Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michal Korbel

Rozdělení s těžkými chvosty a finanční aplikace

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	prof. Lev Klebanov, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2014

Na tomto místě bych rád poděkoval panu profesorovi Klebanovovi, DrSc. za jeho vedení při vytváření této práce. Dále bych rád poděkoval panu magistru Janovi Vraštilovi za jeho pomoc při opravách textu. Závěrem bych rád poděkoval své rodině za jejich neotřesitelnou podporu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Název práce: Distribuce s těžkými chvosty a finanční aplikace

Autor: Michal Korbel

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. Lev Klebanov, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt:
V této práci popíšeme rozdělení s těžkými chvosty a ukážeme nutné a postačující podmínky pro jejich existenci. Zabýváme se náhodným součinem náhodných veličin a jejich konvergencí k Paretovu rozdělení a uvádíme grafy podporující toto tvrzení. Dále definujeme stabilní rozdělení a ukážeme jejich užití pro aproximaci náhodného součtu náhodných proměnných. Také zavedeme Gaussovké a nekonečně dělitelné náhodné veličiny a ukážeme podmínky pro jejich existenci. Ukážeme, že jediná geometricky stabilní rozdělení musí být striktně geometricky stabilní nebo nepravá. Nakonec se věnujeme aplikacím stabilních rozdělení ve finančních výpočtech a ukážeme použití pro výpočet Value at Risk.

Klíčová slova: Těžké chvosty, stabilní rozdělení, geometricky stabilní, náhodné součty, náhodné součiny.

Title: Heavy tailed distributions and their applications to finance

Author: Michal Korbel

Department: Department Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. Lev Klebanov, DrSc., Department Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract:
In this work we describe heavy tailed distributions. We show conditions necessary and sufficient for their existence. First we study the product of random number of random variables and their convergence to the Pareto distribution. We also show graphs that concur this theorem. Next we define stable distributions and we study their usefulness for approximating of sum of random number of random variables. We also define Gauss and infinitely divisible random variables and we show conditions for their existence. We also show that the only geometric stable distribution following the stable law are strictly geometric stable or improper geometric stable distributions. In the end we study applications of stable distributions in finance and we show example for their usage in computing VaR.

Keywords: Heavy tailes, stable cistribution, geometric stable, random summation, random multiplication

Obsah

Úvod

V poslední době se ukazují další a další možnosti pro využití stochastických modelů obsahujících distribuce s těžkými chvosty. Data, která je vykazují, se objevují i v takových oborech jako je telekomunikace a biologie, mimo obvyklých jako je fyzika a ekonomie. Především se dostávají do popředí stabilní rozdělení, jelikož kdysi komplikovaná práce s nimi je dnes zjednodušena lepšími výpočetními možnostmi.

V kapitole 1 se věnujeme především Paretovu rozdělení, jako zástupci rozdělení s těžkým chvosty, které není stabilní. Ukážeme jeho využití pro počítání náhodných součinů náhodných nezávislých proměnných a na grafech ukážeme platnost těchto tvrzení. Navíc uvedeme přímou aplikaci těchto skutečností v ekonomickém modelu.

Kapitola 2 je o stabilních rozděleních. Uvedeme několik různých definic stabilních a striktně stabilních rozdělení a budeme se věnovat jejich ekvivalenci. Také ukážeme nutné a postačující podmínky pro jejich existenci. Dále ukážeme vlastnosti, které umožňují pracovat se stabilními rozděleními na podobných principech jako dosud více využívaných normálních rozdělení. Ukážeme jakým způsobem se dají stabilní rozdělení využít při počítání náhodných součtů náhodných nezávislých proměnných, především uvedeme Větu o převodu a ukážeme důsledky této věty. Také se věnujeme analogiím stabilních rozdělení, $\nu-$Gaussovské náhodné veličiny a nekonečně dělitelné náhodné veličiny. Ukážeme, jaké podmínky jsou nutné a postačující pro jejich existenci. Také dokážeme, pro jaké množiny $\{\nu_p,\ p \in (0,1)\}$ existují $\nu-$Gaussovské náhodné veličiny.

V kapitole 3 se poté věnujeme jednomu typu $\nu-$Gaussovských veličin, kde ν má geometrické rozdělení. Ukážeme, kdy pro tyto veličiny platí konvergence v distribuci a kdy rovnost v distribuci. Také ukážeme, jakých tvarů musí být jejich charakteristické funkce.

Kapitola 4 je věnována debatě o možnostech využití stabilních rozděleních ve financích a důvodech, které je upřednostňují před ostatními rozděleními. Také ukážeme přímou aplikaci na výpočet Value at Risk.

Kapitola 1

Rozdělení s těžkými chvosty

Nejdříve definujeme rozdělení s těžkými chvosty a ukážeme několik příkladů.

1.1 Definice

Definice 1. *Řekneme, že náhodná veličina* X *má rozdělení s těžkými chvosty, pokud* $Var\ X = \infty$.

1.2 Paretovo rozdělení

Paretovo rozdělení má distribuční funkci

$$F(x;a,\alpha) = \begin{cases} 1 - (\frac{a}{x})^{\alpha}, & \text{je-li } x > a, \\ 0, & \text{je-li } x \leq a. \end{cases} \tag{1.1}$$

s parametry $a > 0$, $\alpha > 0$. Pokud je $\alpha < 2$ Paretovo rozdělení má nekonečný rozptyl a tedy těžké chvosty. Standardní Paretovo rozdělení je takové, kde se za parametr a bere 1, tedy $F(x;\alpha) = F(x,1,\alpha)$ a hustota je

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}, & \text{je-li } x > 1, \\ 0, & \text{je-li } x \leq 1. \end{cases}$$

1.2.1 Náhodný součin náhodných veličin

Nechť $X_1, X_2 \ldots X_n$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s kladnými hodnotami. Předpokládejme, že ν_p má geometrické rozdělení s parametrem $p \in (0,1)$. Nechť je ν_p náhodná veličina nezávislá na posloupnosti $X_1, X_2 \ldots X_n$. Vezmeme-li si $\prod_{j=1}^{\nu_p} X_j^p$, dokážeme, že nabývá asymptoticky Paretova rozdělení.

Věta 1 (Klebanov (2003), str. 6)**.** *Vezměme si výše definované náhodné veličiny* $X_1, X_2, \ldots, \nu_p$*. Dále předpokládáme, že existuje první logaritmický moment n.v.* X_1 *a*

$$\mathbb{E} \log X_1 = \gamma \neq 0.$$

Označme

$$Z_p = \prod_{j=1}^{n} X_j^p$$

Potom má náhodná veličina Z_p limitní rozdělení

$$F(x) = \lim_{p\to 0} \mathbb{P}\{Z_p < x\},$$

kde

$$F(x) = \begin{cases} 1 - x^{-1/\gamma} & \textit{pro } x > 1, \\ 0, & \textit{pro } x \leq 1, \end{cases} \tag{1.2}$$

v případě, že $\gamma > 0$, a

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{pro } x \leq 0, \\ x^{-1/\gamma} & \textit{pro } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \textit{pro } x > 1, \end{cases} \tag{1.3}$$

v případě, že $\gamma < 0$.

Důkaz. Označme

$$S_p = \log Z_p = p \sum_{j=1}^{\nu_p} \log X_j$$

$$Y_j = \log X_j$$

tedy

$$S_p = p \sum_{j=1}^{\nu_p} Y_j.$$

Charakteristickou funkcí S_p je

$$f_{S_p}(t) = \mathbb{E}e^{itS_p} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}e^{ipt\sum_{j=1}^{k} Y_j} \mathbb{P}\{\nu_p = k\} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} f_{Y_1}^k(pt)p(1-p)^{k-1} = \frac{pf_{Y_1}(pt)}{1-(1-p)f_{Y_1}(pt)}.$$

Přičemž

$$f_{Y_1} = 1 + \mu_1 ipt + o(pt) \text{ pro } p \to 0,$$

kde

$$\mu_1 = \mathbb{E}Y_1 = \mathbb{E}\log X_1 = \gamma.$$

Tedy

$$f_{Y_1}(pt) = 1 + \gamma ipt + o(pt) \text{ pro } p \to 0,$$

a

$$f_{S_p}(t) = \frac{pf_{Y_1}(pt)}{1-(1-p)f_{Y_1}(pt)} =$$
$$= \frac{1}{1 - i\gamma t + o(1)},$$

a z toho

$$\lim_{p\to 0} f_{S_p}(t) = \frac{1}{1-i\gamma t}. \tag{1.4}$$

V případě, kdy je $\gamma > 0$, pak je výraz z (1.4) charakteristickou funkcí exponenciálního rozdělení s hustotou

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma}e^{-x/\gamma} & \text{pro } x \geq 0, \\ 0 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

V případě $\gamma < 0$ je hustota limitního rozdělení

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\gamma|}e^{-x/\gamma} & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

Pro dokončení důkazu nám stačí pozorování, že $F(x) = G(\log x)$.

