Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Zuzana Ďurošková

Tvorba optimálních sazeb v neživotním pojištění

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Martin Branda, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční matematika

Praha 2014

Rada by som sa poďakovala predovšetkým vedúcemu mojej práce RNDr. Martinovi Brandovi Ph.D. za výber zaujímavej témy a za ochotu a čas, ktorý mi venoval.

Ďalej by som sa chcela poďakovať svojej rodine za podporu počas písania tejto práce a počas celého štúdia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Tvorba optimálních sazeb v neživotním pojištění

Autor: Zuzana Ďurošková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Branda, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V této práci se zabýváme základními principy tvorby sazeb neživotního pojištění. Pracujeme s rizikově heterogenním portfóliem obsahující určitý počet rizikových tříd. Cílem je najíst optimální sazbu pojistného pro každou třídu. K nalezení aplikujeme optimalizační modely a využíváme nelineárního programování. Formulujeme a řešíme optimalizační problém za jistých podmínek. Odvodíme jeho optimální řešení, z kterého vyjádříme a popíšeme různé principy pro výpočet pojistného pro každou třídu. Zavedeme taktéž duální optimalizační problém a ukážeme tvar jeho optimálního řešení. V numerické studii vypočítáme z odvozených metod sazby pojistného, kde pro jednotlivá rizika reprezentující úhrny škod, budeme volit konkrétní rozdělení.

Klíčová slova: heterogenní portfolio, pozitívně definitní matice, nelineární programování, optimální alokace, duální problém.

Title: Optimal pricing in non-life insurace

Author: Zuzana Ďurošková

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Martin Branda, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this thesis we deal with the basic principles of creating premium rates of non-life insurance. We work with a risk-heterogeneous portfolio containing a specific amount of risk classes. The aim of this study is to find an optimal premium rate for every class. To find these rates we apply optimization models and use non-linear programming. We formulate and solve the problem under certain constraints deducing its optimal solution from which we express and describe different principles for calculating the premium rates for every class. Furthermore, we establish an optimization dual problem and manifest the shape of its optimal solution. In a numerical study using the derived methods we calculate the insurance premium rates where we will use a concrete distribution for particular risks representing aggravated damages.

Keywords: heterogenous portfolio, positive definite matrix, non-linear programming, optimal allocation, dual problem.

Názov práce: Tvorba optimálnych sadzieb v neživotnom poistení

Autor: Zuzana Ďurošková

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: RNDr. Martin Branda, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V tejto práci sa zaoberáme základnými princípmi tvorby sadzieb neživotného poistenia. Pracujeme s rizikovo heterogénnym portfóliom obsahujúcim určitý počet rizikových tried. Cieľom je nájsť optimálnu sadzbu poistného pre každú triedu. Pre jej nájdenie aplikujeme optimalizačné modely a využívame nelineárne programovanie. Formulujeme a riešime optimalizačný problém za istých podmienok. Odvodíme jeho optimálne riešenie, z ktorého vyjadríme a popíšeme rôzne princípy pre výpočet sadzby poistného pre každú triedu. Zavedieme taktiež duálny optimalizačný problém a ukážeme tvar jeho optimálneho riešenia. V numerickej štúdií vypočítame z odvodených metód sadzby poistného, kde pre jednotlivé riziká reprezentujúce úhrny škôd, budeme voliť konkrétne rozdelenie.

Kľúčové slová: heterogénne portfólio, pozitívne definitná matica, nelineárne programovanie, optimálna alokácia, duálny problém.

Obsah

Úvod

Poistné je cena, ktorú platí poistený za poskytnutú poistnú ochranu. Cieľom práce je odvodiť a popísať základné princípy tvorby sadzieb neživotného poistenia a aplikovať ich pre konkrétne rozdelenie úhrnu škôd zmluvy patriacej do určitej rizikovej triedy portfólia. Celá práca je rozdelená na štyri kapitoly.
Prvá kapitola je venovaná potrebným znalostiam pre vyriešenie optimalizačného problému. Zavedieme základné zásady, ktoré budeme dodržiavať počas celej štúdie, definície, vysvetlíme pojmy, ako homogénne či heterogénne portfólio a uvedieme prístupy, pomocou ktorých vyjadríme niektoré základné metódy pre výpočet poistného.
Druhá kapitola sa venuje riešeniu optimalizačného problému. Zavedieme konkrétny minimalizačný problém. Dôraz kladieme na vetu o jednoznačnosti riešenia, ktorá hovorí o existencii a tvare jediného riešenia minimalizačnej úlohy. Z riešenia následne vyjadríme všetky základné princípy pre výpočet poistného. Pre vyriešenie minimalizačnej úlohy sformulujeme dve potrebné lemmy.
V tretej kapitole sa zaoberáme riešením duálneho optimalizačného problému. Zavedieme minimalizačnú úlohu, sformulujeme a dokážeme vetu o jednoznačnosti jej riešenia.
Vo štvrtej kapitole prevedieme numerickú štúdiu, kde aplikujeme teoretické poznatky z predchádzajúcich troch kapitol. Zvolíme konkrétne rozdelenie pre úhrn škôd zmluvy prislúchajúcej do určitej rizikovej triedy portofólia. Vyjadríme parametre potrebné pre výpočet poistného a pre stanovenie poistného použijeme metódy, ktoré boli odvodené v teoretickej časti. Porovnáme jednotlivé metódy a určíme záver našej štúdie. Pre výpočty poistného použijeme program Wolfram Mathematica 9.0 Student Edition.

Kapitola 1

Zakladné princípy tvorby sadzieb

1.1 Úvod do teórie

Uvažujme rizikovo heterogénne portfólio, kde stanovené poistné musí pokrývať pohľadávky voči poistovni plynúce z poistných plnení. Túto skutočnosť je nutné brať do úvahy pri stanovení ceny poistného a taktiež ho stanoviť tak, aby bolo prijateľné pre poistencov. Primeranosť poistného je daná rozdielom medzi rizikom a zaplateným poistným. Cieľom je nájsť optimálne poistné pre každú triedu poistencov aplikáciou nelineárneho programovania tak, že riziko bude pod danou úrovňou a rozdiel medzi rizikom a poistným bude minimalizovaný. Budeme uvažovať taktiež duálný problém t.j. minimalizujeme úroveň rizika pri danom rozdiele medzi rizikom a poistným.
Pri stanovení ceny poistného používame 2 základné zásady:

Zásada 1. Pravdepodobnosť, že celkový úhrn škôd prekročí celkové zaplatené poistné je stanovené malé číslo α, kde $0 < \alpha < 1$.

Zásada 2. Poistné stúpa s rastúcim očakávaným úhrnom škôd.

Počas celej práce budeme uvažovať portfólio obsahujúce k tried poistencov. Každá trieda obsahuje veľký a pevný počet poistených. Hľadáme vektor poistných $\pi = (\pi_1,\pi_2,...,\pi_k)$ taký, aby bola zásada (1) doržaná a tak aby minimalizoval očakávaný rozdiel medzi celkovým rizikom a celkovým príjmom poistného v každej triede, kde π_i predstavuje poisté pre triedu i. Ukážeme, že pri tejto optimalizačnej schéme bude zásada (2) v rámci každej triedy taktiež dodržaná.

1.2 Homogénne portfólio

Uvažujeme portfólio obsahujúce n rizík $X_1,X_2,...,X_n$, kde pod rizikom X_i rozumieme náhodnú veličinu, ktorá je definovaná na nejakom pravdepodobnostnom priestore a predstavuje úhrn škôd pre i-tu zmluvu portfólia. Nech π_i predstavuje poistné pre riziko i.

