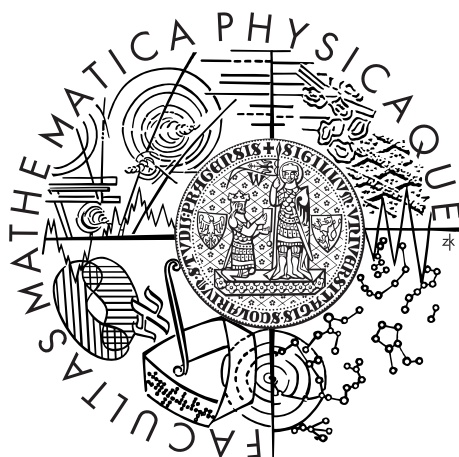


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Matúš Baniar

Ekonometrická analýza finančních dat

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2014

Ďakujem vedúcej mojej diplomovej práce RNDr. Jitke Zichovej, Dr., za odborné rady a pripomienky a najmä za čas, ktorý mi venovala pri konzultáciach. Moje poďakovanie patrí aj rodičom, ktorí ma počas celého štúdia podporovali.

Vyhlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďalších odborných zdrojov.

Beriem na vedomie, že sa na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platnom znení, najmä skutočnosť, že Univerzita Karlova v Prahe má právo na uzavrenie licenčnej zmluvy o použití tejto práce ako školského diela podľa §60 odst. 1 autorského zákona.

V Prahe dňa 6. apríla 2014

Matúš Baniar

Název práce: Ekonometrická analýza finančních dat

Autor: Matúš Baniar

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Finanční a ekonomická data často obsahují kombinaci časové a průřezové informace. Při aplikaci matematických modelů na data takového charakteru může být vhodné uvažovat o soustavách ekonometrických rovnic. Na začátku práce se věnujeme jejich obecné formulaci, přičemž se zabýváme typy poměnných vstupujících do soustav. V další části popisujeme některé konkrétní případy: soustava SUR, soustava simultánních rovnic a model vektorové autoregrese. Pro tyto případy také popisujeme metody odhadování parametrů a pojednáváme o jejich vlastnostech. V poslední části jsou potom probrané metody aplikovány na reálná data s využitím vhodného softwaru.

Klíčová slova: exogenita, SUR soustava, simultánní rovnice, VAR

Title: Econometric Analysis of Financial Data

Author: Matúš Baniar

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

Abstract: In some occasions, financial data can be represented as a combination of cross-sectional and time-series information. Hence it could be convenient to consider a system of econometric equations for modeling such data sets. At the beginning of this thesis, we describe general definitions and we talk about different types of variables from the perspective of exogeneity. Later, we describe some specific cases of these equations: SUR system, simultaneous equation models and the model of vector autoregression. For selected models, we also discuss estimation methods and their properties. In the final section, the described approach is applied to real financial data making use of appropriate software.

Keywords: exogeneity, SUR system, simultaneous equations, VAR

Názov práce: Ekonometrická analýza finančných dát

Autor: Matúš Baniar

Katedra: Katedra pravdepodobnosti a matematickej statistiky

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr., Katedra pravdepodobnosti a matematickej statistiky

Abstrakt: Finančné a ekonomické dáta často obsahujú kombináciu časovej a prierezovej informácie. Pri aplikovaní matematických modelov na dáta takéhoto charakteru môže byť vhodné uvažovať o sústavách ekonometrických rovníc. Na začiatku práce sa venujeme obcej formulácii, pričom sa zaoberáme typmi premenných vstupujúcich do sústav. V ďalšej časti popisujeme niektoré konkrétne prípady: sústavu SUR, sústavu simultánnych rovníc a model vektorovej autoregresie. Pre tieto prípady tiež popisujeme metódy odhadovania parametrov a pojednávame o ich vlastnostiach. V poslednej časti sú potom popísané metódy aplikované na reálne dáta s využitím vhodného softvéru.

Kľúčové slová: exogenita, SUR sústava, simultánne rovnice, VAR

Obsah

Obsah	1
Zoznam obrázkov	2
Zoznam tabuliek	3
Úvod	5
1 Viacrovnicové ekonometrické sústavy	6
1.1 Obecná formulácia	6
1.2 Exogenné a endogenné premenné	7
2 Špeciálne prípady viacrovnicových sústav	10
2.1 SUR sústava	10
2.2 Sústava simultánnych rovníc	12
2.3 Vektorová autoregresia (VAR)	15
3 Odhadovanie	21
3.1 Odhady parametrov v SUR sústave	21
3.2 Odhady v sústave simultánnych rovníc	23
3.2.1 Nepriamý odhad metódou najmenších štvorcov	23
3.2.2 Dvojstupňový odhad metódou najmenších štvorcov	25
3.2.3 Trojstupňový odhad metódou najmenších štvorcov	27
3.2.4 Testy exogenity	28
3.3 Odhady parametrov modelu VAR	28
3.3.1 Identifikácia modelu	28
3.3.2 Odhad metódou najmenších štvorcov	30
3.3.3 Odhad pomocou Yuleových-Walkerových rovníc	30
3.3.4 ML-odhad	31
3.3.5 Diagnostika modelu VAR	32
3.3.6 Predpovede v modeli VAR	33
4 Aplikácia	34
4.1 Model SUR	34
4.1.1 Príklad SUR	34
4.2 Sústava simultánnych rovníc	39
4.2.1 Príklad SEM	39
4.3 Model VAR	44
4.3.1 Príklad VAR 1	44
4.3.2 Príklad VAR 2	51
4.3.3 Príklad VAR 3	55
Literatúra	62

Zoznam obrázkov

4.1	Ročné miery inflácie v USA a Kanade	34
4.2	Skutočné hodnoty miery inflácie v USA spolu s preloženými hodnotami	37
4.3	Skutočné hodnoty miery inflácie v Kanade spolu s preloženými hodnotami	37
4.4	Skutočné hodnoty miery inflácie v USA spolu s preloženými hodnotami	40
4.5	Skutočné hodnoty miery inflácie v Kanade spolu s preloženými hodnotami	41
4.6	Korene polynómu $\det(\mathbf{I}_2 z^2 - \Phi_1 z - \Phi_2)$ procesu (4.9)	45
4.7	100 pozorovaní časových radov y_{1t} a y_{2t} vygenerovaných procesom (4.9)	45
4.8	Korene polynómu $\det(\mathbf{I}_2 z^2 - \hat{\Phi}_1 z - \hat{\Phi}_2)$ pre obe odhadové metódy	47
4.9	Grafické zobrazenie odhadnutej maticovej autokorelačnej funkcie odhadnutých rezíduí s kritickou hodnotou Bartletovej aproximácie v prípade odhadu metódou najmenších štvorcov	48
4.10	Grafické zobrazenie odhadnutej maticovej autokorelačnej funkcie odhadnutých rezíduí s kritickou hodnotou Bartletovej aproximácie v prípade odhadu metódou Yule-Walkerových rovníc	49
4.11	Grafické zobrazenie desiatich predpovedí odhadnutého modelu	50
4.12	Korene polynómu $\det(\mathbf{I}_2 z^2 - \Phi_1 z - \Phi_2)$ procesu (4.14)	51
4.13	100 pozorovaní časových radov y_{1t} a y_{2t} vygenerovaných procesom (4.14)	52
4.14	Korene polynómu $\det(\mathbf{I}_2 z^2 - \hat{\Phi}_1 z - \hat{\Phi}_2)$ pre obe odhadové metódy	53
4.15	Grafické zobrazenie odhadnutej maticovej autokorelačnej funkcie odhadnutých rezíduí s kritickou hodnotou Bartletovej aproximácie v prípade odhadu metódou najmenších štvorcov	54
4.16	Grafické zobrazenie odhadnutej maticovej autokorelačnej funkcie odhadnutých rezíduí s kritickou hodnotou Bartletovej aproximácie v prípade odhadu metódou Yule-Walkerových rovníc	54
4.17	Denný počet stiahnutí softvéru <i>avast! Mobile Security</i> v troch sledovaných regiónoch v období prvých piatich mesiacov roku 2013	55
4.18	Grafy transformovaných radov	56
4.19	Korene polynómu $\det(\mathbf{I}_3 z - \hat{\Phi}_1)$	58
4.20	Grafické zobrazenie odhadnutej maticová autokorelačnej funkcie odhadnutých rezíduí s kritickou hodnotou Bartletovej aproximácie	58
4.21	Grafické zobrazenie piatich predpovedí odhadnutého modelu	60
4.22	Grafické zobrazenie piatich predpovedí pôvodných časových radov zobrazené spolu s poslednými desiatimi skutočnými hodnotami	60
4.23	Porovnanie predpovedí modelu (prerušované čiary) so skutočnými hodnotami (spojité čiary)	61

Zoznam tabuliek

4.1	Základné popisné štatistiky u sledovaných veličín	35
4.2	Výberové korelačné koeficienty pre pozorované veličiny v USA . . .	35
4.3	Výberové korelačné koeficienty pre pozorované veličiny v Kanade . . .	36
4.4	Odhadnuté parametre modelu individuálnym OLS-odhadom a Aitkenovým dvojstupňovým odhadom	36
4.5	Charakteristiky presnosti modelu (reziduálny súčet štvorcov, koeficient determinácie a korigovaný koeficient determinácie)	37
4.6	Výstup v programe <i>EViews 7</i> pre odhad SUR sústavy	38
4.7	Charakteristiky presnosti modelu (reziduálny súčet štvorcov, koeficient determinácie a korigovaný koeficient determinácie)	40
4.8	Výstup v programe <i>EViews 7</i> pre odhad sústavy simultánnych rovníc pomocou 2SLS-odhadu	42
4.9	Výstup v programe <i>EViews 7</i> pre odhad sústavy simultánnych rovníc pomocou 3SLS-odhadu	43
4.10	Hodnoty informačných kritérií v rámci identifikácie modelu VAR pre $T = 90$	46
4.11	Reziduálny súčet štvorcov v odhadnutom modeli pre jednotlivé rovnice	47
4.12	Portmanteau test nekorelovanosti rezíduí	49
4.13	Hodnoty predpovedí odhadnutého modelu na 10 krokov dopredu	50
4.14	Reziduálny súčet štvorcov v odhadnutom modeli pre jednotlivé rovnice	52
4.15	Portmanteau test nekorelovanosti rezíduí	55
4.16	Hodnoty informačných kritérií v rámci identifikácie modelu VAR pre $T = 140$	57
4.17	Portmanteau test nekorelovanosti rezíduí	59
4.18	Hodnoty predpovedí odhadnutého modelu na 5 krokov dopredu	59

Použité značenie

\mathbb{Z}	množina celých čísel
\mathbb{N}	množina prirodzených čísel
\mathbb{N}_0	množina nezáporných celých čísel
\mathbb{C}	množina komplexných čísel
$\exp(x)$	exponenciála čísla x
$\ln(x) = \log(x)$	prirodzený logaritmus čísla $x > 0$
\mathbf{x}^\top	transpozícia vektoru alebo matice \mathbf{x}
$\det(\mathbf{A}) = \mathbf{A} $	determinant matice \mathbf{A}
$h(\mathbf{A})$	hodnota matice \mathbf{A}
$\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$	diagonálna matica s prvkami a_1, \dots, a_n na diagonále
\mathbf{I}_k	jednotková matica ($k \times k$)
$\mathbf{0}$	matica, ktorej všetky prvky sú rovné 0
$\text{tr}(\mathbf{A})$	stopa matice \mathbf{A}
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	Kroneckerov súčin matíc \mathbf{A} a \mathbf{B}
$\mathcal{D}(X)$	rozdelenie náhodnej veličiny X
$E(X)$	stredná hodnota náhodnej veličiny X
$\text{var}(X)$	rozptyl náhodnej veličiny X
$\text{cov}(X, Y)$	kovariancia náhodných veličín X a Y
$N_m(\mu, \Sigma)$	m -rozmerné normálne rozdelenie s parametrami μ, Σ
\xrightarrow{d}	konvergencia v distribúcií
OLS	metóda najmenších štvorcov
SSE	súčet štvorcov chýb

Úvod

Aplikácia matematicko-štatistických metód na vysvetlenie správania ekonomických a finančných dát je známa pod názvom *finančná ekonometria* alebo *ekonometrická analýza finančných časových dát*. Táto disciplína je v dnešnej dobe vysoko rozšírená a z toho dôvodu sa dáta finančného charakteru zaznamenávajú a ukládajú v obrovských množstvách. Jedným z možných prístupov k analýze takýchto dát sú viacrovnícové ekonometrické systavy, kedy v modeloch pracujeme s viacerými rovnicami zároveň, pričom predpokladáme ich prepojenie. Medzi takéto prístupy patria SUR sústava, sústava simultánnych rovníc a model vektorovej autoregresie (VAR), na ktoré sa v tejto práci zameriavame.

Práca je rozdelená na teoretickú časť a praktickú aplikáciu na simulovaných a reálnych dátach s využitím vhodného softvéru. V prvej časti prvej kapitoly sa venujeme obcej formulácii viacrovnícovej ekonometrickej sústavy. Druhá časť tejto kapitoly sa zaoberá typmi premenných vstupujúcich do sústavy. V druhej kapitole zadefinujeme konkrétne prípady viacrovnícových sústav. Prvé dve kapitoly sú taktiež doplnené o jednoduché príklady uvažovaných sústav. Tretia kapitola je venovaná odhadovým procedúram sústav definovaných v druhej kapitole. Posledná kapitola je aplikáciou popísaných metód na umelo generovaných dátach a na reálnych finančných dátach. V príkladoch boli použité najmä softvéry *EViews 7* a *Wolfram Mathematica 9*. Pre účely praktickej aplikácie bol tiež vytvorený program v softvéri *Wolfram Mathematica 9* umožňujúci komplexnú konštrukciu modelu VAR. Demonštrácia tohto programu bola publikovaná na webových stránkach *Wolfram Demonstrations Project* (viď [4]).

Základnými zdrojmi, z ktorých vychádza praktická časť práce sú tituly [5] a [6]. Pri teórii vektorovej autoregresie vychádzame najmä z kníh [8] a [10]. Ďalšie doplnkové zdroje sú vždy citované na príslušných miestach. Ilustračné príklady v teoretickej časti, ako aj časť praktická, boli vytvorené autorom práce. Zdrojové kódy výpočtov z praktickej časti sú dostupné na priloženom CD.

1. Viacrovnícové ekonometrické sústavy

1.1 Obecná formulácia

V ekonometrickej analýze časových radov si vo veľa prípadoch modely vystačia s jednou vysvetľovanou premennou, kedy na popis obvykle stačí jediná rovnica. Takýmto príkladom je klasický model *lineárnej regresie*, ktorý môžeme vyjadriť v tvare

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \beta_3 x_{t3} + \dots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1.1)$$

kde

- y_t je hodnota vysvetľovanej premennej pozorovaná v čase t ,
- $x_{t2}, x_{t3}, \dots, x_{tk}$ sú hodnoty vysvetľujúcich premenných v čase t ,
- $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ sú neznáme parametre modelu,
- ε_t je reziduálna zložka modelu.

Existuje však mnoho ekonomických a finančných analýz, kedy je nutné súčasne pracovať s väčším počtom vysvetľovaných premenných, a teda používať viac rovníc zároveň. Vo viacrovnícových sústavách sa často stretávame so špecifickými dátovými súbormi. Typicky tieto dáta obsahujú väčší počet premenných, pozorovaných v časovej postupnosti, a teda tvoriacich časové rady. V takýchto dátach sa nachádza kombinácia prierezových informácií (napr. tituly cenných papierov) s časovou informáciou (napr. dni, mesiace, roky). Dáta tohto typu sa zvyknú označovať ako *poolové* (*pooled data*) a je možné ich popísať *sústavou ekonometrických rovníc* ako

$$y_{jt} = \alpha_{jt} + \mathbf{x}_{jt} \boldsymbol{\gamma}_{jt} + \varepsilon_{jt}, \quad j = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T, \quad \text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Omega}, \quad (1.2)$$

kde

- indexy j, t označujú prierezovú a časovú zložku,
- y_{jt} je hodnota j -tej vysvetľovanej premennej v čase t ,
- α_{jt} je intercept,
- \mathbf{x}_{jt} je riadkový vektor vysvetľujúcich premenných s $k - 1$ zložkami,
- $\boldsymbol{\gamma}_{jt}$ je stĺpcový vektor neznámych parametrov modelu,
- ε_{jt} je reziduálna zložka,
- m je počet premenných,
- T je dĺžka časových radov,

- vektor $\boldsymbol{\varepsilon}$ má tvar $(\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{1T}, \dots, \varepsilon_{m1}, \dots, \varepsilon_{mT})^\top$,
- $\boldsymbol{\Omega}$ je rozptylová matica ($mT \times mT$) vektoru $\boldsymbol{\varepsilon}$ reziduálnych zložiek ε_{jt} .

Predpokladáme, že $E\varepsilon_{jt} = 0$ pre všetky $j = 1, \dots, m$, $t = 1, \dots, T$. Takýto model obsahuje mT parametrov α_{jt} , mT vektorových parametrov $\boldsymbol{\gamma}_{jt}$ s $k - 1$ zložkami a $mT(mT + 1)/2$ parametrov rozptylovej matice $\boldsymbol{\Omega}$ (čo vyplýva z jej symetrie). Celkový počet parametrov obecného modelu je teda $kmT + mT(mT + 1)/2$, čo je viac ako počet pozorovaní (mT) vysvetľovanej premennej. Z toho dôvodu nie je tento model vhodný pre praktické použitie, a v praxi sa preto používajú špeciálne prípady tohto vyjadrenia, ako sú *SUR sústava* a (*dynamická sústava simultánnych rovníc*).

Príklad 1.1. Uvažujme sústavu ekonometrických rovníc, kde $m = 2$, $T = 4$ a $k = 3$. Navyše rozpíšme vektor vysvetľujúcich premenných \mathbf{x}_{jt} ako $(x_{jt}^{(1)}, x_{jt}^{(2)})$ a vektor neznámych parametrov $\boldsymbol{\gamma}_{jt}$ ako $(\gamma_{jt}^{(1)}, \gamma_{jt}^{(2)})^\top$. Potom môžeme sústavu (1.2) rozpísať po zložkách ako

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \alpha_{1t} + x_{1t}^{(1)} \gamma_{1t}^{(1)} + x_{1t}^{(2)} \gamma_{1t}^{(2)} + \varepsilon_{1t}, & t = 1, \dots, 4 \\ y_{2t} &= \alpha_{2t} + x_{2t}^{(1)} \gamma_{2t}^{(1)} + x_{2t}^{(2)} \gamma_{2t}^{(2)} + \varepsilon_{2t}, & t = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Rozptylovú maticu môžeme vyjadriť ako

$$\text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

kde

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ij} = \begin{pmatrix} \text{cov}(\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{j1}) & \text{cov}(\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{j2}) & \text{cov}(\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{j3}) & \text{cov}(\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{j4}) \\ \text{cov}(\varepsilon_{i2}, \varepsilon_{j1}) & \text{cov}(\varepsilon_{i2}, \varepsilon_{j2}) & \text{cov}(\varepsilon_{i2}, \varepsilon_{j3}) & \text{cov}(\varepsilon_{i2}, \varepsilon_{j4}) \\ \text{cov}(\varepsilon_{i3}, \varepsilon_{j1}) & \text{cov}(\varepsilon_{i3}, \varepsilon_{j2}) & \text{cov}(\varepsilon_{i3}, \varepsilon_{j3}) & \text{cov}(\varepsilon_{i3}, \varepsilon_{j4}) \\ \text{cov}(\varepsilon_{i4}, \varepsilon_{j1}) & \text{cov}(\varepsilon_{i4}, \varepsilon_{j2}) & \text{cov}(\varepsilon_{i4}, \varepsilon_{j3}) & \text{cov}(\varepsilon_{i4}, \varepsilon_{j4}) \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

V tomto prípade je teda počet parametrov sústavy $kmT + mT(mT + 1)/2 = 24 + 36 = 60$ (druhý sčítanec vyplýva zo symetrie kovariancie, a teda aj symetrie matice $\boldsymbol{\Omega}$).

1.2 Exogenné a endogenné premenné

V rámci viacrovnicových ekonometrických sústav rozlišujeme dva typy premenných.

Premennú x , ktorá vysvetľuje premennú y , definujeme ako *exogennú*, ak sa podmienené rozdelenie y za podmienky x nemení pri zmenách procesu generujúceho x . Exogenné premenné delíme na

- *predeterminované*, tzn. nekorelované v danom čase so súčasnými a budúcimi reziduálnymi zložkami. Takéto premenné boli vytvorené sústavou v minulom čase.
- *striktne exogenné*, tzn. nekorelované v danom čase so všetkými hodnotami reziduálnej zložky. Takéto premenné vznikli mimo danú sústavu.

Exogenná premenná má teda v modeli externý charakter a môže byť len vysvetľujúcou premennou. Napríklad v modeli lineárnej regresie (1.1) sú vysvetľujúce premenné (regresory) x_{tk} považované za nenáhodné, tzn. nekorelované s reziduami ε_t , a teda sú exogenné.

V prípade, že premenná nespĺňa podmienku ortogonalít, tj. súčasnej nekorelovanosti s reziduálnou zložkou, hovoríme o *endogennej* premennej. Endogenná premenná v uvažovanej sústave vzniká a musí teda aspoň v jednej rovnici figurovať ako vysvetľovaná.

Predeterminovanosť a striktná exogenita umožní konštruovať konzistentné odhady parametrov modelu. Uvedená definícia exogenity (podľa [6]) nevyjadruje informáciu, pre ktorý parameter modelu je daná premenná exogenná. Túto nejasnosť je možné ošetriť zavedením pojmov *slabá*, *silná* a *super exogenita*.

O jednotlivých premenných v modeloch budeme ďalej uvažovať ako o náhodných procesoch a použijeme prístup navrhnutý v článku [7]. Uvažujme l -rozmerný stochastický proces $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$. Označme $\mathbf{Y}_t = \{\mathbf{y}_{t-k}, k \in \mathbb{N}_0\}$. Združenú hustotu pravdepodobnosti v čase t označme ako

$$D_S(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{y}_{t-2}, \dots | \boldsymbol{\omega}) = D_S(\mathbf{Y}_t | \boldsymbol{\omega}), \quad (1.6)$$

kde $\boldsymbol{\omega}$ je vektor parametrov. Predpokladajme známu minulosť \mathbf{Y}_0 . Pre $k \in \mathbb{N}$ môžeme postupnou faktorizáciou rozpísať

$$\begin{aligned} D_S(\mathbf{Y}_t | \boldsymbol{\omega}) &= D_S(\mathbf{y}_t, \dots, \mathbf{y}_1 | \mathbf{Y}_0; \boldsymbol{\omega}) \\ &= D(\mathbf{y}_t | \underbrace{\mathbf{y}_{t-1}, \dots, \mathbf{y}_1, \mathbf{Y}_0}_{\mathbf{Y}_{t-1}}; \boldsymbol{\omega}) \cdot D(\mathbf{y}_{t-1}, \dots, \mathbf{y}_1 | \mathbf{Y}_0; \boldsymbol{\omega}) \\ &= D(\mathbf{y}_t | \mathbf{Y}_{t-1}; \boldsymbol{\omega}) \cdot D(\mathbf{y}_{t-1} | \underbrace{\mathbf{y}_{t-2}, \dots, \mathbf{y}_1, \mathbf{Y}_0}_{\mathbf{Y}_{t-2}}; \boldsymbol{\omega}) \cdot D(\mathbf{y}_{t-2}, \dots, \mathbf{y}_1 | \mathbf{Y}_0; \boldsymbol{\omega}) \\ &\quad \vdots \\ &= \prod_{i=1}^t D(\mathbf{y}_i | \mathbf{Y}_{i-1}; \boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \quad (1.7)$$

kde $D(\mathbf{y}_i | \mathbf{Y}_{i-1}; \boldsymbol{\omega})$ je podmienená hustota pravdepodobnosti náhodného vektoru \mathbf{y}_i za podmienky \mathbf{Y}_{i-1} . Pre $\mathbf{y}_t^\top = (\mathbf{x}_t^\top, \mathbf{z}_t^\top)^\top$, kde \mathbf{x}_t je vektor ($m \times 1$) a \mathbf{z}_t je vektor ($n \times 1$), môžeme ďalej túto hustotu rozpísať v tvare

$$\begin{aligned} D(\mathbf{y}_t | \mathbf{Y}_{t-1}; \boldsymbol{\omega}) &= D(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t | \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{Z}_{t-1}; \boldsymbol{\omega}) \\ &= D_P(\mathbf{x}_t | \mathbf{X}_{t-1}, \underbrace{\mathbf{Z}_{t-1}, \mathbf{z}_t}_{\mathbf{Z}_t}; \boldsymbol{\lambda}_1) \cdot D_M(\mathbf{z}_t | \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{Z}_{t-1}; \boldsymbol{\lambda}_2) \\ &= D_P(\mathbf{x}_t | \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{Z}_t; \boldsymbol{\lambda}_1) \cdot D_M(\mathbf{z}_t | \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{Z}_{t-1}; \boldsymbol{\lambda}_2). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Pre $t \in \mathbb{N}$ je $D_P(\mathbf{x}_t | \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{Z}_t; \boldsymbol{\lambda}_1)$ *podmienená hustota* (s príslušnými parametrami $\boldsymbol{\lambda}_1$) a $D_M(\mathbf{z}_t | \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{Z}_{t-1}; \boldsymbol{\lambda}_2)$ *marginálna hustota* (s príslušnými parametrami $\boldsymbol{\lambda}_2$).