❑

Důkaz. Důkaz předchozí Věty 1 se dá provést i alternativně pomocí Mellinovy transformace:

$$M\{x\}(t) = \int_0^\infty x^t \mathrm{d}F(x) = \mathbb{E}x^t.$$

Provedením Mellinovy transformace na Z_p, dostáváme

$$M\{Z_p\}(t) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\prod_{j=1}^{\nu_p} X_j^{pt}|\nu_p = k)\right).$$

S využitím vzájemné nezávislosti X_j a vlastnosti Mellinovy transformace

$$M\{XY\}(t) = M\{X\}(t) \cdot M\{Y\}(t)$$

dostáváme

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(\prod_{j=1}^{\nu_p} X_j^{pt}|\nu_p = k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} M\{X_1\}(pt)p(1-p)^{k-1} = \frac{pM\{X_1\}(pt)}{1-(1-p)M\{X_1\}(pt)}.$$

Dosadíme $M\{X_1\}(pt) = \mathbb{E}X_1^{pt}$ a provedeme limitní přechod

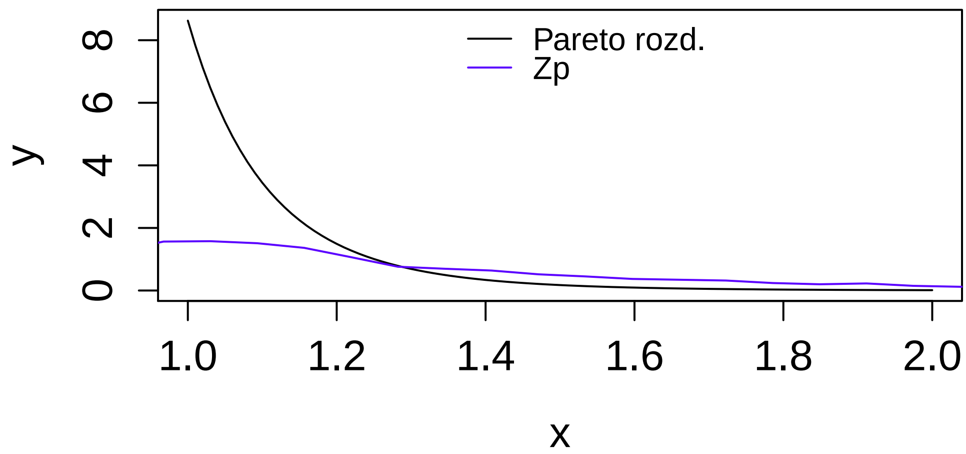
$$\lim_{p\to 0} M\{Z_p\}(t) = \lim_{p\to 0} \frac{p\mathbb{E}X_1^{pt}}{1-(1-p)\mathbb{E}X_1^{pt}} = \frac{1}{1-t\mathbb{E}\log X_1} = \frac{1}{1-t\gamma},$$

kde jsem využili předpokladu $\mathbb{E}\log X_1 = \gamma \neq 0$. Použitím inverzní formule Mellinovy transformace, která má obecný tvar

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M\{x\}(t)x^{-t}\mathrm{d}t,$$

dostaneme distribuční funkci rozdělení Z_p

$$F(x) = \begin{cases} 1 - x^{-1/\gamma} & \text{pro } x > 1, \\ 0 & \text{pro } x \leq 1, \end{cases}$$



Obrázek 1.1: Hustota Paretova rozdělení (černě) a hustota rozdělení Z_p pro $p = 0.1$ (modře)

když je $\gamma > 0$, a

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0, \\ x^{-1/\gamma} & \text{pro } x \leq 1, \\ 1 & \text{pro } x > 1, \end{cases}$$

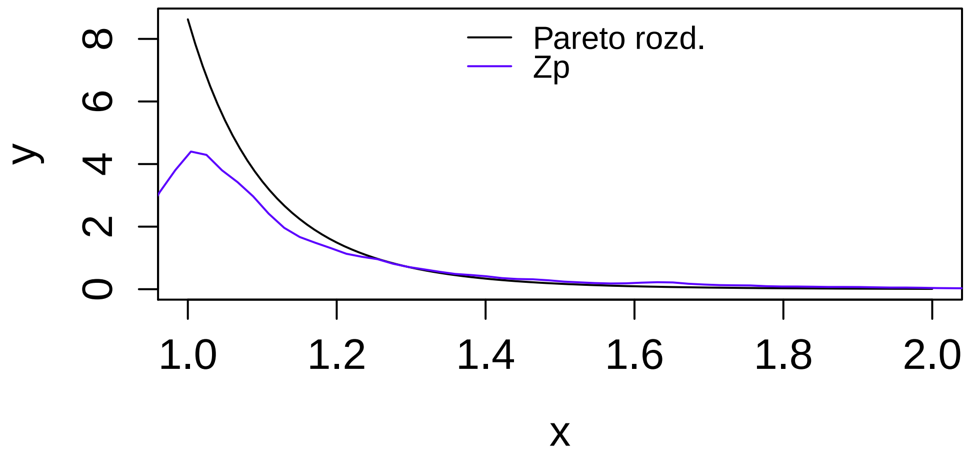
když $\gamma < 0$.

❏

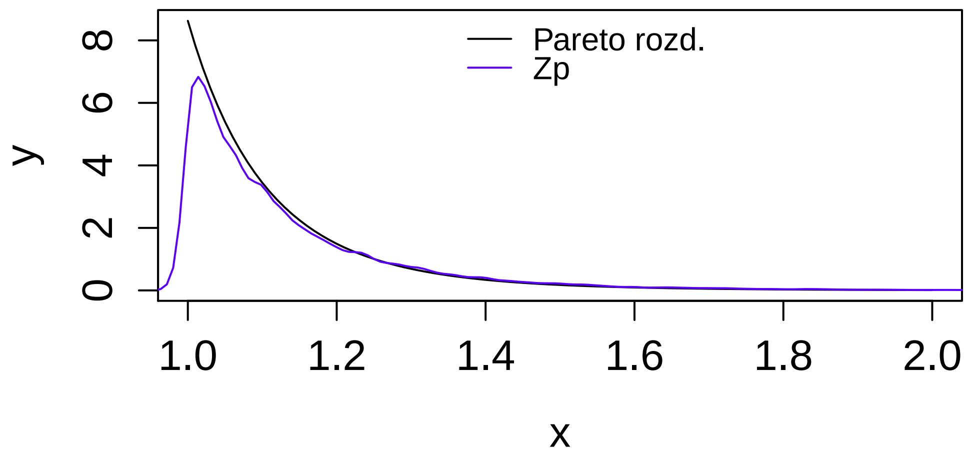
Příklad. Podívejme se na rychlost konvergence rozdělení Z_p k Paretovu rozdělení. Mějme třicet tisíc měření X_i, které mají exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda = 2$. Dále mějme deset tisíc dat ν_p, pro každé jednotlivé p. Z těchto dat spočtěme deset tisíc hodnot Z_p. Tento proces opakujme stokrát a dostaneme milion hodnot Z_p ze sta sad dat pro každé p. $\mathbb{E} \log X_i = 0.115932$ pro X_i z Exp(2), proto bude mít podle Věty 1 Paretovo rozdělení hustotu

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{0.115932} x^{-1-\frac{1}{0.115932}} & \text{pro } x > 1, \\ 0 & \text{pro } x \leq 1. \end{cases}$$

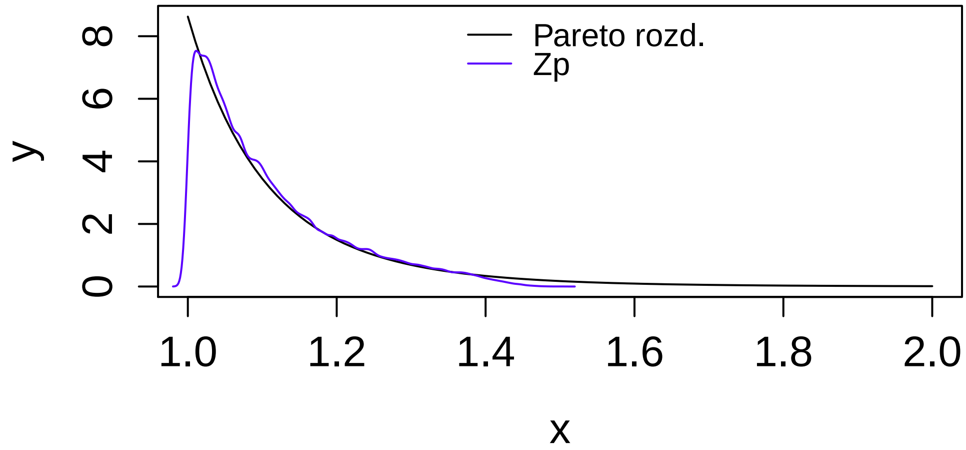
Na Obrázku 1.1 je vidět, že pro p dále od nuly je hustota Z_p od Paretova dosti rozdílná. Už však pro hodnotu $p = 0.01$ je odhad pomocí Paretova rozdělení daleko přesnější jak ukazuje Obrázek 1.2. Důležitý je fakt, že zatímco v centrální části jsou stále větší odchylky, na chvostech už i pro tyto větší hodnoty p hustoty téměř splývají. Na Obrázku 1.3 je vidět, že odchylky v centrální části se pro menší p vyrovnávají a jak ukazuje Obrázek 1.4 již pro $p = 0.0001$ je hustota Paretova rozdělení velmi blízká hustotě rozdělení naměřených Z_p.