Definícia 1. *Nech* $0 < \alpha < 1$. *Hovoríme, že poisťovňa sa potýka s úrovňou rizika* α, *ak pravdepodobnosť, že celkové poistné plnenia prekročia celkové poistné je* α:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i \leq \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \alpha. \tag{1.1}$$

Portfólio obsahujúce n i.i.d. rizík $X_1,X_2,...,X_n$ so strednou hodnotou μ_x a rozptylom σ_x^2 sa nazýva homogénne portfólio. Potom

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \mu_s = E[S] = n\mu_x \qquad \text{a} \qquad \sigma_s^2 = Var[S] = n\sigma_x^2.$$

Predpokladáme, že poisťovňa je pripravená čeliť riziku α, to je:

$$\mathsf{P}(S \leq n\pi) \leq \alpha.$$

Podľa Centrálnej Limitnej Vety (CLV) a pre dostatočne veľké n platí

$$\frac{S - \mu_s}{\sigma_s} \overset{as.}{\sim} N(0,1).$$

Potom minimálne poistné je

$$\pi = \mu_x + z_{1-\alpha}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}. \tag{1.2}$$

Dôkaz rovnice (1.2) nájdeme v [Bowers a kol., 1997], Kapitola 2.5.
Vzhľadom k tomu, že riziká sú nezávislé a rovnako rozdelené, všetci poistení platia to isté poistné π, kde $z_{1-\alpha}$ je $1-\alpha$ kvantil štandardného normálneho rozdelenia.

1.3 Heterogénne portfólio

Portfólio obsahujúce k rizikových tried nazývame heterogénne, ak sú splnené nasledujúce predpoklady:

1. Jednotlivé rizikové triedy sú medzi sebou nezávislé.
2. Trieda j obsahuje n_j i.i.d. rizík, $X_{j,1},...,X_{j,n_j}$ rozdelených ako riziko X_j so strednou hodnotou μ_j a s rozptylom $\sigma_j^2, j = 1,...,k$. Nech $n = \sum_{j=1}^{k} n_j$.
3. Predpokladáme, že n_j sú dostatočne veľké čísla pre aplikovanie CLV.

Celkové riziko pre triedu j je $S_j = \sum_{i=1}^{n_j} X_{j,i}$, potom $E[S_j] = n_j\mu_j$ a $Var[S_j] = n_j\sigma_j^2$. Použitím CLV dostávame, že $\frac{S_j - n_j\mu_j}{\sigma_j\sqrt{n_j}} \overset{as.}{\sim} N(0,1)$.

Nech $S = \sum_{j=1}^{k} S_j$ so strednou hodnotou μ a rozptylom σ^2, kde $\mu = E[S] = \sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i$ a $\sigma^2 = Var[S] = \sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i$. Použitím CLV dostávame, že $\frac{S-\mu}{\sigma} \overset{as.}{\sim} N(0,1)$.

Ďalej popíšeme niektoré prístupy pre stanovenie poistného pre každú triedu.

1.3.1 Individuálny prístup

Pre každú triedu j špecifikujeme úroveň rizika α_j. Poistné pre triedu j vypočítame rovnako ako v rovnici (1.2), dostávame

$$\pi_j = \mu_j + z_{1-\alpha_j}\frac{\sigma_j}{\sqrt{n_j}}.$$

Individuálny prístup zohľadňuje len veľkosť n_j každej triedy j, $j = 1,...,k$ a neberie v úvahu vplyv celkovej veľkosti populácie.

1.3.2 Globálny prístup

Pre každú triedu j uvažujeme rovnakú uroveň rizika α_j t.j. $\alpha_1 = ... = \alpha_k = \alpha$ tak, aby zásady (1) a (2) boli dodržané v každej z jednotlivých tried. Preto podobne ako v rovnici (1.1)

$$\mathsf{P}\left(\sum_{j=1}^{k} n_j\pi_j \leq \sum_{j=1}^{k} S_j\right) = \alpha.$$

Vzhľadom k predpokladu (3) pre heterogénne portfólio v podkapitole 1.3 a za pomoci CLV dostaneme:

$$\sum_{j=1}^{k} n_j\pi_j = \mu + z_{1-\alpha}\sigma = \sum_{j=1}^{k} n_j\mu_j + z_{1-\alpha}\sqrt{\sum_{j=1}^{k} n_j\sigma_j^2}. \tag{1.3}$$

Rovnica (1.3) udáva celkovú výšku poistného, ktorá by mala byť vyzbieraná tak, aby bola dosiahnutá úroveň rizika α.

Poznámka 1. Porovnáme celkové poistné vyzbierané podľa individuálneho a globálneho prístupu.

Nerovnosť $\sum a_i^2 \leq (\sum a_i)^2$, kde $a_i > 0$ implikuje, že

$$\sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i + z_{1-\alpha}\sqrt{\sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i^2} \leq \sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i + z_{1-\alpha}\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^2\sqrt{n_i} = \sum_{i=1}^{k} n_i\left(\mu_i + z_{1-\alpha}\frac{\sigma_i}{\sqrt{n_i}}\right). \tag{1.4}$$

Ľavá strana nerovnice (1.4) predstavuje sumu všetkých poistných vyzbieraných podľa globálneho prístupu pre danú úroveň rizika α. Sčítance poslednej sumy v nerovnici (1.4) zastupujú všetky poistné vyzbierané podľa individuálneho prístupu, kde pre každú triedu j uvažujeme rovnakú úroveň rizika α. Vidíme, že v globálnom prístupe platia poistenci menej než v individuálnom.

Zostáva stanoviť cenu poistného pre každú triedu j. Jeden z možných spôsobov je nasledovný:

$$\pi_j = \mu_j + z_{1-\alpha}T_j, \tag{1.5}$$

kde T_1,...,T_k sú nezáporné čísla, ktoré spĺňajú

$$\sum_{j=1}^{k} n_jT_j = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} n_j\sigma_j^2} = \sigma. \tag{1.6}$$

Existuje niekoľko možností ako určiť T_1,...,T_k, teda ako rozložiť celkovú rizikovú prirážku. Niektoré z nich si popíšeme.

1. Rovnomerná alokácia
   Celková smerodatná odchýlka σ definovaná vzťahom (1.6) je rozdelená rovnomerne medzi všetkých poistencov, teda T_1,...,$T_k = \frac{\sigma}{n}$. Stanovené poistné pre poistencov triedy j je

$$\pi_j = \mu_j + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{n}.$$

2. Semi-uniformná alokácia
   Celková smerodatná odchýlka σ je rozdelená rovnomerne medzi všetky triedy, teda $T_j = \frac{\sigma}{kn_j}$. Stanovené poistné pre poistencov triedy j je
$$\pi_j = \mu_j + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{kn_i}.$$
3. Proporcionálna alokácia
   Celkový rozptyl $\sigma^2 = \sum_{j=1}^{k} n_j\sigma_j^2$ je rozdelený proporcionálne medzi rozptyly jednotlivých tried. T_j je určené ako $\frac{r_j\sigma}{n_j}$, kde $r_j = \frac{n_j\sigma_j^2}{\sigma^2}$. Stanovené poistné pre poistencov triedy j je
$$\pi_j = \mu_j + z_{1-\alpha}\frac{r_j\sigma}{n_j}.$$

Kapitola 2

Optimálna alokácia

V tejto kapitole systematicky popíšeme ocenenie poistného pre každú triedu tak, aby boli dodržané nasledujúce podmienky:

1. Platí zásada (1) a všimnime si, že za platnosti predpokladov heterogénneho portfólia je ekvivalentná so vzťahom (1.3).

2. Minimalizujeme vážený súčet očakávaných štvorcov odchýlok, teda rozdielov medzi rizikami S_j jednotlivých tried a úhrnom poistného $n_j\pi_j$, t.j. $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{r_j} E(S_j - n_j\pi_j)^2$, kde $r_1,...,r_k$ sú kladné čísla.

Všetky metódy oceňovania, ktoré sme si vyššie popísali v podkapitole 1.5, budú znova odvodené na základe tohoto všeobecného postupu.

2.1 Analýza a riešenie nelineárneho optimalizačného problému

V tejto podkapitole budeme riešiť optimalizačnú úlohu

$$\begin{aligned} \min_{\pi} \quad & \left\{ \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{1}{r_i} E(S_i - n_i\pi_i)^2 \right] \right\} \\ \text{s.t} \quad & \sum_{i=1}^{k} n_i\pi_i = \mu + z_{1-\alpha}\sigma, \end{aligned} \tag{2.1}$$

kde minimalizujeme účelovú funkciu za podmienky, ktorá predstavuje úhrn vyzbieraného poistného tak aby bola dodržaná stanovená úroveň rizika α.