Nasledujúce definície jednotlivých typov exogenity sú prebraté z knihy [2].

Definícia 1.1. Proces $\{\mathbf{z}_t\}$ je *slabo exogenný* vzhľadom k skupine parametrov $\boldsymbol{\eta}$, ak platí (1.8), pričom

- (i) $\boldsymbol{\eta}$ je funkciou len parametrov $\boldsymbol{\lambda}_1$, tzn. $\boldsymbol{\eta} = g(\boldsymbol{\lambda}_1)$,
- (ii) za predpokladu $(\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$, sú parametre $\boldsymbol{\lambda}_1$ a $\boldsymbol{\lambda}_2$ bez zmeny ("variation free"), čo znamená, že parametrický priestor Λ_1 nie je funkciou parametru $\boldsymbol{\lambda}_2$ a parametrický priestor Λ_2 nie je funkciou parametru $\boldsymbol{\lambda}_1$.

Informáciu o parametroch $\boldsymbol{\eta}$ je teda možné získať len z parametrov podmienenej hustoty, pričom parametre marginálnej hustoty neudávajú žiadnu informáciu o parametroch $\boldsymbol{\eta}$.

Definícia 1.2. Proces $\{\mathbf{z}_t\}$ je *silne exogenný* vzhľadom k skupine parametrov $\boldsymbol{\eta}$, ak je slabo exogenný a \mathbf{X} nepôsobí kauzálne na \mathbf{Z} , tzn. platí

$$D_M(\mathbf{z}_t | \mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{Z}_{t-1}; \boldsymbol{\lambda}_2) = D_M(\mathbf{z}_t | \mathbf{Z}_{t-1}; \boldsymbol{\lambda}_2). \quad (1.9)$$

Definícia 1.3. Proces $\{\mathbf{z}_t\}$ je *super exogenný* vzhľadom k skupine parametrov $\boldsymbol{\eta}$, ak je slabo exogenný a $\boldsymbol{\lambda}_1$ sú invariantné vzhľadom k zmenám parametrov $\boldsymbol{\lambda}_2$.

2. Špeciálne prípady viacrovnicových sústav

2.1 SUR sústava

Prvým špeciálnym vyjadrením obecnej sústavy je *SUR sústava* (*Seemingly unrelated regression*), kde na rozdiel od (1.2) je marginálny efekt vysvetľujúcich premenných konštantný v čase (tj. $\alpha_{jt} = \alpha_j, \gamma_{jt} = \gamma_j$) a reziduálne zložky sú súčasne korelované ($E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}) = \sigma_{ij}$), ale nie sú korelované časovo ($E(\varepsilon_{is}\varepsilon_{jt}) = 0$ pre $s \neq t$). Z toho dôvodu sa zredukuje aj počet parametrov sústavy na $km + m(m+1)/2$. Túto sústavu môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned} y_{jt} &= \alpha_j + \mathbf{x}_{jt}\boldsymbol{\gamma}_j + \varepsilon_{jt}, & j = 1, \dots, m, & \quad t = 1, \dots, T, \\ E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}) &= \sigma_{ij}, & E(\varepsilon_{is}\varepsilon_{jt}) &= 0, \quad \forall i, j, s \neq t. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Navyše sa predpokladá, že všetky regresory \mathbf{x}_{jt} sú exogénne.

Sústavu (2.1) môžeme prepísať do vektorového tvaru

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.2)$$

kde

- \mathbf{y}_j je vektor ($T \times 1$) pozorovaných hodnôt j -tej vysvetľovanej premennej,
- \mathbf{X}_j je matica ($T \times k$) pozorovaných hodnôt regresorov j -tej rovnice s jednotkami v prvom stĺpci,
- $\boldsymbol{\beta}_j$ je vektor ($k \times 1$) regresných parametrov j -tej rovnice ($\boldsymbol{\beta}_j = (\alpha_j, \boldsymbol{\gamma}_j^\top)^\top$),
- $\boldsymbol{\varepsilon}_j$ je vektor ($T \times 1$) reziduálnej zložky j -tej rovnice s nulovou strednou hodnotou.

Keď rozpíšeme vektor vysvetľujúcich premenných \mathbf{x}_{jt} ako $(x_{jt}^{(1)}, \dots, x_{jt}^{(k-1)})$ a vektor parametrov $\boldsymbol{\gamma}_j$ ako $(\gamma_j^{(1)}, \dots, \gamma_j^{(k-1)})$ môžeme vzťah (2.2) rozpísať ako

$$\begin{pmatrix} y_{j1} \\ y_{j2} \\ \vdots \\ y_{jT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{j1}^{(1)} & \dots & x_{j1}^{(k-1)} \\ 1 & x_{j2}^{(1)} & \dots & x_{j2}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{jT}^{(1)} & \dots & x_{jT}^{(k-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \gamma_j^{(1)} \\ \vdots \\ \gamma_j^{(k-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{j1} \\ \varepsilon_{j2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{jT} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Maticový zápis SUR sústavy má tvar

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{X}_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_m \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}\mathbf{I}_T & \sigma_{12}\mathbf{I}_T & \cdots & \sigma_{1m}\mathbf{I}_T \\ \sigma_{21}\mathbf{I}_T & \sigma_{22}\mathbf{I}_T & \cdots & \sigma_{2m}\mathbf{I}_T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1}\mathbf{I}_T & \sigma_{m2}\mathbf{I}_T & \cdots & \sigma_{mm}\mathbf{I}_T \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_T, \quad (2.5)$$

kde

- $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1^\top, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_m^\top)^\top$ je vektor $(mT \times 1)$ reziduálnych zložiek sústavy,
- $\boldsymbol{\Sigma}$ je matica $(m \times m)$ v tvare

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_{mm} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

A teda ako celok môžeme SUR sústavu (2.4) vyjadriť ako

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.7)$$

kde

- $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^\top, \dots, \mathbf{y}_m^\top)^\top$ je vektor $(mT \times 1)$,
- \mathbf{X} je blokovo diagonálna matica $(mT \times mk)$ s diagonálnymi blokmi \mathbf{X}_j ,
- $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1^\top, \dots, \boldsymbol{\beta}_m^\top)^\top$ je vektor $(mk \times 1)$.

Príklad 2.1. Podobne ako v príklade 1.1 uvažujme opäť sústavu, kde $m = 2$, $T = 4$ a $k = 3$. V tomto prípade sa však jedná o SUR sústavu, a teda efekt vysvetľujúcich premenných je konštantný v čase ($\boldsymbol{\gamma}_j = (\gamma_j^{(1)}, \gamma_j^{(2)})^\top$) a reziduálne zložky nie sú časovo korelované ($E(\varepsilon_{is}\varepsilon_{jt}) = \text{cov}(\varepsilon_{is}, \varepsilon_{jt}) = 0$ pre $s \neq t$). Takúto SUR sústavu môžeme rozpísať po zložkách ako

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \alpha_1 + x_{1t}^{(1)}\gamma_1^{(1)} + x_{1t}^{(2)}\gamma_1^{(2)} + \varepsilon_{1t}, & t = 1, \dots, 4, \\ y_{2t} &= \alpha_2 + x_{2t}^{(1)}\gamma_2^{(1)} + x_{2t}^{(2)}\gamma_2^{(2)} + \varepsilon_{2t}, & t = 1, \dots, 4, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}) = \sigma_{ij}, \quad E(\varepsilon_{is}\varepsilon_{jt}) = 0, \quad \forall i, j, s \neq t. \quad (2.9)$$

Rozptylová matica sa teda zjednoduší do tvaru

$$\text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}\mathbf{I}_4 & \sigma_{12}\mathbf{I}_4 \\ \sigma_{21}\mathbf{I}_4 & \sigma_{22}\mathbf{I}_4 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

a rovnako aj počet parametrov klesne na $km + m(m + 1)/2 = 9$.

2.2 Sústava simultánných rovníc

Ďalším v praxi obľúbeným špeciálnym prípadom sústavy ekonometrických rovníc je *sústava simultánných rovníc* (*SEM, simultaneous equation models*). V tomto prípade (na rozdiel od SUR sústavy z podkapitoly 2.1) môžu byť medzi vysvetľujúcimi premennými aj endogenné premenné.

V sústave m rovníc rozdeľujeme všetky premenné na m endogenných premenných y_{jt} a k exogenných premenných x_{it} , pričom $x_{1t} = 1, t = 1, \dots, T$. Sústava simultánných rovníc je potom v tvare

$$y_{jt} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \gamma_{ji} y_{it} + \sum_{i=1}^k \beta_{ji} x_{it} + \varepsilon_{jt}, \quad j = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.11)$$

pričom o simultánnej rovnici hovoríme len v prípade, že $\gamma_{ji} \neq 0$ pre nejaké $i \neq j$ (v prípade, že by všetky parametre γ_{ji} boli nulové, dospeli by sme k SUR sústave). Pre reziduálne zložky opäť predpokladáme

$$E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}) = \sigma_{ij}, \quad E(\varepsilon_{is}\varepsilon_{jt}) = 0, \quad \forall i, j, s \neq t. \quad (2.12)$$

Jednotlivé rovnice sústavy môžeme vyjadriť maticovým zápisom

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{Y}_j \boldsymbol{\gamma}_j + \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j = \mathbf{Z}_j \boldsymbol{\delta}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.13)$$

kde

- \mathbf{y}_j je vektor ($T \times 1$) pozorovaných hodnôt j -tej endogennej premennej,
- \mathbf{Y}_j je matica ($T \times (m_j - 1)$) pozorovaných hodnôt endogenných premenných na pravej strane j -tej rovnice s odpovedajúcim vektorom $((m_j - 1) \times 1)$ parametrov $\boldsymbol{\gamma}_j$,
- \mathbf{X}_j je matica ($T \times k_j$) pozorovaných hodnôt exogenných premenných j -tej rovnice s odpovedajúcim vektorom $(k_j \times 1)$ parametrov $\boldsymbol{\beta}_j$,
- $\mathbf{Z}_j = (\mathbf{Y}_j, \mathbf{X}_j)$ je matica ($T \times (k_j + m_j - 1)$) pozorovaných hodnôt všetkých premenných na pravej strane j -tej rovnice s odpovedajúcim vektorom $((k_j + m_j - 1) \times 1)$ parametrov $\boldsymbol{\delta}_j = (\boldsymbol{\gamma}_j^\top, \boldsymbol{\beta}_j^\top)^\top$,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_j$ je vektor ($T \times 1$) reziduálnej zložky j -tej rovnice.

Hodnotami m_j a k_j značíme redukovaný počet premenných v j -tej rovnici po ignorovaní premenných s nulovými parametrami.

Pokiaľ zahrnieme aj premenné s nulovými parametrami, môžeme sústavu (2.11) taktiež zapísať jedným maticovým zápisom

$$\mathbf{Y}\boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{E} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\Delta} + \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (2.14)$$

kde

- \mathbf{Y} je matica ($T \times m$) pozorovaných hodnôt všetkých m endogenných premenných sústavy s odpovedajúcou maticou ($m \times m$) parametrov $\mathbf{\Gamma}$ v tvaroch

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{m1} \\ y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1T} & y_{2T} & \cdots & y_{mT} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} -1 & \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{m1} \\ \gamma_{12} & -1 & \cdots & \gamma_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{1m} & \gamma_{2m} & \cdots & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

- \mathbf{X} je matica ($T \times k$) pozorovaných hodnôt všetkých k exogenných premenných sústavy s odpovedajúcou maticou ($k \times m$) parametrov \mathbf{B} v tvaroch

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{2T} & \cdots & x_{kT} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{m1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{1k} & \beta_{2k} & \cdots & \beta_{mk} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

- $\mathbf{Z} = (\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ je matica ($T \times (k+m)$) pozorovaných hodnôt všetkých $(k+m)$ premenných sústavy s odpovedajúcou maticou $((k+m) \times m)$ parametrov $\mathbf{\Delta} = (\mathbf{\Gamma}^\top, \mathbf{B}^\top)^\top$,

- $\mathbf{E} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_m)$ je matica ($T \times m$) reziduálnych zložiek sústavy,
- rozptylová matica náhodného vektoru $\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\varepsilon}_1^\top, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_m^\top)^\top$ je daná predpisom (2.5),
- $\mathbf{0}$ je matica ($T \times m$) s nulovými prvkami.

Zápis v tvare (2.14) sa zvykne označovať ako *štruktúrálnej tvar* sústavy simultánnych rovníc.

Za predpokladu regularity matice $\mathbf{\Gamma}$ môžeme prejsť (vynásobením rovnice (2.14) inverznou maticou $\mathbf{\Gamma}^{-1}$) k *redukovanému tvaru* sústavy

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{\Pi} + \mathbf{V}, \quad (2.17)$$

kde

$$\mathbf{\Pi} = -\mathbf{B}\mathbf{\Gamma}^{-1} = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{21} & \cdots & \pi_{m1} \\ \pi_{12} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{1k} & \pi_{2k} & \cdots & \pi_{mk} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = -\mathbf{E}\mathbf{\Gamma}^{-1} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{m1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1T} & v_{2T} & \cdots & v_{mT} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Jednotlivé rovnice redukovaného tvaru môžeme pomocou stĺpcov príslušných maticových členov zo zápisu (2.17) vyjadriť ako

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{X}\boldsymbol{\pi}_j + \mathbf{v}_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2.19)$$

Je teda vidieť, že v redukovanom tvare figuruje v každej rovnici len jedna endogenná premenná prostredníctvom vektoru pozorovaných hodnôt \mathbf{y}_j . Redukovaný tvar môžeme ďalej rozpísať po zložkách

$$y_{jt} = \sum_{i=1}^k \pi_{ji} x_{it} + v_{jt}, \quad j = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.20)$$

Čo sa týka reziduálnej zložky \mathbf{v}_j redukovaného tvaru (2.19), tak platí, že má rovnaké vlastnosti ako pôvodná reziduálna zložka $\boldsymbol{\varepsilon}_j$. Pôvodné kovariancie σ_{ij} (viď (2.12)) sa samozrejme transformujú na iné nenulové hodnoty.

Poznámka 2.1. Označme prvky matice $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$ ako a_{ij} , $i, j = 1 \dots m$. Potom podľa (2.18) môžeme napísať

$$\underbrace{\begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{m1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1T} & v_{2T} & \cdots & v_{mT} \end{pmatrix}}_{\mathbf{V}} = - \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{21} & \cdots & \varepsilon_{m1} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \cdots & \varepsilon_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{1T} & \varepsilon_{2T} & \cdots & \varepsilon_{mT} \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\Gamma}^{-1}}, \quad (2.21)$$

a teda pre prvky matice \mathbf{V} platí

$$v_{jt} = - \sum_{p=1}^m \varepsilon_{pt} a_{jp}, \quad j = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.22)$$

$$\text{cov}(v_{it}, v_{js}) = E(v_{it}v_{js}) = E\left(\sum_{p=1}^m \varepsilon_{pt} a_{ip} \sum_{q=1}^m \varepsilon_{qs} a_{jq}\right) = 0, \quad s \neq t, \quad (2.23)$$

$$\text{cov}(v_{it}, v_{jt}) = E(v_{it}v_{jt}) = E\left(\sum_{p=1}^m \varepsilon_{pt} a_{ip} \sum_{q=1}^m \varepsilon_{qt} a_{jq}\right) = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m a_{ip} a_{jq} \sigma_{pq}. \quad (2.24)$$

Príklad 2.2. Uvažujme sústavu simultánnych rovníc, kde $m = 2$, $T = 4$ a $k = 3$. Predpokladajme, že zložka x_{1t} reprezentuje intercept a teda je rovná jednej. Sústavu (2.11) môžeme potom rozpísať ako

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \gamma_{12}y_{2t} + \beta_{11} + \beta_{12}x_{2t} + \beta_{13}x_{3t} + \varepsilon_{1t}, & t = 1, \dots, 4, \\ y_{2t} &= \gamma_{21}y_{1t} + \beta_{21} + \beta_{22}x_{2t} + \beta_{23}x_{3t} + \varepsilon_{2t}, & t = 1, \dots, 4, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}) = \sigma_{ij}, \quad E(\varepsilon_{is}\varepsilon_{jt}) = 0, \quad \forall i, j, s \neq t. \quad (2.26)$$

Za predpokladu regularity matice $\boldsymbol{\Gamma}$, ktorý je v tomto prípade $\gamma_{12}\gamma_{21} \neq 1$, môžeme prejsť do redukovaného tvaru (2.17), kde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Pi} &= -\mathbf{B}\boldsymbol{\Gamma}^{-1} = \frac{1}{1 - \gamma_{12}\gamma_{21}} \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \\ \beta_{13} & \beta_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \gamma_{21} \\ \gamma_{12} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1 - \gamma_{12}\gamma_{21}} \begin{pmatrix} \beta_{11} + \beta_{21}\gamma_{12} & \beta_{11}\gamma_{21} + \beta_{21} \\ \beta_{12} + \beta_{22}\gamma_{12} & \beta_{12}\gamma_{21} + \beta_{22} \\ \beta_{13} + \beta_{23}\gamma_{12} & \beta_{13}\gamma_{21} + \beta_{23} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= -\mathbf{E}\boldsymbol{\Gamma}^{-1} = \frac{1}{1 - \gamma_{12}\gamma_{21}} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{14} & \varepsilon_{24} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \gamma_{21} \\ \gamma_{12} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{1 - \gamma_{12}\gamma_{21}} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{21}\gamma_{12} & \varepsilon_{11}\gamma_{21} + \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{12} + \varepsilon_{22}\gamma_{12} & \varepsilon_{12}\gamma_{21} + \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{13} + \varepsilon_{23}\gamma_{12} & \varepsilon_{13}\gamma_{21} + \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{14} + \varepsilon_{24}\gamma_{12} & \varepsilon_{14}\gamma_{21} + \varepsilon_{24} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

V tomto príklade môžeme kovariančnú štruktúru prvkov matice \mathbf{V} vyjadriť ako

$$\text{cov}(v_{it}, v_{js}) = E(v_{it}v_{js}) = \begin{cases} 0, & s \neq t, \\ \frac{\sigma_{11} + 2\gamma_{12}\sigma_{12} + \gamma_{12}^2\sigma_{22}}{(1 - \gamma_{12}\gamma_{21})^2}, & s = t, i = j = 1, \\ \frac{\sigma_{22} + 2\gamma_{21}\sigma_{12} + \gamma_{21}^2\sigma_{11}}{(1 - \gamma_{12}\gamma_{21})^2}, & s = t, i = j = 2, \\ \frac{\gamma_{21}\sigma_{11} + (1 + \gamma_{12}\gamma_{21})\sigma_{12} + \gamma_{12}\sigma_{22}}{(1 - \gamma_{12}\gamma_{21})^2}, & s = t, i \neq j. \end{cases} \quad (2.29)$$

V prípade, že $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 0$, by sa sústava zredukovala na SUR sústavu.

Poznámka 2.2. V prípade, že sa medzi endogennými premennými y_{it} na pravej strane j -tej rovnice (2.11) vyskytujú aj oneskorené endogenné premenné $y_{i,t-\tau}$ ($i = 1, \dots, m; \tau = 1, 2, \dots$), hovoríme o *dynamickej sústave simultánnych rovníc*. Keďže tieto premenné sú súčasne nekorelované s reziduálnou zložkou, môžeme ich považovať za exogenné (predeterminované). Dynamické sústavy simultánnych rovníc je v určitých prípadoch možné prepísať do tvaru *vektorovej autoregresie (VAR)*.

2.3 Vektorová autoregresia (VAR)

Pred zavedením samotného modelu *vektorovej autoregresie* VAR zdefinujeme niektoré dôležité pojmy.

Definícia 2.1. Náhodný proces $\{\varepsilon_t\}$ sa nazýva *biely šum* ak

$$E(\varepsilon_t) = 0, \quad (2.30)$$

$$E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 > 0, \quad (2.31)$$

$$E(\varepsilon_s \varepsilon_t) = 0, \quad \forall s \neq t. \quad (2.32)$$

Definícia 2.2. m -rozmerný náhodný proces $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}$ sa nazýva *m -rozmerný biely šum* ak

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}, \quad (2.33)$$

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^\top) = \boldsymbol{\Sigma}, \quad (2.34)$$

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_s \boldsymbol{\varepsilon}_t^\top) = \mathbf{0}, \quad \forall s \neq t, \quad (2.35)$$

kde $\boldsymbol{\Sigma}$ je pozitívne definitná rozptylová matica.

Definícia 2.3. Pre m -rozmerný náhodný proces $\{\mathbf{y}_t\}$ s konečným prvým a druhým momentom definujeme *autokovariančnú funkciu*

$$R(s, t) = \text{cov}(\mathbf{y}_s, \mathbf{y}_t) = E(\mathbf{y}_s - \boldsymbol{\mu}_s)(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)^\top, \quad (2.36)$$

kde $\boldsymbol{\mu}_s = E\mathbf{y}_s$, a *autokorelačnú funkciu*

$$r(s, t) = \mathbf{D}_s^{-1} R(s, t) \mathbf{D}_t^{-1}, \quad (2.37)$$

kde $\mathbf{D}_s = \text{diag}\{\sqrt{\text{var}(y_{1s})}, \dots, \sqrt{\text{var}(y_{ms})}\}$.

Poznámka 2.3. Autokovariančná a autokorelačná funkcia bieleho šumu je pre $s \neq t$ nulová. Táto vlastnosť sa využíva pri spätnej kontrole bieleho šumu v odhadnutom modeli VAR.

Definícia 2.4. m -rozmerný náhodný proces $\{\mathbf{y}_t\}$ s konečným prvým a druhým momentom sa nazýva *slabo stacionárny* ak splňuje

$$E(\mathbf{y}_t) = \boldsymbol{\mu}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \quad (2.38)$$

$$R(s, t) = \text{cov}(\mathbf{y}_s, \mathbf{y}_t) = \text{cov}(\mathbf{y}_{s+h}, \mathbf{y}_{t+h}) = R(s+h, t+h), \quad \forall s, t, h \in \mathbb{Z}. \quad (2.39)$$

Slabo stacionárny proces má teda konštantnú strednú hodnotu a rozptyl a autokovariančná funkcia $R(s, t)$ je funkciou rozdielu $s - t$.

Autokovariančnú funkciu stacionárneho procesu môžeme tiež vyjadriť ako funkciu jednej premennej $\boldsymbol{\gamma}_k = R(k, 0)$. Autokorelačnú funkciu z definície 2.3 môžeme pre m -rozmerný stacionárny proces vyjadriť v tvare

$$\boldsymbol{\rho}_k = \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_k \mathbf{D}^{-1}, \quad (2.40)$$

kde $\mathbf{D} = \text{diag}\{\sqrt{\text{var}(y_{1t})}, \dots, \sqrt{\text{var}(y_{mt})}\}$. Je zrejmé, že platí

$$\boldsymbol{\gamma}_k = \boldsymbol{\gamma}_{-k}^\top, \quad \boldsymbol{\rho}_k = \boldsymbol{\rho}_{-k}^\top, \quad (2.41)$$

a preto budeme uvažovať len $k \geq 0$, pričom $\boldsymbol{\gamma}_0$ je rozptylovou maticou procesu.

Poznámka 2.4. Naďalej budeme pracovať najmä so slabou stacionaritou, ktorú budeme pre jednoduchosť označovať ako *stacionaritu*.