Obrázek 1.2: Hustota Paretova rozdělení (černě) a hustota rozdělení Z_p pro $p = 0.01$ (modře)



Obrázek 1.3: Hustota Paretova rozdělení (černě) a hustota rozdělení Z_p pro $p = 0.001$ (modře)



Obrázek 1.4: Hustota Paretova rozdělení (černě) a hustota rozdělení Z_p pro $p = 0.0001$ (modře)

1.2.2 Ekonomická aplikace

Věta 1 se dá využít v ekonomii i následujícím případem. Představme si investici, do které v počátečním čase $t = 0$ vložíme základní kapitál a v čase $t = 1$ máme kapitál X_1. Náhodná veličina X_1 má rozdělení závislé na trhu a předpokládáme, že jeho stav zůstává po celou dobu trvání invariantní. Jestliže ponecháme celou sumu X_1 v oběhu, v čase $t = 2$ bude současný kapitál roven $X_1 \cdot X_2$, přičemž X_2 je nezávislý na X_1 a má stejné rozdělení jako X_1 při předpokládaném trhu. Stejným postupem se dostaneme k tomu, že v čase n bude kapitál roven $\prod_{j=1}^{n} X_j$, kde $X_1 \dots X_n$ jsou stejně rozdělené náhodné veličiny. Z ekonomického hlediska vyplývá, že $X_j > 0, j = 1, \dots, n$. Předpokládejme nyní, že se může stát taková událost, která znemožní všechny další možné zisky. Předpokládejme, že tato událost může nastat v každém čase k se stejnou pravděpodobností p, kde $p \in (0,1)$. Potom doba, do které se tato událost stane, je náhodná veličina ν_p, která má geometrické rozdělení

$$\mathbb{P}\{\nu_p = k\} = p(1-p)^{k-1}, k = 1,2,\dots.$$

Suma kapitálu do události je tedy $\prod_{j=1}^{\nu_p} X_j$. Průměrný čas, který uplyne než se stane tato převratná událost je $\mathbb{E}\nu_p = 1/p$. Z toho plyne, že průměrná suma kapitálu, shromážděného do doby události bude

$$Z_p = \left(\prod_{j=1}^{\nu_p} X_j \right)^p.$$

Čím vzácnější je tato událost, tím menší bude p, přičemž p je stále větší než nula. Tedy z Věty 1 plyne, že pro $\gamma \neq 0$ má Z_p asymptoticky stejnou distribuční funkci jako Paretovo rozdělení. Navíc z ní vyplývá, že pokud je $\gamma > 0$, pak je investice výdělečná, a pokud je $\gamma < 0$, pak je investice ztrátová.

Kapitola 2

Stabilní rozdělení

2.1 Striktně stabilní rozdělení

Definice 2. *Nechť jsou X_1, X_2 nezávislé stejně rozdělené (nenulové) náhodné veličiny. Řekneme, že X_1 má striktně stabilní rozdělení, jestliže pro libovolná a_1,$a_2 > 0$ existuje $b > 0$ takové, že*

$$bX_1 \stackrel{d}{=} a_1X_1 + a_2X_2 \tag{2.1}$$

kde $\stackrel{d}{=}$ značí rovnost v distribuci.

Dále uvedeme ještě jednu definici striktně stabilního rozdělení a později ukážeme jejich ekvivalenci.

Definice 3. *Nechť jsou $X, X_1, \dots, X_n, \dots$ posloupnost nezávislých stejně rozdělených nedegenerovaných náhodných veličin. Předpokládejme, že pro všechna $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ existují reálná $a_n > 0 (a_n \neq 1)$ taková, že*

$$X \stackrel{d}{=} a_n \sum_{j=1}^{n} X_j. \tag{2.2}$$

Pak řekneme, že X má striktně stabilní rozdělení.

Pokud náhodná veličina splňuje (2.1), pak kvůli indukci nutně splňuje i (2.2), tedy tato implikace je dokázána. Druhá implikace se dokáže pomocí charakteristických funkcí. Z Definice 2 se vytvoří podmínky pro charakteristické funkce striktně stabilního rozdělení, které shrnuje následující věta.

Věta 2 (Klebanov (2003), str. 15)**.** *Charakteristická funkce f je striktně stabilní právě tehdy, když splňuje jednu z následujících podmínek:*
1. je charakteristickou funkcí normálního rozdělení s nulovou střední hodnotou
2. její logaritmus má tvar

$$\log f(t) = -\lambda |t|^{\alpha} \left(1 + i\beta \cdot \tan \frac{\pi\alpha}{2} \cdot \operatorname{sign} t\right), \tag{2.3}$$

pro $\alpha \neq 1$ $\alpha < 2$, kde $\lambda > 0, |\beta| \leq 1$.
3. její logaritmus má tvar

$$\log f(t) = -\lambda|t| + iat, \tag{2.4}$$

kde $\lambda > 0$ a libovolné $a \in \mathbb{R}^1$.

Důkaz. Důkaz této věty uvádí například Klebanov (2003), a pro jeho relativní zdlouhavost ho zde neuvádím.

❑

Z Věty 2 se dá snadno dopočítat, že rozdělení s těmito char. funkcemi budou splňovat Definici 3.

2.2 Stabilní rozdělení

Definice 4 (Samorodnitsky a Taqqu (2000), str. 2)**.** *Řekneme, že náhodná veličina X má stabilní rozdělení, pokud pro libovolná $a,b > 0$ existuje $c > 0$ a reálné d takové, že*

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d, \tag{2.5}$$

kde X_1 a X_2 jsou nezávislé kopie X, a kde $\stackrel{d}{=}$ značí rovnost v distribuci.

I pro stabilní rozdělení existuje několik ekvivalentních definic, proto uvedeme alespoň ještě jednu.

Definice 5. *Náhodná veličina X má stabilní rozdělení, jestliže pro každé $n \geq 2$ existuje $C_n > 0$ a reálné číslo D_n, takové, že*

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} C_nX + D_n, \tag{2.6}$$

kde $X_1,X_2 \ldots ,X_n$ jsou nezávislé kopie X.

I pro charakteristické funkce stabilních rozdělení máme podobné podmínky jako pro striktně stabilní a ty uvádí následující věta.

Věta 3 (Klebanov (2003), str. 20)**.** *Náhodná veličina X má stabilní rozdělení právě tehdy, když char. funkce X má tvar*

$$f(t) = \exp\{i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha [1 + i\beta \text{sign } t \cdot \omega(t,\alpha)]\} \tag{2.7}$$

kde

$$\omega(t,\alpha) = \begin{cases} \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \textit{pro } \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} \log |t| & \textit{pro } \alpha = 1. \end{cases} \tag{2.8}$$

Parametr α se nazývá index stability. Parametry σ, β a μ jsou jednoznačné pro každou distribuci, přičemž β je irelevantní, pokud se $\alpha = 2$. Parametr σ nazveme parametrem poměru, μ parametrem posunu a β parametrem křivosti.
Stabilní distribuci s parametry $\alpha \in (0,2], \sigma \geq 0, \beta \in [-1,1], \mu \in \mathbb{R}^1$ označme jako $S_\alpha(\sigma,\beta\mu)$. Označení $X \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$ znamená, že X má stabilní rozdělení $S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$.

Příklad.
1. Normální rozdělení $N(\mu,2\sigma^2)$ je rovno $S_2(\sigma,0,\mu)$

2. Cauchyho rozdělení s distribuční funkcí

$$\frac{\sigma}{\pi((x-\mu)^2+\sigma^2)} \tag{2.9}$$

   je rovno $S_1(\sigma,0,\mu)$.