Veta 1 (Veta o jednoznačnosti riešenia)**.** *Nech* $\pi = (\pi_1,...,\pi_k)$ *a* $r_1,...,r_k$ *sú kladné čísla. Minimalizačný problém* (2.1) *má práve jedno riešenie*

$$\pi_i = \mu_i + z_{1-\alpha}\frac{r_i\sigma}{rn_i}, \qquad i = 1,...,k, \qquad kde \qquad r = \sum_{i=1}^{k} r_i.$$

Veta je čerpaná zo zdroja [Zaks a kol., 2006]. Boli opravené podstatné časti dôkazu vety (1), ktoré boli v literatúre uvedené chybne. Ide o rovnice (2.4) a (2.5), prvé parciálne derivácie (2.7) a rovnicu (2.9).
Aby sme mohli vetu o jednoznačnosti riešenia dokázať, potrebujeme dve lemmy o pozitívne definitnej matici.

Lemma 2. *Nech A je pozitívne definitná matica a P nech je regulárna matica. Obidve matice sú štvorcové s dimenziou $m \times m$. Buď P^t transponovaná matica P. Potom $B = P^t AP$ je pozitívne definitná matica.*

Dôkaz. [Viz [Zaks a kol., 2006] str.185].

❑

Lemma 3. *Nech a_1,...,a_m sú kladné čísla a nech matica A_m vyzerá následovne:*

$$\mathbf{A_m} = \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1+a_m \end{pmatrix}$$

Potom matica A_m je pozitívne definitná matica.

Dôkaz. [Viz [Zaks a kol., 2006] str.185].

❑

Dôkaz. (Veta 1.) Všimnime si, že pre $i = 1,...,k$ je

$n_i\sigma_i^2 = Var(S_i) = Var(S_i - n_i\pi_i) = E(S_i - n_i\pi_i)^2 - E^2(S_i - n_i\pi_i) = E(S_i - n_i\pi_i)^2 -$

$(n_i\mu_i - n_i\pi_i)^2$. Odtiaľ

$$E(S_i - n_i\pi_i)^2 = n_i\sigma_i^2 + (n_i\mu_i - n_i\pi_i)^2. \tag{2.2}$$

Substitúciou v cieľovej funkcii (2.1) pomocou vzťahu (2.2), ktorý sme si vyššie odvodili, dostávame nasledujúcu formuláciu problému:

$$\min_\pi \left\{ \sum_{i=1}^k \left[\frac{1}{r_i} E(S_i - n_i\pi_i)^2 \right] \right\} =$$

$$= \min_\pi \left\{ \sum_{i=1}^k \left[\frac{1}{r_i} (n_i\mu_i - n_i\pi_i)^2 \right] \right\} =$$

$$= \min_\pi \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{n_i\sigma_i^2}{r_i} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{r_i} (n_i\mu_i - n_i\pi_i)^2 \right\}.$$

Elimináciou výrazu $\sum_{i=1}^k \frac{n_i\sigma_i^2}{r_i}$ nezmeníme optimálne riešenie. Nech $W_i(\pi) = n_i\mu_i - n_i\pi_i$, $1 \le i \le k$. Problém (2.13) je ekvivalentný problému:

$$\begin{aligned} \min_\pi \quad & \left\{ \sum_{i=1}^k \left[\frac{1}{r_i} W_i^2(\pi) \right] \right\} \\ \text{s.t} \quad & \sum_{i=1}^k W_i(\pi) = -z_{1-\alpha}\sigma. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Podmienku v probléme (2.3) môžeme vyjadriť v tvare:

$$-W_1(\pi) = \sum_{i=2}^{k} W_i(\pi) + z_{1-\alpha}\sigma. \tag{2.4}$$

Nech $G(\pi) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{r_i} W_i^2(\pi)$. Dosadením podmienky (2.4) do funkcie $G(\pi)$ dostávame:

$$G(\pi) = \frac{1}{r_1}\Bigg(\sum_{i=2}^{k} W_i(\pi) + z_{1-\alpha}\sigma\Bigg)^2 + \sum_{i=2}^{k} \frac{1}{r_i} W_i^2(\pi). \tag{2.5}$$

Problém (2.5) je ekvivalentný problému:

$$\min_{\pi}\{G(\pi)\}. \tag{2.6}$$

Postupujeme štandardne ako pri hľadaní lokálneho extrému funkcie viacerých premenných. Nájdeme kritické body funkcie $G(\pi)$, čo predstavuje vektory π pre ktoré, prvé parciálne derivácie neexistujú alebo sú nulové. $G(\pi)$ je funkcia viacerých premenných, a to π_2,...,π_k. Prvé parciálne derivácie sú:

$$\frac{\partial G}{\partial \pi_i} = \frac{-2n_i}{r_1}\Bigg(\sum_{i=2}^{k} W_i(\pi) + z_{1-\alpha}\sigma\Bigg) - \frac{2n_i}{r_i} W_i(\pi), \qquad \text{pre } \forall i = 2,...,k. \tag{2.7}$$

Položíme $k-1$ parciálnych derivácii rovných 0 a získame nasledujúci systém lineárnych rovníc pre $W_2(\pi)$,...,$W_k(\pi)$:

$$\begin{aligned}
\Bigg(\tfrac{1}{r_1} + \tfrac{1}{r_2}\Bigg)W_2 + \tfrac{1}{r_1}\textstyle\sum_{i=2,i\neq 2}^{k} W_i &= -\tfrac{z_{1-\alpha}}{r_1}\\
\Bigg(\tfrac{1}{r_1} + \tfrac{1}{r_3}\Bigg)W_2 + \tfrac{1}{r_1}\textstyle\sum_{i=2,i\neq 3}^{k} W_i &= -\tfrac{z_{1-\alpha}}{r_1}\\
&\vdots\\
\Bigg(\tfrac{1}{r_1} + \tfrac{1}{r_k}\Bigg)W_2 + \tfrac{1}{r_1}\textstyle\sum_{i=2,i\neq k}^{k} W_i &= -\tfrac{z_{1-\alpha}}{r_1},
\end{aligned}$$

kde $W_i = W_i(\pi)$. Odčítaním prvej rovnice od každej ďalšej získame $k-1$ lineárnych rovníc(zapísaných v maticovej podobe)

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2})W_2 & \frac{1}{r_1}W_3 & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{r_1}W_k & -\frac{z_{1-\alpha}\sigma}{r_1}\\
\frac{1}{r_2}W_2 & -\frac{1}{r_3}W_3 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0\\
\vdots & 0 & \ddots & & 0 & \vdots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots\\
\vdots & \vdots & 0 & \ddots & -\frac{1}{r_{k-1}}W_{k-1} & 0 & \vdots\\
\frac{1}{r_2}W_2 & 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{r_k}W_k & 0
\end{array}\right).$$

Posledných $k-2$ riadkov nam dáva vzťah $\frac{1}{r_2}W_2 = \frac{1}{r_i}W_i$, odtiaľ

$$r_2 W_i = r_i W_2, \qquad \text{pre } \forall i = 3,...,k. \tag{2.8}$$

Prvý riadok matice upravíme na tvar

$$\Bigg(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\Bigg)W_2 + \frac{1}{r_1}\sum_{i=3}^{k} W_i = -\frac{z_{1-\alpha}\sigma}{r_1}. \tag{2.9}$$

Substitúciou pomocou vzťahu (2.8) do rovnice (2.9) a prenásobením výrazu r_1,r_2 obdržíme:

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)W_2+\frac{1}{r_1}\sum_{i=3}^{k}W_i=-\frac{z_{1-\alpha}\sigma}{r_1}, \qquad \text{kde} \qquad W_i=\frac{W_2 r_i}{r_2}$$

$$W_2r_2+W_2r_1+\sum_{i=3}^{k}W_2r_i=-r_2z_{1-\alpha}\sigma$$

$$\sum_{i=1}^{k}W_2r_i=-r_2z_{1-\alpha}\sigma.$$

Teda,

$$W_2=\frac{-r_2z_{1-\alpha}\sigma}{r}. \tag{2.10}$$

Substituovaním W_2, ktoré sme si vyjadrili vzťahom (2.10) v rovnici (2.8), dostávame:

$$W_i=\frac{-r_iz_{1-\alpha}\sigma}{r}, \qquad i=3,...,k. \tag{2.11}$$

Nakoniec substitúciou W_2 z (2.10) a W_i z (2.11) v rovnici (2.4) pre W_1 získame $W_1=\frac{r_iz_{1-\alpha}\sigma}{r}$. Zo vzťahu $W_i(\pi)=n_i\mu_i-n_i(\pi_i)$ hľadaným kritickým bodom $\pi^*=(\pi_1^*,...,\pi_k^*)$ pre problém (2.6) je

$$\pi_i^*=\mu_i+z_{1-\alpha}\frac{r_i\sigma}{rn_i}, \qquad i=1,...,k. \tag{2.12}$$