Definícia 2.5. Vektorový autoregresný proces rádu p (VAR(p)) môžeme vyjadriť v tvare

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \dots + \boldsymbol{\Phi}_p \mathbf{y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \text{tj.} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} - \dots - \boldsymbol{\Phi}_p \mathbf{y}_{t-p} = \underbrace{(\mathbf{I}_m - \boldsymbol{\Phi}_1 B - \dots - \boldsymbol{\Phi}_p B^p)}_{\boldsymbol{\Phi}(B)} \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (2.43)$$

kde

- \mathbf{y}_t je vektor ($m \times 1$) vysvetľovaných premenných,
- $\boldsymbol{\varphi}_0$ je m -rozmerný intercept,
- $\boldsymbol{\Phi}_i$ sú parametrické matice ($m \times m$),
- $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ je m -rozmerný biely šum s rozptylovou maticou $\boldsymbol{\Sigma}$,
- B je operátor zpätného posunu definovaný predpisom $B^k \mathbf{y}_t = \mathbf{y}_{t-k}$,
 $k = 1, 2, \dots$

Akýkoľvek proces VAR(p) je možné previesť na model VAR(1). Položme

$$\mathbf{Y}_t = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{y}_{t-1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{t-p+1} \end{pmatrix}}_{(mp \times 1)}, \quad \mathbf{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_0 \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{(mp \times 1)}, \quad \mathbf{E}_t = \underbrace{\begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{(mp \times 1)}, \quad (2.44)$$

$$\Psi = \underbrace{\begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \cdots & \Phi_{p-1} & \Phi_p \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{(mp \times mp)}. \quad (2.45)$$

VAR(1) podobu procesu (2.42) môžeme potom vyjadriť ako

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{A} + \Psi \mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{E}_t. \quad (2.46)$$

Keďže v modeli VAR sú všetky premenné endogenné, zvykne sa používať ako jednoduchšia alternatíva sústavy simultánnych rovníc. Konštrukcia modelu VAR však predpokladá stacionaritu jednotlivých zložiek (tzn. jednorozmerných AR procesov), a teda v prípade použitia transformácií k jej dosiahnutiu hrozí riziko straty informácie o dlhodobých vzťahoch medzi jednotlivými radmi.

K sformulovaniu podmienky stacionarity vyjadríme najskôr proces VAR(p) v tvare VAR(1) ako *vektorový lineárny proces*. Postupným dosadzovaním oneskorených hodnôt do (2.46) píšeme

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_t &= \mathbf{A} + \Psi \mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{E}_t \\ &= \mathbf{A} + \Psi(\mathbf{A} + \Psi \mathbf{Y}_{t-2} + \mathbf{E}_{t-1}) + \mathbf{E}_t = (\mathbf{I}_{mp} + \Psi)\mathbf{A} + \Psi^2 \mathbf{Y}_{t-2} + \Psi \mathbf{E}_{t-1} + \mathbf{E}_t \\ &= (\mathbf{I}_{mp} + \Psi + \Psi^2)\mathbf{A} + \Psi^3 \mathbf{Y}_{t-3} + \Psi^2 \mathbf{E}_{t-2} + \Psi \mathbf{E}_{t-1} + \mathbf{E}_t \\ &\vdots \\ &= (\mathbf{I}_{mp} + \Psi + \Psi^2 + \dots + \Psi^k)\mathbf{A} + \Psi^{k+1} \mathbf{Y}_{t-k-1} + \sum_{i=0}^k \Psi^i \mathbf{E}_{t-i}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Za predpokladu, že všetky vlastné čísla matice Ψ sú v absolútnej hodnote menšie ako 1 platí

$$(\mathbf{I}_{mp} + \Psi + \Psi^2 + \dots + \Psi^k)\mathbf{A} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (\mathbf{I}_{mp} - \Psi)^{-1} \mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha}, \quad (2.48)$$

$$\Psi^{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{0} \quad (2.49)$$

a suma

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Psi^i \mathbf{E}_{t-i} \quad (2.50)$$

konverguje podľa kvadratickeho stredy (viď podkapitola 2.1.1 v [10]). Proces $\{\mathbf{Y}_t\}$ potom môžeme zapísať ako vektorový lineárny proces (niekedy tiež označovaný ako VMA(∞))

$$\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\alpha} + \sum_{i=0}^{\infty} \Psi^i \mathbf{E}_{t-i}. \quad (2.51)$$

Tvar VMA(∞) procesu $\{\mathbf{y}_t\}$ dostaneme pre násobením rovnice (2.51) maticou $\mathbf{J} = (\mathbf{I}_m, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$ typu $(m \times mp)$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= \mathbf{J}\mathbf{Y}_t = \mathbf{J}\boldsymbol{\alpha} + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{J}\boldsymbol{\Psi}^i \mathbf{J}^\top \mathbf{J}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} \\ &= \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\psi}_i \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i}, \end{aligned} \quad (2.52)$$

kde $\boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{J}\boldsymbol{\Psi}^i \mathbf{J}^\top$ a $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{J}\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{I}_m - \boldsymbol{\Phi}_1 - \dots - \boldsymbol{\Phi}_p)^{-1} \boldsymbol{\varphi}_0$ je stredná hodnota procesu $\{\mathbf{y}_t\}$.

Proces VAR(p), ktorý je možné vyjadriť ako lineárny proces, sa označuje ako *stabilný proces*. Predpoklad, že vlastné čísla matice $\boldsymbol{\Psi}$ sú v absolutnej hodnote menšie ako 1 je *podmienkou stability*. Lineárny proces je stacionárny, a teda stabilita implikuje stacionaritu (opačná implikácia neplatí). Podmienka stability sa preto vo väčšine ekonometrických zdrojov používa ako postačujúca podmienka stacionarity (vid' napr. [6], [8], [10]). Túto podmienku stacionarity môžeme ekvivalentne zapísať ako

$$\det(\mathbf{I}_m - \boldsymbol{\Phi}_1 z - \dots - \boldsymbol{\Phi}_p z^p) \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1, \quad (2.53)$$

alebo

$$\det(\mathbf{I}_m z^p - \boldsymbol{\Phi}_1 z^{p-1} - \dots - \boldsymbol{\Phi}_p) \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 1. \quad (2.54)$$

Za platnosti podmienky stacionarity môžeme (2.42) prepísať do tvaru

$$\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Phi}_1(\mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \dots + \boldsymbol{\Phi}_p(\mathbf{y}_{t-p} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (2.55)$$

Proces $\{\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}\}$ sa nazýva *centrovaný proces*. Takýto proces má nulovú strednú hodnotu a jeho autokovariančná funkcia splňuje viacrozmernú verziu *Yuleových-Walkerových rovníc*

$$\boldsymbol{\gamma}_k = \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{\gamma}_{k-1} + \dots + \boldsymbol{\Phi}_p \boldsymbol{\gamma}_{k-p}, \quad k > 0, \quad (2.56)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_0 = \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{\gamma}_1^\top + \dots + \boldsymbol{\Phi}_p \boldsymbol{\gamma}_p^\top + \boldsymbol{\Sigma}. \quad (2.57)$$

Proces VAR(p) v tvare (2.42) môžeme taktiež rozpísať po zložkách ako

$$y_{jt} = \varphi_{j0} + \sum_{k=1}^m \varphi_{jk}^{(1)} y_{k,t-1} + \dots + \sum_{k=1}^m \varphi_{jk}^{(p)} y_{k,t-p} + \varepsilon_{jt}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.58)$$

kde $\varphi_{jk}^{(i)}$ sú prvky matice $\boldsymbol{\Phi}_i$, $i = 1, \dots, p$.

Poznámka 2.5. Všimnime si, že model vektorovej autoregresie je vlastne jednoduchší prípad dynamickej sústavy simultánnych rovníc popísaných v poznámke 2.2. V tomto prípade však nerozlišujeme medzi exogennými a endogennými premennými. V modeli VAR sa vyskytujú len oneskorené hodnoty vysvetľovanej premennej, ktoré majú v sústave exogenný charakter.

Príklad 2.3. Uvažujme model VAR(1) v tvare

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (2.59)$$

Ak je napríklad $m = 2$, tak môžeme model VAR(1) rozpísať po zložkách ako

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \varphi_{10} + \varphi_{11}y_{1,t-1} + \varphi_{12}y_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}, \\ y_{2t} &= \varphi_{20} + \varphi_{21}y_{1,t-1} + \varphi_{22}y_{2,t-1} + \varepsilon_{2t}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

V procese (2.60) s gausovským bielym šumom sa ďalej pozrieme na slabú exogenitu v zmysle definície 1.1.

Pre zachovanie konzistencie s kapitolou 1.2 uvažujme proces $\{\mathbf{y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$, pre ktorý položíme $\mathbf{Y}_t = \{\mathbf{y}_{t-k}, k \in \mathbb{N}_0\}$. Pre zjednodušenie tiež uvažujme, že sa jedná o centrováný proces. Uvažujme teda proces VAR(1) v tvare

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad (2.61)$$

kde

$$\mathbf{y}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ z_t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

Rozpísaním po zložkách dostaneme sústavu

$$x_t = \varphi_{11}x_{t-1} + \varphi_{12}z_{t-1} + \varepsilon_{1t}, \quad (2.63)$$

$$z_t = \varphi_{21}x_{t-1} + \varphi_{22}z_{t-1} + \varepsilon_{2t}. \quad (2.64)$$

Vynásobením rovnice (2.64) prvkom $\delta = \sigma_{12}/\sigma_2^2$ a následným odčítaním od rovnice (2.63) získame sústavu

$$x_t - \delta z_t = \underbrace{(\varphi_{11} - \delta\varphi_{21})}_{\varphi_{11}^*} x_{t-1} + \underbrace{(\varphi_{12} - \delta\varphi_{22})}_{\varphi_{12}^*} z_{t-1} + \underbrace{\varepsilon_{1t} - \delta\varepsilon_{2t}}_{\varepsilon_{1t}^*}, \quad (2.65)$$

$$z_t = \varphi_{21}x_{t-1} + \varphi_{22}z_{t-1} + \varepsilon_{2t}. \quad (2.66)$$

Ďalej platí

$$E(\varepsilon_{1t}^*) = 0, \quad (2.67)$$

$$\text{var}(\varepsilon_{1t}^*) = E(\varepsilon_{1t} - \delta\varepsilon_{2t})^2 = \sigma_1^2 + \delta^2\sigma_2^2 - 2\delta\sigma_{12} = \sigma_1^2 - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2} = \sigma_X^2, \quad (2.68)$$

$$E(\varepsilon_{1t}^*\varepsilon_{2t}) = E(\varepsilon_{1t} - \delta\varepsilon_{2t})\varepsilon_{2t} = \sigma_{12} - \delta\sigma_2^2 = 0. \quad (2.69)$$

Touto transformáciou sme uskutočnili ortogonalizáciu modelu z hľadiska veličín x_t a z_t . Takto transformovaný model môžeme v maticovom tvare vyjadriť ako

$$\begin{pmatrix} x_t - \delta z_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11}^* & \varphi_{12}^* \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ z_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t}^* \\ \varepsilon_{2t} \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

V kontexte so zápisom (1.8) môžeme vyjadriť podmienenú a marginálnu hustotu v rozklade hustoty $D(\mathbf{y}_t | \mathbf{Y}_{t-1}; \boldsymbol{\omega}) = D(x_t, z_t | X_{t-1}, Z_{t-1}; \boldsymbol{\omega})$ ako

$$D_P(x_t | x_{t-1}, \dots, x_1, X_0, z_t, \dots, z_1, Z_0; \boldsymbol{\lambda}_1) = D_P(x_t | X_{t-1}, Z_t; \boldsymbol{\lambda}_1), \quad (2.71)$$

$$D_M(z_t|x_{t-1}, \dots, x_1, X_0, z_{t-1}, \dots, z_1, Z_0; \boldsymbol{\lambda}_2) = D_M(z_t|X_{t-1}, Z_{t-1}; \boldsymbol{\lambda}_2). \quad (2.72)$$

V prípade konečnej minulosti by platilo $X_0 = x_0$ a $Z_0 = z_0$. Parametre podmienenej a marginálnej hustoty sú $\boldsymbol{\lambda}_1 = \{\delta, \varphi_{11}^*, \varphi_{12}^*, \sigma_X^2\}$ a $\boldsymbol{\lambda}_2 = \{\varphi_{21}, \varphi_{22}, \sigma_Z^2\}$.

Keďže $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim N_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$, tak platí

$$\varepsilon_{1t} \sim N(0, \sigma_1^2), \quad \varepsilon_{2t} \sim N(0, \sigma_2^2), \quad \varepsilon_{1t}^* \sim N(0, \sigma_X^2). \quad (2.73)$$

Taktiež

$$x_t = \underbrace{\varphi_{11}^* x_{t-1} + \delta z_t + \varphi_{12}^* z_{t-1}}_{\mu_X} + \varepsilon_{1t}^* \sim N(\mu_X, \sigma_X^2), \quad (2.74)$$

$$z_t = \underbrace{\varphi_{21} x_{t-1} + \varphi_{22} z_{t-1}}_{\mu_Z} + \varepsilon_{2t} \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2), \quad (2.75)$$

a teda platí

$$D_P(x_t|X_{t-1}, Z_t; \boldsymbol{\lambda}_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu_X)^2}{\sigma_X^2}\right\}, \quad (2.76)$$

$$D_M(z_t|X_{t-1}, Z_{t-1}; \boldsymbol{\lambda}_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Z^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(z - \mu_Z)^2}{\sigma_Z^2}\right\}. \quad (2.77)$$

Pomocou faktorizácie z (1.7) môžeme vyjadriť združenú hustotu

$$\begin{aligned} D_S(\mathbf{Y}_t|\boldsymbol{\omega}) &= D_S(\mathbf{y}_t, \dots, \mathbf{y}_1|\mathbf{Y}_0; \boldsymbol{\omega}) \\ &= \prod_{i=1}^t D(\mathbf{y}_i|\mathbf{Y}_{i-1}; \boldsymbol{\omega}) \\ &= \prod_{i=1}^t D_P(x_i|X_{i-1}, Z_i; \boldsymbol{\lambda}_1) \cdot D_M(z_i|X_{i-1}, Z_{i-1}; \boldsymbol{\lambda}_2). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Z definície 1.1 potom plynie slabá exogenita procesu $\{z_t\}$ vzhľadom k parametrom $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\lambda}_1$. Prvá podmienka je pritom splnená automaticky a parametre $\boldsymbol{\lambda}_1$ a $\boldsymbol{\lambda}_2$ sú bez zmeny, pretože z parametrov marginálnej hustoty $\boldsymbol{\lambda}_2$ nie je možné zrekonštruovať parametre podmienenej hustoty $\boldsymbol{\lambda}_1$.

Z definície 1.2 plynie, že pri splnení podmienok slabej exogenity je proces $\{z_t\}$ vzhľadom k parametrom $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\lambda}_1$ silne exogenný, ak platí $\varphi_{21} = 0$.

Super exogenita procesu $\{z_t\}$ vzhľadom k parametrom $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\lambda}_1$ na základe definície 1.3 možná nie je, pretože parametre podmienenej hustoty sú funkciami parametrov marginálnej hustoty.

3. Odhadovanie

3.1 Odhady parametrov v SUR sústave

V prípade odhadovania parametrov β_j individuálne pre každú rovnicu sústavy (2.2) by sme ignorovali vzájomnú koreláciu medzi jednotlivými reziduálnymi zložkami. Takýto odhad by podľa [6] bol nestranný, ale nebol by efektívny. Na získanie efektívneho BLU-odhadu (*best linear unbiased estimator*) budeme SUR sústavu (2.4) odhadovať ako celok, tzn. jednu rovnicu

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.1)$$

Prakticky je možné realizovať *prípustný Aitkenov odhad* s konzistentne odhadnutou maticou $\text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Omega}$ definovanou predpisom (2.5). Postupujeme dvojstupňovo:

1. Pre každé $j = 1, \dots, m$ odhadneme rezíduá $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j$ individuálnou aplikáciou OLS-odhadu v j -tej rovnici SUR sústavy (2.2) ako

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j = \mathbf{y}_j - \hat{\mathbf{y}}_j, \quad \text{kde } \hat{\mathbf{y}}_j = \mathbf{X}_j(\mathbf{X}_j^\top \mathbf{X}_j)^{-1} \mathbf{X}_j^\top \mathbf{y}_j. \quad (3.2)$$

Predpokladáme pritom, že $h(\mathbf{X}_j) = k$ pre $j = 1, \dots, m$. Následne odhad $\hat{\boldsymbol{\Omega}} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \otimes \mathbf{I}_T$ konštruujeme po zložkách. Konzistentné odhady parametrov σ_{ij} získame ako

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_{it} \hat{\varepsilon}_{jt}. \quad (3.3)$$

2. Vypočítame prípustný Aitkenov odhad

$$\bar{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}^\top \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbf{y}. \quad (3.4)$$

Metódou navrhnutou v článku [9] je jednoduché ukázať nestrannosť tohto odhadu. Predpokladajme, že vektor rezíduí v čase $t = 1, \dots, T$ je symetricky rozdelený okolo $\mathbf{0}$ (tento predpoklad je splnený napríklad v prípade mnohorozmerného normálneho rozdelenia). Teda platí $\mathcal{D}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathcal{D}(-\boldsymbol{\varepsilon})$. Kombináciou (3.1) a (3.4) môžeme napísať

$$\bar{\mathbf{b}} - \boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}^\top \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.5)$$

Uvažujme o $(\mathbf{X}^\top \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}$ ako o funkcii $H(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})$. Platí teda

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{b}} - \boldsymbol{\beta} &= H(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})\boldsymbol{\varepsilon}, \\ \boldsymbol{\beta} - \bar{\mathbf{b}} &= -H(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})\boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Z tvaru matice $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ je zrejmé, že sa jedná o párnou funkciu parametru $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, a teda aj $H(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})$ je párnou funkciou. Z predpokladu $\mathcal{D}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathcal{D}(-\boldsymbol{\varepsilon})$ platí, že $\mathcal{D}(\bar{\mathbf{b}} -$

$\beta) = \mathcal{D}(\beta - \bar{\mathbf{b}})$, čo znamená, že $\bar{\mathbf{b}}$ je symetricky rozdelené okolo hodnoty β . Za predpokladu existencie $E(\bar{\mathbf{b}})$ potom platí

$$E(\bar{\mathbf{b}} - \beta) = 0, \quad (3.7)$$

čím je nestrannosť dokázaná.

Ako sa ďalej môžeme dočítať v [6] a [16], odhad (3.4) je za v praxi dosiahnuteľných predpokladov taktiež konzistentný, asymptoticky eficientný a asymptoticky normálny

$$\bar{\mathbf{b}} \stackrel{\text{as}}{\approx} N(\beta, (\mathbf{X}^\top \hat{\Omega}^{-1} \mathbf{X})^{-1}). \quad (3.8)$$

Je zrejmé, že odhad (3.4) má zmysel len v prípade, ak je matica $\hat{\Omega}$ regulárna. V prípade singularity tejto matice môžeme k vytvoreniu odhadu postupovať metódou navrhnutou v článku [14]. Budeme vychádzať z odhadu matice $\hat{\Omega}$ v tvare

$$\hat{\Omega}(d) = (\hat{\Sigma} + d\mathbf{I}_m) \otimes \mathbf{I}_T, \quad (3.9)$$

kde

- $d = d(T)$ je *adjustačný koeficient singularity* odvodený od dĺžky časového radu T , pre ktorý platí

$$\lim_{T \rightarrow \infty} d = 0, \quad (3.10)$$

- $\hat{\Sigma}$ je matica ($m \times m$) prvkov $\hat{\sigma}_{ij}$ spočítaných vzorcom (3.3).

Výsledný Aitkenov odhad je v tomto prípade

$$\bar{\mathbf{b}}(d) = (\mathbf{X}^\top \hat{\Omega}^{-1}(d) \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \hat{\Omega}^{-1}(d) \mathbf{y}. \quad (3.11)$$

Asymptotické vlastnosti tohto odhadu sú rovnaké ako v prípade odhadu $\bar{\mathbf{b}}$. Voľba parametru d je diskutovaná v článku [14]. Jednou z doporučovaných možností je $d = (1.06T^{-1/5})^2$.

Poznámka 3.1. V dvoch špeciálnych prípadoch môžeme získať eficientné BLU odhady parametrov β_j individuálne, tzn. pre každú rovnicu SUR sústavy zvlášť:

1. $\mathbf{X}_j = \mathbf{X} \quad \forall j$.
2. $\sigma_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$.

Nekorelovanosť rezíduí v 2. prípade môžeme štatisticky testovať pomocou LM-testu s nulovou hypotézou $H_0 : \sigma_{ij} = 0$ pre všetky $i \neq j$. Kritický obor tohoto testu má asymptotický tvar

$$T \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m r_{ij}^2 \geq \chi_{1-\alpha}^2(m(m-1)/2), \quad (3.12)$$

kde

$$r_{ij} = \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{ii}\hat{\sigma}_{jj}}} \quad (3.13)$$

sú odhadnuté hodnoty korelačných koeficientov rezíduí ε_{it} a ε_{jt} , $i, j = 1, \dots, m$.

3.2 Odhady v sústave simultánných rovníc

Klasický OLS-prístup je pre odhad parametrov sústavy simultánných rovníc nevhodný, pretože obecné nie je nestranný ani konzistentný (viď [6]). Vychýlenosť OLS-odhadu je priamym dôsledkom porušenia ortogonalnosti (zmenenej v kapitole 1.2), ktorú spôsobujú endogenné premenné \mathbf{Y}_j na pozíciách vysvetľovaných premenných. Z toho dôvodom je nutné použiť sofistikovanejšiu odhadovú metódu, ako je OLS-odhad. Obecné rozdeľujeme odhadové metódy sústavy simultánných rovníc do dvoch skupín:

1. *Odhady s obmedzenou informáciou (limited information - LI-odhady)*, ktoré odhadujú jednotlivé rovnice sústavy zvlášť. Týmto individuálnym prístupom však nieje využitá celá dátová informácia. Príkladmi LI-odhadov sú ILS-odhad, 2SLS-odhad, *odhady k-tej triedy*, *metóda najmenších podielov rozptylov* a LIML-odhad.
2. *Odhady s úplnou informáciou (full information - FI-odhady)*, ktoré odhadujú parametre všetkých rovníc sústavy naraz, takže využívajú celú dátovú informáciu. Sú efektívne, ale numericky výrazne náročnejšie. Príkladmi FI-odhadov sú 3SLS-odhad a FIML-odhad.

3.2.1 Nepriamy odhad metódou najmenších štvorcov

Pri tomto odhade vychádzame z OLS-odhadu parametrov $\mathbf{\Pi}$ rovnice v redukovanom tvare (2.17). Jedná sa pritom o model mnohorožmernej lineárnej regresie popísaný napríklad v knihe [11]. Takýto odhad je obecné nestranný a konzistentný a pre $h(\mathbf{X}) = k$ ho môžeme zapísať v tvare

$$\hat{\mathbf{\Pi}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}. \quad (3.14)$$

Pre praktickú analýzu sústavy však musíme odhadnúť parametre pôvodného štrukturálneho tvaru (2.14). Cieľom teda je (jednoznačne) transformovať parametre $\mathbf{\Pi}$ na pôvodné parametre $\mathbf{\Gamma}$ a \mathbf{B} . Pomocou rovnakej transformácie potom z nestranného a konzistentného odhadu $\hat{\mathbf{\Pi}}$ vyprodukuje nestranné a konzistentné odhady $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ a $\hat{\mathbf{B}}$ parametrov $\mathbf{\Gamma}$ a \mathbf{B} . Takýto postup odhadovania parametrov simultánných rovníc nazývame *nepriamy odhad metódou najmenších štvorcov (ILS-odhad, Indirect Least Squares)*.

Ako je však vidieť, pri tejto metóde sa stretávame s problémom existencie jednoznačnej transformácie $\mathbf{\Pi} = -\mathbf{B}\mathbf{\Gamma}^{-1}$ (hovoríme o tzv. probléme *identifikácie*). Z hľadiska identifikácie rozdeľujeme danú rovnicu zo sústavy simultánných rovníc na

- (i) *neidentifikovanú*, ak z redukovaných parametrov nieje možné určiť žiadne štrukturálne parametre; pre neidentifikovanú rovnicu teda neexistuje ILS-odhad;
- (ii) *presne identifikovanú*, ak z redukovaných parametrov možno jednoznačne určiť štrukturálne parametre; pre tento typ rovnice existuje práve jeden ILS-odhad, ktorý je navyše konzistentný a asymptoticky efektívny;

- (iii) *preidentifikovaný*, ak z redukovaných parametrov môžeme získať viac odlišných súborov štruktúrálnych parametrov; v tomto prípade teda existujú aspoň dva odlišné ILS-odhady, pričom všetky sú konzistentné, ale žiaden z nich nie je asymptoticky efektívny.