Věta 4 (Součet n.v. se stabilním rozdělením (Samorodnitsky a Taqqu, 2000), str. 10). *Nechť* X_1 *a* X_2 *jsou nezávislé n.v. a* $X_i \sim S_\alpha(\sigma_i,\beta_1,\mu_1)$ *pro* $i = 1,2$. *Pak platí* $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$*, kde*

$$\sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{1/\alpha},$$
$$\beta = \frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha},$$
$$\mu = \mu_1 + \mu_2.$$

Důkaz věty se provádí přes charakteristické funkce, a uvádějí ho například Samorodnitsky a Taqqu (2000).

Věta 5 (Vlatnosti n.v. se stabilním rozdělením). *Nechť* $X \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$
1) Nechť a je reálná konstanta, pak $X + a \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu + a)$
2) Nechť a je nenulová reálná konstanta, pak

$$aX \sim \begin{cases} S_\alpha(|a|\sigma,\text{sign}(a)\beta,a\mu) & \textit{pro } \alpha \neq 1, \\ S_\alpha(|a|\sigma,\text{sign}(a)\beta,a\mu - \frac{2}{\pi}a(\log|a|)\sigma\beta) & \textit{pro } \alpha = 1. \end{cases} \tag{2.10}$$

3) Pro všechna $0 < \alpha < 2$,

$$X \sim S_\alpha(\sigma,\beta,0) \Leftrightarrow -X \sim S_\alpha(\sigma,-\beta,0)$$

4) X je symetrické kolem μ *právě tehdy, když* $\beta = 0$*, a kolem* 0 *právě tehdy, když* $\beta = 0$ *a* $\mu = 0$.
5) X je striktně stabilní právě tehdy, když $\mu = 0$.

Důkazy těchto tvrzení ukazují např. Samorodnitsky a Taqqu (2000) na stranách 11-12.

2.3 Náhodná stabilita

Nyní se zaměříme na problém rozdělení součtu náhodného počtu náhodných proměnných. Nejčastěji využívanou je Centrální limitní věta (viz. např. Anděl (2011), str. 331), která se dá však využít pouze pokud mají jednotlivé sčítance konečný rozptyl. V případě, že sčítáme náhodné veličiny s rozdělením s těžkými chvosty, poté součet nemůže konvergovat k normálnímu rozdělení, ale k nějakému jinému stabilnímu neGaussovkému rozdělení. Další problém nastává v momentě, kdy je počet sčítanců náhodný a jejich počet nekonverguje k nekonečnu. Potom, i když jsou nezávislé a mají normální rozdělení, nemusí nutně jejich součet mít normální rozdělení.Tento problém se dá popsat následujícím způsobem. Máme posloupnost náhodných veličin $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ a známe asymptotické rozdělení součtu $\sum_{j=1}^n \xi_j$ pro $n \to \infty$. Předpokládejme, že máme další posloupnost náhodných veličin s hodnotami v celých číslech ν_k nezávislých na ξ_j pro všechna j. Přitom se zajímáme o asymptotické chování $\sum_{j=1}^{\nu_k} \xi_j$. Tím se zabývali např. Dobrushin (1955) a Rényi (1976). Velkým pokrokem kupředu byla Věta o převodu, která tímto krokem

$$\frac{1}{n^a}\sum_{j=1}^{\nu_n} \xi_j = \frac{\nu_n^a}{n^a}\frac{1}{\nu_n^a}n^a\sum_{j=1}^{\nu_n} \xi_j$$

převede celý problém na kombinaci použití centrální limitní věty na $\frac{1}{\nu_n^a}n^a\sum_{j=1}^{\nu_n}\xi_j$ a limitu v distribuci $\frac{\nu_n^a}{n^a}$.

Věta 6 (Věta o převodu, Gnedenko (1983)). *Mějme dvojitou posloupnost $\{\xi_{n,k}\}$ náhodných veličin, které mají pro každé n stejné rozdělení a jsou nezávislé. Nechť je $\{k_n\}$ rostoucí posloupnost kladných celých čísel a nechť $\{\nu_n\}$ je posloupnost náhodných veličin nabývajících kladných celých hodnot. Předpokládejme, že pro všechna n n.v. ν_n jsou nezávislé na posloupnosti $\xi_{n.k}, k = 1,2,\ldots$. Označme*

$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{n,k}$$

a

$$S_{\nu_n} = \sum_{k=1}^{\nu_n} \xi_{n,k}$$

Jestliže pro $n \to \infty$

$$1)\ \mathbb{P}\{S_n < x\} \to \mathbf{\Phi}(x),$$
$$2)\ \mathbb{P}\{\frac{\nu_n}{k_n} < x\} \to A(x),\ A(+0) = 0,$$

potom

$$\mathbb{P}\{S_{\nu_n} < x\} \to \mathbf{\Psi}(x),$$

kde distribuční funkce $\mathbf{\Psi}(x)$ odpovídá charakteristické funkci

$$\psi(t) = \int_0^\infty \varphi^z(t)\mathrm{d}A(z)$$

a $\varphi(t)$ je charakteristockou funkcí $\mathbf{\Phi}(x)$.

Důkaz. Označme

$$F_n(x) = \mathbb{P}\{\xi_{n,k} < x\}, \quad f_n(t) = \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\mathrm{d}F_n(x)$$

Charakteristická funkce sumy S_{ν_n} je

$$\psi_n(t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{nj} f_n^j(t),$$

kde $p_{nj} = \mathbb{P}\{\nu_n = j\}$. Položme $A_n(x) = \mathbb{P}\{\nu_n < x\}$. Potom zřejmě

$$\psi_n(t) = \int_0^\infty f_n^x(t)\mathrm{d}A_n(x).$$

Označme $\bar{A}_n(x) = \mathbb{P}\{\nu_n/k_n < x\} = A_n(k_n,x)$. Potom

$$\psi_n(t) = \int_0^\infty (f_n^{k_n}(t))^x \mathrm{d}A_n(x).$$

Dubrovskii (1945) ukázal, že pokud posloupnost stejně omezených funkcích $f_n(x)$ konverguje na všech reálných číslech k funkci $f(x)$, a monotónní funkce $A_n(x)$ konvergují pro všechna x k funkci $A(x)$, potom

$$\int_0^\infty f_n(x)\mathrm{d}A_n(x) \to \int_0^\infty f(x)\mathrm{d}A(x) \quad \text{pro } n \to \infty$$

Z tohoto výsledku a podmínek 1) a 2) dostáváme

$$\psi_n(t) \to \psi(t) = \int_0^\infty \varphi^x(t) \mathrm{d}A(x).$$

❑

Nyní uvedeme několik pozorování vyplývajících z této věty.

1. Nechť $S_{k_n} = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{n,k}$ a $S_{\nu_n} = \sum_{k=1}^{\nu_n} \xi_{n,k}$. Když $S_{k_n} \xrightarrow{d} 0$ pro $n \to \infty$, pak také $S_{\nu_n} \xrightarrow{d} 0$ pro $n \to \infty$.

2. Jestliže $\nu_n/k_n \xrightarrow{d} 1$ (tedy $A(x) = 0$ pro $x < 1$ a $A(x) = 1$ pro $x \geq 1$), potom jsou limitní distribuce S_{ν_n} a S_{k_n} shodné.

3. S_{ν_n} konverguje k normálnímu rozdělení právě tehdy, když S_{k_n} konverguje k normálnímu rozdělení a ν_n/k_n konverguje k degenerovanému rozdělení ((Gnedenko, 1983)). Z toho vyplývá, že normální rozdělení se pro sčítání náhodného počtu náhodných veličin dá využít jen ve speciálních případech.

4. Předpokládejme, že

$$k_n = n, \quad \xi_{n,k} = (\xi_k - a_n)/b_n, \quad b_n > 0, \quad a_n \in \mathbb{R},$$

kde ξ_k jsou stejně rozdělené nezávislé proměnné. Potom je známo, že limitní distribuce $\mathbf{\Phi}(x)$ nenáhodného součtu bude spadat do třídy stabilních rozdělení (Feller, 1971). Jelikož jsou známe podmínky konvergence pro $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_{nk}$ k určitému stabilnímu rozdělení, Věta o převodu nám říká, že ty samé podmínky jdou postačující pro konvergenci náhodného součtu S_{ν_n} k distribuční funkci $\mathbf{\Psi}(x)$.

Součet náhodného počtu náhodných veličin má mnoho využití v různých oborech jako je fyzika, biologie, ekonomie, teorie spolehlivosti a v mnoha dalších. Na tomto místě uvedeme několik z nich.

- Předpokládejme, že potřebujeme objednat zboží do obchodu, a snažíme se odhadnou, jaké množství produktu A se prodá v daném časovém intervalu. Předpokládejme, že ξ_k je počet produktu A, který koupí k-tý zákazník, a ν_n je počet zákazníků během dané doby. Potom množství produktu A, které bude během dané doby prodáno a je tedy nutno doobjednat, bude rovno právě $\sum_{k=1}^{\nu_n} \xi_k$.