Ďalej musíme overiť, že Hesián funkcie $G(\pi)$, ktorú sme definovali v (2.5), je v π^* pozitívne definitná matica. Čo predstavuje postačujúcu podmienku pre lokálny extrém (minimum) funkcie viacerých premenných. Diferenciáciou prvých parciálnych derivácií v (2.7) nájdeme druhé parciálne derivácie funkcie $G(\pi)$:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial^2\pi_i}=\frac{2n_i^2}{r_1}+\frac{2n_i^2}{r_i}=\frac{2n_i^2(r_1+r_i)}{r_1r_i}, \qquad i=2,...,k$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial\pi_i\partial\pi_j}=\frac{n_in_j}{r_1}, \qquad 2\le i<j\le k.$$

Hesián vo všetkých bodoch je

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix} \frac{2n_2^2(r_1+r_2)}{r_1r_2} & \frac{2n_2n_3}{r_1} & \frac{2n_2n_4}{r_1} & \dots & \dots & \frac{2n_2n_k}{r_1} \\ \frac{2n_3n_2}{r_1} & \frac{2n_3^2(r_1+r_3)}{r_1r_3} & \frac{2n_3n_4}{r_1} & \dots & \dots & \frac{2n_3n_k}{r_1} \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \frac{2n_{k-1}n_k}{r_1} \\ \frac{2n_kn_2}{r_1} & \frac{2n_kn_3}{r_1} & \dots & \dots & \frac{2n_kn_{k-1}}{r_1} & \frac{2n_k^2(r_1+r_k)}{r_1r_k} \end{pmatrix}.$$

Prenásobením pozitívne definitnej matice kladným skalárom sa jej vlastnosť nezmení. Preto ju môžeme prepísať do tvaru:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \frac{n_2^2(r_1+r_2)}{r_2} & n_2n_3 & n_2n_4 & \dots & \dots & n_2n_k \\ n_3n_2 & \frac{n_3^2(r_1+r_3)}{r_3} & n_3n_4 & \dots & \dots & n_3n_k \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & n_{k-1}n_k \\ n_kn_2 & 2n_kn_3 & \dots & \dots & n_kn_{k-1} & \frac{n_k^2(r_1+r_k)}{r_k} \end{pmatrix}.$$

Matica $\tilde{H}$ je symetrická splňujúca rovnosť

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} n_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & n_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\frac{r_1}{r_2} & \dots & 1 \\ \ddots & \vdots & \ddots \\ 1 & \dots & 1+\frac{r_1}{r_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & n_k \end{pmatrix}.$$

Podľa lemmy (2) a lemmy (3) je $\tilde{H}$ pozitívne definitná matica, tým pádom aj Hessián H je pozitívne definitná matica. Čím sme dokázali, že π^* je lokálne minimum a jediné riešenie problému (2.14).
Všimnime si, že účelová funkcia je kvadratická a obmedzenie lineárne, čo nám dáva konvexitu v oboch prípadoch. Použitím vety, ktorú nájdeme v [Dupačová a Lachout, 2011], je každé lokálne minimum konvexnej funkcie taktiež jej globálnym minimom. Teda π^* je lokálne aj globálne minimum.

❑

Ak zameníme v podmienke problému (2.1) znak rovnosti na znak nerovnosti, riešenie sa nezmení. Teda

$$\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{k} S_i \geq \sum_{i=1}^{k} n_j\pi_i\right) \leq \alpha \qquad \text{alebo ekvivalentne} \qquad \sum_{i=1}^{k} n_i\pi_i \geq \mu + z_{1-\alpha}\sigma.$$

Dôsledok 1. Nech $\pi = (\pi_1,...,\pi_k)$ a nech $r_1,...,r_k$ sú kladné čísla. Minimalizačný problém za podmienok (s.t)

$$\begin{aligned} \min_{\pi} \quad & \left\{ \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{1}{r_i} E(S_i - n_i\pi_i)^2 \right] \right\} \\ \text{s.t} \quad & \sum_{i=1}^{k} n_i\pi_i \geq \mu + z_{1-\alpha}\sigma, \end{aligned} \tag{2.13}$$

má práve jedno riešenie

$$\pi_i = \mu_i + z_{1-\alpha}\frac{r_i\sigma}{rn_i}, \qquad i = 1,...,k, \qquad \text{kde} \qquad r = \sum_{i=1}^{k} r_i.$$

Dôkaz. [Viz [Zaks a kol., 2006] str.171].

❑

Nasledujúca veta hovorí o prípade klasifikácie poistného pre každú triedu tak, aby platili zásady (1) a (2) a so stúpajúcim očakávaným rizikom stúpala aj cena poistného. Z toho dôvodu zavedieme pre optimalizačný problém viac podmienok. Riešime optimalizačnú úlohu:

$$\begin{aligned} \min_{\pi} \quad & \left\{ \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{1}{r_i} (n_i\mu_i - n_i\pi_i)^2 \right] \right\} \\ \text{s.t} \quad & \sum_{i=1}^{k} n_i\pi_i \geq \mu + z_{1-\alpha}\sigma \\ & (1+a_i)\pi_i \leq \pi_{i+1}, \qquad i = 1,...,k-1 \\ & \mu_i \leq \pi_i, \qquad i = 1,...,k, \end{aligned} \tag{2.14}$$

kde $a_1,...,a_{k-1}$ sú nezáporné a $r_1,...,r_k$ kladné skaláry.

Veta 4. *Nech $a_1,...,a_{k-1}$ sú nezáporné skaláry také, že*

$$(1+a_i)\mu_i \leq \mu_{i+1}, \qquad i = 1,...,k-1.$$

Minimalizáčný problém (2.14) *má práve jedno riešenie.*

Dôkaz. [viz.[Zaks a kol., 2006]]. Odtiaľ postupnými substitúciami dostávame, že 1.podmienka problému (2.14) predstavuje nadrovinu v $\mathbb{R}^k$ a 2. a 3. podmienka problému (2.14) predstavujú polpriestory v $\mathbb{R}^k$. Ich priesečník obsahuje riešenie. Podmienky definujú neprázdnu konvexnú množinu. V literatúre [Baptiste a kol., 1993], Kapitola III.3 sa rieši problém projekcie na konvexnú množinu. Dokazuje sa existencia a jedinečnosť tejto projekcie, a tým pádom existencia jediného riešenia problému (2.14).

❑

2.2 Aplikácia vety o jednoznačnosti riešenia

V tejto podkapitole si ukážeme rôzne metódy oceňovania poistného, ktoré sme si už predstavili v podkapitole 1.5. Obdržíme ich z vety (1) rôznou voľbou r_i , $i = 1,...,k$.

1. $r_i = n_i$ pre všetky $i = 1,...,k$. Odtiaľ vidíme, že $\sum_{i=1}^{k} r_i = \sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Teda
$$\pi_i^* = \mu_i + z_{1-\alpha}\frac{r_i\sigma}{n_i\sum_{i=1}^{k} r_i} = \mu_i + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{n}.$$
Tento prípad sme nazvali rovnomerná alokácia.

2. $r_i = 1$ pre $i = 1,...,k$. V tomto prípade je $\sum_{i=1}^{k} r_i = k$. Teda
$$\pi_i^* = \mu_i + z_{1-\alpha}\frac{r_i\sigma}{n_i\sum_{i=1}^{k} r_i} = \mu_i + z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{n_i k}.$$
Tento prípad sme nazvali semi-uniformná alokácia.