Existujú dva spôsoby, ako rozhodnúť o type identifikácie:

1. *Rozmerová podmienka identifikácie (nutná)*, ktorá je založená na počte zaradených a chýbajúcich premenných. Pripomeňme, že rovnako ako v podkapitole 2.2, značíme pomocou m_j a k_j redukovaný počet premenných (po vynechaní nulových parametrov) v j -tej rovnici. Túto podmienku môžeme sformulovať nasledujúcim spôsobom:

(i) *neidentifikovanosť*:

$$k - k_j < m_j - 1, \quad \text{tzn. } (k - k_j) + (m - m_j) < m - 1, \quad (3.15)$$

(ii) *presná identifikovanosť*:

$$k - k_j = m_j - 1, \quad \text{tzn. } (k - k_j) + (m - m_j) = m - 1, \quad (3.16)$$

(iii) *preidentifikovanosť*:

$$k - k_j > m_j - 1, \quad \text{tzn. } (k - k_j) + (m - m_j) > m - 1, \quad (3.17)$$

(iv) *identifikovanosť*:

$$k - k_j \geq m_j - 1, \quad \text{tzn. } (k - k_j) + (m - m_j) \geq m - 1. \quad (3.18)$$

2. *Hodnostná podmienka identifikácie (nutná a postačujúca)*, ktorá je založená na hodnotiach matíc parametrov. Vychádza z toho, že celá informácia týkajúca sa väzby štruktúrálnych a redukovaných parametrov je obsiahnutá v j -tom stĺpci rovnosti $\mathbf{\Pi}\mathbf{\Gamma} = -\mathbf{B}$, tj.

$$\mathbf{\Pi}^* \boldsymbol{\gamma}_j^* = -\boldsymbol{\beta}_j^*, \quad (3.19)$$

pričom vektory $\boldsymbol{\gamma}_j^*$ a $\boldsymbol{\beta}_j^*$ a matica $\mathbf{\Pi}^*$ sú prerovnané nasledujúcim spôsobom

$$\boldsymbol{\gamma}_j^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_j^{**} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_j^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_j^{**} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Pi}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_{11}^* & \mathbf{\Pi}_{12}^* \\ \mathbf{\Pi}_{21}^* & \mathbf{\Pi}_{22}^* \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

kde

- $\boldsymbol{\gamma}_j^{**}$ je vektor ($m_j \times 1$) (zvyšných $m - m_j$ štruktúrálnych parametrov vektoru $\boldsymbol{\gamma}_j^*$ je rovných nule),
- $\boldsymbol{\beta}_j^{**}$ je vektor ($k_j \times 1$) (zvyšných $k - k_j$ štruktúrálnych parametrov vektoru $\boldsymbol{\beta}_j^*$ je rovných nule),
- $\mathbf{\Pi}_{11}^*$ je matica ($k_j \times m_j$), $\mathbf{\Pi}_{12}^*$ je matica ($k_j \times (m - m_j)$), $\mathbf{\Pi}_{21}^*$ je matica ($(k - k_j) \times m_j$) a $\mathbf{\Pi}_{22}^*$ je matica ($(k - k_j) \times (m - m_j)$).

Vzťah (3.19) môžeme potom prepísať ako

$$\begin{pmatrix} \mathbf{\Pi}_{11}^* & \mathbf{\Pi}_{12}^* \\ \mathbf{\Pi}_{21}^* & \mathbf{\Pi}_{22}^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\gamma}_j^{**} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_j^{**} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

a teda

$$- \mathbf{\Pi}_{11}^* \boldsymbol{\gamma}_j^{**} = \boldsymbol{\beta}_j^{**}, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{\Pi}_{21}^* \boldsymbol{\gamma}_j^{**} = \mathbf{0}. \quad (3.23)$$

Vo vzťahu (3.22) je vektor $\boldsymbol{\beta}_j^{**}$ určený vektorom $\boldsymbol{\gamma}_j^{**}$ jednoznačne, a teda samotný problém identifikácie je skrytý v homogénnej sústave (3.23). Pomocou vety o jednoznačnosti riešenia homogénnej sústavy lineárnych rovníc (viď [5]) môžeme potom hodnostnú podmienku sformulovať v tvare

(i) *neidentifikovanosť*:

$$h(\mathbf{\Pi}_{21}^*) < m_j - 1, \quad (3.24)$$

(ii) *identifikovanosť*:

$$h(\mathbf{\Pi}_{21}^*) \geq m_j - 1. \quad (3.25)$$

Rozmerová podmienka je špeciálnym prípadom hodnostnej podmienky. V praxi je však využívanější a v jednoduchších sústavách aj vedie k rovnakému záveru ako hodnostná podmienka.

Príklad 3.1. Uvažujme sústavu simultánnych rovníc pre $m = 3$, $k = 3$ v tvare

$$y_{1t} = \gamma_{12}y_{2t} + \gamma_{13}y_{3t} + \beta_{11} + \beta_{12}x_{2t} + \beta_{13}x_{3t} + \varepsilon_{1t}, \quad (3.26)$$

$$y_{2t} = \gamma_{23}y_{3t} + \beta_{21} + \beta_{22}x_{2t} + \varepsilon_{2t}, \quad (3.27)$$

$$y_{3t} = \gamma_{32}y_{2t} + \beta_{31} + \varepsilon_{3t}. \quad (3.28)$$

Potom zrejme platí, že prvá rovnica je neidentifikovaná ($k - k_j = 0$, $m_j - 1 = 2$), druhá rovnica je presne identifikovaná ($k - k_j = 1$, $m_j - 1 = 1$) a tretia rovnica je preidentifikovaná ($k - k_j = 2$, $m_j - 1 = 1$).

Na záver k tejto metóde ešte poznamenajme, že v praxi je väčšina simultánnych rovníc preidentifikovaných, a teda skôr sa dáva prednosť eficientnejším odhadovým procedúram.

3.2.2 Dvojstupňový odhad metódou najmenších štvorcov

Dvojstupňový odhad metódou najmenších štvorcov (2SLS-odhad) je na rozdiel od ILS-odhadu vhodný aj pre preidentifikované rovnice, a teda na odhad sústavy simultánnych rovníc je v praxi používanější. Obecne je 2SLS-odhad založený na takzvaných *inštrumentálnych premenných*, za ktoré vezmeme všetky exogénne premenné z uvažovanej sústavy.

Pri samotnej konštrukcii odhadu sa väčšinou postupuje v dvoch stupňoch pre každú rovnicu (2.13) sústavy zvlášť:

1. V prvom stupni získame OLS-odhad matice všetkých endogenných premenných \mathbf{Y}_j na pravej strane j -tej rovnice (2.13) pomocou matice všetkých exogenných premenných \mathbf{X} (vid' (2.16)) sústavy ako

$$\hat{\mathbf{Y}}_j = \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}_j. \quad (3.29)$$

2. V druhom stupni (s využitím odhadu $\hat{\mathbf{Y}}_j$) skonštruujeme OLS-odhad parametrov $\boldsymbol{\gamma}_j$ a $\boldsymbol{\beta}_j$ v lineárnom regresnom modeli

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_j &= \hat{\mathbf{Y}}_j \boldsymbol{\gamma}_j + \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j = \hat{\mathbf{Z}}_j \boldsymbol{\delta}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j, \\ \text{kde } \hat{\mathbf{Z}}_j &= (\hat{\mathbf{Y}}_j, \mathbf{X}_j), \quad \boldsymbol{\delta}_j = (\boldsymbol{\gamma}_j^\top, \boldsymbol{\beta}_j^\top)^\top, \end{aligned} \quad (3.30)$$

čím dostaneme finálne odhady $\mathbf{c}_{2SLS,j}$ a $\mathbf{b}_{2SLS,j}$ parametrov $\boldsymbol{\gamma}_j$ a $\boldsymbol{\beta}_j$.

Podľa (3.30) získame 2SLS-odhad zo sústavy

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_j^\top \hat{\mathbf{Y}}_j & \hat{\mathbf{Y}}_j^\top \mathbf{X}_j \\ \mathbf{X}_j^\top \hat{\mathbf{Y}}_j & \mathbf{X}_j^\top \mathbf{X}_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{2SLS,j} \\ \mathbf{b}_{2SLS,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{Y}}_j^\top \mathbf{y}_j \\ \mathbf{X}_j^\top \mathbf{y}_j \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Pre j -tú rovnicu sústavy prerovnajme maticu všetkých exogenných premenných do tvaru $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_{j*})$, kde matica \mathbf{X}_{j*} typu $(T \times (k - k_j))$ je tvorená premennými sústavy nezahrnutými v j -tej rovnici. Potom môžeme písať

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Y}}_j^\top \hat{\mathbf{Y}}_j &= \mathbf{Y}_j^\top \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}_j \\ &= \mathbf{Y}_j^\top \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}_j \end{aligned} \quad (3.32)$$

a

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_j^\top \hat{\mathbf{Y}}_j &= \mathbf{X}_j^\top \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}_j \\ &= (\mathbf{X}_j^\top \mathbf{X}_j, \mathbf{X}_j^\top \mathbf{X}_{j*}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{X}_j^\top \mathbf{X}_j & \mathbf{X}_j^\top \mathbf{X}_{j*} \\ \mathbf{X}_{j*}^\top \mathbf{X}_j & \mathbf{X}_{j*}^\top \mathbf{X}_{j*} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{X}_j^\top \\ \mathbf{X}_{j*}^\top \end{pmatrix} \cdot \mathbf{Y}_j \\ &= (\mathbf{I}_{k_j} \quad \mathbf{0}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{X}_j^\top \\ \mathbf{X}_{j*}^\top \end{pmatrix} \cdot \mathbf{Y}_j \\ &= \mathbf{X}_j^\top \mathbf{Y}_j. \end{aligned} \quad (3.33)$$

A teda explicitne môžeme 2SLS-odhad vyjadriť vzorcom

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{2SLS,j} \\ \mathbf{b}_{2SLS,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_j^\top \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}_j & \mathbf{Y}_j^\top \mathbf{X}_j \\ \mathbf{X}_j^\top \mathbf{Y}_j & \mathbf{X}_j^\top \mathbf{X}_j \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_j^\top \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}_j \\ \mathbf{X}_j^\top \mathbf{y}_j \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

Ako konzistentný odhad jeho rozptylovej matice berieme

$$\mathbf{S}_{2SLS,j} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{2SLS,j}^2 \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_j^\top \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}_j & \mathbf{Y}_j^\top \mathbf{X}_j \\ \mathbf{X}_j^\top \mathbf{Y}_j & \mathbf{X}_j^\top \mathbf{X}_j \end{pmatrix}^{-1}, \quad (3.35)$$

kde

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{2SLS,j}^2 = \frac{(\mathbf{y}_j - \mathbf{Y}_j \mathbf{c}_{2SLS,j} - \mathbf{X}_j \mathbf{b}_{2SLS,j})^\top (\mathbf{y}_j - \mathbf{Y}_j \mathbf{c}_{2SLS,j} - \mathbf{X}_j \mathbf{b}_{2SLS,j})}{T}. \quad (3.36)$$

Za platnosti obvyklých asymptotických predpokladov je v rámci uvažovanej j -tej rovnice sústavy simultánnych rovníc 2SLS-odhad konzistentný, asymptoticky normálny a asymptoticky efektívny. V prípade, že j -tá rovnica je presne identifikovaná, je zároveň totožný s ILS-odhadom (vid' [5]).

3.2.3 Trojstupňový odhad metódou najmenších štvorcov

Na dosiahnutie asymptoticky efektívneho odhadu v rámci celej sústavy (nie len v rámci jednej rovnice, ako tomu bolo pri 2SLS-odhade) je nutné zohľadniť súčasnú korelovanosť medzi reziduálnymi zložkami jednotlivých rovníc, a je teda nutné konzistentne odhadnúť všetky kovariancie σ_{ij} . Pomocou tejto odhadnutej kovariančnej štruktúry je ďalej možné zkonštruovať prípustný Aitkenov odhad. Ide teda o pridanie ďalšieho stupňa do predchádzajúcej 2SLS metódy. Výsledkom je takzvaný *trojstupňový odhad metódou najmenších štvorcov (3SLS-odhad)*:

1. V prvom stupni získame OLS-odhady všetkých endogenných premenných \mathbf{Y}_j na pravej strane j -tej rovnice (2.13) podľa vzorca (3.29).
2. V druhom stupni v lineárnom regresnom modeli

$$\mathbf{y}_j = \hat{\mathbf{Z}}_j \boldsymbol{\delta}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j \quad (3.37)$$

pre každé $j = 1, \dots, m$ skonštruujeme 2SLS-odhad parametru $\boldsymbol{\delta}_j$ podľa (3.34). Následne odhadneme rezíduá $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j$ ako

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j = \mathbf{y}_j - \hat{\mathbf{y}}_j, \quad \text{kde } \hat{\mathbf{y}}_j = \hat{\mathbf{Z}}_j \hat{\boldsymbol{\delta}}_j, \quad (3.38)$$

pomocou ktorých získame konzistentné odhady kovariancií

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_{it} \hat{\varepsilon}_{jt}. \quad (3.39)$$

3. V treťom stupni potom vypočítame finálny 3SLS-odhad ako prípustný Aitkenov odhad zmenený v podkapitole 3.1.

Pri značení ako v (2.13) môžeme 3SLS-odhad parametrov $\boldsymbol{\delta}_j$ explicitne vyjadriť vzorcom

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}_{3SLS,1} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{3SLS,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{11} \mathbf{Z}_1^\top \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Z}_1 & \cdots & \hat{\sigma}_{1m} \mathbf{Z}_1^\top \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Z}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\sigma}_{m1} \mathbf{Z}_m^\top \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Z}_1 & \cdots & \hat{\sigma}_{mm} \mathbf{Z}_m^\top \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Z}_m \end{pmatrix}^{-1} \times \\ \times \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{11} \mathbf{Z}_1^\top \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}_1 + \cdots + \hat{\sigma}_{1m} \mathbf{Z}_1^\top \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}_m \\ \vdots \\ \hat{\sigma}_{m1} \mathbf{Z}_m^\top \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}_1 + \cdots + \hat{\sigma}_{mm} \mathbf{Z}_m^\top \mathbf{X} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}_m \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Za platnosti obvyklých asymptotických predpokladov v sústavách simultánnych rovníc je 3SLS-odhad konzistentný, asymptoticky normálny a asymptoticky efektívny v rámci celej sústavy ([6]).

3.2.4 Testy exogenity

Keďže v praxi nie je vždy jednoduché správne zatriediť všetky premenné medzi exogenné a endogenné, používajú sa takzvané *testy exogenity*. Najčastejšie používaný je *Hausmanov test*, ktorý má pre model (3.30) nulovú hypotézu

$$H_0 : \boldsymbol{\gamma}_j = \mathbf{0}. \quad (3.41)$$

Týmto testom testujeme, či by premenné \mathbf{Y}_j v j -tej rovnici (2.13) nemohli byť považované za exogenné. Na testovanie môžeme použiť F -test s kritickým oborom (na hladine významnosti α)

$$\frac{T - (k_j + m_j - 1)}{m_j - 1} \cdot \frac{RRSS - URSS}{URSS} \geq F_{1-\alpha}(m_j - 1, T - (k_j + m_j - 1)) \quad (3.42)$$

kde *RRSS* (*restricted residual sum of squares*) je *obmedzený* reziduálny súčet štvorcov (po aplikácii zmien podľa nulovej hypotézy) a *URSS* (*unrestricted residual sum of squares*) je *neobmedzený* reziduálny súčet štvorcov v modeli (3.30). Podobne môžeme použiť LM-test s asymptotickým kritickým oborom

$$LM = T \cdot R^2 \geq \chi_{1-\alpha}^2(m_j - 1), \quad (3.43)$$

kde R^2 je koeficient determinácie v modeli

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j = \hat{\mathbf{Y}}_j \boldsymbol{\gamma}_j + \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j + \mathbf{u}_j \quad (3.44)$$

pre OLS-rezíduá $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_j$ z modelu $\mathbf{y}_j = \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j$.

3.3 Odhady parametrov modelu VAR

V tejto podkapitole budeme predpokladať, že proces $\{\mathbf{y}_j\}$ je slabo stacionárny. V praxi býva zvykom, že analyzovaný rad podmienku stacionarity nespĺňa a pred samotným odhadom modelu je potrebné stacionaritu testovať a prípadne použiť vhodnú transformáciu na jej zabezpečenie. Niektoré testy stacionarity dát a ich transformácie sú popísané v knihe [6]. Bez ujmy na všeobecnosti ďalej predpokladajme, že proces $\{\mathbf{y}_t\}$ je centrováný. Budeme teda odhadovať stacionárny proces VAR(p) v tvare

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \dots + \boldsymbol{\Phi}_p \mathbf{y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (3.45)$$

ktorý môžeme zapísať po zložkách ako

$$y_{jt} = \sum_{k=1}^m \varphi_{jk}^{(1)} y_{k,t-1} + \dots + \sum_{k=1}^m \varphi_{jk}^{(p)} y_{k,t-p} + \varepsilon_{jt}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.46)$$

3.3.1 Identifikácia modelu

Existuje viacero metód na určenie rádu procesu. Pre svoju jednoduchosť sa v praxi často využívajú takzvané *informačné kritéria*. Voľba rádu spočíva v minimalizácii daného informačného kritéria cez rád modelu do predom zvolenej hornej hranice H (predpokladáme $H \geq p$). Z množiny testovaných modelov potom zvolíme

ten, pre ktorý je hodnota informačného kritéria najmenšia. Podľa [10] môžeme informačné kritérium zdefinovať obecné ako

$$Cr(h) = \ln|\hat{\Sigma}_h| + \frac{h}{T}c_T, \quad (3.47)$$

kde $|\hat{\Sigma}_h|$ je determinant odhadnutej rozptylovej matice reziduálnej zložky v modeli $\text{VAR}(h)$ a c_T je neklesajúca postupnosť reálnych čísel označovaná ako *penalizačná zložka*. Zvolený rád modelu je potom

$$\hat{p}(Cr) = \underset{h=0,1,\dots,H}{\operatorname{argmin}} Cr(h). \quad (3.48)$$

Odhad $\hat{p}(Cr)$ je konzistentný práve vtedy, keď

$$\lim_{T \rightarrow \infty} c_T = \infty, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{c_T}{T} = 0. \quad (3.49)$$

Dôkaz tohto tvrdenia je možné dohľadať v knihe [10].

Medzi najpoužívanéjšie kritéria patrí:

1. *AIC (Akaike information criterion)*:

$$AIC(h) = \ln|\hat{\Sigma}_h| + \frac{2hm^2}{T}, \quad \text{tzn. } c_T = 2m^2, \quad (3.50)$$

2. *SC (Schwarz information criterion)*:

$$SC(h) = \ln|\hat{\Sigma}_h| + \frac{\ln(T)hm^2}{T}, \quad \text{tzn. } c_T = m^2 \ln(T), \quad (3.51)$$

3. *HQC (Hannan–Quinn information criterion)*:

$$HQC(h) = \ln|\hat{\Sigma}_h| + \frac{2\ln(\ln(T))hm^2}{T}, \quad \text{tzn. } c_T = 2m^2 \ln(\ln(T)). \quad (3.52)$$

Kritéria *SC* a *HQC* spĺňajú podmienku (3.49), a teda sú konzistentné. Naproti tomu kritérium *AIC* konzistentné nie je a s kladnou pravdepodobnosťou nadhodnocuje voľbu rádu p . Pravdepodobnosť nadhodnotenia rádu pomocou *AIC* je však pre $m \geq 5$ zanedbateľná (viď [10]).

To že informačné kritéria sa nemusia pri voľbe rádu nutne zhodovať, možno demonštrovať nasledujúcou nerovnosťou. Pre $T \geq 16$ platí vzťah

$$\hat{p}(SC) \leq \hat{p}(HQC) \leq \hat{p}(AIC). \quad (3.53)$$

Dôkaz tohto tvrdenia je opäť možné nájsť v knihe [10].

3.3.2 Odhad metódou najmenších štvorcov

Na rozdiel od obecného prípadu SUR sústavy alebo sústavy simultánnych rovníc sú premenné na pravej strane v modeli VAR rovnaké vo všetkých rovniciach, a teda na získanie konzistentného odhadu nieje potrebné model odhadovať ako systém. Jednotlivé rovnice sústavy (3.46) odhadujeme individuálne jednorozmerným OLS-odhadom, čím postupne získame odhady $\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_p$. Rozptylovú maticu bieleho šumu Σ odhadneme ako

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t \hat{\epsilon}_t^\top, \quad (3.54)$$

kde

$$\hat{\epsilon}_t = \mathbf{y}_t - \hat{\Phi}_1 \mathbf{y}_{t-1} - \dots - \hat{\Phi}_p \mathbf{y}_{t-p}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.55)$$

V praxi sa niekedy tiež používa korigovaný odhad rozptylovej matice v tvare

$$\tilde{\Sigma} = \frac{T}{T - mp} \hat{\Sigma}. \quad (3.56)$$

$\hat{\Sigma}$ a $\tilde{\Sigma}$ sú asymptoticky ekvivalentné konzistentné odhady. Odhad $\tilde{\Sigma}$ je navyše nestranný (viď [10]).

Na zrealizovanie OLS odhadu potrebujeme okrem pozorovaní $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_T$ poznať aj hodnoty $\mathbf{y}_{-p+1}, \dots, \mathbf{y}_0$, ktoré sa v ekonometrii zvyknú označovať ako *presampled values*.

3.3.3 Odhad pomocou Yuleových-Walkerových rovníc

Parametre modelu VAR(p) v tvare (3.45) môžeme s využitím odhadnutej autokovariančnej funkcie $\hat{\gamma}_k$ odhadnúť pomocou rovníc (2.56). Odhad parametrov Φ_1, \dots, Φ_p touto metódou môžeme vyjadriť v tvare

$$(\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_p) = (\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_p) \cdot \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_0 & \hat{\gamma}_1 & \dots & \hat{\gamma}_{p-1} \\ \hat{\gamma}_{-1} & \hat{\gamma}_0 & \dots & \hat{\gamma}_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\gamma}_{-p+1} & \hat{\gamma}_{-p+2} & \dots & \hat{\gamma}_0 \end{pmatrix}^{-1}. \quad (3.57)$$

Autokovariančnú funkciu γ_k odhadneme pre pozorované hodnoty $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_T$ ako

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{T} \sum_{t=k+1}^T (\mathbf{y}_t - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_{t-k} - \bar{\mathbf{y}})^\top, \quad k = 0, \dots, p, \quad (3.58)$$

kde

$$\bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m)^\top, \quad \bar{y}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_{it}. \quad (3.59)$$

Hodnoty $\hat{\gamma}_{-k}$ pre $k = 1, \dots, p-1$ spočítame podľa (2.41) ako $\hat{\gamma}_k^\top$. Ak máme k dispozícii tiež hodnoty $\mathbf{y}_{-p+1}, \dots, \mathbf{y}_0$, môžeme odhady $\hat{\gamma}_k$ a $\bar{\mathbf{y}}$ modifikovať ako

$$\hat{\gamma}_k^* = \frac{1}{T+p} \sum_{t=k-p+1}^T (\mathbf{y}_t - \bar{\mathbf{y}}^*)(\mathbf{y}_{t-k} - \bar{\mathbf{y}}^*)^\top, \quad k = 0, \dots, p, \quad (3.60)$$

$$\bar{\mathbf{y}}^* = (\bar{y}_1^*, \dots, \bar{y}_m^*)^\top, \quad \bar{y}_i^* = \frac{1}{T+p} \sum_{t=-p+1}^T y_{it}. \quad (3.61)$$

Rezídua $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_T$ a ich rozptylovú maticu odhadneme analogickým spôsobom ako v prípade OLS odhadu.

Za predpokladu stability procesu generujúceho dáta má Yule-Walkerov odhad rovnaké asymptotické vlastnosti ako odhad OLS (viď [10]). Za jeho výhodu sa považuje fakt, že odhadnutý model vždy spĺňa podmienku stability, to znamená platí

$$\det(\mathbf{I}_m - \hat{\boldsymbol{\Phi}}_1 z - \dots - \hat{\boldsymbol{\Phi}}_p z^p) \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1. \quad (3.62)$$

Táto výhoda však niekedy môže spôsobiť vychýlenie odhadu, a to najmä v prípade, že dáta generujúci proces nie je stabilný.