- Vezměme si výdaje pojišťovny. Jestliže jednotlivé výplaty klientům označíme ξ_k (a budeme předpokládat, že jsou nezávislé a stejně rozdělené) a náhodnou veličinou ν_k označíme počet klientů s nárokem na výplatu v daném časovém intervalu, pak celkové výdaje pojišťovny v tomto čase jsou $\sum_{k=1}^{\nu_n} \xi_k$.

- Předpokládejme, že máme systém se dvěma operačními jednotkami. Životnost každé jednotky má stejnou distribuční funkci $F(x)$. V čase 0 začne pracovat první jednotka a druhá je v záloze. V momentě, kdy přestane pracovat první jednotka pracovat, začne pracovat druhá a první jde do opravy. Jestliže se během doby opravy porouchá i druhá jednotka znamená to chybu systému. Nás zajímá rozdělení času τ, který značí doby do chyby systému. Označme si X_i jako dobu cyklu od momentu, kdy začne i-tá jednotka pracovat, až do doby dokončení její opravy (před poruchou druhé jednotky). Označme Y doby nedokončeného cyklu, který je ukončen chybou systému. Pak $\tau = \sum_{i=1}^{N-1} X_i + Y$, kde $N-1$ je náhodné číslo cyklů před chybou systému, takže

$$\mathbb{P}(N = i) = p(1-p)^{i-1}, i \geq 1,$$

kde p je pravděpodobnost, že se druhá jednotka porouchá před ukončením opravy první. Obvykle je p velmi malé, jelikož doba do poruchy jednotky bývá větší než doba trvání oprav. Většinou nás zajímají asymptotické distribuce τ pro $p \to 0$.

2.3.1 ν-Gaussovské náhodné veličiny

Nyní zavedu nejprve ν-striktně stabilní náhodné veličiny, jejímž speciálním případem jsou $\nu-$striktně Gaussovké veličiny. Nechť $X_1 \ldots X_n$ je posloupnost stejně rozdělených nezávislých náhodných veličin. Mějme $\{\nu_p,\ \ p \in \Delta\},\ \ \Delta \subset (0{,}1)$ množinu náhodných veličin s nezápornými celými hodnotami, nezávislých na $\{X_j,\, j \geq 1\}$. Předpokládejme, že ν_p má konečnou střední hodnotu $\mathbb{E}\nu_p = 1/p$ pro všechna p.

Definice 6. *Řekneme, že náhodná veličina X_1 je ν-striktně stabilní s parametrem α, jestliže pro všechna $p \in \Delta$*

$$X_1 \stackrel{d}{=} p^{1/\alpha} \sum_{j=1}^{\nu_p} X_j, \tag{2.11}$$

kde $\{X_j,\ \ j \geq 1\}$, je posloupnost nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením jako X_1, nezávislých na $\{\nu_p, p \in \Delta\}$.

Definice 7. *Řekneme, že náhodná veličina X_1 je ν-striktně Gaussovská, jestliže $\mathbb{E}X_1 = 0$, $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$ a pro všechna $p \in \Delta$*

$$X_1 \stackrel{d}{=} p^{1/2} \sum_{j=1}^{\nu_p} X_j, \tag{2.12}$$

kde $\{X_j,\ j \geq 1\}$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin nezávislých na $\{\nu_p,\ p \in \Delta\}$.

Je důležité dodat, že ne pro všechny $\{\nu_p,\ \ p \in \Delta\}$ existuje ν-striktně Gaussovské rozdělení. Jestliže si vezmeme $P^{(1)}$ a $P^{(2)}$ vytvořující funkce dvou náhodných veličin s hodnotami v přirozených číslech, potom i jejich sloučení,

$$P^{(1)} \circ P^{(2)}(z) = P^{(1)}(P^{(2)}(z))$$

je také vytvořující funkce s přirozenými hodnotami. Jestliže si označíme P_p jako vytvořující funkci náhodné veličiny ν_p a $\mathcal{P}$ jako semigrupu s operací sloučení $\circ$ generovanou množinou $\{P_p,\ p \in \Delta\}$. Následující věta dává nutné a postačující podmínky k tomu, aby existovaly ν-striktně Gaussovské veličiny.

Věta 7 (Klebanov (2003)). *Nutnou a postačující podmínkou pro existenci ν-striktně Gaussovské náhodné veličiny X pro množinu $\{\nu_p,\ p \in \Delta\}$ je komutativita semigrupy $\mathcal{P}$.*

Důkaz. Nechť $f(t)$ je charakteristická funkce (ch.f.) X. Potom (2.12) je ekvivalentní systému rovnic

$$f(t) = P_p(f(p^{1/2}t)), \quad p \in \Delta, \tag{2.13}$$

který je splněn pro všechna reálná t (jednotlivé rovnice v systému jsou indexovány parametrem $p \in \Delta$). Vezměme si (2.13) pro $t \geq 0$ a definujme

$$\varphi_1(t) = f(\sqrt{t}), \quad \varphi_2(t) = f(-\sqrt{t}).$$

Jelikož $\mathbb{E}X = 0$ a $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$, $f(t)$ má spojitou druhou derivaci a $f'(0) = 0$ a $f''(0) \neq 0$. Tedy $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(t)$ jsou diferencovatelné pro $t > 0$ a $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0)$. Zřejmě $f(t)$ splňuje (2.13) právě tehdy, když $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(t)$ splňují systém

$$\varphi(t) = P_p(\varphi(pt)),\ p \in \Delta \tag{2.14}$$

pro $t \geq 0$. To je Poincarého rovnice (Poincaré (1890)), která má jednoznačné řešení, a z toho plyne $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. Tedy jestliže $f(t)$ existuje, pak je symetrická. Vyberme si libovolné $p_0 \in \Delta$. Označme vytvořující funkci ν_{p_0} jako $P(z)$ a nechť $\varphi(t) = \varphi_1(t) = f(\sqrt{t})$. Z (2.14) máme

$$\varphi(t) = P(\varphi(p_0 t)). \tag{2.15}$$

Je známo, že (2.15) má jediné a diferencovatelné řešení s počátečními hodnotami $\varphi(0) = 1$ a $\varphi'(0) = -a$, kde $a > 0$ je libovolná konstanta. Tímto řešením je Laplaceova transformace pravděpodobnostního rozdělení $A(x)$ pro $x > 0$. Tedy

$$\varphi(t) = \int_0^\infty \exp(-tx)\mathrm{d}A(x), \tag{2.16}$$

a $\varphi(t)$ splňuje všechny podmínky. Zřejmě, když $\varphi'(0) = -a$, tedy $A(x)$ není degenerované v 0.

Pokud existuje řešení (2.14), musí být shodné s řešením (2.16). A pro existenci řešení (2.14) je nutnou a postačující podmínkou nezávislost řešení (2.15) na výběru p_0. Tedy pro $p \in \Delta$, $p \neq p_0$ rovnice

$$\varphi_p(t) = P_p(\varphi_p(pt)), \text{ kde } p \text{ je pevné} \tag{2.17}$$

a (2.15) musí mít stejné řešení s počátečními hodnotami $\varphi(0) = \varphi_p(0) = 1$, $\varphi'(0) = \varphi_p'(0) = -a$, kde $a > 0$. Ukážeme, že (2.15) a (2.17) mají stejné řešení pouze tehdy, když jsou P_p a P komutativní, což znamená

$$P_p \circ P = P \circ P_p. \tag{2.18}$$

Nejdříve předpokládejme, že (2.18) platí. Nechť $\varphi(t)$ je řešením (2.15) s počátečními hodnotami $\varphi(0) = 1$ a $\varphi'(0) = -a$. Vezměme si funkci $P_p(\varphi(tp))$. Použitím (2.15) a (2.18) dostáváme

$$P_p(\varphi(tp)) = P_p(P(\varphi(tp_0p))) = P(P_p(\varphi(tp_0p))).$$

Tedy $P_p(\varphi(tp))$ splňuje (2.15). Navíc

$$P_p(\varphi(tp))|_{t=0} = P_p(\varphi(0)) = P_p(1) = 1$$

a

$$\frac{\partial}{\partial t} P_p(\varphi(tp))|_{t=0} = P_p'(\varphi(tp))\varphi'(tp)p|_{t=0} = \frac{1}{p}\varphi'(0)p = -a.$$

