots, +\infty, \end{cases}$$

potom je konvoluce $\{p_n\} * \{q_n\}$ a $\{p_n\} * \{r_n\}$ log-konkávní, neboť obě posloupnosti $\{q_n\}$ i $\{r_n\}$ jsou zřejmě log-konkávní podle Definice 1.5.1. □

Konvexní kombinace log-konkávních hustot může být log-konkávní, ale obecně toto tvrzení neplatí ani pro normální rozdělení. Hustota jednorozměrného normovaného normálního rozdělení je rovna

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

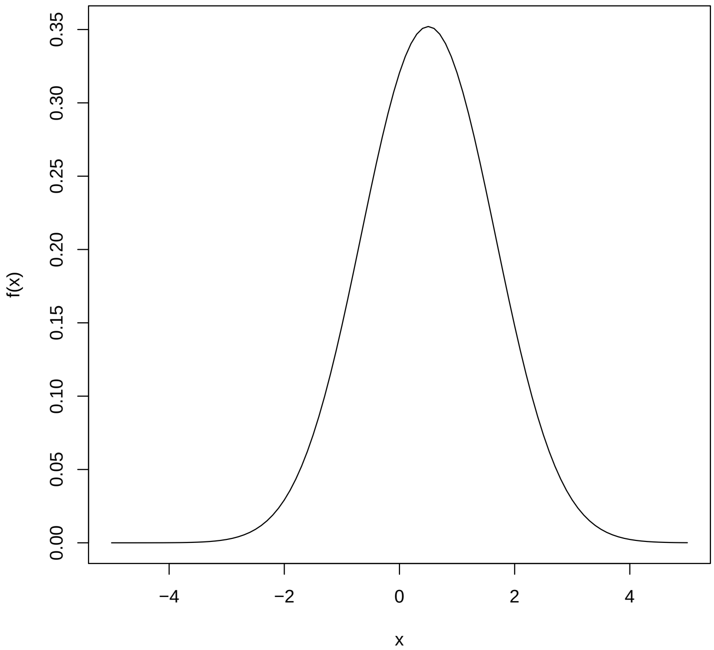
Zvolme $\lambda = \frac{1}{2}$, potom pro $\mu = 1$ je funkce

$$f(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2}\phi(x-1)$$

log-konkávní, jak můžeme vidět na Obrázku 2.2. Jestliže $\mu = 4$, funkce

$$f(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2}\phi(x-4)$$

log-konkávní není, jak se můžeme přesvědčit z Obrázku 2.4.



Obrázek 2.1: Funkce $f(x)$ pro $\lambda = 0.5$, $\mu = 1$

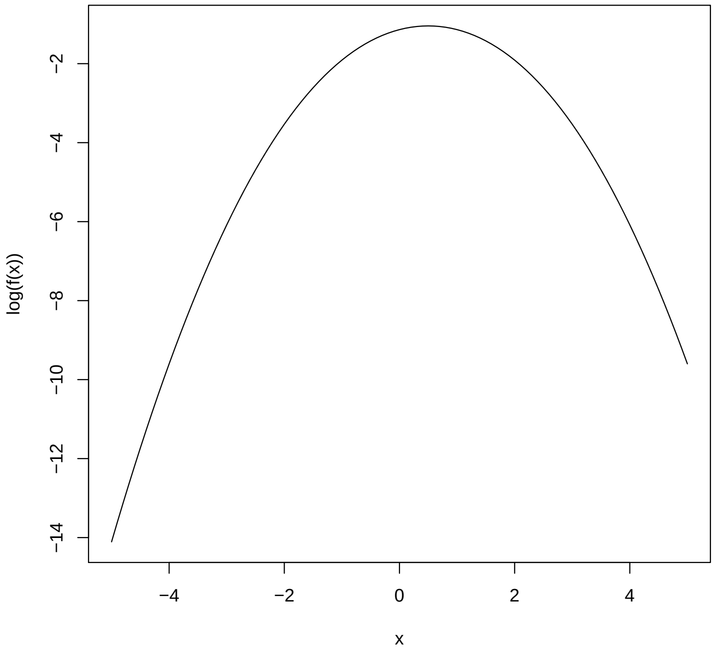
2.2 Příklady rozdělení

Nyní uvedeme několik příkladů vícerozměrných log-konkávních rozdělení. K ověření log-konkávnosti se nám bude hodit následující tvrzení o pozitivně definitních maticích.

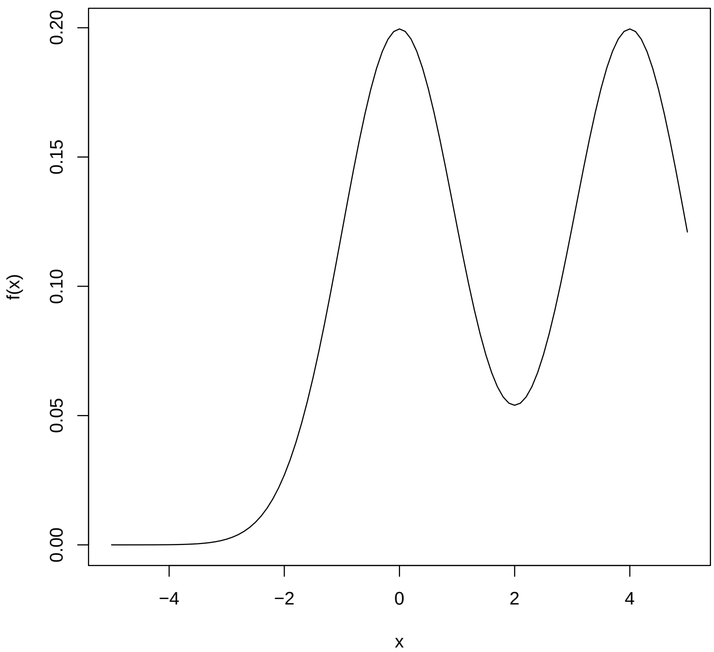
Tvrzení 2.2.1. *Pro libovolné X, Y pozitivně definitní matice typu $(n \times n)$, $0 < \lambda < 1$ platí*

$$|\lambda X + (1-\lambda)Y| \geq |X|^{\lambda}|Y|^{(1-\lambda)}. \tag{2.3}$$

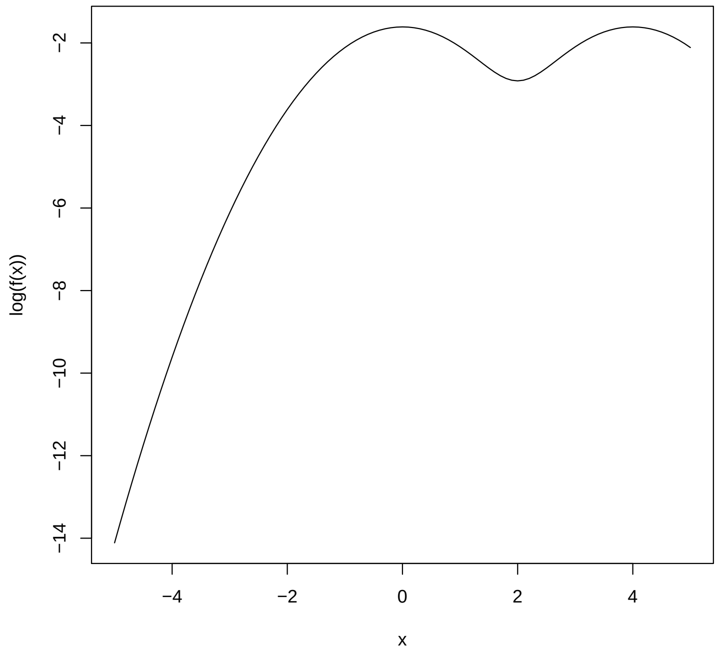
Důkaz. Důkaz tohoho tvrzení je uveden v knize [7] jako Corollary 7.6.9. $\square$



Obrázek 2.2: Funkce $\log(f(x))$ pro $\lambda = 0.5$, $\mu = 1$



Obrázek 2.3: Funkce $f(x)$ pro $\lambda = 0.5$, $\mu = 4$



Obrázek 2.4: Funkce $\log(f(x))$ pro $\lambda = 0.5$, $\mu = 4$

2.2.1 Normální rozdělení

Nejdůležitějším mnohorozměrným rozdělením je normální rozdělení. Jeho hustota je dána předpisem

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{|C|}(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(X-\mu)'C^{-1}(X-\mu)}, \quad X \in \mathbb{R}^n,$$

kde $\mu \in \mathbb{R}^n$ je střední hodnota a C je pozitivně definitní rozptylová matice. Potom C^{-1} je také pozitivně definitní, a proto je kvadratická forma $(x-\mu)'C^{-1}(x-\mu)$ konvexní, hustota $f(x)$ je zřejmě log-konvexní.