3.3.4 ML-odhad

Pri konštrukcii ML-odhadu parametrov $\boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{\Phi}_1, \dots, \boldsymbol{\Phi}_p)$ a $\boldsymbol{\Sigma}$ budeme vychádzať z knihy [15]. Za predpokladu gaussovského bieleného šumu je pre dané hodnoty $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_{-p+1}, \dots, \mathbf{y}_T)$ logaritmická vierohodnostná funkcia v tvare

$$\ln L(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{y}) = -\frac{Tm}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln |\boldsymbol{\Sigma}| - \frac{1}{2} \text{tr}[\boldsymbol{\Sigma}^{-1} S(\boldsymbol{\Phi})], \quad (3.63)$$

kde

$$S(\boldsymbol{\Phi}) = \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^\top. \quad (3.64)$$

V prípade, že hodnoty \mathbf{y}_t pre $t \leq 0$ nie sú dostupné, je možné použiť podmienenú metodu maximálnej vierohodnosti s logaritmickou vierohodnostnou funkciou

$$\ln L_*(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{y}) = -\frac{T-p}{2} \ln((2\pi)^m |\boldsymbol{\Sigma}|) - \frac{1}{2} \text{tr}[(\boldsymbol{\Sigma}^{-1}) S_*(\boldsymbol{\Phi})], \quad (3.65)$$

kde

$$S_*(\boldsymbol{\Phi}) = \sum_{t=p+1}^T \boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t^\top. \quad (3.66)$$

Vektor všetkých odhadovaných parametrov označme ako $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Sigma})$. Príslušný ML-odhad $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ je nestranný, konzistentný a platí, že $\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta})$ má asymptoticky mnohorozmerné normálne rozdelenie

$$\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{\eta}}}), \quad (3.67)$$

kde

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\hat{\boldsymbol{\eta}}} = \left[-E \left(\frac{\partial^2 \ln L_*(\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}^\top} \right) \right]^{-1}. \quad (3.68)$$

Tieto vlastnosti sú detailnejšie prediskutované v článkoch [12], [13] a [1].

Poznámka 3.2. Za predpokladu normálneho rozdelenia rezíduí sú odhady OLS a ML asymptoticky ekvivalentné.

3.3.5 Diagnostika modelu VAR

Po odhadnutí parametrov $\Phi_1, \dots, \Phi_p, \Sigma$ je dôležité overiť adekvátnosť modelu, pričom dôraz sa kladie najmä na overovanie stacionarity a kontrolu výsledného bieleho šumu.

Overovanie stacionarity

V modeli s odhadnutými parametrami $\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_p, \hat{\Sigma}$ kontrolujeme, či korene polynómu

$$\det(\mathbf{I}_m - \hat{\Phi}_1 z - \dots - \hat{\Phi}_p z^p) \quad (3.69)$$

ležia mimo jednotkový kruh v komplexnej rovine. V praxi sa však oveľa častejšie používa analógia tejto podmienky a kontroluje sa, či korene polynómu

$$\det(\mathbf{I}_m z^p - \hat{\Phi}_1 z^{p-1} - \dots - \hat{\Phi}_p) \quad (3.70)$$

ležia v jednotkovom kruhu v komplexnej rovine (viď tiež (2.53) a (2.54)).

Testovanie nekorelovanosti bieleho šumu

Autokovariančnú funkciu reziduálnej zložky $\gamma_k(\boldsymbol{\varepsilon}_t)$ odhadneme pomocou vypočítaného bieleho šumu $\{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t\}$ ako

$$\gamma_k(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t) = \frac{1}{T} \sum_{t=k+1}^T \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t-k}^\top, \quad k = 0, 1, \dots, T-1. \quad (3.71)$$

Odhadom autokorelačnej funkcie reziduálnej zložky $\boldsymbol{\rho}_k(\boldsymbol{\varepsilon}_t)$ je podľa (2.40)

$$\boldsymbol{\rho}_k(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t) = \mathbf{D}_\varepsilon^{-1} \gamma_k(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t) \mathbf{D}_\varepsilon^{-1}, \quad k = 0, 1, \dots, T-1, \quad (3.72)$$

kde \mathbf{D}_ε je diagonálna matica ($m \times m$), ktorej prvky sú odmocninami diagonálnych prvkov matice $\gamma_0(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t)$.

Na testovanie nekorelovanosti rezíduí môžeme použiť *Portmanteau testu* s nulovou hypotézou

$$H_0 : (\boldsymbol{\rho}_1(\boldsymbol{\varepsilon}_t), \dots, \boldsymbol{\rho}_h(\boldsymbol{\varepsilon}_t)) = \mathbf{0} \quad (3.73)$$

a testovou štatistikou

$$Q_h = T^2 \sum_{i=1}^h \frac{1}{T-i} \text{tr}(\gamma_i^\top(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t) \gamma_0^{-1}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t) \gamma_i(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t) \gamma_0^{-1}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t)), \quad (3.74)$$

kde h je subjektívna hodnota, pre ktorú platí $p < h < T$. Podľa [6] sa doporučuje najmä voľba $h \approx \sqrt{T}$. Pre vysoké hodnoty T a h má táto štatistika asymptotické rozdelenie $\chi^2(m^2(h-p))$ a teda H_0 zamietame na hladine významnosti α ak

$$Q_h \geq \chi_{(1-\alpha)}^2(m^2(h-p)). \quad (3.75)$$

V praxi sa tiež nekorelovanosť rezíduí overuje graficky pomocou Bartletovej aproximácie, ktorá je aplikovaná na jednotlivé odhadnuté autokorelácie a vzájomné korelácie reziduálnej zložky. Kritický obor tohto testu na hladine významnosti 5% môžeme vyjadriť v tvare

$$|r_{ij}(k)| \geq 2 \frac{1}{\sqrt{T}}, \quad k = 1, \dots, T-1, \quad (3.76)$$

kde $r_{ij}(k)$ je prvok matice $\boldsymbol{\rho}_k(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t)$.

Testovanie normality bieleho šumu

Dôležitým aspektom diagnostiky modelu je taktiež testovanie normality bieleho šumu. V praxi je často využívaný viacrozmerný *Jarque-Bera* test, ktorý je založený na vlastnostiach koeficientov šikmosti a špicatosti mnohorozmerného normálneho rozdelenia. Nulovou hypotézou tohoto testu je normalita rezíduí. K odvodeniu testovej štatistiky položíme

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t, \quad \mathbf{S}_\varepsilon = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (\hat{\varepsilon}_t - \bar{\varepsilon})(\hat{\varepsilon}_t - \bar{\varepsilon})^\top. \quad (3.77)$$

Nech ďalej \mathbf{P}_ε je matica spĺňajúca $\mathbf{S}_\varepsilon = \mathbf{P}_\varepsilon \mathbf{P}_\varepsilon^\top$ (k vyjadreniu matice \mathbf{P}_ε môžeme použiť Choleského rozklad matice \mathbf{S}_ε). Ďalej položíme

$$\mathbf{v}_t = (v_{1t}, \dots, v_{mt})^\top = \mathbf{P}_\varepsilon^{-1}(\hat{\varepsilon}_t - \bar{\varepsilon}), \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.78)$$

$$\mathbf{b}_1 = (b_{11}, \dots, b_{m1})^\top, \quad \text{kde } b_{k1} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T v_{kt}^3, \quad k = 1, \dots, m, \quad (3.79)$$

$$\mathbf{b}_2 = (b_{12}, \dots, b_{m2})^\top, \quad \text{kde } b_{k2} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T v_{kt}^4, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.80)$$

Testová štatistika Jarque-Bera testu je potom

$$\lambda_{sk} = \underbrace{\frac{T \mathbf{b}_1^\top \mathbf{b}_1}{6}}_{\lambda_s} + \underbrace{\frac{T(\mathbf{b}_2 - \mathbf{3}_m)^\top (\mathbf{b}_2 - \mathbf{3}_m)}{24}}_{\lambda_k}, \quad (3.81)$$

kde $\mathbf{3}_m = (3, \dots, 3)^\top$ je vektor ($m \times 1$). Za platnosti nulovej hypotézy platí

$$\lambda_s \xrightarrow{d} \chi^2(m), \quad \lambda_k \xrightarrow{d} \chi^2(m) \quad (3.82)$$

(viď [10]), takže asymptotický kritický obor testu na hladine významnosti α má tvar

$$\lambda_{sk} \geq \chi_{(1-\alpha)}^2(2m). \quad (3.83)$$

Normalita rezíduí je nutnou a postačujúcou podmienkou normality centrovaneho stacionárneho VAR(p) procesu.

3.3.6 Predpovede v modeli VAR

Predpovedanie je vo veľa prípadoch v praxi hlavným cieľom ekonometrickej analýzy dát. Veľkou výhodou modelu VAR(p) je práve jednoduchosť konštrukcie predpovedí.

V modeli (3.45) s odhadnutými parametrami $\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_p, \hat{\Sigma}$ konštruujeme bodovú predpoveď v čase t o h krokov dopredu rekurzívnym vzorcom

$$\hat{\mathbf{y}}_{t+h}(t) = \hat{\Phi}_1 \hat{\mathbf{y}}_{t+h-1}(t) + \dots + \hat{\Phi}_p \hat{\mathbf{y}}_{t+h-p}(t), \quad (3.84)$$

kde

$$\hat{\mathbf{y}}_{t+j}(t) = \mathbf{y}_{t+j} \quad \text{pre } j \leq 0. \quad (3.85)$$

4. Aplikácia

4.1 Model SUR

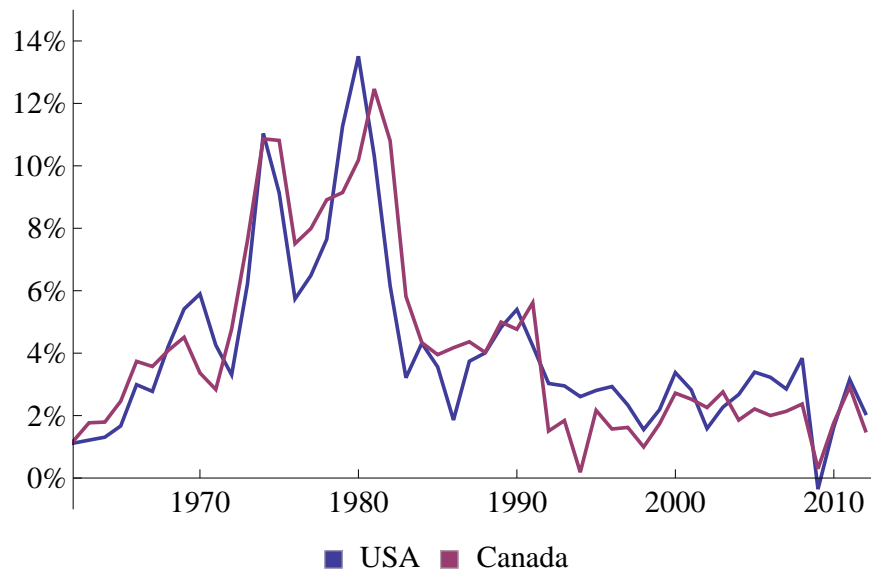
Metódami odhadu SUR sústavy sme sa podrobnejšie zaoberali v podkapitole 3.1. V praxi je možné takéto sústavy odhadovať pomocou viacerých štatistických softvérov. Jednou z najjednoduchších možností je softvér *EViews*, v ktorom je SUR odhad možné uskutočniť vo veľmi jednoduchom prostredí. Výhodou softvéru *EViews* je tiež množstvo sprievodných výstupov, ako napríklad diagnóza odhadnutých parametrov a analýza odhadnutých rezíduí. Aitkenov odhad pre odhadovanie sústavy SUR je tiež veľmi jednoduché naprogramovať. K tomuto účelu je možné použiť napríklad programy *R*, *Wolfram Mathematica* alebo *Gretl*.

Pre nasledujúci príklad je vytvorený program v softvéri *Wolfram Mathematica 9*, pomocou ktorého je zkonštruovaný odhad parametrov a ďalšie kalkulácie. Rovnako tiež grafické výstupy použité v príklade pochádzajú z tohto softvéru.

4.1.1 Príklad SUR

V tomto príklade sa budeme zaoberať použitím SUR sústavy na modelovanie miery inflácie v dvoch zvolených krajinách. Motiváciou je bakalárska práca [3], v ktorej sme aplikovali jednorozmerný regresný model na vysvetlenie ročnej miery inflácie v USA.

Z internetových stránok *worldbank.org* máme k dispozícii časové rady ročnej miery inflácie v USA a v Kanade v rokoch 1962 až 2012. Grafy týchto radov možno vidieť na obrázku 4.1.



Obr. 4.1: Ročné miery inflácie v USA a Kanade

Pre jednoduchšiu interpretáciu označme tieto rady ako $y_{USA,t}$, $y_{CAN,t}$ a uva-

žujme čas $t = 1, \dots, 51$. Ako vysvetľujúce premenné v modeli použijeme veličiny:

$x_{USA,t}^{(1)}, x_{CAN,t}^{(1)}$	ročný nárast HDP,
$x_{USA,t}^{(2)}, x_{CAN,t}^{(2)}$	ročný nárast exportu,
$x_{USA,t}^{(3)}, x_{CAN,t}^{(3)}$	priemerná ročná úroková miera.

Aby sme mali predstavu o veľkosti a variabilite dát, tak sa ešte pred modelovaním pozrieme na základné štatistiky a korelačnú štruktúru veličín v oboch krajinách (viď tabuľky 4.1, 4.2 a 4.3). Môžeme vidieť, že v oboch prípadoch je s vysvetľovanou premennou najviac korelovaná veličina vyjadrujúca priemernú ročnú úrokovú mieru. Najslabšiu koreláciu vykazuje vysvetľovaná miera inflácie s ročným nárastom HDP v Kanade.

	priemer	medián	maximum	minimum	smer. odch.
$y_{USA,t}$	0.041	0.032	0.135	-0.004	0.028
$x_{USA,t}^{(1)}$	0.032	0.035	0.073	-0.028	0.021
$x_{USA,t}^{(2)}$	0.060	0.071	0.188	-0.091	0.054
$x_{USA,t}^{(3)}$	0.077	0.079	0.189	0.032	0.032
$y_{CAN,t}$	0.041	0.029	0.125	0.002	0.031
$x_{CAN,t}^{(1)}$	0.033	0.032	0.07	-0.029	0.022
$x_{CAN,t}^{(2)}$	0.051	0.050	0.184	-0.138	0.059
$x_{CAN,t}^{(3)}$	0.079	0.069	0.193	0.024	0.036

Tabuľka 4.1: Základné popisné štatistiky u sledovaných veličín

	$y_{USA,t}$	$x_{USA,t}^{(1)}$	$x_{USA,t}^{(2)}$	$x_{USA,t}^{(3)}$
$y_{USA,t}$	1.000	-0.247	0.150	0.707
$x_{USA,t}^{(1)}$	-0.247	1.000	0.444	-0.140
$x_{USA,t}^{(2)}$	0.150	0.444	1.000	0.053
$x_{USA,t}^{(3)}$	0.707	-0.103	0.053	1.000

Tabuľka 4.2: Výberové korelačné koeficienty pre pozorované veličiny v USA

	$y_{CAN,t}$	$x_{CAN,t}^{(1)}$	$x_{CAN,t}^{(2)}$	$x_{CAN,t}^{(3)}$
$y_{CAN,t}$	1.000	-0.089	-0.206	0.767
$x_{CAN,t}^{(1)}$	-0.089	1.000	0.650	-0.103
$x_{CAN,t}^{(2)}$	-0.206	0.650	1.000	-0.002
$x_{CAN,t}^{(3)}$	0.767	-0.103	-0.002	1.000

Tabuľka 4.3: Výberové korelačné koeficienty pre pozorované veličiny v Kanade

Ďalej teda budeme pre $t = 1, \dots, 51$ odhadovať sústavu rovníc v tvare

$$\begin{aligned} y_{USA,t} &= \alpha_{USA} + x_{USA,t}^{(1)}\gamma_{USA}^{(1)} + x_{USA,t}^{(2)}\gamma_{USA}^{(2)} + x_{USA,t}^{(3)}\gamma_{USA}^{(3)} + \varepsilon_{USA,t}, \\ y_{CAN,t} &= \alpha_{CAN} + x_{CAN,t}^{(1)}\gamma_{CAN}^{(1)} + x_{CAN,t}^{(2)}\gamma_{CAN}^{(2)} + x_{CAN,t}^{(3)}\gamma_{CAN}^{(3)} + \varepsilon_{CAN,t}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pri konštrukcii odhadu však budeme túto sústavu odhadovať ako celok podľa (2.4), kde v tomto prípade $m = 2$, $T = 51$ a $k = 4$.

V prvej fáze odhadu pre obe rovnice odhadneme individuálnou aplikáciou OLS-odhadu rezídua $\hat{\varepsilon}_1$ a $\hat{\varepsilon}_2$ podľa predpisu (3.2). Pomocou nich odhadneme podľa (3.3) rozptylovú maticu

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{11} & \hat{\sigma}_{12} \\ \hat{\sigma}_{21} & \hat{\sigma}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000340 & 0.000233 \\ 0.000233 & 0.000322 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Na základe LM-testu z poznámky 3.1 môžeme otestovať, či individuálne odhady parametrov sústavy 4.1 nie sú eficientné. V tomto prípade však na 5-percentnej hladine významnosti zamietame nulovú hypotézu nekorelovanosti rezíduí, kedy

$$51 \sum_{i=1}^1 \sum_{j=i+1}^2 \left(\frac{\hat{\sigma}_{ij}}{\sqrt{\hat{\sigma}_{ii}\hat{\sigma}_{jj}}} \right)^2 = 25.2556 > \chi_{0.95}^2(1) = 3.84146. \quad (4.3)$$

Prejdeme teda k dvojstupňovému Aitkenovmu odhadu (3.4) s využitím matice $\hat{\Omega} = \hat{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_{51}$. Odhadnuté parametre sústavy (4.1) možno vidieť v tabuľke 4.4. Pre porovnanie sú v tabuľke uvedené aj individuálne OLS-odhady bez použitia druhého stupňa.

	$\hat{\alpha}_{USA}$	$\hat{\gamma}_{USA}^{(1)}$	$\hat{\gamma}_{USA}^{(2)}$	$\hat{\gamma}_{USA}^{(3)}$	$\hat{\alpha}_{CAN}$	$\hat{\gamma}_{CAN}^{(1)}$	$\hat{\gamma}_{CAN}^{(2)}$	$\hat{\gamma}_{CAN}^{(3)}$
individ.	0.0003	-0.339	0.121	0.578	-0.013	0.299	-0.182	0.684
Aitken.	0.0013	-0.272	0.108	0.548	-0.004	0.047	-0.088	0.612

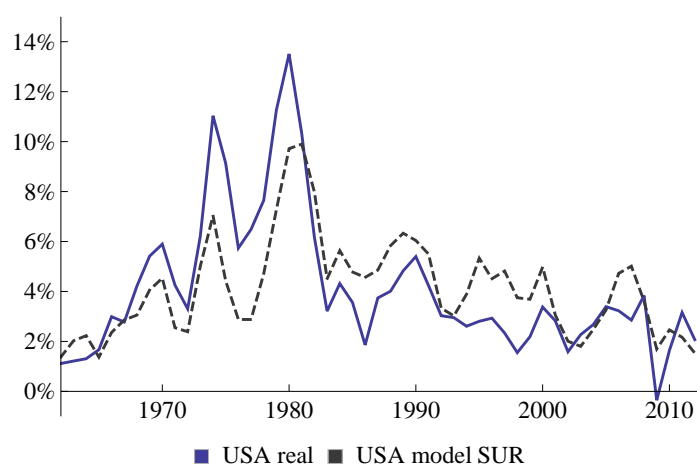
Tabuľka 4.4: Odhadnuté parametre modelu individuálnym OLS-odhadom a Aitkenovým dvojstupňovým odhadom

Pre odhadnuté modely sú v tabuľke 4.5 spočítané charakteristiky presnosti modelu (podrobnejšie k ich vypočtu vid' [6]). Preložené hodnoty $\hat{y}_{USA,t}$, $\hat{y}_{CAN,t}$

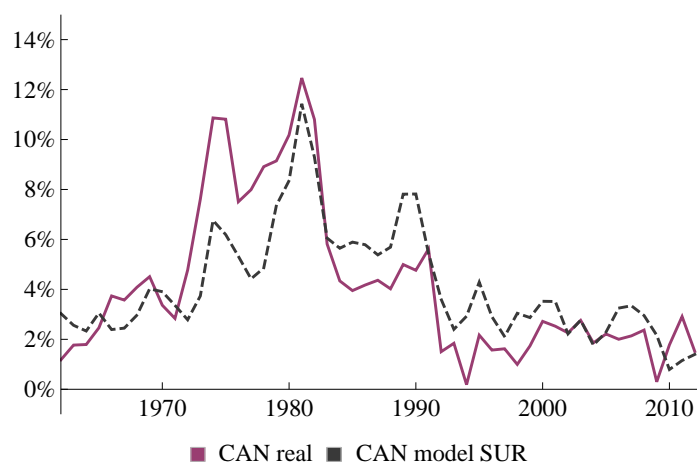
s použitím odhadnutých parametrov dvojstupňovým Aitkenovým odhadom sú znázornené na obrázkoch 4.2 a 4.3. Relatívne nízke hodnoty koeficientu determinácie naznačujú možnosť pôsobenia ďalších veličín na mieru inflácie v USA a Kanade.

	individ.			Aitken.		
	SSE	R^2	\hat{R}^2	SSE	R^2	\hat{R}^2
USA	0.174	0.564	0.536	0.018	0.560	0.532
CAN	0.016	0.657	0.635	0.018	0.630	0.607

Tabuľka 4.5: Charakteristiky presnosti modelu (reziduálny súčet štvorcov, koeficient determinácie a korigovaný koeficient determinácie)



Obr. 4.2: Skutočné hodnoty miery inflácie v USA spolu s preloženými hodnotami



Obr. 4.3: Skutočné hodnoty miery inflácie v Kanade spolu s preloženými hodnotami

Poznámka 4.1. Pre kontrolu odhadnutých parametrov pomocou naprogramovanej funkcie v softvéri *Mathematica* môžeme použiť softvér *EViews 7* (výstup vid' v tabuľke 4.6). Okrem odhadnutých parametrov samotných sú vo výstupe tak-tiež testové štatistiky a p -hodnoty testov na určenie ich významnosti. Môžeme napríklad vidieť, že parameter $\gamma_{CAN}^{(1)}$ sa na 5-percentnej hladine v modeli javí ako nevýznamný, kedy p -hodnota testu nulovosti je 0.6796.

```

=====
System: SUR_inflation
Estimation Method: Seemingly Unrelated Regression
Sample: 1962 2012
Included observations: 51
Linear estimation after one-step weighting matrix
=====

```

	Coefficient	Std.Error	t-Statistic	Prob.
C(11)	0.001267	0.007846	0.161523	0.8720
C(12)	-0.271659	0.118940	-2.283999	0.0246
C(13)	0.107515	0.039235	2.740281	0.0073
C(14)	0.548185	0.076828	7.135179	0.0000
C(21)	-0.003899	0.006996	-0.557278	0.5787
C(22)	0.047122	0.113727	0.414338	0.6796
C(23)	-0.088197	0.042629	-2.068941	0.0413
C(24)	0.612344	0.066749	9.173818	0.0000

```

=====
Determinant residual covariance 4.52E-08
=====

Equation: INFLATION_USA = C(11) + C(12)*GDP_GROWTH_USA+C(13)
          *EXPORT_GROWTH_USA+C(14)*INTEREST_RATE_USA
Observations: 51
R-squared          0.560327      Mean dependent var 0.041136
Adjusted R-squared 0.532263      S.D. dependent var 0.028225
S.E. of regression 0.019303      Sum squared resid 0.017513
Durbin-Watson stat 0.399153

Equation: INFLATION_CAN = C(21) + C(22)*GDP_GROWTH_CAN+C(23)
          *EXPORT_GROWTH_CAN+C(24)*INTEREST_RATE_CAN
Observations: 51
R-squared          0.630132      Mean dependent var 0.041449
Adjusted R-squared 0.606523      S.D. dependent var 0.030922
S.E. of regression 0.019397      Sum squared resid 0.017683
Durbin-Watson stat 0.460223
=====

```

Tabuľka 4.6: Výstup v programe *EViews 7* pre odhad SUR sústavy

4.2 Sústava simultánných rovníc

V predchádzajúcej podkapitole sme zmienili možné pôsobenie ďalších veličín na mieru inflácie v USA a Kanade. To je motiváciou pre aplikáciu sústavy simultánných rovníc, v ktorých zohľadníme vzájomné ovplyvnenie miery inflácie v sledovaných krajinách.