3. $r_i = \frac{n_i \sigma_i^2}{\sigma^2}$ pre $i = 1,...,k$, kde $\sigma^2 = \sum_{i=1}^k n_i \sigma_i^2$ odtiaľ obdržíme, že $\sum_{i=1}^k r_i = 1$. Teda
$$\pi_i^* = \mu_i + z_{1-\alpha} \frac{r_i \sigma}{n_i \sum_{i=1}^k r_i} = \mu_i + z_{1-\alpha} \frac{r_i \sigma}{n_i}.$$
Tento prípad sme nazvali relatívna alokácia.

4. Nech Q je zobrazenie z priestoru všetkých nezáporných náhodných veličín do $\mathbf{R}$ tak, že pre náhodné veličiny $X_1,...,X_k$ je $Q(X_1 + ... + X_k) = \sum_{j=1}^k Q(X_j)$. Nech $r_i = \frac{Q(S_i)}{Q(S)}$. V tomto prípade pre každú triedu i je poistné
$$\pi_i^* = \mu_i + z_{1-\alpha} \frac{r_i \sigma}{n_i \sum_{i=1}^k r_i} = \mu_i + z_{1-\alpha} \frac{\sigma_s}{n_i Q(S)} Q(S_i).$$
Uvažujme dva špeciálne prípady:

   (a) $Q(X) = E[X]$ poistné pre tento prípad je $\pi_i = \mu_i + z_{1-\alpha} \frac{\sigma \mu_i}{\mu}$. Nazýva sa princíp očakávania.

   (b) $Q(X) = Var[X]$ poistné pre tento prípad je $\pi_i = \mu_i + z_{1-\alpha} \frac{\sigma_i^2}{\sigma}$. Nazýva sa princíp rozptylu.

Poznámka 2. V literatúre [Zaks a kol., 2006] bolo poistné pre špeciálne prípady (a), (b) uvedené chybne.

Kapitola 3

Duálna optimálna alokácia

V tejto kapitole budeme interpretovať duálny problém: Minimalizujeme úroveň rizika v rámci príslušných podmienok tak, že vážený súčet očakávaných štvorcov odchýlok, teda rozdielov medzi rizikami S_j jednotlivých tried a úhrnom poistného $n_j\pi_j$ je daný.

3.1 Analýza a riešenie duálneho nelineárneho optimalizačného problému

Označme $\tilde{\pi}_i = n_i\pi_i$ ako úhrn poistného a $\tilde{\mu}_i = n_i\mu_i$ úhrn strednej hodnoty v triede i a nech $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_1,...,\tilde{\pi}_k)$.
Riešime optimalizačnú úlohu za podmienok s.t

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{\pi}} \quad & \left\{ \mathsf{P}\left(S > \sum_{i=1}^{k} \tilde{\pi}_i \right) \right\} \\ \text{s.t} \quad & \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{1}{r_i} E(S_i - \tilde{\pi}_i)^2 \right] = \tilde{A} \\ & \tilde{\mu}_i \le \tilde{\pi}_i, \qquad \forall i = 1,...,k, \end{aligned} \tag{3.1}$$

Kde $r_1,...,r_k$ a $\tilde{A}$ sú kladné čísla, tak že $\tilde{A} \ge \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i\sigma_i^2}{r_i}$.

Veta 5. *Minimalizáčný problém* (3.1) *má práve jedno riešenie*

$$\pi_i = \mu_i + r\sqrt{\frac{A}{r}}, \qquad \forall i = 1,...,k,$$

kde $\quad r = \sum_{i=1}^{k} r_i \quad$ *a* $\quad A = \tilde{A} - \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i\sigma_i^2}{r_i}.$

Dôkaz.

$$\mathsf{P}\left(S > \sum_{i=1}^{k} \tilde{\pi}_i \right) = \mathsf{P}\left(\frac{S-\mu}{\sigma} > \frac{\sum_{i=1}^{k} \tilde{\pi}_i - \sum_{i=1}^{k} \tilde{\mu}_i}{\sigma} \right). \tag{3.2}$$

Minimalizácia ľavej strany vzhľadom k $(\tilde{\pi}_1,...,\tilde{\pi}_k)$ v (3.2) je ekvivalentná s hľadaním maxima na pravej strane $\frac{\sum_{i=1}^{k}(\tilde{\pi}_i - \tilde{\mu}_i)}{\sigma}$, výraz zjednodušíme na $\sum_{i=1}^{k}(\tilde{\pi}_i - \tilde{\mu}_i)$, kedže $\sigma > 0$ je konštanta. Prvú podmienku problému (3.1) prepíšeme obdobne ako vo vete (1) pomocou vzťahu (2.2). Problém môžeme preformulovať následovne:

$$\begin{aligned} \max_{\tilde{\pi}} \quad & \left\{ \sum_{i=1}^{k} (\tilde{\pi}_i - \tilde{\mu}_i) \right\} \\ \text{s.t} \quad & \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i \sigma_i^2}{r_i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{r_i} (\tilde{\pi}_i - \tilde{\mu}_i)^2 = \tilde{A} \\ & \tilde{\mu}_i \leq \tilde{\pi}_i, \qquad \forall i = 1,...,k. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Nech $X_i = \tilde{\pi}_i - \tilde{\mu}_i$ a $A = \tilde{A} - \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i \sigma_i^2}{r_i}$. Problém (3.3) je ekvivaletný s problémom

$$\begin{aligned} \max_{\tilde{\pi}} \quad & \left\{ \sum_{i=1}^{k} X_i \right\} \\ \text{s.t} \quad & \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{r_i} X_i^2 - A = 0 \\ & X_i \geq 0, \qquad \forall i = 1,...,k. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pre vyriešenie problému použijeme Lagrangeové multiplikátory. Nech

$$G(X,\lambda) = \sum_{i=1}^{k} X_i + \lambda \bigg(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{r_i} X_i^2 - A \bigg).$$

Deriváciou $G(X,\lambda)$ podľa $(X_1,...,X_k)$ a λ dostaneme $k+1$ rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(X,\lambda)}{\partial X_i} &= 1 + 2\lambda \frac{X_i}{r_i} = 0 \qquad \forall i = 1,...,k \\ \frac{\partial G(X,\lambda)}{\partial \lambda} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{X_i^2}{r_i} - A = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Z prvej rovnice v (3.5) si vyjadríme

$$X_i = -\frac{r_i}{2\lambda}, \qquad \forall i = 1,...,k. \tag{3.6}$$

Substitúciou X_i (3.6) v poslednej rovnici (3.5) dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} \frac{(-\frac{r_i}{2\lambda})^2}{r_i} &= A \\ \Rightarrow \frac{1}{4A} \sum_{i=1}^{k} r_i &= \lambda^2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Pomocou substitúcie λ negatívnym koreňom rovnice (3.7) (druhá podmienka problému (3.4) nám dáva $X_i \geq 0 \Rightarrow \lambda < 0$) v prvej rovnici (3.5) dostaneme práve jedno riešenie, ktoré je

$$X_i^* = -\frac{r_i}{2\lambda} = r_i \sqrt{\frac{A}{r}}, \qquad \forall i = 1,...,k. \tag{3.8}$$

Potrebujeme dokázať, že bod $X^* = (X_1^*,...,X_k^*)$ je maximum. Nech $\epsilon_1,...,\epsilon_k \in \mathbf{R}$ je k ľubovolných skalárov. Bod X^* je riešením problému (3.4) vtedy a len vtedy, ak je $\sum_{i=1}^k y_i < \sum_{i=1}^k X_i^*$ pre ľubovolný bod $y = (y_1,...,y_k) \in \mathbf{R}$ taký, že $y_i \geq 0$, $i = 1,...,k$ a zároveň platí:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{r_i} y_i^2 - A = 0. \tag{3.9}$$

Nech $y_i = X_i^* + r_i\epsilon_i$, $\forall i = 1,...,k$. Po dosadení y_i do vzťahu (3.9) dostávame:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{r_i}(X_i^* + r_i\epsilon_i)^2 = A. \tag{3.10}$$