Z toho plyne, že $\varphi(t)$ a $P_p(\varphi(tp))$ splňují (2.15) a mají stejné počáteční hodnoty. Protože (2.15) má jen jedno řešení splňující počáteční hodnoty, dostáváme $\varphi(t) = P_p(\varphi(tp))$. Využijeme-li symetrii mezi p a p_0, potom za předpokladu (2.18), budou mít rovnice (2.15) a (2.17) mají stejné řešení.
Předpokládejme, že (2.15) a (2.17) mají stejné řešení. Pak

$$P_p(P(\varphi(tp_0p))) = P_p(\varphi(tp)) = \varphi(t).$$

Záměnou P_p a P dostáváme

$$P(P_p(\varphi(tp_0p))) = P(\varphi(tp)) = \varphi(t).$$

Z toho

$$P_p(P(\varphi(tp_0p))) = P(P_p(\varphi(tp_0p))).$$

Nicméně pro $\varphi'(0) = -a \neq 0$ vidíme z (2.16), že $\varphi(t)$ je Laplaceova transformace distribuční funkce $A(x)$, která není degenerovaná v nule, což znamená, že hodnoty $\varphi(t)$ pro $t > 0$ vyplní interval (0,1]. Z toho se $P(P_p(z)) = P_p(P(z))$ pro $z \in (0,1]$, což z analytické vlastnosti vytvořující funkce v jednotkovém kruhu implikuje (2.18).
Vraťme se nyní k (2.13). Protože $\varphi(t) = f(\sqrt{t})$ dostáváme, že

$$f(t) = \varphi(t^2) = \int_0^\infty \exp -t^2 x \mathrm{d}A(x).$$

Navíc (2.13) je konzistentní pouze pokud je (2.14) konzistentní, což je pouze v případě, že (2.18) je splněné pro všechna $p, p_0 \in \Delta$. To je zřejmě ekvivalentní s tím, že $\mathcal{P}$ je komutativní.

❑

Poznámka. Jestliže je $\mathcal{P}$ komutativní, pak charakteristická funkce ν-striktně Gaussovské náhodné veličiny je ve tvaru $f(t) = \varphi(at^2)$, kde $a > 0$ je parametr a $\varphi(t)$ je řešením (2.15) splňující podmínku $\varphi(0) = -\varphi'(0) = 1$.

Následující příklady, které uvádí například Klebanov a kol. (2012), ukazují pro které množiny $\{\nu_p,\ p \in \Delta\}$ $\nu-$striktně stacionární rozdělení existuje.

Příklad. Nechť je $\nu_p = 1/p$ s pravděpodobností 1 a $p \in \Delta = \{1/n, n \in \mathbb{N}\}$. Potom se vytvořující funkce $P_p(z) = z^{1/p}$ a zřejmě

$$P_{p_1} \circ P_{p_2} = z^{1/(p_1p_2)} = P_{p_2} \circ P_{p_1}.$$

Z Věty 7 tedy vyplývá, že existuje takové $\nu-$striktně Gaussovké rozdělení. Nazývá se klasické sčítací schéma a toto rozdělení se shoduje s normálním Gaussovkým rozdělením.

Příklad. Nechť je ν_p geometrická náhodná veličina s parametrem p taková, že

$$\mathbb{P}(\nu_p = k) = p(1-p)^{k-1},\ k \in \mathbb{N}$$

a mějme vytvořující funkci $P_p(z) = pz/(1-(1-p)z)$. Z toho se dá lehce dokázat, že

$$P_{p_1} \circ P_{p_2}(z) = \frac{p_1 p_2 z}{1-(1-p_1 p_2)z} = P_{p_2} \circ P_{p_1}(z).$$

Tedy existuje takové $\nu-$striktně stacionární rozdělení. Z rovnice (2.15) dostáváme

$$\varphi(t) = \frac{p_0 \varphi(p_0 t)}{1-(1-p_0)\varphi(p_0 t)},\ p_0 \in (0{,}1). \tag{2.19}$$

Jak uvádí Kakosyan a kol. (1984), řešení této rovnice je Laplaceova transformace exponenciálního rozdělení, tedy $\varphi_a(t) = 1/(1+t)$. Tedy za předpokladu počáteční podmínky $\varphi(0) = -\varphi'(0) = 1$ je jediným řešením (2.19) $\varphi(t) = 1/(1+t)$. Důsledkem je, že $\nu-$striktně Gaussovská rozdělení jsou Laplaceova rozdělení s charakteristickou funkcí

$$f(t) = \frac{1}{1+at^2},\ a > 0.$$

2.3.2 $\nu-$nekonečně dělitelné náhodné veličiny

V této části zavedeme $\nu-$nekonečně dělitelné náhodné veličiny a ukážeme pro ně postačující podmínky.

Definice 8. *Řekneme, že náhodná veličina Y je ν-nekonečně dělitelná, jestliže pro všechna $p \in \Delta$ existuje posloupnost stejně rozdělených nezávislých náhodných veličin $\{X_j^{(p)},\ j \geq 1\}$, nezávislých na ν_p taková, že*

$$Y \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{\nu_p} X_j^{(p)}. \tag{2.20}$$

Následující věta je analogií de Finnetiho věty (Lukacs, 1987).

Věta 8. *Nechť je φ výsledkem rovnice (2.15). Náhodná veličina Y s charakteristickou funkcí $g(t)$ je $\nu-$nekonečně dělitelná právě tehdy, když*

$$g(t) = \lim_{m\to\infty} \varphi(\alpha_m[1-g_m(t)]), \tag{2.21}$$

kde $\{\alpha_m\}$ je posloupnost kladných konstant a $g_m(t)$ je charakteristická funkce.

Důkaz této věty uvádí např Klebanov (2003) na straně 71. Z této a z de Finnetiho věty pak dostáváme následující tvrzení.

Věta 9. *Nechť je φ řešením rovnice (2.15). Charakteristická funkce g je $\nu-$nekonečně dělitelná právě tehdy, když*

$$g(t) = \varphi(-\log f(t)), \tag{2.22}$$

kde $f(t)$ je nějaká nekonečně dělitelná charakteristická funkce.

Důsledek. Funkce $g(t)$ je $\nu-$nekonečně dělitelná charakteristická funkce právě tehdy, když je ve tvaru

$$g(t) = \varphi\left(ita - \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\mathrm{d}\theta(x)\right),$$

kde a je reálné číslo, $\theta(x)$ je neklesající omezená funkce, pro kterou platí, že $\Theta(-\infty) = 0$, a φ je řešením rovnice (2.15). Toto vyjádření je jednoznačné pro každou množinu $\{\nu_p.\ p \in \Delta\}$.

Definice 9. *Funkci $g(t)$ nazveme $\nu-$stabilní (resp. $\nu-$striktě stabilní) s charakteristickou funkcí s exponentem α, jestliže splňuje (2.22), kde φ je řešením (2.15) a $f(t)$ je charakteristická funkce se stabilním (resp. striktně stabilním) předpisem s exponentem α.*

Kapitola 3

Geometricky stabilní rozdělení

Geometricky stabilní rozdělení jsou speciálním příkladem $\nu-$stabilních rozdělení, kde $\nu = \nu_p$ je náhodná veličina s geometrickým rozdělením, kde $p \in \Delta$ a $\Delta = (0,1)$. Dále víme, že jestliže je ν geometricky rozdělené, pak výsledek rovnice (2.15) je ve tvaru $\varphi(t) = (1+t)^{-1}$. Dále z Věty 9 víme, že char. funkce je ve tvaru $\psi(t) = \varphi(-\log f(t))$, kde φ je řešením (2.15) a f je char. funkce stabilního rozdělení s indexem α. Spojením těchto dvou poznatků dostáváme

$$\psi(t) = (1 - \log f(t))^{-1} \tag{3.1}$$

Pravděpodobnostní rozdělení s charakteristickou funkcí ve tvaru (3.1) se nazývají geometricky stabilní. Jestliže char. funkce f v (3.1) odpovídá striktně $\alpha-$stabilní náhodné veličině, pak ψ je charakteristickou funkcí striktně geometrického rozdělení. Nyní uvedeme definici geometricky stabilního rozdělení přes sčítací model podobně jako v Definicích 4 a 5.

Definice 10. *Náhodná veličina Y má geometrické rozdělení, jestliže existuje posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $X_1, X_2 \ldots,$ náhodná veličina ν_p s geometrickým rozdělením a nezávislá na všech X_i a konstanty $a(p) > 0$ a $b(p) \in \mathbb{R}$ takové, že*

$$a(p) \sum_{i=1}^{\nu_p} (X_i + b(p)) \xrightarrow{d} Y, \quad pro\ p \to 0. \tag{3.2}$$

Jelikož z Věty 3 známe tvar charakteristické funkce stabilních rozdělení, můžeme uvést následující definici, která je ekvivalentní Definici 10.