Odhadovými metódami na odhad parametrov sústavy simultánných rovníc (SEM) sme sa zaoberali v podkapitole 3.2. Rovnako, ako v prípade sústavy SUR, je aj v tomto prípade jednoduchou voľbou softvér *EViews*, ktorý po zadaní požadovanej sústavy poskytuje výstupy bez nutnosti akéhokoľvek programovania. Odhady 2SLS a 3SLS však naprogramovať zložité nie je, a teda v nasledujúcom príklade opäť použijeme primárne softvér *Wolfram Mathematica 9*.

4.2.1 Príklad SEM

Budeme vychádzať z dát z príkladu SUR v podkapitole 4.1.1, kde rovnako za vysvetľované premenné vezmeme ročné miery inflácie v USA a Kanade (viď obrázok 4.1). Naďalej budeme pracovať s časom $t = 1 \dots, 51$ a ako vysvetľujúce premenné použijeme veličiny:

$$\begin{array}{ll} x_{USA,t}^{(1)}, x_{CAN,t}^{(1)} & \text{ročný nárast HDP,} \\ x_{USA,t}^{(2)}, x_{CAN,t}^{(2)} & \text{ročný nárast exportu,} \\ x_{USA,t}^{(3)}, x_{CAN,t}^{(3)} & \text{priemerná ročná úroková miera.} \end{array}$$

V tomto príklade budeme odhadovať sústavu

$$\begin{aligned} y_{USA,t} &= \gamma_{USA} y_{CAN,t} \\ &+ \beta_{USA,1} + \beta_{USA,2} x_{USA,t}^{(1)} + \beta_{USA,3} x_{USA,t}^{(2)} + \beta_{USA,4} x_{USA,t}^{(3)} \\ &+ \varepsilon_{USA,t}, \\ y_{CAN,t} &= \gamma_{CAN} y_{USA,t} \\ &+ \beta_{CAN,1} + \beta_{CAN,5} x_{CAN,t}^{(1)} + \beta_{CAN,6} x_{CAN,t}^{(2)} + \beta_{CAN,7} x_{CAN,t}^{(3)} \\ &+ \varepsilon_{CAN,t}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

V našom prípade je $k = 7$, $m_1 = m_2 = 2$ a $k_1 = k_2 = 4$, a teda obe rovnice sú podľa (3.17) preidentifikované ($k - k_j > m_j - 1$). Z toho dôvodu by nebolo vhodné použitie nepriameho ILS-odhadu. Použitím explicitného vzorca (3.34) pridáme k 2SLS-odhadu, pričom matice vstupujúce do výpočtu v tomto prípade sú

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} y_{USA,1} \\ \vdots \\ y_{USA,51} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} y_{CAN,1} \\ \vdots \\ y_{CAN,51} \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 & x_{USA,1}^{(1)} & x_{USA,1}^{(2)} & x_{USA,1}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{USA,51}^{(1)} & x_{USA,51}^{(2)} & x_{USA,51}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 & x_{CAN,1}^{(1)} & x_{CAN,1}^{(2)} & x_{CAN,1}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{CAN,51}^{(1)} & x_{CAN,51}^{(2)} & x_{CAN,51}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{USA,1}^{(1)} & x_{USA,1}^{(2)} & x_{USA,1}^{(3)} & x_{CAN,1}^{(1)} & x_{CAN,1}^{(2)} & x_{CAN,1}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{USA,51}^{(1)} & x_{USA,51}^{(2)} & x_{USA,51}^{(3)} & x_{CAN,51}^{(1)} & x_{CAN,51}^{(2)} & x_{CAN,51}^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

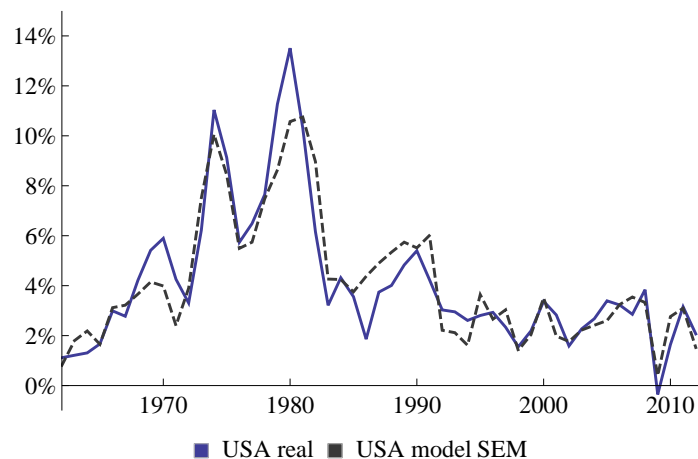
Vypočítané odhady sústavy môžeme vyjadriť v tvare

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{USA} \\ \hat{\beta}_{USA,1} \\ \hat{\beta}_{USA,2} \\ \hat{\beta}_{USA,3} \\ \hat{\beta}_{USA,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6549 \\ 0.0023 \\ -0.2257 \\ 0.1264 \\ 0.1476 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{CAN} \\ \hat{\beta}_{CAN,1} \\ \hat{\beta}_{CAN,5} \\ \hat{\beta}_{CAN,6} \\ \hat{\beta}_{CAN,7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3166 \\ -0.0113 \\ 0.2090 \\ -0.1342 \\ 0.5024 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

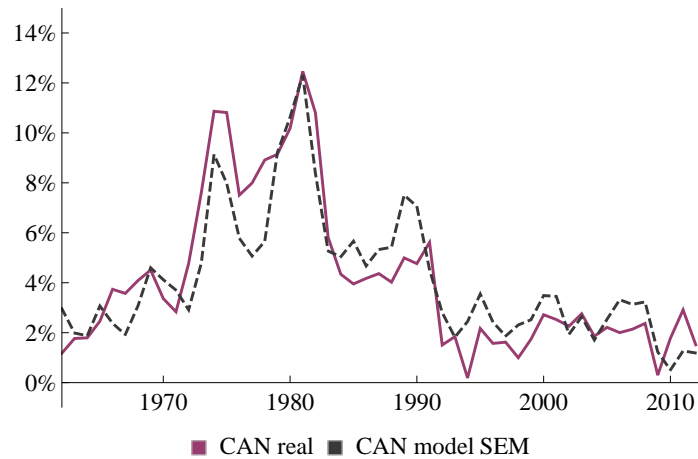
Na základe charakteristík presnosti modelu v tabuľke 4.7 môžeme vidieť, ako sa oproti modelu SUR v kapitole 4.1.1 zvýšila presnosť modelu v oboch rovniciach sústavy. Preložené hodnoty modelu sú znázornené na obrázkoch 4.4 a 4.5.

	SSE	R^2	\hat{R}^2
USA	0.006	0.848	0.834
CAN	0.010	0.784	0.765

Tabuľka 4.7: Charakteristiky presnosti modelu (reziduálny súčet štvorcov, koeficient determinácie a korigovaný koeficient determinácie)



Obr. 4.4: Skutočné hodnoty miery inflácie v USA spolu s preloženými hodnotami



Obr. 4.5: Skutočné hodnoty miery inflácie v Kanade spolu s preloženými hodnotami

Poznámka 4.2. Výstup softvéru *EViews* pre 2SLS-odhad sústavy (4.4) je vidieť v tabuľke 4.8. Priradenie parametrov jednotlivým premenným sústavy je možné rovnako ako v tabuľke 4.6 čítať v riadkoch Equation. Odhadnuté parametre sú rovnaké, ako parametre (4.8) spočítané v programe *Wolfram Mathematica*. Súčasťou výstupu sú tiež smerodajné odchýlky a testy nulovosti parametrov. Pre doplnenie tiež uvedieme 3SLS-odhad (viď tabuľka 4.9). Môžeme vidieť, že tieto dve odhadové metódy sa v našom príklade výrazne nelíšia a presnosť odhadnutých parametrov je takmer rovnaká (viď napríklad hodnoty R^2).

Zhrnutie

Použitie endogenných premenných v sústave sa ukázalo ako prínosné. Oproti SUR sústave z podkapitoly 4.1.1 sme pomerne významne zvýšili presnosť modelu. Toto je zapríčinené najmä vysokou koreláciou vysvetlovaných premenných (výberový korelačný koeficient veličín $y_{USA,t}$ a $y_{CAN,t}$ je v sledovanom období 0.886).

```

=====
System: SYS_2SLS
Estimation Method: Two-Stage Least Squares
Sample: 1962 2012
Included observations: 51
Total system (balanced) observations 102
=====

```

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(11)	0.654940	0.126887	5.161600	0.0000
C(12)	0.002326	0.005194	0.447760	0.6554
C(13)	-0.225703	0.088890	-2.539127	0.0128
C(14)	0.126373	0.034112	3.704667	0.0004
C(15)	0.147615	0.098018	1.505993	0.1355
C(21)	0.316627	0.217357	1.456710	0.1486
C(22)	-0.011325	0.006460	-1.753224	0.0829
C(26)	0.209019	0.139490	1.498451	0.1374
C(27)	-0.134179	0.057626	-2.328445	0.0221
C(28)	0.502354	0.138355	3.630916	0.0005

```

=====
Determinant residual covariance 2.37E-08
=====

```

Equation: INFLATION_USA = C(11)*INFLATION_CAN + C(12) + C(13)
*GDP_GROWTH_USA+C(14)*EXPORT_GROWTH_USA+C(15)
*INTEREST_RATE_USA

Instruments: GDP_GROWTH_USA EXPORT_GROWTH_USA
INTEREST_RATE_USA GDP_GROWTH_CAN EXPORT_GROWTH_CA
N INTEREST_RATE_CAN C

Observations: 51

R-squared	0.847557	Mean dependent var	0.041136
Adjusted R-squared	0.834301	S.D. dependent var	0.028225
S.E. of regression	0.011489	Sum squared resid	0.006072
Durbin-Watson stat	1.251710		

Equation: INFLATION_CAN = C(21)*INFLATION_USA + C(22) + C(26)
*GDP_GROWTH_CAN+C(27)*EXPORT_GROWTH_CAN+C(28)
*INTEREST_RATE_CAN

Instruments: GDP_GROWTH_USA EXPORT_GROWTH_USA
INTEREST_RATE_USA GDP_GROWTH_CAN EXPORT_GROWTH_CA
N INTEREST_RATE_CAN C

Observations: 51

R-squared	0.784250	Mean dependent var	0.041449
Adjusted R-squared	0.765489	S.D. dependent var	0.030922
S.E. of regression	0.014974	Sum squared resid	0.010315
Durbin-Watson stat	0.824939		

```

=====

```

Tabuľka 4.8: Výstup v programe *EViews 7* pre odhad sústavy simultánnych rovníc pomocou 2SLS-odhadu

```

=====
System: SYS_3SLS
Estimation Method: Three-Stage Least Squares
Sample: 1962 2012
Included observations: 51
Total system (balanced) observations 102
=====

```

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(11)	0.666340	0.120053	5.550398	0.0000
C(12)	0.002665	0.004927	0.540920	0.5899
C(13)	-0.224792	0.084415	-2.662938	0.0091
C(14)	0.124098	0.032290	3.843204	0.0002
C(15)	0.138449	0.092642	1.494457	0.1385
C(21)	0.345940	0.205973	1.679540	0.0964
C(22)	-0.011412	0.006135	-1.860227	0.0660
C(26)	0.220127	0.132170	1.665479	0.0992
C(27)	-0.134254	0.054547	-2.461245	0.0157
C(28)	0.483499	0.131119	3.687475	0.0004

```

=====
Determinant residual covariance 2.25E-08
=====

```

Equation: INFLATION_USA = C(11)*INFLATION_CAN + C(12) + C(13)
*GDP_GROWTH_USA+C(14)*EXPORT_GROWTH_USA+C(15)
*INTEREST_RATE_USA

Instruments: GDP_GROWTH_USA EXPORT_GROWTH_USA
INTEREST_RATE_USA GDP_GROWTH_CAN EXPORT_GROWTH_CA
N INTEREST_RATE_CAN C

Observations: 51

R-squared	0.847959	Mean dependent var	0.041136
Adjusted R-squared	0.834738	S.D. dependent var	0.028225
S.E. of regression	0.011474	Sum squared resid	0.006056
Durbin-Watson stat	1.264266		

Equation: INFLATION_CAN = C(21)*INFLATION_USA + C(22) + C(26)
*GDP_GROWTH_CAN+C(27)*EXPORT_GROWTH_CAN+C(28)
*INTEREST_RATE_CAN

Instruments: GDP_GROWTH_USA EXPORT_GROWTH_USA
INTEREST_RATE_USA GDP_GROWTH_CAN EXPORT_GROWTH_CA
N INTEREST_RATE_CAN C

Observations: 51

R-squared	0.792129	Mean dependent var	0.041449
Adjusted R-squared	0.774053	S.D. dependent var	0.030922
S.E. of regression	0.014698	Sum squared resid	0.009938
Durbin-Watson stat	0.863318		

```

=====

```

Tabuľka 4.9: Výstup v programe *EViews 7* pre odhad sústavy simultánnych rovníc pomocou 3SLS-odhadu

4.3 Model VAR

V podkapitole 3.3 sme sa zaoberali konštrukciou modelu VAR, ktorá okrem odhadu samotného pozostáva aj z identifikácie, diagnostiky a predpovedania.

Konštrukciu modelu vektorovej autoregresie umožňuje niekoľko softvérov, ako napríklad *EViews*, *Gretl*, *R*, *SAS*, *STATA* a iné. Ďalšou možnosťou je napríklad softvér *Wolfram Mathematica*, ktorý síce v základnej verzii neobsahuje vstavané funkcie slúžiace k odhadu modelu VAR, avšak jeho veľkou výhodou je jednoduchý a intuitívny programovací jazyk poskytujúci mnoho matematických a vizualizačných funkcií.

Pre účely tejto práce bol zkonštruovaný program v softvéri *Wolfram Mathematica 9*, umožňujúci komplexnú aplikáciu modelu VAR na zadané časové rady. Po načítaní dát do programu sú jednotlivé nastavenia analýzy (voľba rádu modelu, metódy odhadu a požadovaného výstupu) volené automaticky pomocou funkcie *Manipulate*. Demonštrácia tohoto programu je zverejnená na stránkach *Wolfram Demonstrations Project*, kde je možné program interaktívne otestovať na piatich testovacích dátach (viď [4]).

V prvých dvoch príkladoch v nasledujúcom texte sú analyzované rady vygenerované v softvéri *Mathematica*. V treťom príklade je aplikovaný model VAR na reálnych dátach poskytnutých spoločnosťou *Avast Software a.s.* Všetky grafické výstupy v tejto časti sú vytvorené v softvéri *Wolfram Mathematica 9*.

4.3.1 Príklad VAR 1

Pomocou vstavanej funkcie softvéru *Mathematica* vygenerujeme 100 pozorovaní dvojrozmerného časového radu $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t})^\top$ stacionárnym procesom VAR(2) tvaru

$$\mathbf{y}_t = \Phi_1 \mathbf{y}_{t-1} + \Phi_2 \mathbf{y}_{t-2} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (4.9)$$

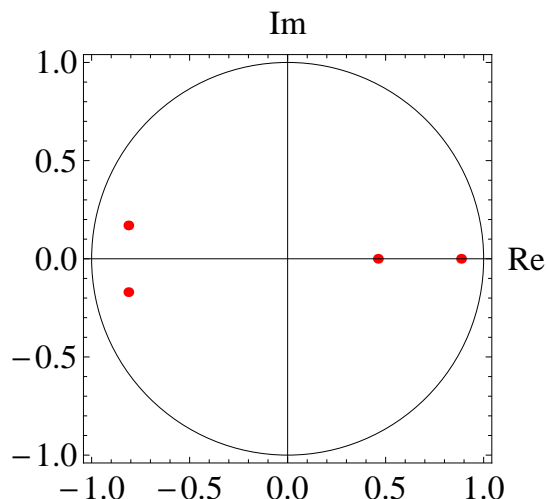
kde autoregresné parametre a rozptylová matica gaussovského bieleho šumu sú

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) = \begin{pmatrix} 0.28 & 0.51 & 0.52 & -0.52 \\ -0.21 & -0.56 & 0.02 & 0.52 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1.1 & 0.7 \\ 0.7 & 2.1 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

V tomto prípade je teda podľa značenia v teoretickej časti $m = 2$. Tento proces môžeme rozpísať po zložkách ako

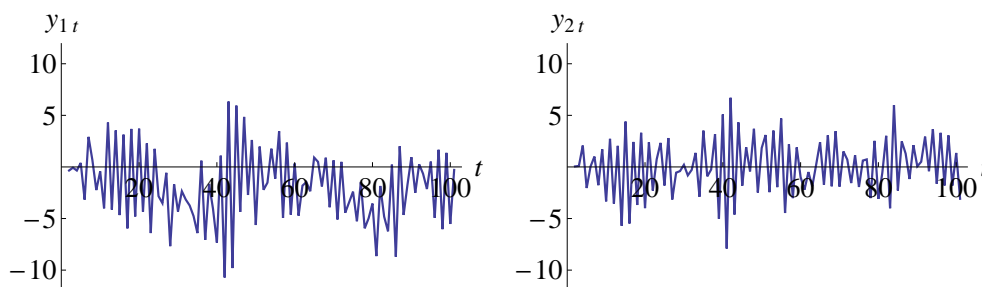
$$\begin{aligned} y_{1t} &= 0.28y_{1,t-1} + 0.51y_{2,t-1} + 0.52y_{1,t-2} - 0.52y_{2,t-2} + \varepsilon_{1t}, \\ y_{2t} &= -0.21y_{1,t-1} - 0.56y_{2,t-1} + 0.02y_{1,t-2} + 0.52y_{2,t-2} + \varepsilon_{2t}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

To, že sa naozaj jedná o stacionárny proces, môžeme overiť pomocou podmienky (2.54), pričom v našom prípade kontrolujeme, či korene polynómu $\det(\mathbf{I}_2 z^2 - \Phi_1 z - \Phi_2)$ ležia v jednotkovom kruhu v komplexnej rovine. Na obrázku 4.6 sú vypočítané korene znázornené graficky.



Obr. 4.6: Korene polynómu $\det(\mathbf{I}_2 z^2 - \Phi_1 z - \Phi_2)$ procesu (4.9)

Na obrázku 4.7 sú znázornené vygenerované časové rady y_{1t} a y_{2t} o dĺžke 100 (tzn. $t = 1, \dots, 100$) použité pre ďalšiu analýzu.



Obr. 4.7: 100 pozorovaní časových radov y_{1t} a y_{2t} vygenerovaných procesom (4.9)

Pri konštrukcii modelu $\text{VAR}(p)$ bude pre demonštráciu v nasledujúcej časti použitý odhad metódou najmenších štvorcov (viď podkapitola 3.3.2) a zároveň odhad metódou Yule-Walkerových rovníc (viď podkapitola 3.3.3).

Identifikácia modelu

Rád modelu p zvolíme na základe informačných kritérií popísaných v podkapitole 3.3.1. Za hornú hranicu H bola pre identifikáciu zvolená hodnota 10. Z toho dôvodu bude pre výpočet hodnôt informačných kritérií prvých 10 pozorovaní časových radov vynechaných a budú použité ako predhodnoty (presampled values). Dĺžka je teda pevná $T = 100 - H = 90$. Hodnoty informačných kritérií pre rôzne rády sú pre obe odhadové procedúry zobrazené v tabuľke 4.10.

p	OLS			Y-W		
	AIC	SC	HQC	AIC	SC	HQC
1	3.48	3.59	3.53	3.69	3.80	3.73
2	1.23	*1.45	*1.32	1.38	*1.60	*1.47
3	*1.20	1.53	1.33	*1.34	1.67	1.48
4	1.24	1.69	1.42	1.43	1.87	1.60
5	1.30	1.85	1.52	1.48	2.04	1.71
6	1.36	2.02	1.63	1.57	2.24	1.84
7	1.40	2.17	1.71	1.61	2.38	1.92
8	1.46	2.34	1.81	1.67	2.56	2.03
9	1.51	2.51	1.92	1.77	2.77	2.17
10	1.54	2.65	1.99	1.80	2.91	2.25

* indikuje najnižšiu hodnotu v stĺpci

Tabuľka 4.10: Hodnoty informačných kritérií v rámci identifikácie modelu VAR pre $T = 90$

Kritéria SC a HQC v oboch prípadoch vykazujú najnižšiu hodnotu pre $p = 2$. Naproti tomu, kritérium AIC doporučuje model VAR(3). Ako však bolo uvedené v teoretickej časti, kritérium AIC voľbu rádu s kladnou pravdepodobnosťou nadhodnocuje, a preto v tomto prípade uprednostňujeme kritéria SC a HQC. To, že sa tieto tri informačné kritéria nemusia nutne zhodovať, sme demonštrovali nerovnosťou (3.53), ktorá je rovnako aj v tomto prípade splnená. Zvolený model je teda proces VAR(2), čo odpovedá procesu generujúcemu dáta.

Je dôležité si uvedomiť, že stabilizácia dĺžky T je pri voľbe rádu pomocou informačných kritérií dôležitá. V prípade, že by sme na výpočet modelu VAR(p) použili vždy len minimálny nutný počet predhodnôt (tzn. p) a maximálnu možnú dĺžku T (tzn. $100 - p$), nemohli by sme jednotlivé penalizačné zložky daného kritéria medzi sebou porovnávať.

Poznámka 4.3. Informačné kritéria v softvéroch ako je *EViews* alebo *Gretl* sú oproti vzorcom v tejto práci väčšie o konštantu $m(1 + \ln(2\pi))$, čo však pri konečnej voľbe rádu modelu nehrá žiadnu rolu.

Odhad modelu

Pre zvolený rád $p = 2$ môžeme odhadnúť parametre modelu VAR(2) v tvare (4.9). Pozorovania \mathbf{y}_1 a \mathbf{y}_2 použijeme ako predhodnoty a budeme analyzovať časový rad $\mathbf{y}_3, \dots, \mathbf{y}_{100}$ (to znamená $T = 98$). Odhady parametrov $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ a Σ modelu VAR(2) pre jednotlivé metódy odhadu sú

$$\begin{aligned}
 \hat{\Phi}^{(OLS)} &= \begin{pmatrix} 0.396 & 0.404 & 0.536 & -0.754 \\ -0.175 & -0.610 & 0.122 & 0.444 \end{pmatrix}, & \hat{\Sigma}^{(OLS)} &= \begin{pmatrix} 1.39 & 0.88 \\ 0.88 & 2.68 \end{pmatrix}, \\
 \hat{\Phi}^{(Y-W)} &= \begin{pmatrix} 0.307 & 0.427 & 0.483 & -0.666 \\ -0.175 & -0.606 & 0.123 & 0.441 \end{pmatrix}, & \hat{\Sigma}^{(Y-W)} &= \begin{pmatrix} 1.52 & 0.88 \\ 0.88 & 2.68 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

Je vidieť, že parametre odhadnuté týmito metódami sa mierne líšia. Zaujímavé však je, že odhadnuté parametre pre druhú rovnicu modelu sú takmer identické (vrátane odhadu rozptylu $var(\varepsilon_{2t})$). Korigované odhady rozptylových matíc podľa vzorca (3.56) sú

$$\tilde{\Sigma}^{(OLS)} = \begin{pmatrix} 1.44 & 0.92 \\ 0.92 & 2.79 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Sigma}^{(Y-W)} = \begin{pmatrix} 1.58 & 0.91 \\ 0.91 & 2.79 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Ukázalo sa, že dĺžka radov 100 nezaručuje dokonalé priblíženie odhadnutých parametrov k skutočným parametrom (4.10) procesu (4.9), odhady vykazujú vychýlenie. Znamená to, že konvergence odhadov je pomalá. Pre jednotlivé rovnice v odhadnutých modeloch môžeme ešte dopočítať reziduálne súčty štvorcov (viď tabuľka 4.11).