2.2.2 Wishartovo rozdělení

Hustota vypadá následovně

$$f(X) = \frac{|X|^{\frac{N-p-2}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}SpC^{-1}X}}{2^{\frac{N-1}{2}p} \pi^{\frac{p(p-1)}{4}} |C|^{\frac{N-1}{2}} \prod_{i=1}^{p} \Gamma(\frac{N-i}{2})},$$

jestliže X je pozitivně definitní matice $(n \times n)$, v ostatních případech je $f(X) = 0$. $C \in (n \times n)$ je matice konstant. Protože X je symetrická, máme $n = \frac{1}{2}p(p+1)$ nezávislých proměnných. Předpokládáme, že $N \geq p+2$.
Protože X je pozitivně definitní matice, stačí aplikovat Tvrzení 2.2.1 a zjistíme, že rozdělení je log-konkávní.

2.2.3 Beta rozdělení

Hustota je ve tvaru

$$f(X) = \frac{c(n_1,p)c(n_2,p)}{c(n_1+n_2,p)}|X|^{\frac{1}{2}(n_1-p-1)}|I-X|^{\frac{1}{2}(n_2-p-1)},$$

jestliže X, $I-X$ jsou pozitivně definitní $(n \times n)$ matice, jinak je $f(X)=0$, kde

$$\frac{1}{c(k,p)} = 2^{\frac{pk}{2}}\pi^{\frac{p(p-1)}{2}}\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(\frac{k-i+1}{2}\right).$$

Předpokládáme, že $n_1 \geq p+1$, $n_2 \geq p+1$, nezávislých proměnných máme $n = \frac{1}{2}p(p+1)$.
Log-konkávnost hustoty plyne podobně jako v předchozím případě ihned z Tvrzení 2.2.1, ověříme definici:

$$\begin{aligned}
f(\ \lambda X\ +&(1-\lambda)Y) = C|\lambda X+(1-\lambda)Y|^{\frac{1}{2}(n_1-p-1)}|I-\lambda X-(1-\lambda)Y|^{\frac{1}{2}(n_2-p-1)} = \\
&= C|\lambda X+(1-\lambda)Y|^{\frac{1}{2}(n_1-p-1)}|\lambda(I-X)+(1-\lambda)(I-Y)|^{\frac{1}{2}(n_2-p-1)} \geq \\
&\overset{(2.3)}{\geq} C|X|^{\lambda\frac{1}{2}(n_1-p-1)}|Y|^{(1-\lambda)\frac{1}{2}(n_1-p-1)}|I-X|^{\lambda\frac{1}{2}(n_2-p-1)}|I-Y|^{(1-\lambda)\frac{1}{2}(n_2-p-1)} = \\
&= f(X)^{\lambda}f(Y)^{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

2.2.4 Dirichletovo rozdělení

Označme $X = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Hustota Dirichletova rozdělení je

$$f(X) = kx_1^{p_1-1}\ldots x_n^{p_n-1}(1-x_1-\cdots-x_n)^{p_{n+1}-1},$$

pro $x_i > 0$, $i=1,\ldots,n$ a $\sum_{i=1}^{n} x_i < 1$, jinak je $f(X)=0$, kde

$$k = \frac{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n+1})}{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n+1})}$$

a $p_1,\ldots,p_{n+1}$ jsou kladné konstanty.
Pro $X \in \mathbb{R}^n$ taková, že $x_i > 0$, $i=1,\ldots,n$ a $\sum_{i=1}^{n} x_i < 1$ je

$$\log f(x) = \log k + \sum_{i=1}^{n}(p_i-1)\log x_i + (p_{n+1}-1)\log(1-x_i-\cdots-x_n)$$

konkávní funkce, pokud $p_i \geq 1$, $i=1,\ldots,n+1$. Jestliže $f(X)=0$, položíme $\log f(X) = -\infty$. Hustota $f(X)$ je log-konkávní na celém $\mathbb{R}^n$ pro $p_i \geq 1$, $i=1,\ldots,n+1$.
Pro $p_i < 1$, $i=1,\ldots,n$ je $f(X)$ log-konvexní, pro $X \in \mathbb{R}^n : x_i > 0$, $i=1,\ldots,n$ a $\sum_{i=1}^{n} x_i < 1$.

2.3 Nerovnosti

Tato podkapitola je založena na práci [13]. Označme $\mathcal{P}_n$ množinu všech rozdělení na $\mathbb{R}^n$, která mají log-konkávní hustotu, to znamená, že Lebesgueova hustota f je tvaru

$$f(x) = \exp(\varphi(x)),$$

pro nějakou konkávní funkci $\varphi : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty)$.

Nechť $S \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná konvexní množina, její konvexní obal značíme $\text{conv}(S)$, Lebesgueovu míru této množiny budeme označovat $|S|$, dále $\|\cdot\|$ značí Euklidovskou normu vektoru.
V následujícím textu budeme používat množiny Δ a Δ_0, které definujeme následovně:

$$\Delta = \text{conv}\{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

$$\Delta_0 = \left\{ u \in [0,1]^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} u_i \leq 1 \right\}.$$

Věta 2.3.1. *Nechť $P \in \mathcal{P}_n$ s hustotou f. Nechť $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou pevné body v $\mathbb{R}^n$ takové, že $\Delta = \text{conv}\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ je neprázdná.*

(i) Platí

$$\prod_{j=0}^{n} f(x_j) \leq \left(\frac{P(\Delta)}{|\Delta|} \right)^{n+1}.$$

(ii) Jestliže $f(x_i) > 0$, $i = 1, \ldots, n$ a položíme-li

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i) \right)^{1/n},$$

potom

$$\frac{f(x_0)}{\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n))} \leq \left(\frac{P(\Delta)}{\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n)|\Delta|} \right)^{n+1}. \tag{2.4}$$

(iii) Pokud je levá strana nerovnosti (2.4) menší nebo rovna 1, potom

$$\frac{f(x_0)}{\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n))} \leq \exp\left(n - n\frac{\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n)|\Delta|}{P(\Delta)} \right).$$

Důkaz. Důkaz je uveden v [13]. □

Z této věty plynou důsledky týkající se mezí pro log-konkávní hustoty. Pomocí následujícího lemmatu najdeme horní odhad pro hustotu f na množině Δ. Dolní odhad získáme z poznatku, že konkávní funkce na simplexu nabývá minima v jednom z krajních bodů.

Lemma 2.3.2. *Nechť $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ a Δ jsou jako ve Větě 2.3.1. Potom pro každé $P \in \mathcal{P}_n$ s hustotou f takovou, že $f(x_i) > 0$, $i = 1, \ldots, n$ a pro libovolné $y \in \Delta$ platí*

$$\min_{i=0,\ldots,n} f(x_i) \le f(y) \le \left(\frac{P(\Delta)}{|\Delta|}\right)^{n+1} \left(\min_{i=0,\ldots,n} f(x_i)\right)^{-n}.$$

Důkaz. Důkaz lze nalézt v [13] jako Lemma 3.2. □

Lemma 2.3.3. *Nechť $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ jsou jako ve Větě 2.3.1. Potom existuje konstanta $C = C(x_0, \ldots, x_n) > 0$ s následující vlastností:*
Pro libovolné rozdělení $P \in \mathcal{P}_n$ s hustotou f takovou, že $f(x_i) > 0$, $i = 1, \ldots, n$ a libovolné $y \in \mathbb{R}^n$ platí

$$f(y) \le \max_{i=0,\ldots,n} f(x_i) H\left(C \min_{i=1,\ldots,n} f(x_i)(1 + \|y\|^2)^{1/2}\right),$$

kde

$$H(t) = \begin{cases} t^{-(n+1)} & \text{pro } t \in [0,1], \\ \exp(n - nt) & \text{pro } t \ge 1. \end{cases}$$

Důkaz. Důkaz je uveden v [13] jako Lemma 3.3. □

Důsledek 2.3.4. *Pro $P \in \mathcal{P}_n$ s hustotou f existuje konstanta $C_1 = C_1(P) > 0$ a $C_2 = C_2(P) > 0$ taková, že platí*

$$f(x) \le C_1 \exp(-C_2\|x\|), \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}^n.$$

Z tohoto důsledku plyne, že všechny log-konkávní funkce jsou nutně subexponenciální a unimodální. Unimodálním funkcím se budeme podrobněji věnovat v části 3.2.1, kde dokážeme, že každá log-konkávní funkce je unimodální, ale opak neplatí.