Definice 11. *Náhodná veličina Y má geometricky stabilní rozdělení, pokud její charakteristická funkce ψ má následující tvar:*

$$\psi(t) = (1 + \sigma^\alpha |t|^\alpha \omega(t,\alpha,\beta) - i\mu t)^{-1} \tag{3.3}$$

kde

$$\omega(t,\alpha,\beta) = \begin{cases} 1 - i\beta \tan(\pi\alpha/2) \mathrm{sgn}(t) & pro\ \alpha \neq 1, \\ 1 + i\beta(2/\pi) \log|t| \mathrm{sgn}(t) & pro\ \alpha = 1, \end{cases}$$

a

$$0 < \alpha \leq 2, \quad -1 \leq \beta \leq 1, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad \sigma \geq 0. \tag{3.4}$$

Parametry α, β, σ a μ jsou jednoznačné, přičemž β je irelevantní, jestliže $\alpha = 2$.

Poznámka. Pokud $\mu = 0$ pro $\alpha \neq 1$ nebo $\beta = 0$ pro $\alpha = 1$ pak je rozdělení striktně stabilní, což odpovídá striktní stabilitě $\alpha-$stabilnímu rozdělení v (3.1).

V případě, že $\sigma = 0$ v (3.3), budeme říkat tomuto rozdělení nepravé geometricky stabilní rozdělení, v opačném případě pravé geometrické rozdělení. Často se geometricky stabilní rozdělení s parametry (3.4) označuje jako $GS_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. Následující věta ukáže ekvivalenci mezi těmito dvěma definicemi.

Věta 10. *Náhodná veličina Y má pravé geometricky stabilní rozdělení s charakteristickou funkcí ve tvaru (3.3) s parametry α, β, σ a μ právě tehdy, když*

$$Y_p = a(p) \sum_{i=1}^{\nu_p} (Y_i + b(p)) \xrightarrow{d} Y, \ \textit{pro } p \to 0, \tag{3.5}$$

kde Y_i jsou nezávislé náhodné veličiny se stejným rozdělením jako Y a ν_p je náhodná veličina s geometrickým rozdělením nezávislá na všech Y_i. Dále konstanta $a(p)$ musí mít tvar:

$$a(p) = \begin{cases} p^{1/\alpha}(1 + o(1)) & \textit{pro } \alpha < 2, \\ [\sigma^2/(\mu^2/2 + \sigma^2)]^{1/2} p^{1/2}(1 + o(1)) & \textit{pro } \alpha = 2, \end{cases}$$

a b(p) tvar :

$$b(p) = \begin{cases} \mu p^{1-1/\alpha}(1 + o(1)) & \textit{pro } \alpha < 1, \\ \sigma\beta(2/\pi) \log |a(p)| + o(1) & \textit{pro } \alpha = 1, \\ \mu(p/a(p) - 1) + p/a(p)o(1) & \textit{pro } \alpha \in (1{,}2), \\ (po(1) + (p - a(p))\mu)/a(p) & \textit{pro } \alpha = 2. \end{cases}$$

Důkaz. Důkaz této věty ukazuje např Klebanov (2003) na straně 92. ❑

Poznámka. Přímým dosazením se dá ukázat, že i nepravá geometricky stabilní náhodná veličina splňuje (3.5), dosadí-li se $a(p) = p^{1/\alpha}(1 + o(1))$ pro všechna $0 < \alpha < 2$ a

$$b(p) = \begin{cases} \mu p^{1-1/\alpha}(1 + o(1)) & \text{pro } \alpha < 1, \\ 0 & \text{pro } \alpha = 1, \\ \mu(p/a(p) - 1) + p/a(p)o(1) & \text{pro } \alpha \in (1{,}2). \end{cases}$$

Nyní se podíváme, pro jaké geometricky stabilní rozdělení platí nejen konvergence v distribuci ale i rovnost v distribuci. Náhodná veličina Y (jako slabá limita ze (3.2) s $b(p) = 0$) se striktně geometricky stabilním rozdělení splňuje, že pro všechny $p \in (0{,}1)$ existuje $a(p)$ takové, že

$$a(p) \sum_{i=1}^{\nu_p} Y_i \stackrel{d}{=} Y, \tag{3.6}$$

kde Y_i jsou nezávislé náhodné veličiny stejně rozdělené jako Y a ν_p je náhodná veličina s geometrickým rozdělením nezávislá na všech Y_i. Otázkou zůstává, zda totéž platí i pro ne striktně geometricky stabilní rozdělení. Obecnou odpověď nám dává následující věta.

Věta 11 (Klebanov (2003)). *Nechť $Y, Y_1, Y_2, \ldots,$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny a nechť ν_p je náhodná veličina s geometrickým rozdělením nezávislá na všech Y_i. Potom náhodná veličina Y splňuje*

$$a(p)\sum_{i=1}^{\nu_p}(Y_i + b(p)) \stackrel{d}{=} Y \text{ pro } p \in (0{,}1) \tag{3.7}$$

pro nějaké konstanty $a(p) > 0$ a $b(p) \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když Y má striktně geometricky stabilní rozdělení nebo má Y nepravé geometricky stabilní rozdělení. Pro konstanty $a(p)$ a $b(p)$ nutně platí následující: $a(p) = p^{1/\alpha}$ a $b(p) = 0$ pro striktně geometricky stabilní rozdělení a $a(p) = p$ pokud Y má nepravé geometricky stabilní rozdělení.

Důkaz. Označme si $a(p) = a$ a $b(p) = b$. Rovnice (3.7) je ekvivalentní

$$\frac{e^{itab} p\psi(at)}{1-(1-p)\psi(at)e^{itab}} = \psi(t)\ t \in \mathbb{R}, \tag{3.8}$$

kde ψ je charakteristická funkce Y. Jestliže má Y nepravé geometricky stabilní rozdělení ($\sigma = 0$ v (3.3)) nebo je striktně geometricky stabilní ($\mu = 0$ pro $\alpha \neq 1$ nebo $\beta = 0$ pro $\alpha = 1$ v (3.3)), potom se přímým dosazením zjistí, že Y splňuje (3.8) s $a(p) = p^{1/\alpha}$ a $b(p) = 0$. Zbývá tedy jen dokázat, že (3.8) implikuje striktní stabilitu (resp nepravé geometricky stabilní rozdělení) a že $a(p) = p^1/\alpha, b(p) = 0$. Předpokládejme, že Y splňuje (3.7). Potom z definice musí mít Y geometricky stabilní rozdělení a tedy charakteristickou funkci ve tvaru (3.3).

- Případ $\alpha \neq 1$

Dosazením (3.3) do (3.8) dostáváme

$$\left((1+\sigma^\alpha|at|^\alpha C - ita\mu)/(pe^{itab}) - 1/p + 1\right)^{-1} = (1+\sigma^\alpha|t|^\alpha C - it\mu)^{-1},$$

kde $C = 1 - i\beta\tan(\pi\alpha/2)\mathrm{sgn}(t)$. Postupnými úpravami a přerovnáváním dostaneme výraz

$$1+\sigma^\alpha|at|^\alpha C - ita\mu = (1+\sigma^\alpha|t|^\alpha pC - itp\mu)e^{itab}. \tag{3.9}$$

Zlogaritmováním této rovnice dostáváme

$$\log\frac{1+\sigma^\alpha|at|^\alpha C - ita\mu}{1+\sigma^\alpha|t|^\alpha pC - itp\mu} = itab.$$

Obě strany podělíme ita a pošleme $t \to \infty$, což nám dá výsledek $b(p) \equiv 0$. To dosadíme do (3.9) a po úpravě dostaneme

$$\sigma^\alpha|t|^\alpha C(a^\alpha - p) = it\mu(a-p)\ t \in \mathbb{R}.$$

Z toho je vidět, že buď $\sigma = 0$ a $a(p) = p$ (nepravé geometricky stabilní rozdělení) nebo $\sigma \neq 0, \mu = 0$ a $a(p) = p^{1/\alpha}$ (striktně geometricky stabilní rozdělení). Tím je případ $\alpha \neq 1$ dokázán.

- Případ $\alpha = 1$

Opět dosazením (3.3) do (3.8) dostáváme

$$[(1+\sigma a|t|(1+i\beta(2/\pi)\log|at|\mathrm{sgn}(t)) - i\mu at)/(pe^{itab})) - 1/p + 1]^{-1} =$$
$$= [1+\sigma|t|(1+\beta(2/\pi)\log|t|\mathrm{sgn}(t)) - i\mu t]^{-1}.$$

Postupnými úpravami a přerovnáním dostaneme

$$\sigma a(1 + i\beta(2/\pi)\log|at|) - i\mu a + \frac{1 - e^{aitb}}{t} = (\sigma p(1 + i\beta(2/\pi)\log|t|) - i\mu p)e^{itab}. \tag{3.10}$$

Podobně jako v případě $\alpha \neq 1$ (3.10) zlogaritmujeme a pro $t \to \infty$ dostáváme $b(p) \equiv 0$. To když dosadíme do (3.10) dostaneme rovnici

$$\sigma[(a - p) + (a - p)i\beta(2/\pi)\log(t) + ai\beta(2/\pi)\log(a)] = i\mu(a - p)\ t > 0. \tag{3.11}$$

Z toho je opět vidět, že buď $\sigma = 0$ a $a(p) = p$ (nepravé geometricky stabilní rozdělení) nebo $\sigma \neq 0, \mu = 0$ a $a(p) = p$ (striktně geometricky stabilní rozdělení). Tím je případ $\alpha = 1$ dokázán.