Substitúciou hodnot X_i^*, ktoré sme získali v (3.8) dostaneme

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{r_i}\left(r_i\sqrt{\frac{A}{r}} + r_i\epsilon_i\right)^2 = A \\
\Rightarrow &\sum_{i=1}^{k} r_i\left(\frac{A}{r} + 2\sqrt{\frac{A}{r}}\epsilon_i + \epsilon_i^2\right) = A \\
\Rightarrow &\, 2\sqrt{\frac{A}{r}}\sum_{i=1}^{k} r_i\epsilon_i + \sum_{i=1}^{k} r_i\epsilon_i^2 = 0 \\
\Rightarrow &\sum_{i=1}^{k} r_i\epsilon_i = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{A}}\sum_{i=1}^{k} r_i\epsilon_i^2 < 0.
\end{aligned}$$

Odtiaľ,

$$\sum_{i=1}^{k} y_i = \sum_{i=1}^{k}(X_i^* + r_i\epsilon_i) = \sum_{i=1}^{k} X_i^* + \sum_{i=1}^{k} r_i\epsilon_i < \sum_{i=1}^{k} X_i^*.$$

Optimálne poistné pre každú triedu i je:

$$\pi_i = \mu_i + r_i + \sqrt{\frac{A}{r}}, \qquad \forall i = 1,...,k.$$

❑

Dôsledok 2. Ak zmeníme znamienko rovnosti v podmienke (3.1) na znamienko nerovnosti t.j. $\sum_{i=1}^k [\frac{1}{r_i} E(S_i - \tilde{\pi}_i)^2] \leq A$, optimálne riešenie sa nezmení.

Obdobne ako v kapitole 2. (Veta(4)), sformulujeme analogickú vetu pre duálny problém a pridáme podmienky tak, aby platili zásady (1) a (2) a so stúpajúcim očakávaným rizikom stúpala aj cena poistného.
Riešime optimalizačnú úlohu:

$$\begin{aligned}
\max_{\pi} \quad & \left\{\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{r_i}(n_i\mu_i - n_i\pi_i)^2\right]\right\} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i\sigma_i^2}{r_i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{r_i}(\tilde{\pi}_i - \tilde{\mu}_i)^2 = \tilde{A} \\
& (1 + a_i)\pi_i \leq \pi_{i+1}, \qquad i = 1,...,k-1 \\
& \mu_i \leq \pi_i, \qquad i = 1,...,k.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Kde $a_1,...,a_{k-1}$ a $r_1,...,r_k$ sú kladné skaláry.

Veta 6. *Nech $a_1,...,a_{k-1}$ sú kladné skaláry také, že*

$$(1 + a_i)\mu_i \leq \mu_{i+1}, \qquad i = 1,...,k-1. \tag{3.12}$$

Maximalizáčný problém (3.11) *má aspoň jedno riešenie.*

Dôkaz. [viz [Zaks a kol., 2006]] odtiaľ dostaneme, že priesečník podmienok je neprázdna a uzatvorená množina. Účelová funkcia je spojitá funkcia a má teda na tejto množine minimum a maximum. Dôkaz nedokazuje existenciu len jediného riešenia a teda môže existovať niekoľko bodov, v ktorých je dosiahnuté globálne maximum. Riešenie sa hľadá použitím Lagrangeových multiplikátorov. ❑

Kapitola 4

Numerická štúdia

Poistné je cena, za ktorú poisťovňa poskytuje poistnú ochranu. Rizikové poistné, ktoré slúži ku krytiu rizika X v danom období, je dané strednou hodnotou EX. Rizikové poistné je potrebné zvýšiť o bezpečnostnú prirážku, ktorá je ochranou proti nepriaznivému škodnému priebehu, keď realizácia náhodnej veličiny X prevýši strednú hodnotu EX. Rizikové poistné s bezpečnostnou prirážkou sa nazýva netto poistné. Čerpané zo zdroja [Mandl a Mazurová, 1999].
Nech $X_i = \sum_{i=1}^{N_i} Y_i$ je náhodná veličina so zloženým Poissonovým rozdelením, predstavujúca úhrn škôd na jednej zmluve v triede i, kde $i = 1,...,k$.
Predpokladáme, že N_i je náhodná veličina s Poissonovým rozdelením s parametrom λ_i, ktorá predstavuje počet škôd na jednej zmluve v triede i a Y_i je náhodná veličina s exponenciálnym rozdelením s parametrom γ_i, predstavujúca výšky škodných nárokov jednej škody, ktorá nastane na jednej zmluve v triede i.
Ďalej predpokladáme, že $Y_1, Y_2,...$ je postupnosť i.i.d. veličín a náhodná veličina N_i je nezávislá na $\{Y_i, i = 1,2,...\}$.
K výpočtu poistného potrebujeme strednú hotnotu úhrnu škôd jednej zmluvy patriacej do i-tej triedy μ_i (t.j. EX_i) a rozptyl úhrnu škôd jednej zmluvy z i-tej triedy σ_i^2 (t.j. $VarX_i$). Užitím vzťahov z [Mandl a Mazurová, 1999] pre naše konkrétne rozdelenia dostávame

$$\mu_i = EN_iEY_i = \frac{\lambda_i}{\gamma_i}, \qquad \sigma_i^2 = EN_iVarY_i + (EY_i)^2VarN_i = 2(\frac{\lambda_i}{\gamma_i^2}). \tag{4.1}$$

Ďalej potrebujeme strednú hodnotu úhrnu škôd celého portfólia μ a rozptyl úhrnu škôd celého portfólia σ^2. Predpokladáme, že každá trieda i obsahuje dostatočný počet zmlúv n_i. Vďaka i.i.d. veličín X_i v danej triede i dostaneme:

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} n_i\mu_i, \qquad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i^2. \tag{4.2}$$

K výpočtu potrebujeme danú úroveň rizika α, ktorá predstavuje pravdepodobnosť, že celkové pohľadávky poisťovne prekročia celkové vyzbierane poistné. α volíme ako kladné malé číslo tak, že $0 < \alpha < 1$, teda tak aby platila Zásada(1).
Vo všetkých príkladoch určíme poistné pre šesť tried ($k = 6$) a volíme rovnakú úroveň rizika α. Porovnáme niektoré metódy stanovenia poistného, s ktorými sme sa už oboznámili v podkapitolách 1.3 a 2.2. Každá trieda i je charakterizovaná počtom poistencov n_i, strednou hodnotou μ_i, rozptylom σ_i^2 vypočítaných podľa

vzťahov (4.1), parametrom λ_i a parametrom γ_i. Informácie pre každú triedu nájdeme v prvej príslušnej tabuľke. Nižšie sú uvedené informácie ako stredná hodnota úhrnu škôd celého portfólia μ, smerodatná odchýlka úhrnu škôd celého portfólia σ , ktoré sme získali pomocou vzťahov (4.2), celkový počet zmluv v portfóliu n a zvolená úroveň rizika α.
Druhá tabuľka obsahuje vypočítané poistné pre každú triedu podľa rovnomernej alokácie, semi-uniformnej alokácie, princípu očakávania a princípu rozptylu.
Posledná tabuľka v príkladoch predstavuje poistné vypočítané podľa duálneho princípu. Poistné vypočítame podľa vzťahu z vety (5), t.j.

$$\pi_i = \mu_i + r_i\sqrt{\frac{A}{r}}. \tag{4.3}$$

Kde $r_i = \frac{1}{n_i}$ sú kladné čísla predstavujúce váhy pre jednotlivé triedy a

$$A = \tilde{A} - \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i\sigma_i}{r_i}. \tag{4.4}$$

Poistné v tomto prípade okrem strednej hodnoty μ_i, ktorá slúži ku krytiu rizika, a počtu poistených v danej triede n_i závisí na voľbe $\tilde{A}$. $\tilde{A}$ je také zvolené kladné číslo, pre ktoré musí platiť, že

$$\tilde{A} \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i\sigma_i}{r_i}. \tag{4.5}$$

Príklad 1. V tomto príklade ukážeme ako sa mení výška poistného v závislosti na parametroch λ_i a γ_i. Vo všetkých prípadoch uvažujeme rovnaký parameter počtu škôd λ_i a konštantný počet poistených n_i. Základné informácie pre každú triedu nájdeme v tabuľke (4.1). Budeme sledovať ako sa mení poistné pri zvyšovaní parametru výšky škodných nárokov γ_i. Všetky typy poistného spočítané podľa popísaných metod sú obsiahnuté v tabuľke (4.2).

trieda i	populácia n_i	λ_i	γ_i	μ_i	σ_i^2
1	1000	0.02	$6. \times 10^{-6}$	3333.33	1.11111×10^9
2	1000	0.02	$5. \times 10^{-6}$	4000.	1.6×10^9
3	1000	0.02	$4. \times 10^{-6}$	5000.	2.5×10^9
4	1000	0.02	$3. \times 10^{-6}$	6666.67	4.44444×10^9
5	1000	0.02	$2. \times 10^{-6}$	10000.	$1. \times 10^{10}$
6	1000	0.02	$1. \times 10^{-6}$	20000.	$4. \times 10^{10}$

Tabulka 4.1: Základné informácie Príklad 1.