3. Aplikace

Log-konkávní rozdělení mají řadu aplikací například v ekonomii, teorii spolehlivosti (viz odstavec 1.2), teorii her nebo ve stochastickém programování.

3.1 Stochastické programování

Budeme se zabývat otázkou, kdy je množina přípustných řešení úlohy stochastického programování konvexní. Tuto podkapitolu zpracujeme podle [4].

Mějme obecnou úlohu stochastického programování s pravděpodobnostními omezeními

$$\min f(x)$$

za podmínek

$$\begin{aligned} &P(g_1(x,\omega) \leq 0, \dots, g_r(x,\omega) \leq 0) \geq p, \\ &h_1(x) \geq 0, \dots, h_s(x) \geq 0, \end{aligned}$$

kde ω je náhodný vektor v $\mathbb{R}^m$, $p \in (0,1)$ je předepsaná pravděpodobnost, funkce $g_1(x,\omega), \dots, g_r(x,\omega)$ jsou konvexní funkce v $\mathbb{R}^{n+m}$, $h_1(x), \dots, h_s(x)$ a $f(x)$ jsou konvexní v $\mathbb{R}^n$.

Věta 3.1.1. *Nechť $g_1(x,y), \dots, g_r(x,y)$ jsou konvexní funkce na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Nechť ω je náhodný vektor, jehož rozdělení je log-konkávní na $\mathbb{R}^m$. Potom funkce*

$$h(x) = P(g_1(x,\omega) \leq 0, \dots, g_r(x,\omega) \leq 0)$$

je log-konkávní na $\mathbb{R}^n$.

Důkaz. Označme

$$H(x) = \{y \mid g_i(x,y) \leq 0, \quad i = 1, \dots, r\},$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$ je parametr, dále

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n : H(x) \neq \emptyset\}.$$

Nejprve ukážeme, že L je konvexní množina. Zvolíme $x_1, x_2 \in L$, $\lambda \in [0,1]$ libovolně. Potom existují $y_1 \in H(x_1)$ a $y_2 \in H(x_2)$ takové, že

$$\begin{aligned} g_i(x_1,y_1) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, r, \\ g_i(x_2,y_2) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Podle předpokladu jsou funkce g_i, $i = 1, \dots, r$ konvexní, proto

$$\begin{aligned} g_i(\lambda x_1 + &(1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) \\ &\leq \lambda g_i(x_1,y_1) + (1-\lambda) g_i(x_2,y_2) \leq 0, \quad i = 1, \dots, r, \end{aligned}$$

tedy

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in H(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2),$$

a tedy

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in L.$$

Všimněme si, že

$$H(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \supset \lambda H(x_1) + (1-\lambda)H(x_2). \tag{3.1}$$

Jestliže $L = \emptyset$, je $h(x) \equiv 0$ a tvrzení platí triviálně. Jestliže $L \neq \emptyset$, existuje $x \in L$ a můžeme psát

$$h(x) = P\{g_i(x,\omega) \leq 0, \quad i = 1,\dots,r\} = P(\omega \in H(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Protože P je log-konkávní pravděpodobnostní míra, pro libovolné $x_1, x_2 \in L$, $\lambda \in [0,1]$ platí

$$\begin{aligned} h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= P(\omega \in H(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)) \\ &\overset{(3.1)}{\geq} P(\omega \in \lambda H(x_1) + (1-\lambda)H(x_2)) \\ &\overset{(2.2)}{\geq} [P(\omega \in H(x_1))]^{\lambda}\ [P(\omega \in H(x_2))]^{(1-\lambda)} \\ &= h(x_1)^{\lambda}\ h(x_2)^{1-\lambda}. \end{aligned}$$

Funkce h je podle (2.1) log-konkávní na konvexní množině L. Protože pro $x \notin L$ je $h(x) = 0$, je funkce h log-konkávní na celém prostoru $\mathbb{R}^n$. □

Tato věta má aplikace v teorii i v praktických příkladech. Uvažujme funkci

$$h(x_1, x_2) = P(x_1 \leq \xi \leq x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

kde ξ je náhodná veličina. Jestliže ξ má log-konkávní rozdělení, funkce h definovaná předpisem (3.2) je podle předchozí věty log-konkávní:
Definujme funkce

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= x_1 - y, \\ g_1(x,y) &= y - x_2, \end{aligned}$$

kde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Potom

$$P(x_1 \leq \xi \leq x_2) = P(g_1(x,\xi) \leq 0,\ g_2(x,\xi) \leq 0)$$

je podle Věty 3.1.1 log-konkávní.

Náhodná veličina X má log-normální rozdělení, pokud $\log(X)$ je náhodná veličina s normálním rozdělením. Hustota je dána

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x)^2}{2}\right), \quad x > 0.$$

Na rozdíl od normálního rozdělení, hustota log-normálního rozdělení není log-konkávní. Protože druhá derivace je rovna

$$\begin{aligned}
(\log f(x))'' &= \left(\log \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x)^2}{2}\right)\right)'' \\
&= \left(\log \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \log \frac{1}{x} - \frac{(\log x)^2}{2}\right)'' \\
&= \left(-\frac{1}{x} - \frac{\log x}{x}\right)' = \frac{\log(x)}{x^2},
\end{aligned}$$

je hustota na intervalu $(0, 1)$ log-konkávní, na $(1, +\infty)$ log-konvexní.
Náhodný vektor $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ má n-rozměrné log-normální rozdělení, pokud vektor

$$Y = (\log(Z_1), \ldots, \log(Z_n))$$

má mnohorozměrné normální rozdělení. Distribuční funkci vektoru Z v bodě $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, $z_i > 0$ můžeme napsat jako

$$F_Z(z) = P(Z_1 \leq z_1, \ldots, Z_n \leq z_n) = P(\mathrm{e}^{Y_1} - z_1 \leq 0, \ldots, \mathrm{e}^{Y_n} - z_n \leq 0),$$

kde $Y_i = \log(X_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Protože mnohorozměrné normální rozdělení je podle odstavce 2.2.1 log-konkávní a pro $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$ jsou funkce

$$g_i(z, y) = \mathrm{e}^{y_i} - z_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

konvexní, jsou splněny předpoklady Věty 3.1.1 a distribuční funkce log-normálního rozdělení je log-konkávní.

3.2 Maximálně věrohodný odhad log-konkávní hustoty a distribuční funkce

V této kapitole budeme hledat neparametrický odhad log-konkávní hustoty f metodou maximální věrohodnosti. Omezíme se na jednorozměrný případ.

3.2.1 Unimodální funkce

Platí, že každá log-konkávní hustota je automaticky i unimodální. Maximálně věrohodný odhad spojité unimodální hustoty s neznámým modem obecně neexistuje (viz [6]), ale maximálně věrohodný odhad log-konkávní hustoty existuje.

Definice 3.2.1. *Hustota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je unimodální na $[a, b]$, jestliže existuje číslo $m \in [a, b]$ takové, že pro všechna $a \leq x \leq y \leq m$ a $m \leq y \leq x \leq b$ platí*

$$f(x) \leq f(y).$$

Číslo m nazýváme modus.

Tvrzení 3.2.2. *Log-konkávní funkce je unimodální.*

Důkaz. Dokážeme sporem. Nechť funkce f je log-konkávní na $[a, b]$, ale není unimodální. Protože není unimodální, existují body $a \leq x \leq c \leq y \leq b$ takové, že $f(x) > f(c) < f(y)$. Najdeme $\lambda \in (0, 1)$, takové že $\lambda x + (1-\lambda)y = c$. Potom platí

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < f(x)^{\lambda} f(y)^{1-\lambda},$$

což je spor s tím, že f je log-konkávní. □

Poznámka 3.2.3. *Obrácené tvrzení zřejmě neplatí. Například hustota Paretova rozdělení (viz příklad 1.4.3) je unimodální a log-konvexní.*

Log-konkávní hustotu můžeme charakterizovat jako striktně unimodální:

Definice 3.2.4. *Hustota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je striktně unimodální, pokud f je unimodální a pro libovolnou unimodální funkcí g jejich konvoluce $f * g$ je opět unimodální.*

Věta 3.2.5. *Hustota f na $\mathbb{R}$ je log-konkávní právě tehdy, když je striktně unimodální.*

Důkaz. Důkaz najdeme v [8]. □

Pomocí této věty můžeme alternativně dokázat, že součet dvou nezávislých náhodných veličin s log-konkávním rozdělením je náhodná veličina, která má také log-konkávní rozdělení. Toto tvrzení je uvedeno v Důsledku 2.1.5.

3.2.2 Existence a jednoznačnost odhadu

Mějme uspořádaný náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$, $n > 1$ z rozdělení, které má distribuční funkci F.
Předpokládáme, že hustota f je log-konkávní, tedy ve tvaru

$$f(x) = \exp \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

pro nějakou konkávní funkci $\varphi : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$.

Logaritmická věrohodnost je definována jako

$$L_n(f) = -n \int \log f(x) d\mathbb{F}_n(x) = -\sum_{i=1}^{n} \log f(X_i), \tag{3.3}$$

kde $\mathbb{F}_n$ značí empirickou distribuční funkci výběru $X_1, \ldots, X_n$, která je rovna

$$\mathbb{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[X_i \leq x]}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Maximálně věrohodný odhad hustoty je minimum funkcionálu $L_n(f)$ přes všechny log-konkávní hustoty. Následující věta z [14] nám pomůže zbavit se omezení, že f musí být hustota.

Věta 3.2.6. *Nechť g je reálná funkce, položme*

$$A_0(g) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)$$

a

$$A(g) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) + \int \mathrm{e}^{g(x)}dx.$$

Funkce $\hat{g}$ minimalizuje $A_0(g)$ za podmínky, že $\int \mathrm{e}^{g(x)}dx = 1$ právě tehdy, když $\hat{g}$ minimalizuje $A(g)$.

Důkaz. Definujme

$$g^*(x) = g(x) - \log \int \mathrm{e}^{g(x)}dx,$$

platí

$$\int \mathrm{e}^{g^*(x)}dx = 1.$$

$$\begin{aligned}
A(g^*) &= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(g(X_i) - \log\int \mathrm{e}^{g(x)}dx\right) + \int \exp\left(g(x) - \log\int \mathrm{e}^{g(x)}dx\right)dx \\
&= -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) + \log\int \mathrm{e}^{g(x)}dx + \int \exp\left(g(x) - \log\int \mathrm{e}^{g(x)}dx\right)dx \\
&= A(g) - \int \mathrm{e}^{g(x)}dx + \log\int \mathrm{e}^{g(x)}dx + 1 \\
&\leq A(g),
\end{aligned}$$

protože $t - \log t \geq 1$ pro všechna $t > 0$, rovnost $A(g^*) = A(g)$ nastává v případě, kdy

$$\int \mathrm{e}^{g(x)}dx = 1.$$

□

Poznámka 3.2.7. Tato věta nezaručuje existenci funkce $\hat{g}$, která minimalizuje $A_0(g)$, případně $A(g)$.

Podle Věty 3.2.6 můžeme věrohodnost (3.3) modifikovat

$$\Psi_n(\varphi) = -n\int \varphi(x)d\mathbb{F}_n(x) + n\int_{\mathbb{R}} \exp\varphi(x)dx.$$

a převést na úlohu bez omezení. Maximálně věrohodný odhad $\hat{\varphi}_n$ funkce φ získáme minimalizací funkcionálu $\Psi_n(\varphi)$ přes všechny reálné funkce

$$\hat{\varphi}_n = \operatorname{argmin} \Psi_n(\varphi).$$

Odhad hustoty získáme jako

$$\hat{f}_n(x) = \begin{cases} \exp(\hat{\varphi}_n(x)) & \text{pro } x \in [X_1, X_n], \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Podobně pro distribuční funkci platí

$$\hat{F}_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \hat{f}_n(u)du.$$

Pomocí hustoty a distribuční funkce můžeme odhadnout například intenzitu poruch (hazardní funkci) následovně

$$\hat{r}_n(x) = \frac{\hat{f}_n(x)}{1 - \hat{F}_n(x)} \qquad \text{pro } x < X_n.$$

Následující věta říká, že minimum funkcionálu $\Psi_n(\varphi)$ skutečně existuje a udává jeho vlastnosti. Toto tvrzení je uvedeno v [11].

Věta 3.2.8. *Existuje jednoznačně určená konkávní funkce $\hat{\varphi}_n$ minimalizující $\Psi_n(\varphi)$. $\hat{\varphi}_n$ je po částech lineární, body zlomu se nacházejí v pozorovaných hodnotách $X_1, \ldots, X_n$, je spojitá na intervalu $[X_1, X_n]$ a $\hat{\varphi}_n = -\infty$, $x \notin [X_1, X_n]$.*

Důkaz. Nechť φ je libovolná konkávní funkce, pro niž $\Psi_n(\varphi) < +\infty$.
Definujme funkci $\bar{\varphi}$ následovně:

$$\bar{\varphi}(X_i) = \varphi(X_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

$\bar{\varphi}$ je lineární mezi jednotlivými pozorováními, $\bar{\varphi}(x) = -\infty$, $x \notin [X_1, X_n]$. Protože φ je konkávní, je $\bar{\varphi} \leq \varphi$ a proto

$$\int_{\mathbb{R}} \exp \bar{\varphi}(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}} \exp \varphi(x)dx.$$

Musí tedy platit

$$\begin{aligned}
\Psi_n(\bar{\varphi}) &= -n \sum_{i=1}^{n} \varphi(X_i) + n \int_{\mathbb{R}} \exp \bar{\varphi}(x)dx \\
&\leq -n \sum_{i=1}^{n} \varphi(X_i) + n \int_{\mathbb{R}} \exp \varphi(x)dx \\
&= \Psi_n(\varphi),
\end{aligned}$$

rovnost nastává pouze v případě $\bar{\varphi} = \varphi$. Minimum Ψ_n je ve tvaru $\bar{\varphi}$.
Pro $\varphi = \varphi_0 + t$, $t \neq 0$, kde $\exp(\varphi_0)$ je hustota a tedy

$$\int \exp(\varphi_0(x))dx = 1,$$

platí

$$\begin{aligned}
\Psi_n(\varphi) &= -n\int(\varphi_0(x)+t)d\mathbb{F}_n(x)+n\int\exp(\varphi_0(x)+t)dx\\
&= -n\int(\varphi_0(x)+t)d\mathbb{F}_n(x)+n\int\exp(\varphi_0(x)+t)dx\\
&\quad +n\left(\int\exp(\varphi_0(x))dx-1\right)\\
&= -n\int\varphi_0(x)d\mathbb{F}_n(x)-n\int td\mathbb{F}_n(x)+n\,\mathrm{e}^t\int\exp\varphi_0(x)dx\\
&\quad +n\int\exp(\varphi_0(x))dx-n\\
&= \Psi_n(\varphi_0)+n\left(\exp(t)-t-1\right)\\
&> \Psi_n(\varphi_0).
\end{aligned}$$

Protože hledáme minimum Ψ_n, můžeme se omezit na případ kdy

$$\int\exp(\varphi(x))dx=1.$$

Označíme vektor

$$\boldsymbol{\varphi}=(\varphi(X_i))_{i=1}^n\in\mathbb{R}^n.$$

Protože funkcionál $\boldsymbol{\varphi}\mapsto\Psi_n(\boldsymbol{\varphi})$ je spojitý, k důkazu existence bodu minima zbývá ukázat, že

$$\Psi_n(\boldsymbol{\varphi})\to\infty,\quad \text{pro } \|\boldsymbol{\varphi}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^n\varphi(X_i)^2}\to\infty.$$

Nechť $(\boldsymbol{\varphi}^{(k)})_{k=1}^\infty$ je posloupnost vektorů splňující

$$\|\boldsymbol{\varphi}^{(k)}\|_2\stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow}\infty,$$

označíme-li i-tou složku vektoru $\boldsymbol{\varphi}^{(k)}$ jako $\varphi_i^{(k)}=\varphi^{(k)}(X_i)$, platí

$$\varphi_i^{(k)}\xrightarrow{k\to\infty}\gamma_i\in[-\infty,\infty],\quad i=1,\dots,n.$$

Jestliže $\gamma_i<\infty$ pro všechna i, potom existuje alespoň jeden index i takový, že $\gamma_i=-\infty$, a platí

$$\Psi_n(\boldsymbol{\varphi}^{(k)})=-\sum_{i=1}^n\varphi_i^{(k)}+n\stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow}\infty.$$

Jestliže existuje $j>1$ takové, že $\gamma_j=\infty$, pak

$$\begin{aligned}
1 &\geq \int_{X_{j-1}}^{X_j}\exp\left(\varphi^{(k)}(x)\right)dx\\
&= \frac{1}{\frac{\varphi_j^{(k)}-\varphi_{j-1}^{(k)}}{X_j-X_{j-1}}}\left(\exp(\varphi_j^{(k)})-\exp(\varphi_{j-1}^{(k)})\right)\\
&= (X_j-X_{j-1})\exp(\varphi_j^{(k)})\frac{1-\exp(-\delta_k)}{\delta_k}\\
&\geq (X_j-X_{j-1})\exp(\varphi_j^{(k)})(1+\delta_k)^{-1},
\end{aligned}$$

kde $\delta_k = \varphi_j^{(k)} - \varphi_{j-1}^{(k)}$. Poslední nerovnost je důsledkem vztahu

$$\frac{1-\exp(-x)}{x} \geq \frac{1}{(1+x)}, \quad x \geq 0,$$

což plyne z toho, že pro $x \geq 0$ platí $\exp(x) \geq 1+x$.
Protože $\gamma_j = \infty$, je

$$-\varphi_j^{(k)} - \varphi_{j-1}^{(k)} = -2\varphi_j^{(k)} + \delta_k \geq -2\varphi_j^{(k)} + (X_j - X_{j-1})\exp(\varphi_j^{(k)}) - 1 \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Pro $j < n$ zcela analogicky dostaneme, že

$$-\varphi_j^{(k)} - \varphi_{j+1}^{(k)} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Z těchto úvah vyplývá, že

$$\Psi_n(\varphi^{(k)}) \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

K dokončení důkazu zbývá ukázat jednoznačnost. Nechť $\lambda \in (0,1)$ a $\varphi^1, \varphi^2 : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$ jsou konkávní funkce, pro které

$$\int \exp(\varphi^1(x))dx < \infty, \quad \int \exp(\varphi^2(x))dx < \infty$$

a $\mathrm{Leb}\{\varphi^1 \neq \varphi^2\} > 0$. Protože exponeciální funkce je striktně konvexní, pro $\lambda \in (0,1)$ platí

$$\begin{aligned}
\Psi_n & \quad \big((1-\lambda)\varphi^1 + \lambda\varphi^2\big) \\
= & \quad -\sum_{i=1}^n [(1-\lambda)\varphi^1(X_i) + \lambda\varphi^2(X_i)] + n\int [\exp((1-\lambda)\varphi^1(x) + \lambda\varphi^2(x))]dx \\
< & \quad -(1-\lambda)\sum_{i=1}^n \varphi^1(X_i) - \lambda\sum_{i=1}^n \varphi^2(X_i) + (1-\lambda)n\int \exp(\varphi^1(x))dx \\
& \qquad +\lambda n \int \exp(\varphi^2(x))dx \\
= & \quad (1-\lambda)\Psi(\varphi^1) + \lambda\Psi(\varphi^2),
\end{aligned}$$

a tedy $\Psi_n(\varphi)$ je striktně konvexní a minimum je určeno jednoznačně. □

Z této věty plyne, že odhad $\hat{f}_n$ je jednoznačně určen vektorem

$$\hat{\varphi} = (\hat{\varphi}_n(X_i))_{i=1}^n.$$

Jestliže h je spojitá po částech lineární funkce na intervalu $[X_1, X_n]$, označme body zlomu jako

$$S_n(h) = \{X_1, X_n\} \cup \{y \in (X_1, X_n) \,|\, h(y-) \neq h(y+)\}.$$

Pro $\hat{\varphi}_n$ platí $S_n(\hat{\varphi}_n) \subset \{X_1, \ldots, X_n\}$.

Věta 3.2.9. *Nechť $\tilde{\varphi}$ je konkávní funkce na intervalu $[X_1, X_n]$. Potom $\tilde{\varphi} = \hat{\varphi}_n$ právě tehdy, když*

$$\int \Delta(x) d\mathbb{F}_n(x) \leq \int \Delta(x) \exp \tilde{\varphi}(x) dx \tag{3.4}$$

pro libovolnou funkci $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takovou, že $\tilde{\varphi} + \lambda\Delta$ je konkávní pro nějaké $\lambda > 0$.

Důkaz. Důkaz je uveden v [6]. □

Důsledek 3.2.10. *Platí*

$$\mu(\hat{F}_n) = \mu(\mathbb{F}_n) \tag{3.5}$$

a

$$var(\hat{F}_n) \leq var(\mathbb{F}_n). \tag{3.6}$$

Důkaz. Nechť $\tilde{\varphi} = \hat{\varphi}_n$, položíme-li v Tvrzení 3.2.9 $\Delta(x) = \pm x$, $\Delta(x) = -x^2$ a $\Delta(x) = -1$, existuje $\lambda > 0$, že funkce $\hat{\varphi}_n(x) + \lambda x$, $\hat{\varphi}_n(x) - \lambda x$, $\hat{\varphi}_n(x) - \lambda x^2$ a $\hat{\varphi}_n(x) - \lambda$ jsou konkávní. Pak z (3.4) plynou nerovnosti

$$\begin{aligned} \int x d\mathbb{F}_n(x) &\leq \int x \exp \hat{\varphi}_n(x) dx & (3.7)\\ -\int x d\mathbb{F}_n(x) &\leq -\int x \exp \hat{\varphi}_n(x) dx & (3.8)\\ -\int x^2 d\mathbb{F}_n(x) &\leq -\int x^2 \exp \hat{\varphi}_n(x) dx & (3.9)\\ -\int d\mathbb{F}_n(x) &\leq -\int \exp \hat{\varphi}_n(x) dx. & (3.10) \end{aligned}$$

Pro rozdělení s distribuční funkcí G platí

$$\mu(G) = \int u \, dG(u)$$

a

$$var(G) = \int (u - \mu(G))^2 \, dG(u).$$

Podle definice je

$$\hat{F}_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \exp \hat{\varphi}_n(t) dt,$$

kombinací (3.7) a (3.8) ihned dostaneme (3.5).

Dále s využitím právě dokázané rovnosti (3.5) a nerovností (3.9) a (3.10) dostaneme

$$\begin{aligned} var(\hat{F}_n) &= \int \left(x - \mu(\hat{F}_n)\right)^2 d\hat{F}_n(x) \\ &= \int x^2 d\hat{F}_n(x) - 2\mu(\hat{F}_n) \int x d\hat{F}_n(x) + \left(\mu(\hat{F}_n)\right)^2 \int d\hat{F}_n(x) \\ &\leq \int x^2 d\mathbb{F}_n(x) - 2\mu(\mathbb{F}_n) \int x d\mathbb{F}_n(x) + (\mu(\mathbb{F}_n))^2 \int d\mathbb{F}_n(x) \\ &= var(\mathbb{F}_n), \end{aligned}$$

čímž je (3.6) dokázáno. □

Věta 3.2.11. *Nechť $\tilde{\varphi}$ je konkávní, po částech lineární funkce na $[X_1, X_n]$ s body zlomu v $\{X_1, \ldots, X_n\}$, $\tilde{\varphi} = -\infty$, $x \notin [X_1, X_n]$. Definujme*

$$\tilde{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} \exp \tilde{\varphi}(u) du$$

a nechť $\tilde{F}(X_n) = 1$. Potom $\tilde{\varphi} = \hat{\varphi}_n$ a $\tilde{F} = \hat{F}_n$ právě tehdy, když pro libovolné $t \in [X_1, X_n]$

$$\int_{X_1}^{t} \tilde{F}(u) du \leq \int_{X_1}^{t} \mathbb{F}_n(u) du,$$

rovnost nastává v případě, že t je bod zlomu funkce $\tilde{\varphi}$, tj. $t \in S_n(\tilde{\varphi})$.

Důkaz. Důkaz je uveden v [6]. □

Z této věty plynou některé vlastnosti odhadu $\hat{F}_n$, například

$$\hat{F}_n(X_1) = 0 \quad \text{a} \quad \hat{F}_n(X_n) = 1.$$

Také vidíme, že odhad $\hat{F}_n$ je velmi blízký empirické distribuční funkci $\mathbb{F}_n$ v bodech zlomu funkce $\hat{\varphi}_n$.

Důsledek 3.2.12. *Platí*

$$\mathbb{F}_n(x) - \frac{1}{n} \leq \tilde{F}_n(x) \leq \mathbb{F}_n(x), \quad \textit{pro } x \in S_n(\tilde{\varphi}_n).$$

Důkaz. Pro $t \in S_n(\hat{\varphi}_n)$ a $a, b \in [X_1, X_n]$, $a < t < b$ z Věty 3.2.11 plyne

$$\int_{X_1}^{t} \hat{F}(u) du = \int_{X_1}^{t} \mathbb{F}_n(u) du$$

a

$$\int_{X_1}^{a} \hat{F}(u) du \leq \int_{X_1}^{a} \mathbb{F}_n(u) du,$$

$$\int_{X_1}^{b} \hat{F}(u) du \leq \int_{X_1}^{b} \mathbb{F}_n(u) du,$$

proto

$$\frac{1}{b-t} \int_{t}^{b} \hat{F}_n(u) du \leq \frac{1}{b-t} \int_{t}^{b} \mathbb{F}_n(u) du$$

a

$$\frac{1}{t-a} \int_{a}^{t} \hat{F}_n(u) du \geq \frac{1}{t-a} \int_{a}^{t} \mathbb{F}_n(u) du.$$

Limitním přechodem $b \searrow t$ dostaneme

$$\hat{F}_n(t) \leq \mathbb{F}_n(t)$$

a pro $a \nearrow t$

$$\hat{F}_n(t) \geq \mathbb{F}_n(t-) = \mathbb{F}_n(t) - \frac{1}{n}.$$

□

Funkce

$$D(t) = \int_{X_1}^{t} (\hat{F}_n - \mathbb{F}_n)(u) du, \quad t \in [X_1, X_n] \tag{3.11}$$

je podle Věty 3.2.11 nekladná a je rovna nule v bodech zlomu $S_n(\hat{\varphi}_n)$.

3.2.3 Příklad

Odhad hustoty ilustrujeme na datech s použitím softwaru `R`. Budeme využívat balíček `logcondens`, především funkci `logConDens`, která nám dává log-konkávní odhad hustoty. Kód je součástí přílohy A.

Vygenerujeme náhodný výběr z Gamma rozdělení s parametrem $c = 2$ o velikosti $n = 100$. Na Obrázku 3.1 je zobrazena skutečná hustota

$$f(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(2)}, \quad x \in [0, \infty)$$

(tj. hustota Gamma(2)), neparametrický odhad hustoty metodou maximální věrohodnosti a pro porovnání jádrový odhad hustoty. Jádrový odhad hustoty f je definován jako

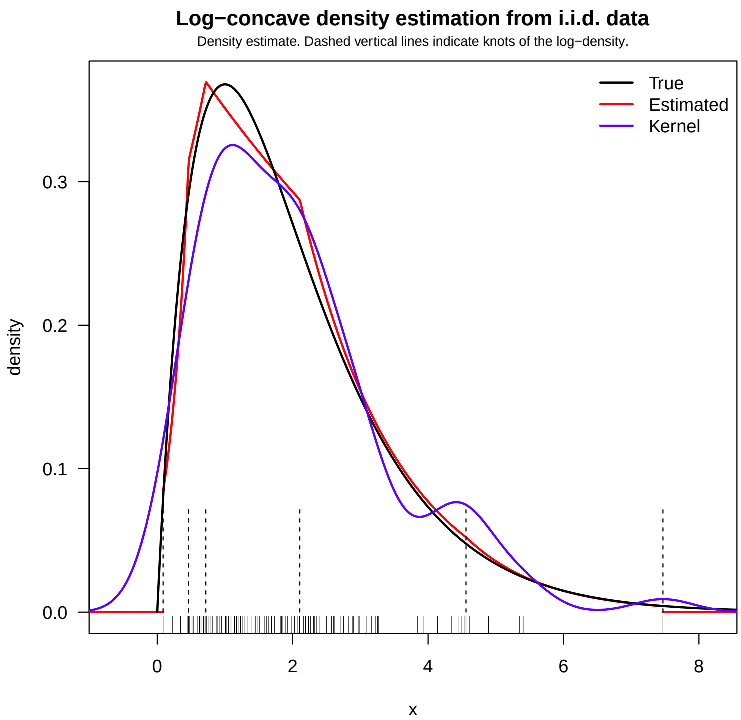
$$g_{h,K}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

kde K je jádro, v našem případě používáme Gaussovské, tedy

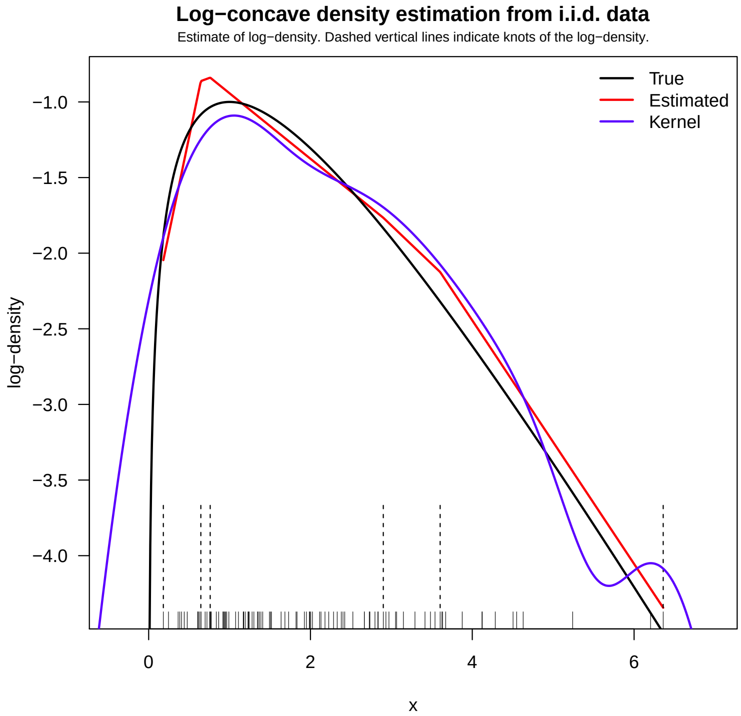
$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

a h je vyhlazovací parametr, který udává šířku vyhlazovacího okna.

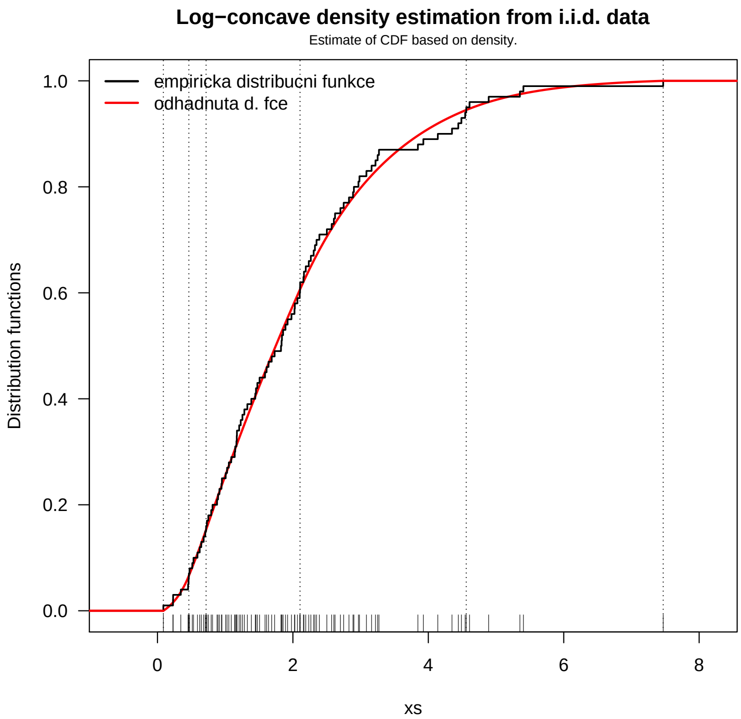
Na Obrázku 3.2 vidíme funkci $\varphi = \log f$, která je po částech lineární. Distribuční funkce je na Obrázku 3.3 a funkce $D(t)$ (3.11) na Obrázku 3.4.



Obrázek 3.1: Hustota Gamma(2)

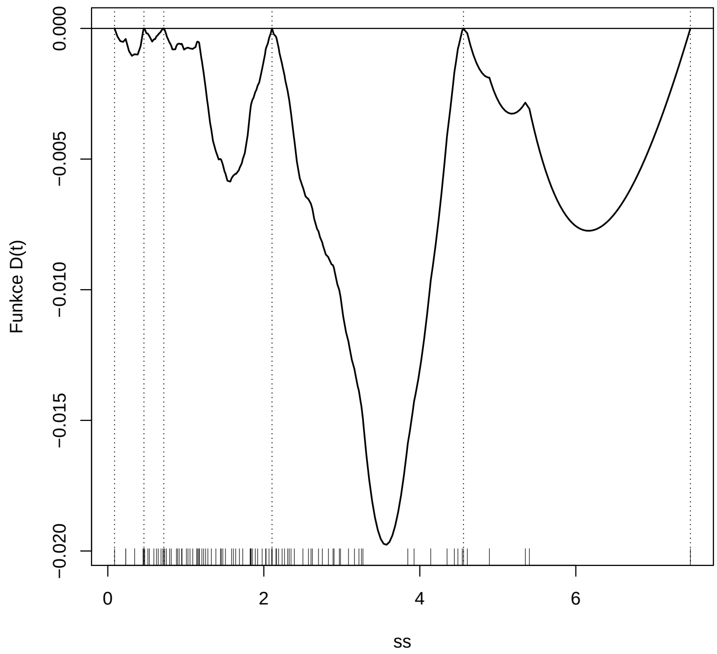


Obrázek 3.2: Log-hustota Gamma(2)



Obrázek 3.3: Distribuční funkce Gamma(2)

Podíváme se, jak dopadne náš odhad na datech, jejichž rozdělení není log-konkávní. Vygenerujeme náhodný výběr z Gamma rozdělení s parametrem $c = \frac{1}{2}$

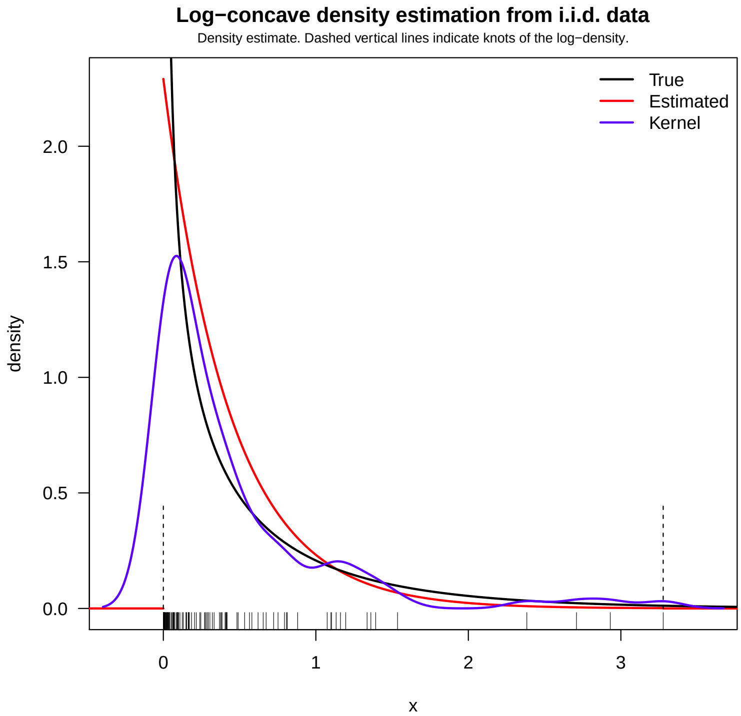


Obrázek 3.4: Funkce D(t) pro Gamma(2)

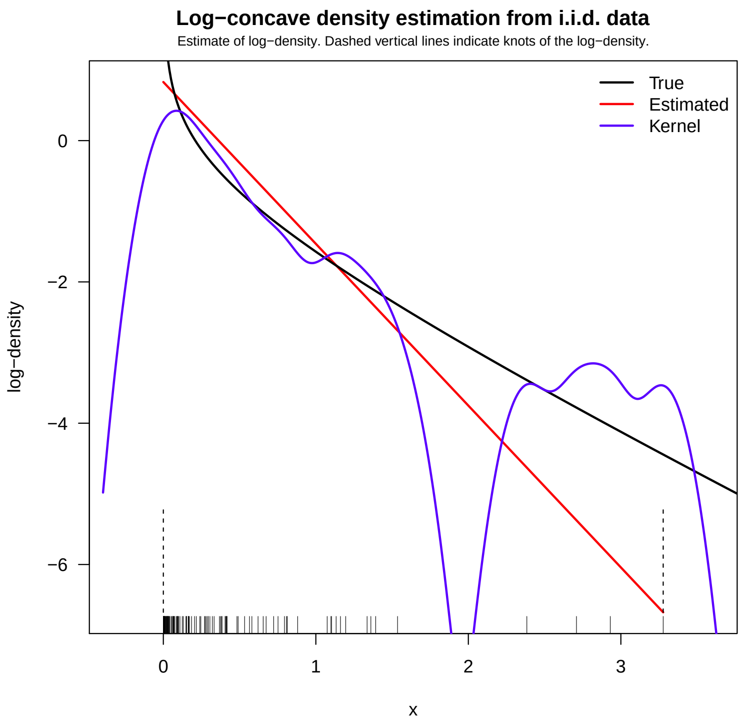
o velikosti $n = 100$. Na Obrázku 3.5 je zobrazena skutečná hustota

$$f(x) = \frac{x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(\frac{1}{2})}, \quad x \in [0, \infty)$$

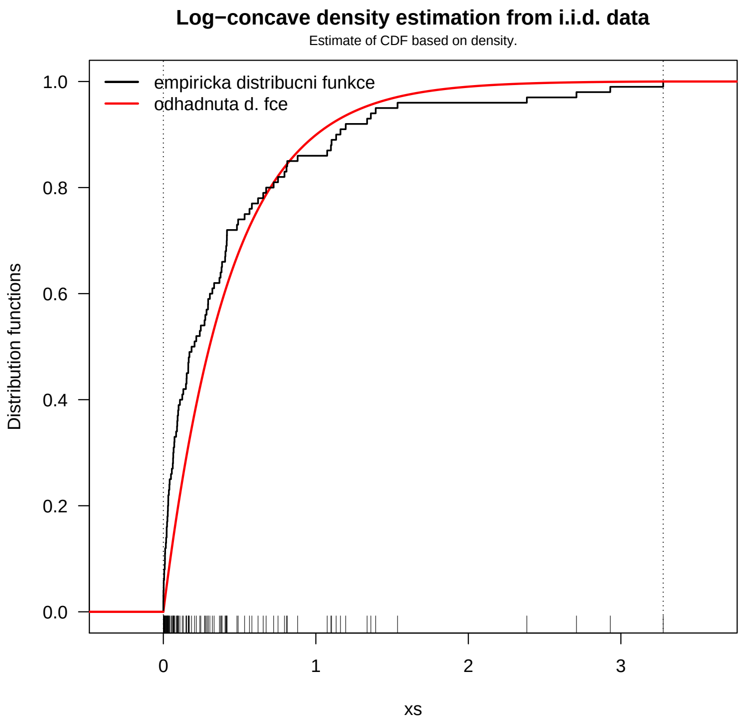
(tj. hustota Gamma($\frac{1}{2}$)), neparametrický odhad hustoty metodou maximální věrohodnosti a pro porovnání jádrový odhad hustoty s použitím Gaussova jádra. Na Obrázku 3.6 vidíme funkci $\varphi = \log f$, která je po částech lineární. Distribuční funkce je na Obrázku 3.7.



Obrázek 3.5: Hustota Gamma($\frac{1}{2}$)



Obrázek 3.6: Log-hustota Gamma($\frac{1}{2}$)



Obrázek 3.7: Distribuční funkce Gamma($\frac{1}{2}$)

3.2.4 Vícerozměrný případ

Nechť $X_1, X_2, \dots$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných vektorů v $\mathbb{R}^d$ mající rozdělení s hustotou f_0. Pro $n > d$ označme $\hat{f}_n$ maximálně věrohodný odhad f_0 založený na $X_1, \dots, X_n$. Potom

$$\begin{aligned}\hat{f}_n &= \operatorname{argmax}\left\{\prod_{i=1}^n f(X_i) \;\middle|\; f \in \mathbb{R}^d \text{ log-konkávní}\right\}\\ &= \operatorname{argmax}\left\{\sum_{i=1}^n \log f(X_i) \;\middle|\; f \in \mathbb{R}^d \text{ log-konkávní}\right\}.\end{aligned}$$

Věta 3.2.13. *Nechť $X_1, \dots, X_n$, jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné vektory v $\mathbb{R}^d$, $n > d$. Potom s pravděpodobností jedna existuje jednoznačně určená log-konkávní funkce $\hat{f}_n$, která maximalizuje věrohodnostní funkci*

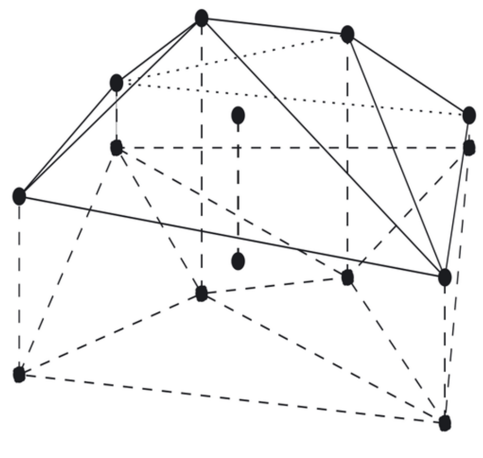
$$L(f) = \sum_{i=1}^n \log f(X_i).$$

Důkaz. Důkaz je uveden v [2]. □

Funkce $\hat{f}_n$ nejde vyjádřit uzavřenou formulí, ale $\log \hat{f}_n$ patří do třídy „trojúhelníkových“ funkcí. Pro libovolný vektor $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ je „trojúhelníková“ funkce $\bar{h}_y : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definována následovně

$$\bar{h}_y(x) = \inf\{h(x) \mid h \text{ konkávní}, \; h(X_i) \geq y_i, \; i = 1, \dots, n\}.$$

Ukázku této funkce v $\mathbb{R}^2$ najdeme na Obrázku 3.8, který je převzat z [2].



Obrázek 3.8: Příklad „trojúhelníkové“ funkce v $\mathbb{R}^2$

Předpokládejme, že vektory $X_1, \dots, X_n$ jsou různé, jejich konvexní obal, který budeme značit následovně

$$C_n = \operatorname{conv}(\{X_1, \dots, X_n\}),$$

má dimenzi d. Podobně jako v jednorozměrném případě ve Větě 3.2.6 věrohodnostní funkci modifikujeme

$$\Psi_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log f(X_i) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx.$$

Pro účely výpočtu dále aproximujeme, odhadnutou funkci počítáme pouze přibližně. K výpočtu můžeme použít například software `R`, kde v balíčku `LogConcDEAD` najdeme funkci `mlelcd`.

Pro funkci $f = \operatorname{argmax}\{\Psi_n(f) \bigm| f \text{ log-konkávní}\}$ jsou v důkazu Věty 3.2.13 v [2] dokázány následující vlastnosti

- $f(x) > 0 \quad \text{pro } x \in C_n,$
- $f(x) = 0 \quad \text{pro } x \notin C_n,$
- $\log f \in \{\bar{h}_y \mid y \in \mathbb{R}^n\},$
- f je log-konkávní hustota v $\mathbb{R}^d$.

Závěr

V práci jsme se seznámili s vlastnostmi log-konkávních rozdělení. Dalo by se říci, že log-konkávní rozdělení jsou „zobecněním“ normálního rozdělení. Například součet dvou nezávislých náhodných veličin s log-konkávním rozdělením je opět log-konkávní náhodná veličina.

Třída log-konkávních rozdělení je velice rozsáhlá, zahrnuje většinu nejznámějších rozdělení. Například normální, exponenciální a logistické rozdělení je log-konkávní, pro určité hodnoty parametrů také Gamma, Beta a χ^2. Pozor na hustotu log-normálního rozdělení, ta log-konkávní není, je naopak log-konvexní.

Ukázali jsme aplikaci log-konkávních funkcí v teorii spolehlivosti, ve stochastickém programování a při neparametrických odhadech hustoty. Další příklady použití v ekonomii jsou uvedeny v [1]. Pro odhad log-konkávní hustoty jsou zpracovány asymptotické vlastnosti (např. v [6]), vychází konzistence. Odhady vycházejí dobře, i když rozdělení není log-konkávní.

Seznam použité literatury

[1] Bagnoli, M. a T. Bergstrom. *Log-Concave Probability and Its Applications.* UC Santa Barbara: Department of Economics, UCSB, 2004. Dostupné také z: http://www.escholarship.org/uc/item/62c3d5c4

[2] Cule, M. Maximum likelihood estimation of a multivariate log-concave density. *University of Cambridge.* 2009. Dostupné také z: https://www.repository.cam.ac.uk/bitstream/handle/1810/237061/cule_thesis.pdf?sequence=1

[3] Devroye, L. A Simple Generator for Discrete Log-Concave Distributions. *Computing.* 1987, Vol. 39, 87 - 91. Dostupné také z: http://luc.devroye.org/devroye-discretelogconcave-1987.pdf

[4] Dupačová, J. Stochastické programování. Vysokoškolská učebnice. Ministerstvo školství ČSR, Praha, 1986.

[5] Dümbgen, L., Rufibach, K. logcondens: Computations Related to Univariate Log-Concave Density Estimation. *Journal of Statistical Software.* 2011, Vol. 39, No 6, 1-28. Dostupné také z: http://www.jstatsoft.org/v39/i06/paper

[6] Dümbgen, L., Rufibach, K. Maximum likelihood estimation of a log-concave density and its distribution function: Basic properties and uniform consistency. *Bernoulli.* 2009, Vol. 15, No. 1, 10-68. Dostupné také z: http://arxiv.org/pdf/0709.0334.pdf

[7] Horn, R. a Ch. John. *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, 1985. Str. 466 - 467

[8] Ibragimov, I. On the composition of unimodal distributions. Theor. Probability Appl., 1956, 255-260.

[9] Prèkopa, A. Logarithmic concave measures with application to stochastic programming. *Acta Scientiarum Mathematicarum.* 32 (1971), 301–316. Dostupné také z: http://rutcor.rutgers.edu/~prekopa/SCIENT1.pdf

[10] Prèkopa, A. On logarithmic concave measures and functions. *Acta Scientiarum Mathematicarum.* 34 (1973), 335–343. Dostupné také z: http://rutcor.rutgers.edu/~prekopa/SCIENT2.pdf

[11] Rufibach, K. Log-Concave Density Estimation and Bumb Hunting for i.i.d. Observations. PhD Thesis, University of Bern, Switzerland and Georg-August University of Goettingen, Germany, 2006. Dostupné také z: http://www.stub.unibe.ch/download/eldiss/06rufibach_k.pdf

[12] Ruszczyński, A. a A. Shapiro. *Handbooks in Operations Research and Management Science: Stochastic Programming.* Sv. 10. Amsterdam: Elsevier, 2003.

[13] Schuhmacher, D., A. Hüsler a L. Dümbgen. Multivariate Log-Concave Distributions as a Nearly Parametric Model. *Statistics & Risk Modeling*. 2011, Vol. 28, No. 3, 277-295. Dostupné také z: http://www.dominic.schuhmacher.name/papers/strm.2011.1073.pdf

[14] Silverman, B. On the Estimation of a Probability Density Function by the Maximum Penalized Likelihood Method. *The Annals of Statistics*. 1982, Vol. 10, No. 3, 795-810. Dostupné také z: http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.aos/1176345872

Seznam tabulek

Přílohy

A Použití funkce logConDens

Použití funkce `logConDens` z balíčku `logcondens` si ukážeme na příkladu Gamma rozdělení s parametrem $c = 2$. Pomocí následující části kódu dostaneme Obrázky 3.1 až 3.4.

```
> library("logcondens")
> set.seed=1000
>
> N = 100
> shape <- 2
> x <- sort(rgamma(N, shape))
> xs <- seq(0, 10, by=0.01)
> f_true <- dgamma(xs, shape)
> logCon <- logConDens(x, smoothed=FALSE, print=FALSE)
> kernelEst <- density(x, kernel="gaussian")
>
> # estimated logconcave density
> plot(logCon, which="density", legend.pos="none")
> # true density
> lines(xs, f_true, lwd=2)
> # kernel estimate
> lines(kernelEst, col=4, lwd=2)
> legend("topright", c("True", "Estimated", "Kernel"), col=c(1,2,4),
+ lwd=2, bty="n")
>
> # estimated log-density
> plot(logCon, which="log-density", legend.pos="none")
> # true log-density
> lines(xs, log(f_true), lwd=2)
> # log of kernel estimate
> lines(kernelEst$x, log(kernelEst$y), col=4, lwd=2)
> legend("topright", c("True", "Estimated",  "Kernel"), col=c(1,2,4),
+ lwd=2, bty="n")
>
> # estimated distribution function
> plot(logCon, which="CDF", legend.pos="none")
> legend("topleft", c("empiricka distribucni funkce", "odhadnuta d. fce"),
+ col=c(1,2), lwd=2, bty="n")
>
> n <- logCon$n
> xn <- logCon$xn
> ss <- sort(unique(c(x, seq(min(x), max(x), length=200))))
> Dt <- intF(ss, logCon) - intECDF(ss, xn)
>
> plot(ss, Dt, type='n', ylab="Funkce D(t)")
```

```
> lines(ss, Dt, lwd=1.5)
> rug(x)
> abline(v=logCon$knots, lty=3)
> abline(h=0, lty=1)
```