❏

Kapitola 4

Finanční aplikace

Využití stabilních rozdělení ve finančních modelech bylo dlouho zvažováno, ale protiargumentem byla komplikovaná práce s nimi, jelikož jen pro speciální příklady dokážeme vyjádřit hustotu těchto rozdělení. V poslední době se však díky lepším možnostem v oblasti výpočetní techniky využívají již daleko více. K tomu je několik dobrých důvodů. Jeden z nich je čistě empirický. Hodně dat s velkým objemem vykazuje příznaky těžkých chvostů a křivosti (oproti symetrii). Dalším důvodem je Zobecněná centrální limitní věta (Gnedenko a Kolmogorov (1954)), která říká, že výsledek součtu nezávislých náhodných veličin bude mít stabilní rozdělení. Také, jak je ukázáno ve Větě 4, jsou stabilní rozdělení stejně jako normální rozdělení komutativní, což je umožňuje využívat na podobných principech jako normální rozdělení. Jako příklad uvedeme, jak se dají využít stabilní rozdělení při výpočtu Value at Risk. Podobným způsobem se pak dají stabilní rozdělení aplikovat i na Markowitzovu teorii a jiné teorie portfolií.

4.1 Value at risk

Při výpočtu Value at Risk nás především zajímá chování chvostů rozdělení. Zde je opět vidět výhoda stabilních rozdělení, která jsou daleko přesnější reálným datům na chvostech než je normální rozdělení. Jedna z klasických metod výpočtu Var je metoda rozptylu a kovariance. Vzhledem k tomu, že stabilní rozdělení má nekonečný rozptyl (až na případ $\alpha = 2$), musíme najít jiné veličiny reprezentující rozptyl a kovarianci pro výpočet Value at Risk pomocí stabilních rozdělení. Vezměme si náhodnou veličinu $R \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\nu)$. Parametr poměru σ umožňuje vyjádřit náhodnou veličinu R jako $R = \sigma R_0$, kde R_0 má stabilní rozdělení s jednotkovým parametrem poměru a stejnými parametry α a β jako R. To znamená, že parametr poměru σ zobecňuje směrodatnou odchylku. Jako analogii k rozptylu se nabízí používat u stabilních rozdělení hodnotu σ^α. Výpočet analogie pro kovariance si ukážeme na následujícím příkladu, který prezentovali Rachev a kol. (2003).

Příklad. Vezměme si nezávislé náhodné veličiny $R_1, R_2, \ldots, R_n$ takové, že $R_i \sim S_\alpha(\sigma_i,\beta_i,\nu_i)$. Potom $R = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i$, kde ω_i jsou váhové hodnoty, je náhodná veličina se stabilním rozdělením se stejným α a s parametry:

1. pro $\alpha \neq 1$

$$\sigma = ((|\omega_1|\sigma_1)^\alpha + \cdots + (|\omega_n|\sigma_n)^\alpha)^{1/\alpha},$$
$$\beta = \frac{\mathrm{sign}(\omega_1)\beta_1(|\omega_1|\sigma_1)^\alpha + \cdots + \mathrm{sign}(\omega_n)\beta_n(|\omega_n|\sigma_n)^\alpha}{(|\omega_1|\sigma_1)^\alpha + \cdots + (|\omega_n|\sigma_n)^\alpha},$$
$$\nu = \omega_1\nu_1 + \cdots + \omega_n\nu_n,$$

2. pro $\alpha = 1$

$$\sigma = |\omega_1|\sigma_1 + \cdots + |\omega_n|\sigma_2 n,$$
$$\beta = \frac{\mathrm{sign}(\omega_1)\beta_1|\omega_1|\sigma_1 + \cdots + \mathrm{sign}(\omega_n)\beta_n|\omega_n|\sigma_n}{|\omega_1|\sigma_1 + \cdots + |\omega_n|\sigma_n},$$
$$\nu = \omega_1\nu_1 + \cdots + \omega_n\nu_n - \frac{2}{\pi}\left(\omega_1 \log|\omega_1|\sigma_1\beta_1 + \cdots + \omega_n \log|\omega_n|\sigma_n\beta_n\right).$$

Podíváme-li se na $R = (R_1, \ldots, R_n)$ jako na vektor zisků z jednotlivých částí portfolia s váhami $\omega_1, \ldots, \omega_n$, pak se $\sigma^\alpha(\omega^T R)$ použije na měření rizikovosti portfolia. Jako obdobu kovariance u stabilních rozdělení zavedeme následující vztah

$$[R_1,R_2]_\alpha = \frac{1}{\alpha}\left.\frac{\partial\sigma^\alpha(\omega_1 R1 + \omega_2 R_2)}{\partial\omega_1}\right|_{\omega_1=0;\omega_2=1}$$

Matice $[R_i,R_j]$ $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ nám určuje závislost jednotlivých zisků složek v portfoliu.

Závěr

V práci se nám podařilo ukázat souvislost Paretova rozdělení s náhodným součinem náhodných nezávislých proměnných. To jsme provedli jak v teoretické rovině, tak názorně převedli na grafech hustot náhodných dat a očekávaného Paretova rozdělení. Shrnuli jsme současné poznatky o stabilních rozděleních a uvedli jejich klasifikace. Také jsme ukázali vztah mezi striktně stabilními a stabilními rozděleními. Uvedli jsme několik stěžejních vět, týkajících se podmínek pro jejich existenci, především co se týče tvaru charakteristických funkcí těchto rozdělení, a také jsme uvedli tvrzení důležité pro zjednodušenou práci s nimi. Také jsme uvedli souvislost mezi stabilními a geometricky stabilními rozděleními a ukázali tvary v jakých musí být charakteristické funkce těchto rozdělení. Dále jsme v práci ukázali,že se stabilní rozdělení dají využít v praxi při odhadování náhodných součtů náhodných proměnných a ve finančních modelech, ve kterých se dají očekávat data s nekonečným rozptylem. To bylo demonstrováno na výpočtu Value at Risk.

Literatura

ANDĚL, J. (2011). *Základy matematické statistiky.* Třetí vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 978-80-7378-162-0.

DOBRUSHIN, R. L. (1955). Lemma on the limit of compound random functions. *Uspekhi Mat. Nauk*, **10**, 157–1599.

DUBROVSKII, V. M. (1945). On some properties of completely additive set functions and passing to the limit under the integral sign. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **9**, 311–320.

FELLER, W. (1971). *An introduction to probability theory and its applications.* 2. ilustrated edition. Wiley, New York. ISBN 9780471257097.

GNEDENKO, B. (1983). On limit theorems for a random number of random variables.

GNEDENKO, V. B. a KOLMOGOROV, A. N. (1954). *Limit distributions of sums of independent random variables.* Addison-Wesley Mathematical Series. Addison-Wesley, Cambridge. ISBN 9780201024203.

KAKOSYAN, A., KLEBANOV, L. B. a MELAMED, I. A. (1984). *Characterization of Distributions by the Method of Intensively Monotone Operators.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1088. Springer, Berlin-Heidelberg. ISBN 978-3-540-13857-0.

KLEBANOV, L. B., KAKOSYAN, A. V., RACHEV, S. T. a TEMNOV, G. (2012). On a class of distributions stable under random summation. *Journal of applied probabality*, **49**, 303–318.

KLEBANOV, L. B. (2003). *Heavy tailed distributions.* První vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-86732-02-9.

LUKACS, E. (1987). *Characteristic Functions.* A Charles Griffin book. Oxford University Press, Northamptonshire. ISBN 978-0195205787.

POINCARÉ, J. H. (1890). On the three-body problem and the equations of dynamics. *Acta Mathematica*, **13**.

RACHEV, S. R., SCHWARTZ, E. a KHINDANOVA, I. (2003). *Handbook in heavz tailed distributions in finance, Chapter 7.* Addison-Wesley Mathematical Series. Elsevier, Cambridge. ISBN 0444508961.

RÉNYI, A. (1976). *Selected Papers of Alfred Rényi: 1956-1961.* Akadémiai Kiadó, Budapest. ISBN 9789630509138.

SAMORODNITSKY, G. a TAQQU, M. S. (2000). *Stable non-gaussian random processes.* First CRC press reprint 2000. Chapman and Hall, Boca Raton. ISBN 0-412-05171-0.