- Stredná hodnota úhrnu škôd celého portfólia: $\mu = 4.9 \times 10^7$.
- Smerodatná odchýlka úhrnu škôd celého portfólia: $\sigma = 7.7237 \times 10^6$.
- Celkový počet poistených v portfóliu: $n = \sum_{i=1}^{6} n_i = 6000$.
- Daná úroveň rizika: $\alpha = 0.2$.

trieda i	rovnomerná alokácia	semi-uniformná alokácia	princíp očakávania	princíp rozptylu
1	4416.74	4416.74	3775.54	3454.41
2	5083.41	5083.41	4530.65	4174.35
3	6083.41	6083.41	5663.31	5272.42
4	7750.07	7750.07	7551.08	7150.96
5	11083.4	11083.4	11326.6	11089.7
6	21083.4	21083.4	22653.2	24358.6

Tabulka 4.2: Stanovené typy poistného Príklad 1.

Z tabuľky (4.2) vidíme, že poistné spočítané podľa rovnomernej a semi-uniformnej alokácie je v daných triedach totožné, čo je spôsobené v dôsledku voľby rovnakého počtu poistených v každej triede. Teda smerodatná odchýlka úhrnu škôd celého portfólia σ je pri rovnomernej alokácií rozdelená medzi všetkých poistencov ($n = 6000$). Pri semi-uniformnej alokácií zohľadňujeme počet poistených v jednotlivých triedach n_i a počet tried k. Pri tejto voľbe parametrov delíme smerodatnú odchýlku σ rovnakou hodnotou ako v uniformnej alokácii ($k * n_i = 6 * 1000 = 6000$).

Netto poistné na jednu zmluvu je potom dané rýzim poistným predstavujúce strednú hodnotu úhrnu škôd jednej zmluvy v triede i a bezpečnostnou prirážkou, ktorá pre obe alokácie predstavuje tu istú hodnotu v rámci všetkých tried. V rovnomernom a semi-uniformnom rozdelení je stanovené poistné pre prvé štyri triedy najvyššie.

Princíp rozptylu berie v úvahu veľkost rozptylu úhrnu škôd jednej zmluvy v i-tej triede σ_i a veľkosť celkového rozptylu úhrnu škôd portfólia, a teda aj veľkosti jednotlivých tried. Rozptyl σ_i pri znižovaní parametru γ_i rastie, čo sa prejaví postupným zvyšovaním bezpečnostnej prirážky, teda najnižším poistným v prvej triede a najvyšším poistným v poslednej triede.

Princíp strednej hodnoty zohľadňuje smerodatnú odchýlku úhrnu škôd celého portfólia σ a strednú hodnotu úhrnu škôd jednej zmluvy v i-tej triede μ_i a rozdelí ich medzi strednú hodnotu úhrnu škôd celého portfólia μ. S klesajúcim parametrom γ_i sa stredná hodnota μ_i zväčšuje, čo sa opät prejaví postupným zvyšovaním bezpečnostnej prirážky a v dôsledku toho aj celkového poistného. V porovnaní s princípom rozptylu je poistné vo všetkých prípadoch väčšie okrem poslednej šiestej triedy, kde rozptyl σ_i dosahuje najvyššiu hodnotu.

Cieľom je všimnúť si, že pri zvyšovaní parametru výšky škodných nárokov γ_i poistné v každej triede klesá a naopak, pri znižovaní parametru γ_i dostávame vyššie škodné nároky na zmluvu a poistné stúpa, čo predstavuje Zásadu (2).

Je zrejmé, že čím je úroveň rizika α väčšia, tým je hodnota $1-\alpha$ kvantilu štandardného normálneho rozdelenia menšia, z čoho vyplýva nižšia bezpečnostná prirážka a tým pádom aj nižšia sadzba poistného.

trieda i	n_i	váha r_i	poistné
1	1000	1/1000	3591.53
2	1000	1/1000	4258.2
3	1000	1/1000	5258.2
4	1000	1/1000	6924.87
5	1000	1/1000	10258.2
6	1000	1/1000	20258.2

Tabulka 4.3: Poistné podľa duálneho princípi Príklad 1.

Tabuľka (4.3) predstavuje poistné stanovené podľa duálneho princípu. Poistné závisí na μ_i, voľbe $\tilde{A}$ a n_i. V našom prípade sme vypočítali, že $\sum_{i=1}^{6} \frac{n_i \sigma_i}{r_i} = 5.96556 \times 10^{16}$ a za použitia predpokladu (4.5) volíme $\tilde{A} = 5.96556004 \times 10^{16}$. Z rovnice (4.4) potom dostávame, že $A = 4. \times 10^8$. V porovnaní s ostatnými metódami výpočtu poistného v tabuľke (4.2) dostávame pomocou duálneho princípu v tretej až šiestej triede najnižšie poistné. Vzhľadom k rovnakému počtu poistených n_i v každej triede i sú váhy r_i pre jednotlivé triedy totožné, a preto je bezpečnostná prirážka pre všetky triedy rovnaká. V tomto prípade $r_i\sqrt{\frac{A}{r}} = 258.2$.

Príklad 2. V ďalšom príklade opäť uvažujeme rovnaký počet tried ($k = 6$) a rovnaký počet poistených n_i v každej triede i. Parameter výšky škodných nárokov γ_i je pre každú triedu pevný. Budeme zvyšovať parameter počtu škôd λ_i a sledovať, ako táto zmena ovplyvní výšku poistného pre zmluvu v triede i. Informácie pre výpočet poistného nám poskytuje tabuľka (4.4). Vypočítané poistné podľa známych postupov obsahuje tabuľka (4.5).

trieda i	populácia n_i	λ_i	γ_i	μ_i	σ_i^2
1	1000	0.03	$1. \times 10^{-6}$	30000.	$6. \times 10^{10}$
2	1000	0.04	$1. \times 10^{-6}$	40000.	$8. \times 10^{10}$
3	1000	0.05	$1. \times 10^{-6}$	50000.	$1. \times 10^{11}$
4	1000	0.06	$1. \times 10^{-6}$	60000.	1.2×10^{11}
5	1000	0.07	$1. \times 10^{-6}$	70000.	1.4×10^{11}
6	1000	0.08	$1. \times 10^{-6}$	80000.	1.6×10^{11}

Tabulka 4.4: Základné informácie Príklad 2.

- Stredná hodnota úhrnu škôd celého portfólia: $\mu = 3.3 \times 10^8$.
- Smerodatná odchýlka úhrnu škôd celého portfólia: $\sigma = 2.56905 \times 10^7$.
- Celkový počet poistených v portfóliu: $n = \sum_{i=1}^{6} n_i = 6000$.
- Daná úroveň rizika: $\alpha = 0.2$.

trieda i	rovnomerná alokácia	semi-uniformná alokácia	princíp očakávania	princíp rozptylu
1	33603.6	33603.6	31965.6	31965.6
2	43603.6	43603.6	42620.8	42620.8
3	53603.6	53603.6	53276.	53276.
4	63603.6	63603.6	63931.2	63931.2
5	73603.6	73603.6	74586.4	74586.4
6	83603.6	83603.6	85241.6	85241.6

Tabulka 4.5: Stanovené typy poistného Príklad 2.