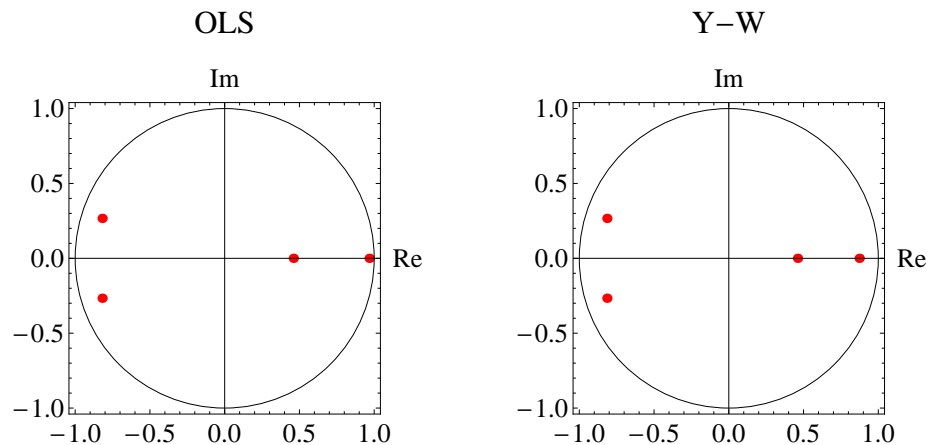
	y_{1t}	y_{2t}
OLS	135.684	262.485
Y-W	148.683	262.536

Tabuľka 4.11: Reziduálny súčet štvorcov v odhadnutom modeli pre jednotlivé rovnice

Poznámka 4.4. Správnosť odhadnutých parametrov pomocou naprogramovanej funkcie v softvéri Mathematica pre metódu odhadu OLS bola overená v programoch *EViews* a *Gretl*. Odhad pomocou Yule-Walkerových rovníc tieto programy neposkytujú.

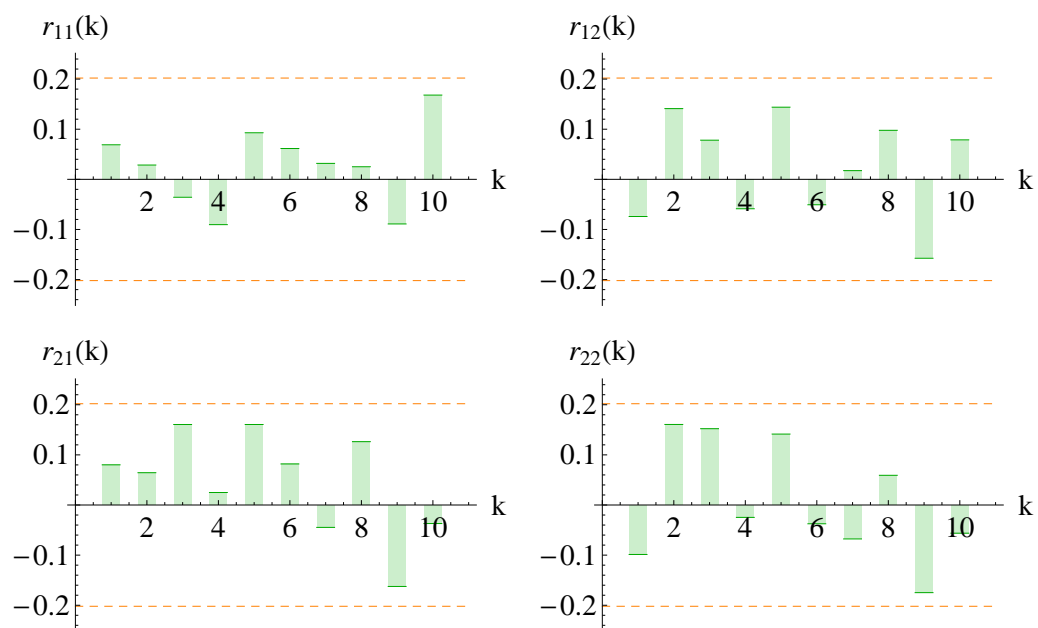
Diagnostika odhadnutého modelu

Podľa obrázku 4.8 je v oboch prípadoch odhadnutý model stacionárny, pretože všetky korene polynómov $\det(\mathbf{I}_2 z^2 - \hat{\Phi}_1^{(OLS)} z - \hat{\Phi}_2^{(OLS)})$ a $\det(\mathbf{I}_2 z^2 - \hat{\Phi}_1^{(Y-W)} z - \hat{\Phi}_2^{(Y-W)})$ ležia v jednotkovom kruhu v komplexnej rovine.

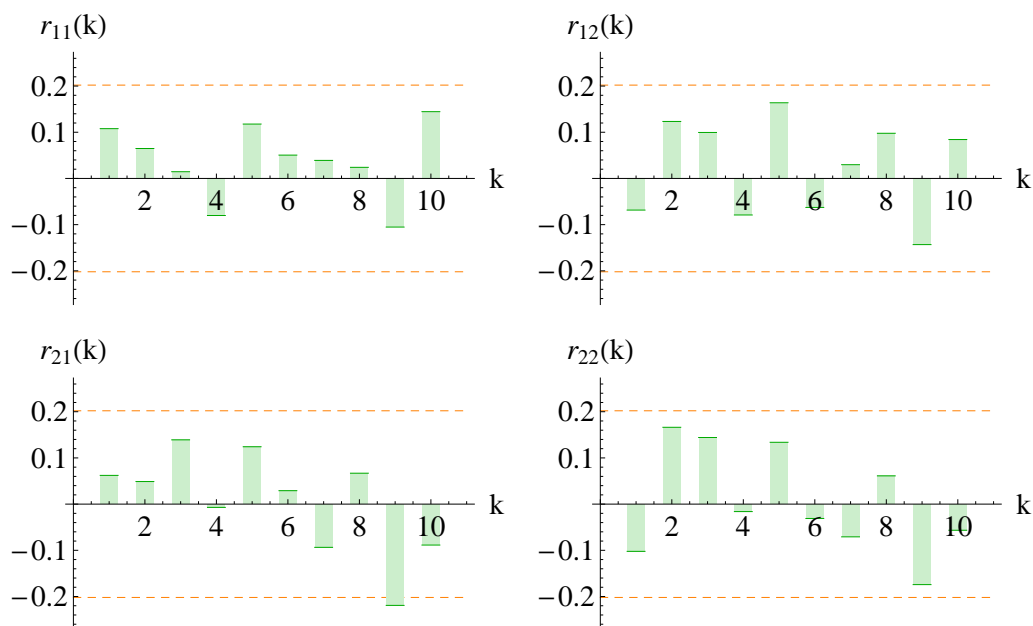


Obr. 4.8: Korene polynómu $\det(\mathbf{I}_2 z^2 - \hat{\Phi}_1 z - \hat{\Phi}_2)$ pre obe odhadové metódy

Nekorelovanosť odhadnutej reziduálnej zložky (testovaná graficky pomocou Bartletovej aproximácie podľa (3.76) pre prvých 10 oneskorení) nie je zamietnutá na hladine významnosti 5% len v prípade odhadu metódou najmenších štvorcov (viď obrázok 4.9). Na obrázku 4.10 možno vidieť, ako v prípade odhadu metódou Yule-Walkerových rovníc zamietame na päť percentnej hladine nekorelovanosť v prípade prvku $r_{21}(9)$. Toto prekročenie hranice významnosti korelácie je však nepatrné. Podobne pomocou Portmanteau testu (3.75) v tabuľke 4.12 potvrdzujeme nekorelovanosť rezíduí odhadnutých metódou najmenších štvorcov, kde nezamietame nulovú hypotézu nekorelovanosti pre všetky testované hodnoty $h > 3$ (na hladine významnosti 5%). V prípade rezíduí odhadnutých metódou Yule-Walkerových rovníc Portmanteauovým testom nekorelovanosť na päť percentnej hladine zamietame takmer vo všetkých prípadoch.



Obr. 4.9: Grafické zobrazenie odhadnutej maticovej autokorelačnej funkcie odhadnutých rezíduí s kritickou hodnotou Bartletovej aproximácie v prípade odhadu metódou najmenších štvorcov



Obr. 4.10: Grafické zobrazenie odhadnutej maticovej autokorelačnej funkcie odhadnutých rezíduí s kritickou hodnotou Bartletovej aproximácie v prípade odhadu metódou Yule-Walkerových rovníc

h	st. voľ.	OLS		Y-W	
		Q-štat.	p -hodnota	Q-štat.	p -hodnota
3	4	11.355	0.023	16.851	0.002
4	8	12.495	0.130	18.392	0.018
5	12	16.284	0.179	24.379	0.018
6	16	18.138	0.316	29.065	0.024
7	20	19.140	0.487	34.200	0.025
8	24	21.690	0.402	36.216	0.052
9	28	26.137	0.434	44.572	0.024
10	32	30.966	0.481	55.133	0.007

Tabuľka 4.12: Portmanteau test nekorelovanosti rezíduí

Jarque-Bera testom na hladine významnosti 5% v oboch prípadoch nezamietame normalitu odhadnutej reziduálnej zložky, kedy p -hodnoty testu sú 0.141 v prípade rezíduí odhadnutých metódou OLS a 0.146 v prípade rezíduí odhadnutých metódou Yule-Walkerových rovníc.

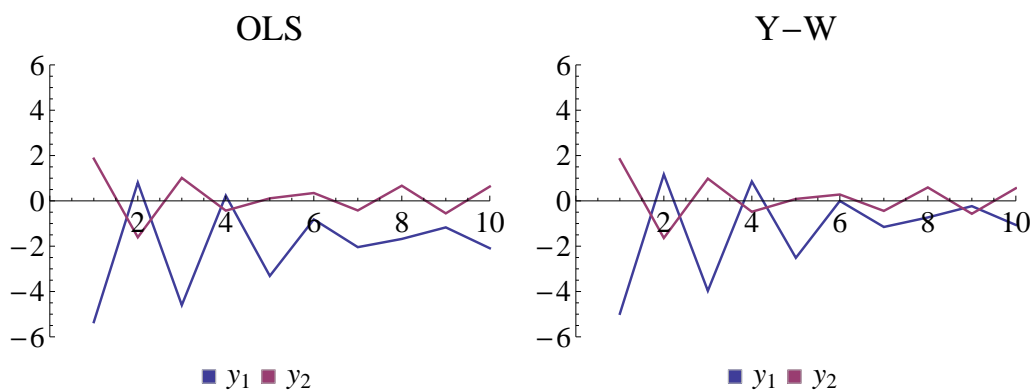
Poznámka 4.5. Program *EViews* udáva nepatrne odlišné hodnoty testových štatistík (a teda aj p -hodnôt) u Portmanteau testu a Jarque-Bera testu. Dôvodom je mierne odlišný výpočet s použitím korigovaných odhadov autokorelačných matic bieleho šumu. Touto odlišnosťou však neprichádzame k iným záverom na zvolenej hladine spoľahlivosti.

Konštrukcia predpovedí v odhadnutom modeli

Odhadnutý model VAR(2) použijeme na konštrukciu predpovedí. V tabuľke 4.13 je 10 bodových predpovedí pri danej odhadovej metóde konštruovaných v čase 150 podľa predpisu (3.84). Graficky sú tieto predpovede znázornené na obrázku 4.11. Podľa očakávania je predpoveď druhého radu v oboch prípadoch takmer identická, čo korešponduje s vysokou podobnosťou odhadnutých parametrov v druhej rovnici sústavy (viď (4.12)).

h	OLS		Y-W	
	$\hat{y}_{1,100+h}$	$\hat{y}_{2,100+h}$	$\hat{y}_{1,100+h}$	$\hat{y}_{2,100+h}$
1	-5.35	1.86	-4.98	1.84
2	0.81	-1.61	1.17	-1.64
3	-4.60	1.01	-3.97	0.98
4	0.23	-0.43	0.85	-0.48
5	-3.31	0.11	-2.51	0.09
6	-0.81	0.35	0.00	0.28
7	-2.04	-0.42	-1.15	-0.44
8	-1.68	0.67	-0.73	0.59
9	-1.17	-0.55	-0.23	-0.57
10	-2.09	0.63	-1.06	0.56

Tabuľka 4.13: Hodnoty predpovedí odhadnutého modelu na 10 krokov dopredu



Obr. 4.11: Grafické zobrazenie desiatich predpovedí odhadnutého modelu

Zhrnutie

Na záver tohto príkladu môžeme povedať, že by sme v tomto prípade uprednostnili odhad metódu najmenších štvorcov. Dôvodom je mierne vyššia presnosť (viď tabuľka 4.11) a lepšie splnenie požadovaných vlastností bieleho šumu. Aplikáciu

modelu VAR v tomto príklade je tiež možné vyskúšať interaktívne pomocou on-line aplikácie [4] (voľba *data sample 1* a *sample size 100*).

4.3.2 Príklad VAR 2

V tomto príklade si ukážeme ako reagujú odhady metódou najmenších štvorcov a metódou Yule-Walkerových rovníc v prípade odhadovania dát generovaných nestabilným procesom.

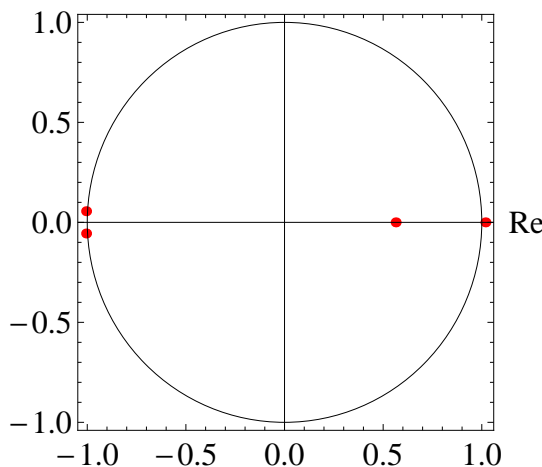
Podobne ako v predošlom príklade, opäť vygenerujeme 100 pozorovaní dvoj-rozmerného časového radu $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t})^\top$. Tentokrát však nestabilným VAR(2) procesom

$$\mathbf{y}_t = \Phi_1 \mathbf{y}_{t-1} + \Phi_2 \mathbf{y}_{t-2} + \varepsilon_t, \quad (4.14)$$

kde autoregresné parametre a rozptylová matica gausovského bieleho šumu sú

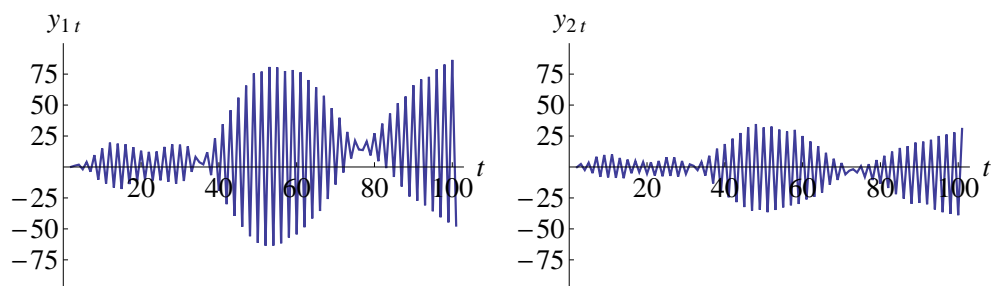
$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2) = \begin{pmatrix} 0.28 & 0.55 & 0.74 & -0.62 \\ -0.21 & -0.71 & 0.02 & 0.77 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.9 \\ 0.9 & 2.1 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

To, že je tento proces nestabilný, môžeme opäť ukázať graficky. Na obrázku 4.12 vidieť, že tri korene polynómu $\det(\mathbf{I}_2 z^2 - \Phi_1 z - \Phi_2)$ ležia tesne za hranicou jednotkového kruhu v komplexnej rovine, a teda proces (4.14) nesplňuje podmienku stacionarity (2.54). Táto podmienka je však len postačujúca, a preto pri jej nesplnení nemôžeme tvrdiť, že proces je nestacionárny. Z určitosťou však môžeme tvrdiť, že sa jedná o nestabilný proces.



Obr. 4.12: Korene polynómu $\det(\mathbf{I}_2 z^2 - \Phi_1 z - \Phi_2)$ procesu (4.14)

Na obrázku 4.13 sú znázornené vygenerované časové rady y_{1t} a y_{2t} procesom (4.14) o dĺžke 100 (tzn. $t = 1, \dots, 100$) použité pre ďalšiu analýzu.



Obr. 4.13: 100 pozorovaní časových radov y_{1t} a y_{2t} vygenerovaných procesom (4.14)

Odhad modelu

V tomto príklade prejdeme rovno k odhadu modelu VAR(2). Rovnako tiež použijeme prvé dve pozorovania ako predhodnoty. Odhady parametrov $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ a Σ sú

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}^{(OLS)} &= \begin{pmatrix} 0.290 & 0.607 & 0.746 & -0.573 \\ -0.228 & -0.746 & -0.008 & 0.704 \end{pmatrix}, & \hat{\Sigma}^{(OLS)} &= \begin{pmatrix} 0.69 & 0.88 \\ 0.88 & 1.94 \end{pmatrix}, \\ \hat{\Phi}^{(Y-W)} &= \begin{pmatrix} 0.389 & 1.861 & 1.003 & 1.080 \\ -0.280 & -1.248 & -0.120 & 0.045 \end{pmatrix}, & \hat{\Sigma}^{(Y-W)} &= \begin{pmatrix} 19.05 & -5.82 \\ -5.82 & 4.44 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

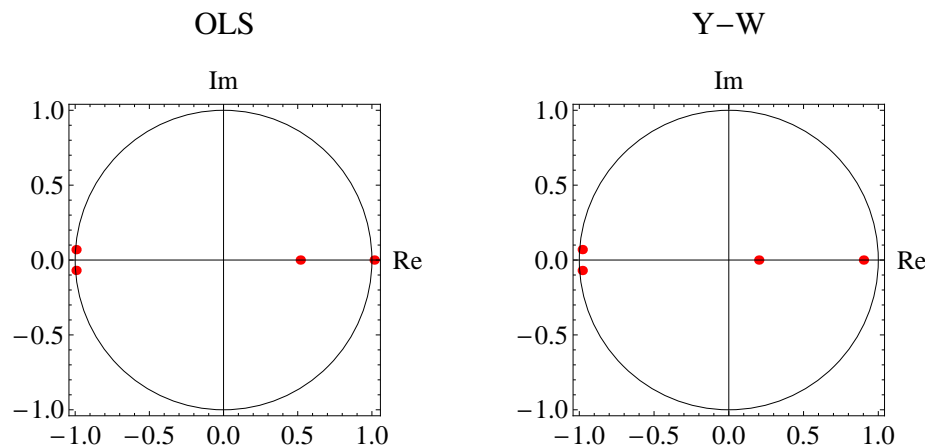
Pre tento prípad je už odlišnosť medzi jednotlivými odhadovými procedúrami značná. Výrazny rozdiel je najmä v odhade rozptylovej matice odhadnutej rezidualnej zložky. Môžeme si však všimnúť, že parametre odhadnuté metódou najmenších štvorcov sa približujú skutočným parametrom (4.15) v data generujúcom procese. V tabuľke 4.14 vidíme, že odlišnosť medzi odhadovými procedúrami je vysoko pozorovateľná aj na výslednej presnosti modelu a odhad pomocou Yule-Walkerových rovníc je oproti OLS-odhadu výrazne nepresnejší.

	y_{1t}	y_{2t}
OLS	67.949	190.218
Y-W	1867.190	435.037

Tabuľka 4.14: Reziduálny súčet štvorcov v odhadnutom modeli pre jednotlivé rovnice

Diagnostika odhadnutého modelu

Na obrázku 4.14 môžeme vidieť, ako odhadnutý proces metódou najmenších štvorcov nespĺňa podmienku stability. Naproti tomu odhad metódou Yule-Walkerových rovníc je stabilný (a teda aj stacionárny). Táto vlastnosť Yule-Walkerovho odhadu bola diskutovaná v teoretickej časti tejto práce (viď podkapitola 3.3.3).



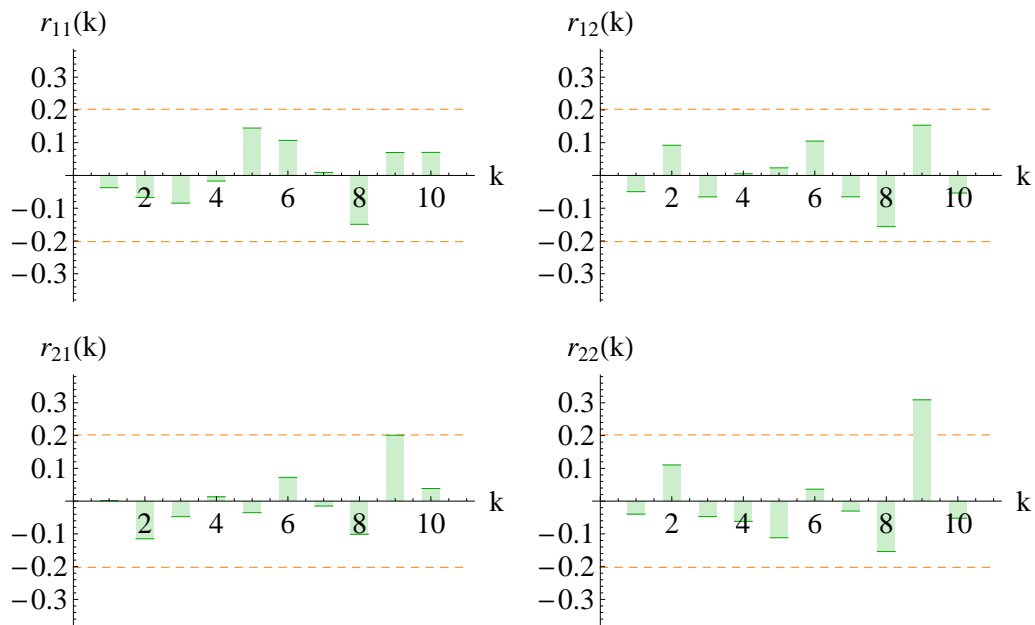
Obr. 4.14: Korene polynómu $\det(\mathbf{I}_2 z^2 - \hat{\Phi}_1 z - \hat{\Phi}_2)$ pre obe odhadové metódy

Testom autokorelovanosti rezíduí pomocou Bartletovej aproximácie na hladine významnosti 5% zamietame nulovú hypotézu nekorelovanosti u jednej hodnoty už v prípade odhadu OLS (viď obrázok 4.15). Rovnako aj Portmanteau test v tabuľke 4.15 vykazuje na päť percentnej hladine významnosti autokorelovanosť rezíduí pre niektoré testované hodnoty h . V prípade Yule-Walkerovho odhadu je problém autokorelovanosti rezíduí výrazne väčší, čo môžeme vidieť na obrázku 4.16 a aj v tabuľke 4.15.

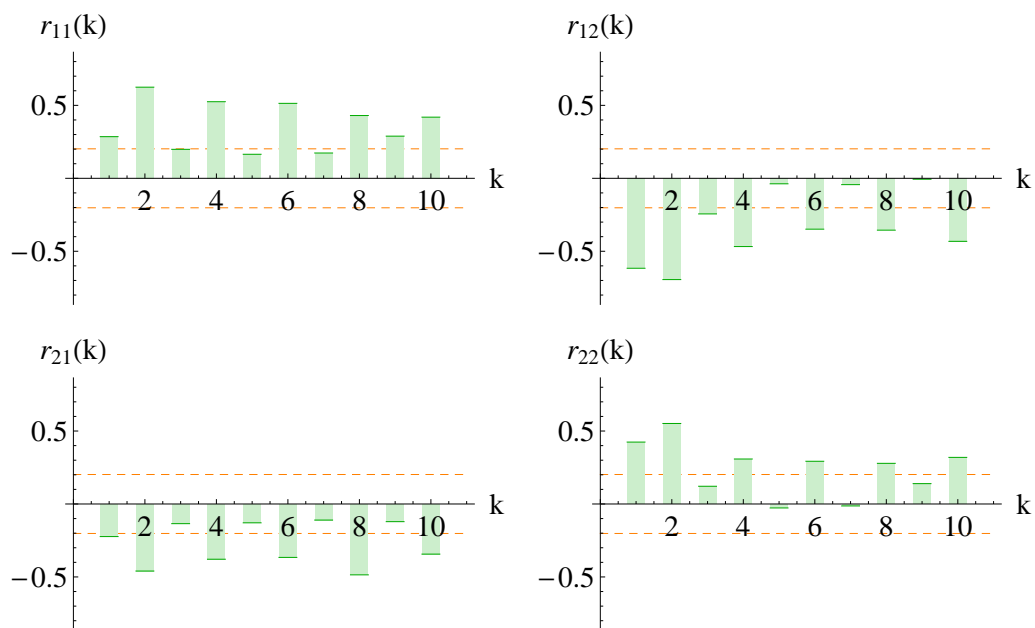
Pomocou Jarque-Bera testu normalitu odhadnutej reziduálnej zložky nezamietame v oboch prípadoch, kedy p -hodnota testu pre rezíduá odhadnuté metódou najmenších štvorcov je 0.428 a p -hodnota testu pre rezíduá odhadnute Yule-Walkerovými rovnicami je 0.183.

Zhrnutie

Zmyslom tohto príkladu bolo poukázať na potenciálne problémy s analyzovaním nestacionárnych časových radov pomocou vektorovej autoregresie. Ukázalo sa, že stabilita Yule-Walkerovho odhadu (čo je niekedy považované za jeho výhodu) môže spôsobiť výrazne vychýlenie a problémy reziduálnej zložky. Opäť by sme v tomto prípade uprednostnili odhad metódou najmenších štvorcov. Tento príklad je taktiež súčasťou interaktívnej demonštrácie [4]. V tomto prípade sa jedná o voľbu *data sample* 5 a *sample size* 100.



Obr. 4.15: Grafické zobrazenie odhadnutej maticovej autokorelačnej funkcie odhadnutých rezíduí s kritickou hodnotou Bartletovej aproximácie v prípade odhadu metódou najmenších štvorcov



Obr. 4.16: Grafické zobrazenie odhadnutej maticovej autokorelačnej funkcie odhadnutých rezíduí s kritickou hodnotou Bartletovej aproximácie v prípade odhadu metódou Yule-Walkerových rovníc

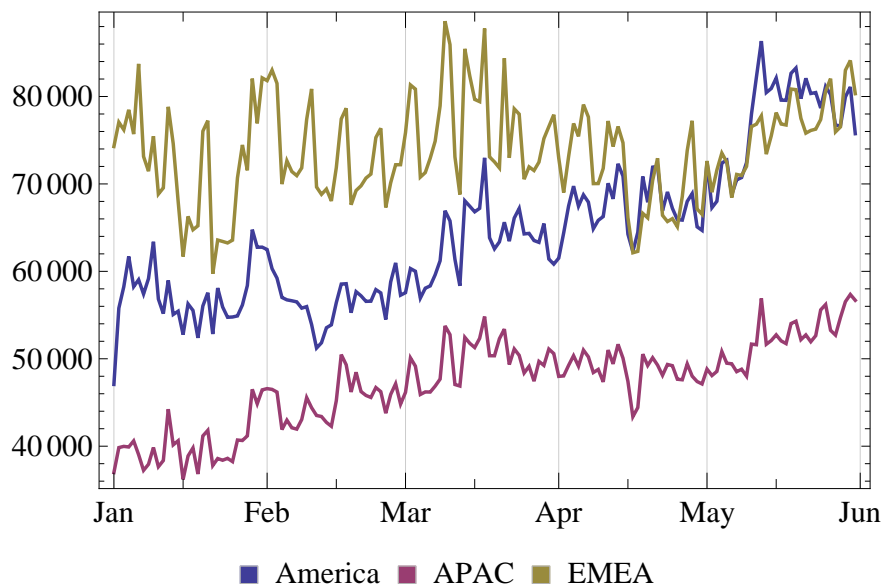
h	st. voľ.	OLS		Y-W	
		Q-štat.	p -hodnota	Q-štat.	p -hodnota
3	4	11.145	0.025	121.252	0.000
4	8	15.019	0.059	159.900	0.000
5	12	24.369	0.018	175.651	0.000
6	16	26.791	0.044	210.191	0.000
7	20	29.046	0.087	224.784	0.000
8	24	31.702	0.135	255.953	0.000
9	28	41.379	0.050	284.229	0.000
10	32	44.786	0.066	309.627	0.000

Tabuľka 4.15: Portmanteau test nekorelovanosti rezíduí

4.3.3 Príklad VAR 3

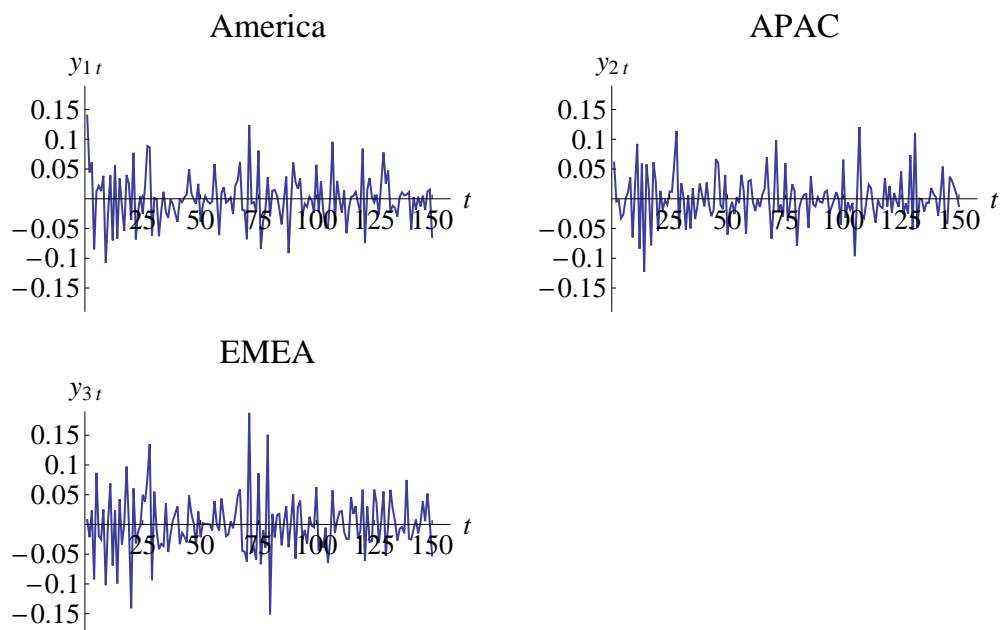
V poslednom príklade budeme pracovať s reálnymi dátami predstavujúcimi denný počet inštalácií softvéru *avast! Mobile Security*, čo je aplikácia pre mobilné telefóny a tablety slúžiaca primárne k ochrane pred vírusmi malware a spyware.

K dispozícii máme denné údaje o počtu inštalácií v regiónoch *America* (americký svetadiel), *APAC* (Ázia a Pacifik) a *EMEA* (Európa, stredný východ a Afrika) v časovom úseku od 1.1.2013 do 31.5.2013, čo je 151 dní. Tieto časové rady je možné vidieť na obrázku 4.17.



Obr. 4.17: Denný počet stiahnutí softvéru *avast! Mobile Security* v troch sledovaných regiónoch v období prvých piatich mesiacov roku 2013

Všetky 3 časové rady je pred konštrukciou modelu VAR vhodné transformovať. Z dôvodu stabilizácie rozptylu a odstránenia trendu bola pre všetky rady aplikovaná prvá diferenciácia logaritmov. Touto diferenciáciou sa skráti dĺžka časových rád na 150 pozorovaní. Po tejto transformácii boli ešte výsledne rady očistené o 7-dňovú sezónnosť, ktorá je spôsobená vplyvom dňa v týždni. Za metódu sezónneho očistenia bol zvolený regresný prístup s použitím dummy premenných, popísaný v podkapitole 9.4.2 v [6]. Finálne transformované rady označme ako y_{1t} , y_{2t} a y_{3t} . Pre zjednodušenie značenia tiež budeme pracovať s časom $t = 1 \dots, 150$.



Obr. 4.18: Grafy transformovaných radov

Identifikácia modelu

Na identifikáciu rádu modelu použijeme opäť metódu založenú na minimalizácii informačných kritérií. Z praktických dôvodov položíme hornú hranicu pre rád modelu $H = 10$. Na základe všetkých troch použitých kritérií volíme model VAR(1). Zvolený rád je rovnaký v prípade použitia oboch odhadových procedúr (viď tabuľka 4.16).

Odhad metódou najmenších štvorcov sa v tomto konkrétnom prípade od odhadu pomocou Yule-Walkerových rovníc líši minimálne, a preto budeme naďalej pracovať len s odhadom pomocou metódy najmenších štvorcov. To, že sú tieto dve odhadové procedúry takmer identické, je odzrkadlené aj v minimálnom rozdiel medzi hodnotami informačných kritérií v prípade ich použitia (viď prvý riadok tabuľky 4.16).

p	OLS			Y-W		
	AIC	SC	HQC	AIC	SC	HQC
1	* - 20.69	* - 20.51	* - 20.62	* - 20.69	* - 20.51	* - 20.62
2	-20.66	-20.28	-20.50	-20.65	-20.28	-20.50
3	-20.66	-20.09	-20.43	-20.66	-20.09	-20.43
4	-20.61	-19.85	-20.30	-20.60	-19.85	-20.30
5	-20.56	-19.62	-20.18	-20.56	-19.61	-20.17
6	-20.47	-19.34	-20.01	-20.46	-19.33	-20.00
7	-20.43	-19.11	-19.89	-20.42	-19.09	-19.88
8	-20.37	-18.85	-19.75	-20.34	-18.83	-19.73
9	-20.29	-18.59	-19.60	-20.25	-18.55	-19.56
10	-20.22	-18.33	-19.45	-20.13	-18.24	-19.36

* indikuje najnižšiu hodnotu v stĺpci

Tabuľka 4.16: Hodnoty informačných kritérií v rámci identifikácie modelu VAR pre $T = 140$

Odhad modelu

Na základe identifikácie v predošlej časti budeme odhadovať model VAR(1) v tvare

$$\mathbf{y}_t = \Phi_1 \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (4.17)$$

Odhadnuté parametre tohto modelu pre našu radu $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, y_{3t})^\top$, $t = 2 \dots, 150$ (pozorovanie \mathbf{y}_1 bolo vynechané a použité ako predhodnota) sú

$$\hat{\Phi}_1 = \begin{pmatrix} 0.0042 & -0.1227 & -0.1110 \\ 0.0702 & -0.3436 & 0.0020 \\ -0.2503 & 0.1033 & -0.2464 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0.0014 & 0.0009 & 0.0012 \\ 0.0009 & 0.0014 & 0.0011 \\ 0.0012 & 0.0011 & 0.0020 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Korigovaný odhad rozptylovej matice môžeme dopočítať ako

$$\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0.0015 & 0.0010 & 0.0012 \\ 0.0010 & 0.0014 & 0.0012 \\ 0.0012 & 0.0012 & 0.0020 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

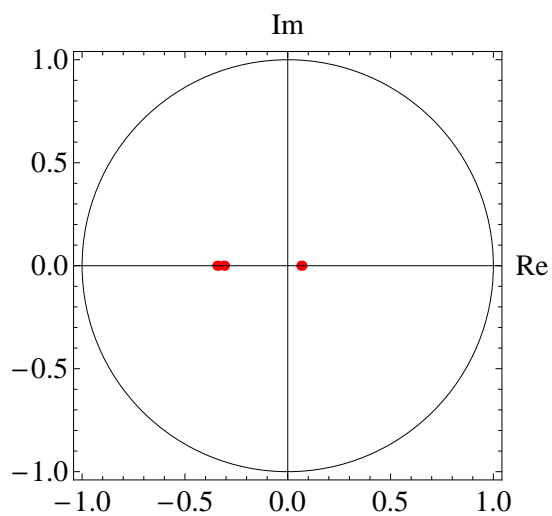
Reziduálne súčty štvorcov chýb pre jednotlivé rovnice odhadnutého modelu sú 0.2154, 0.2068 a 0.2977.

Diagnostika odhadnutého modelu

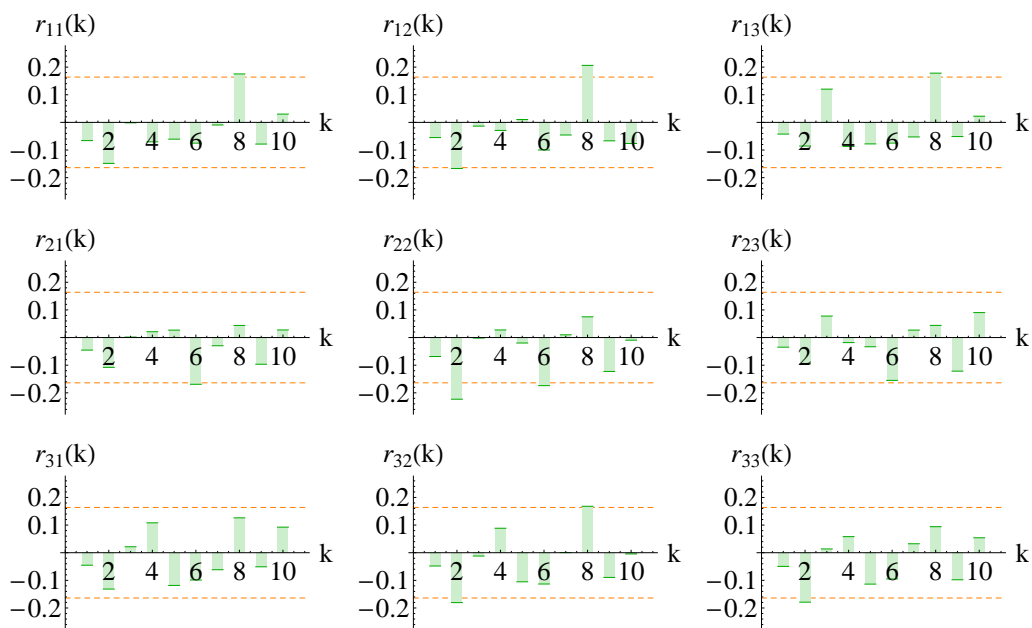
Grafickou kontrolou koreňov polynómu $\det(\mathbf{I}_3 z - \hat{\Phi}_1)$ na obrázku 4.19 potvrdzujeme stacionaritu odhadnutého procesu, kedy všetky tri korene ležia vo vnútri jednotkového komplexného kruhu.

Na obrázku 4.20 môžeme vidieť, že pri testovaní nekorelovanosti odhadnutého bieleho šumu pomocou Bartletovej aproximácie (na hladine významnosti 5%) je vo viacerých prípadoch nepatrne prekročená medza vo výške kritickej hodnoty $2\sqrt{1/149}$. Pomocou Portmanteau testu v tabuľke 4.17 zamietame na 5-percentnej

hladine významnosti nulovú hypotézu nekorelovanosti reziduálnej zložky len pre prípad $h = 2$, kde p -hodnota je 0.07. Pre tento test je však podľa [6] doporučované vyskúšať najmä $h \approx \sqrt{T}$, čo je v našom prípade $h = 12$.



Obr. 4.19: Korene polynómu $\det(\mathbf{I}_3 z - \hat{\Phi}_1)$



Obr. 4.20: Grafické zobrazenie odhadnutej maticová autokorelačnej funkcie odhadnutých rezíduí s kritickou hodnotou Bartletovej aproximácie

h	st. vol.	Q-štat.	p -hodnota
2	9	18.064	0.034
3	18	27.526	0.070
4	27	35.657	0.123
5	36	46.166	0.119
6	45	52.004	0.220
7	54	60.202	0.261
8	63	69.733	0.262
9	72	74.315	0.403
10	81	82.066	0.446
11	90	93.341	0.384
12	99	97.880	0.487

Tabuľka 4.17: Portmanteau test nekorelovanosti rezíduí

Jarque-Bera testom na hladine významnosti 5% nezamietame normalitu reziduálnej zložky, kedy p -hodnota je 0.067.

Môžeme teda povedať, že pri diagnostike nášho modelu sme nenarazili na žiaden významnejší problém.

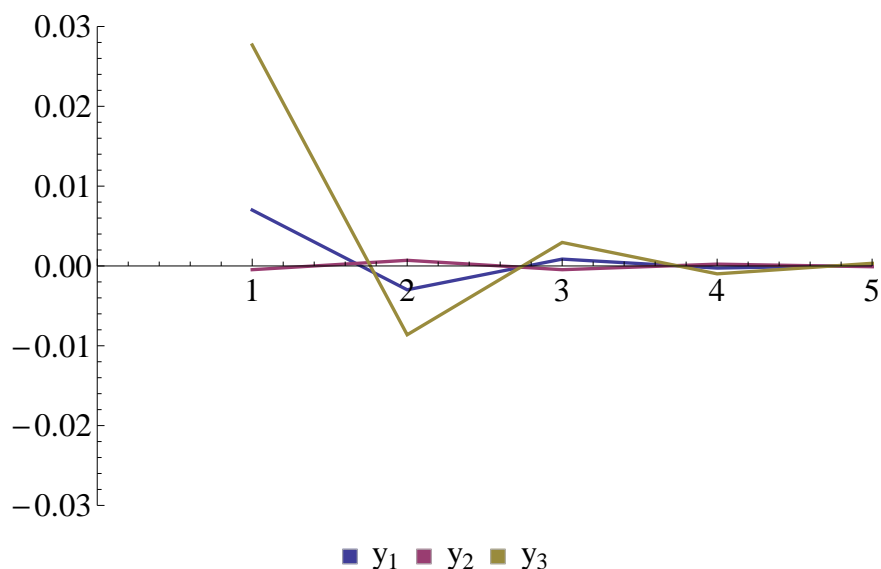
Konštrukcia predpovedí v odhadnutom modeli

Bodové predpovede pre rady \mathbf{y}_t o 5 krokov dopredu možno vzhliadnúť v tabuľke 4.18 a na obrázku 4.21. Môžeme si všimnúť, ako sa pri predpovedaní efekt odhadnutého VAR procesu rýchlo vytráca a hodnoty predpovedí sa rýchlo približujú k nulovej úrovni. Toto je zapríčinené pomerne nízkymi hodnotami odhadnutých parametrov modelu.

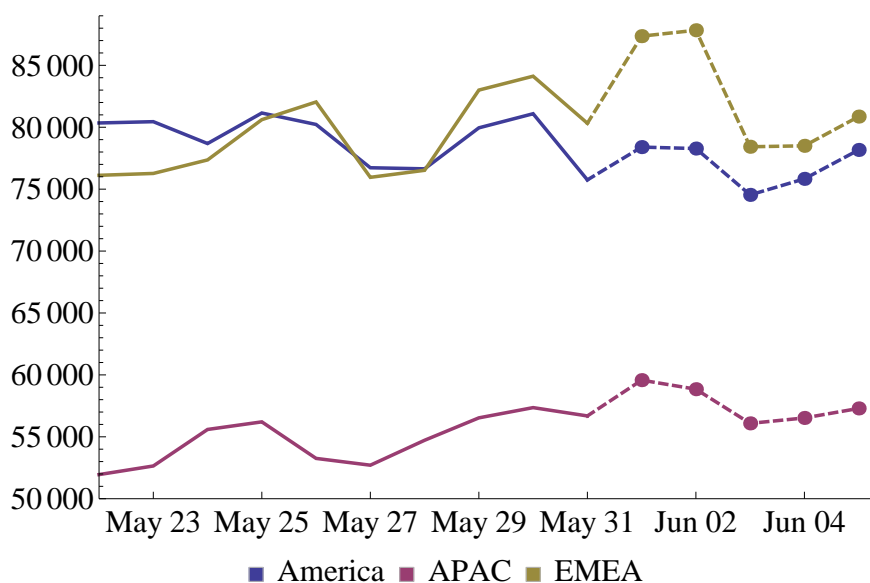
Po spätnej transformácii môžeme taktiež dopočítať predpovede pre pôvodné rady vyjadrujúce počet inštalácií softvéru *avast! Mobile Security* v troch sledovaných regiónoch (viď obrázok 4.22).

h	$\hat{y}_{1,150+h}$	$\hat{y}_{2,150+h}$	$\hat{y}_{3,150+h}$
1	0.0070	-0.0005	0.0277
2	-0.0030	0.0007	-0.0086
3	0.0009	-0.0005	0.0029
4	-0.0003	0.0002	-0.0010
5	0.0001	-0.0001	0.0003

Tabuľka 4.18: Hodnoty predpovedí odhadnutého modelu na 5 krokov dopredu

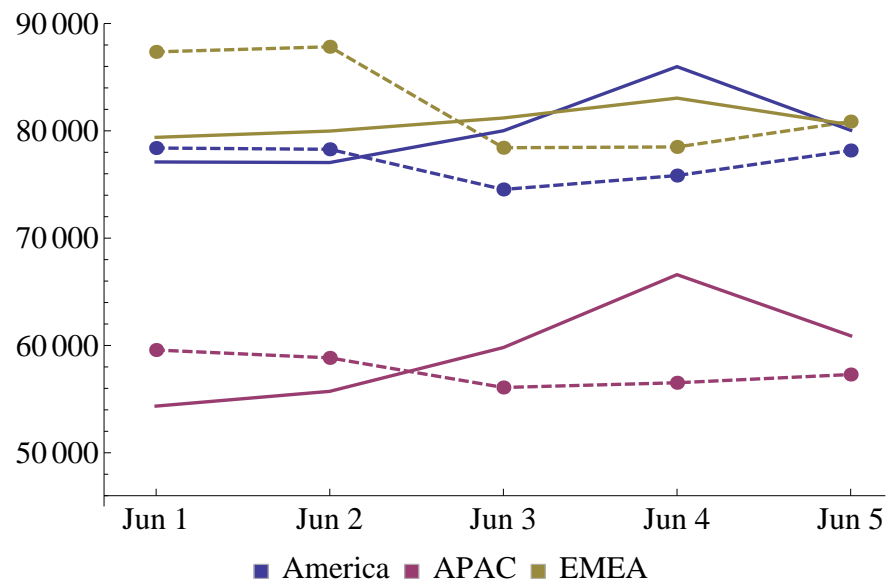


Obr. 4.21: Grafické zobrazenie piatich predpovedí odhadnutého modelu



Obr. 4.22: Grafické zobrazenie piatich predpovedí pôvodných časových radov zobrazené spolu s poslednými desiatimi skutočnými hodnotami

Na záver ešte môžeme porovnať naše bodové predpovede so skutočnými hodnotami pôvodných časových radov v tomto období. Na obrázku 4.23 môžeme vidieť, ako naša predpoveď s počiatku nadhodnocuje skutočný vývoj jednotlivých radov a vzápätí nezaznamenáva výraznejší nárast. Nepresnosť predpovedí však nemusí nutne indikovať nesprávnosť modelu. Vysoký nárast v regiónoch *America* a *APAC* v utorok 4. júna bol pravdepodobne zapríčinený iným faktorom (napríklad zvýšením reklamnej kampane).



Obr. 4.23: Porovnanie predpovedí modelu (prerušované čiary) so skutočnými hodnotami (spojité čiary)

Literatúra

- [1] ANDERSON, Theodore Wilbur: *Maximum Likelihood Estimation for Vector Autoregressive Moving Average Models*. Hayward: Direction in Time Series, 1980.
- [2] ARLT, Josef: *Moderní metody modelování ekonomických časových řad*. Praha: Grada, 1999, ISBN 80-7169-539-4.
- [3] BANIAR, Matúš: *Modelování inflace*. Praha: MFF UK, bakalářska práce, 2011.
- [4] BANIAR, Matúš: A Model of Vector Autoregression. 2014, URL <http://demonstrations.wolfram.com/AModelOfVectorAutoregression/>.
- [5] CIPRA, Tomáš: *Ekonometrie*. Praha: SPN, 1984.
- [6] CIPRA, Tomáš: *Finanční Ekonometrie*. Praha: EKOPRESS, 2008, ISBN 978-80-86929-43-9.
- [7] ENGLE, Robert; HENDRY, David; RICHARD, Jean: *Exogeneity*. *ECONOMETRICA*, Vol. 51, No. 2, 1983, 277–304 s.
- [8] HAMILTON, James D.: *Time Series Analysis*. Princeton: Princeton University Press, 1994, ISBN 0-691-04289-6.
- [9] KAKWANI, N.C.: *Unbiasedness of Zellner's Seemingly Unrelated Regression Equations Estimators*. Birmingham: Journal of the American Statistical Association, Vol. 62, No. 317, 1967, 141–142 s.
- [10] LÜTKEPOHL, Helmut: *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Berlin: Springer, 2005, ISBN 3-540-40172-5.
- [11] MARDIA, K.V.; KENT, J.T.; BIBBY, J.M.: *Multivariate Analysis*. London: ACADEMIC PRESS, 1979.
- [12] NICHOLLS, D.F.: *The Efficient Estimation of Vector Linear Time Series Models*. *Biometrika*, Vol. 63, No. 2, 1976, 381–390 s.
- [13] NICHOLLS, D.F.: *A Comparison of Estimation Methods for Vector Linear Time Series Models*. *Biometrika*, Vol. 64, No. 1, 1977, 85–90 s.
- [14] TAKADA, Hirokazu; ULLAH, Aman; CHEN, Yu-Min: *Estimation of the seemingly unrelated regression model when the error covariance matrix is singular*. *Journal of Applied Statistics*, Vol. 22, No. 4, 1995, 517–530 s.
- [15] WEI, William: *Time Series Analysis*. New York: Addison Wesley, 1994, ISBN 0-201-15911-2.
- [16] ZELLNER, Arnold: *An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias*. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 57, No. 298, 1962, 348–368 s.