Z tabuľky (4.5) vidíme, že rovnomerná alokácia sa zhoduje so semi-uniformnou alokáciou, čo je opäť spôsobené rovnakým počtom poistencov n_i v každej triede i (tak ako v Príklade(1)). Obe alokácie nám dávajú v prvej a druhej triede najvyššie poistné.
Všimnime si, že pri tejto voľbe parametrov sa poistné podľa princípu očakávania taktiež zhoduje s poistným podľa princípu rozptylu. V prvej až tretej triede je podľa princípov poistné najnižšie. S rastúcim parametrom λ_i sa zvyšuje stredná hodnota μ_i aj rozptyl σ_i a poistné v konečnom dôsledku rastie.
Zvyšovaním parametru počtu škôd λ_i zvyšujeme počet škôd, čím sa zväčšuje celkový úhrn škod, a teda poistné sa v konečnom dôsledku zvyšuje.

trieda i	n_i	váha r_i	poistné
1	1000	1/1000	30816.5
2	1000	1/1000	40816.5
3	1000	1/1000	50816.5
4	1000	1/1000	60816.5
5	1000	1/1000	70816.5
6	1000	1/1000	80816.5

Tabulka 4.6: Poistné podľa duálneho princípi Príklad 2.

Opäť porovnáme s duálnym princípom, ktorý je obsiahnutý v tabuľke (4.6). Výpočítali sme hodnotu $\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i\sigma_i^2}{r_i} = 6.6 \times 10^{17}$ a za predpokladu (4.5) volíme $\tilde{A} = 6.60000004 \times 10^{17}$. Z rovnice pre A (4.4) máme $A = 4. \times 10^9$. Pre všetky triedy je poistné podľa duálneho princípu najnižšie. Opäť ako v Príklade (1) rovnaký počet poistených n_i v každej triede i spôsobí rovnakú bezpečnostnú prirážku pre každú triedu. V tomto prípade $r_i\sqrt{\frac{A}{r}} = 816.5$.

Príklad 3. V tomto príklade si ukážeme stanovenie poistného pri rôznych parametroch λ_i a γ_i a pri rôznom počte poistených n_i v každej triede i. Kedže sme doteraz uvažovali n_i pevné, budeme tak mocť pozorovať rozdiely v metódach, ktoré pri výpočte berú v úvahu veľkosť triedy n_i. Tabuľka (4.7) poskytuje základne údaje pre výpočet poistného.V tabuľke (4.8) nájdeme jednotlivé typy poistného.

trieda i	populácia n_i	λ_i	γ_i	μ_i	σ_i^2
1	15000	0.01	$3. \times 10^{-6}$	3333.333	2.22222×10^9
2	18000	0.03	$6. \times 10^{-6}$	5000.	1.66667×10^9
3	8000	0.03	$4. \times 10^{-6}$	7500.	3.75×10^9
4	20000	0.05	$5. \times 10^{-6}$	10000.	$4. \times 10^9$
5	27000	0.08	$4. \times 10^{-6}$	20000.	$1. \times 10^{10}$
6	40000	0.04	$1. \times 10^{-6}$	40000.	$8. \times 10^{10}$

Tabulka 4.7: Základné informácie Príklad 3.

- Stredná hodnota úhrnu škôd celého portfólia: $\mu = 2.54 \times 10^9$.
- Smerodatná odchýlka úhrnu škôd celého portfólia: $\sigma = 6.036 \times 10^7$.
- Celkový počet poistených v portfóliu: $n = \sum_{i=1}^{6} n_i = 128000$.
- Daná úroveň rizika: $\alpha = 0.2$.

trieda i	rovnomerná alokácia	semi-uniformná alokácia	princíp očakávania	princíp rozptylu
1	3730.21	3897.78	3400.	3364.32
2	5396.88	5470.37	5100.	5023.24
3	7896.88	8558.34	7650.	7552.29
4	10396.9	10423.3	10200.	10055.8
5	20396.9	20313.6	20400.	20139.4
6	40396.9	40211.7	40800.	41115.5

Tabulka 4.8: Stanovené typy poistného Príklad 3.

Z tabuľky (4.8) vidíme, že poistné v prvej až štvrtej triede je podľa rovnomernej alokácie nižšie v porovnaní so semi-uniformnou alokáciou. Rovnomerné rozdelenie neberie v úvahu počet poistených n_i v triede i. Smerodatná odchýlka sa delí medzi celkový počet poistených n, čo spôsobilo, že poistné je nižšie v prvých štyroch prípadoch ako pri semi-uniformnej alokácií. Pri semi-uniformnej alokácií sa smerodatná odchýlka delí rovnomerne medzi triedy, t.j. medzi hodnotu $k * n_i$, kde táto hodnota prevýšila hodnotu n v posledných dvoch triedach.
V prvej až piatej triede je najnižšie poistné podľa princípu rozptylu. V poslednej šiestej triede je poistné podľa tohoto princípu najvyššie.
Poistné je podľa princípu očakávania v porovnaní s princípom rozptylu vo všetkých triedach, okrem šiestej, vyššie.

trieda i	n_i	váha r_i	duálny princíp
1	15000	1/15000	3555.78
2	18000	1/18000	5185.38
3	8000	1/8000	7917.1
4	20000	1/20000	10166.8
5	27000	1/27000	20123.6
6	40000	1/40000	40083.4

Tabulka 4.9: Poistné podľa duálneho princípu Príklad 3.

Tabuľka (4.9) ukazuje poistné vypočítané podľa duálneho princípu. Výpočítali sme hodnotu $\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i \sigma_i^2}{r_i} = 1.3817 \times 10^{20}$ a za predpokladu (4.5) volíme $\tilde{A} = 1.38170000004 \times 10^{20}$. Použitím rovnice pre A (4.4) máme $A = 4. \times 10^9$. Pre posledné dve triedy je poistné podľa duálneho princípu v porovnaní s metódami, ktoré poskytuje tabuľka (4.8) najnižšie. Váhy r_i v týchto dvoch prípadoch majú najmenšie hodnoty, čo sa odrazí na nižšej bezpečnostnej prirážke v porovnaní s ostatnými triedami. Možeme teda usúdiť, že čím väčšie sú váhy r_i, ktoré závisia na počte poistených v jednotlivých triedach n_i, tým väčšia je bezpečnostná prirážka, a teda v konečnom dôsledku sa navyšuje aj poistné.

Záver

V práci sme sa zaoberali základnými metódami tvorby sadzieb neživotného poistenia. Pracovali sme s rizikovo heterogénnym portfóliom. V teoretickej časti sme uviedli základy teórie potrebnej na vyriešenie optimalizačného problému. Kládli sme dôraz na dve hlavné zásady, ktoré boli dodržané. Sformulovali sme dôležité tvrdenia a v nich zaviedli minimalizačné úlohy a ich optimálne riešenia, ktoré boli odvodené a dokázané. Z optimálneho riešenia sme vyjadrili základné princípy pre výpočet poistného.
Druhá časť práce bola venovaná numerickej štúdií, kde sme aplikovali nadobudnuté teoretické poznatky. Pre úhrn škôd na zmluve prislúchajucej do určitej rizikovej triedy portfólia sme volili zložené Poissonovo rozdelenie. Vypočítali sme momenty, ktoré boli potrebné pre výpočet poistného. Porovnávali sme päť rôznych metód výpočtu poistného a volili parametre tak, aby bolo viditeľné ako táto voľba ovplyvní výšku poistného v daných triedach.

Zoznam použitej literatúry

BAPTISTE, J., URRUTY, H. a LEMARECHAL, C. (1993). *Convex analysis and minimization algorithms*. I. Springer-Verlag, Germany.

BOWERS, N., GERBER, H., HICKMAN, J., JONES, D. a NESBIT, C. (1997). *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries, U.S.A.

DUPAČOVÁ, J. a LACHOUT, P. (2011). *Úvod do optimalizace*. Matfyzpress, Praha. ISBN 978-80-7378-176-7.

MANDL, P. a MAZUROVÁ, L. (1999). *Matematické základy neživotního pojištění*. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-85863-42-1.

ZAKS, Y., FROSTIG, E. a LEVIKSON, B. (2006). Optimal pricing of a heterogeneous portfolio for a given risk level. *Astin Bulletin*, pages 161–185.

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek