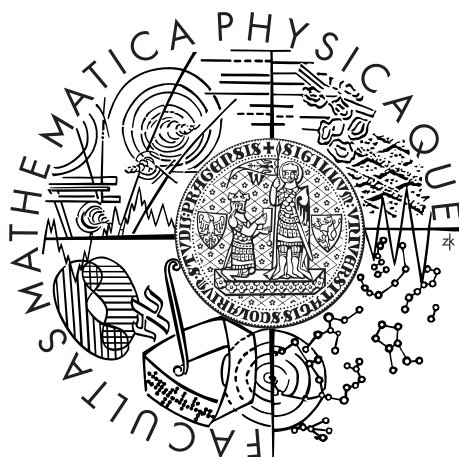


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Katarína Bakošová

Dvourozměrné bodové procesy

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2014

Na tomto mieste by som sa chcela poďakovať predovšetkým vedúcemu mojej bakalárskej práce doc. RNDr. Zbyňkovi Pawlasovi, Ph.D. za venovaný čas, cenné rady a pripomienky. Taktiež by som sa chcela poďakovať svojim blízkym za podporu počas celého štúdia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Katarína Bakošová

Název práce: Dvourozměrné bodové procesy

Autor: Katarína Bakošová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Bodový proces jako speciální typ stochastického náhodného procesu je teoretický model pro výskyt náhodných událostí v prostoru a v čase. V této práci zkoumáme dvojice bodových procesů v čase a jejich vzájemný vztah. Čtenář se nejdříve seznámí s teoretickým základem bodových procesů, dvourozměrných bodových procesů a jejich charakteristik založených na teorii míry. Záměrem této práce je prezentovat a demonstrovat metody analýz realizací dvou bodových procesů. Pozornost je věnovaná především problému závislosti dvou bodových procesů. Popisujeme analýzy dat založené na histogramu křížové korelace, indexech synchronizace a spektrální analýze pomocí koherence. V poslední kapitole jsou tyto metody aplikované na datech ze záznamů činnosti neuronů.

Klíčová slova: dvourozměrný bodový proces, histogram křížové korelace, index synchronizace, koherence

Title: Two-dimensional point processes

Author: Katarína Bakošová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: A point process as the special type of a random stochastic process is a theoretical model for occurrence of random events in time and space. In this thesis, we examine pairs of point processes in time and their mutual relations. The thesis acquaints the reader with the theoretical background of point processes, two-dimensional point processes and their properties based on measure theory. The purpose of this paper is to present and demonstrate methods of analyzing realizations of two point processes. Our attention is being focused mainly on problem of dependency of two point processes. We describe data analyses based on cross-correlation histogram, synchronization indices, and on spectral analysis using coherence. In the last chapter, we conducted these methods on nerve cell spike train data.

Keywords: Two-dimensional point process, cross-correlation histogram, synchronization indices, coherence

Názov práce: Dvojrozmerné bodové procesy

Autor: Katarína Bakošová

Katedra: Katedra pravdepodobnosti a matematickej statistiky

Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D., Katedra pravdepodobnosti a matematickej statistiky

Abstrakt: Bodový proces ako špeciálny typ stochastického náhodného procesu je teoretický model pre výskyt náhodných udalostí v priestore a čase. V tejto práci sú skúmané dvojice bodových procesov v čase a ich vzájomný vzťah. Čitateľ sa oboznámi najskôr s teoretickým základom bodových procesov, dvojrozmerných bodových procesov a ich charakteristík založených na teorií miery. Zámerom tejto práce je prezentovať a demonštrovať metódy analýz realizáci dvoch bodových procesov. Pozornosť je venovaná hlavne problému závislosti dvoch bodových procesov. Predostierame a opisujeme analýzy dát založené na histograme krížovej korelácie, indexoch synchronizácie a spektrálnej analýze pomocou koherencie. V poslednej kapitole sú tieto metódy aplikované na dátach zo záznamov činnosti neurónov.

Kľúčové slová: dvojrozmerný bodový proces, histogram krížovej korelácie, index synchronizácie, koherencia

Obsah

Úvod	2
1 Bodové procesy	3
1.1 Základy bodových procesov	3
1.2 Dvojrozmerný bodový proces	7
2 Metódy analýzy dát	10
2.1 Histogram krížovej korelácie	11
2.2 Index synchronizácie	14
2.3 Koherencia	15
3 Aplikácia metód	19
3.1 Neuróny	19
3.2 Reálne dáta	20
3.3 Nezávislé dáta	22
Záver	25
Literatura	26

Úvod

Bodový proces, ako špeciálny typ stochastického náhodného procesu, predstavuje teoretický model pre výskyt náhodných udalostí v priestore (alebo čase). Teória bodových procesov je modernou teóriou do značnej miery závislou na teórii miery, i keď je počiatky siahajú do roku 1837 k Poissonovi.

Vo svete je mnoho dejov, ktoré môžeme skúmať pomocou teórie bodových procesov. Nezriedka študovaným typom dát sú časy výskytu udalostí nepravidelne sa vyskytujúcich v čase. V takomto prípade sa jedná o realizácie bodových procesov na množine reálnych čísel, ktorú interpretujeme ako čas.

Frekventovaným problémom, s ktorým sa pri analýzach takýchto dejov stretávame, je problém závislosti výskytu náhodných udalostí medzi dvoma rôznymi dejmi. Jedná sa teda o dva rôzne bodové procesy a ide nám o zistenie ich vzájomného vzťahu. Pre riešenie tohto problému bola zavedená teória dvojrozmerných bodových procesov.

Náplňou tejto bakalárskej práce je uviesť koncepciu dvojrozmerného bodového procesu a popísať analýzu problému závislosti náhodných udalostí dvoch rôznych procesov.

Jedným z mnoha príkladov, ktorý sa stal hlavnou motiváciou pre napísanie tejto práce, je otázka vzťahu (závislosti) časov impulzov neurónov. Riešenie tejto otázky z oblasti výpočetnej neurovedy na základe teórie dvojrozmerných bodových procesov je hojne rozoberané v mnohých vedeckých článkoch a prácach. Inšpirovalo ma vidieť takéto zaujímavé a praktické využitie teoretických matematických poznatkov.

Práca je obsahovo rozdelená do troch kapitol.

Prvá kapitola nás najskôr uvádza do teórie bodového procesu a jeho charakteristík. Neskôr v nej definujeme koncepciu dvojrozmerného bodového procesu.

V druhej kapitole sa zoznámime s dvoma rôznymi prístupmi k riešeniu problému závislosti dvoch bodových procesov. Kapitola sa zaoberá aplikáciou teórie na dáta predstavujúce realizácie bodových procesov. Prvá metóda je metódou založenou na histograme krížovej korelácie. Ďalej stanovíme indexy synchronizácie odvodené od tohto histogramu. Ďalšou osobitou metódou je spektrálna analýza založená na koherenciách.

Tretia kapitola predstavuje ukážku aplikácie na konkrétnych dátach. Aplikujeme v nej v predošlej kapitole uvedené metódy analýz na dvoje druhy dát, reálne a nasimulované. Dáta predstavujú časy impulzov neurónov.

Kapitola 1

Bodové procesy

V tejto kapitole vychádzame z prác Rataj [2006] a Reiss [1993].

1.1 Základy bodových procesov

V tejto podkapitole definujeme bodový proces, jeho základné vlastnosti a charakteristiky.

Definícia. *Bud' S úplný separabilný lokálne kompaktný metrický priestor a $\mathcal{B}(S)$ jeho borelovská σ -algebra.*

Označme $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(S)$ množinu všetkých lokálne konečných mier μ na $(S, \mathcal{B}(S))$, t. j. konečných na obmedzených borelovských množinách.

Označme $\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}(S) = \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(B) \in \bar{\mathbb{N}}_0, \forall B \in \mathcal{B}(S)\}$ množinu všetkých lokálne konečných mier na $(S, \mathcal{B}(S))$ nadobúdajúcich iba celočíselné hodnoty, kde symbol $\bar{\mathbb{N}}_0 = \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.

Označme $\mathcal{N}^ \equiv \mathcal{N}^*(S) = \{\mu \in \mathcal{N} : \mu(\{x\}) \leq 1, \forall x \in S\}$.*

Poznámka. Míru $\mu \in \mathcal{N}$ môžeme vyjadriť aj ako

$$\mu = \sum_{i \in I} \delta_{x_i},$$

kde δ_{x_i} je Diracova miera, $I \subseteq \mathbb{N}$ je indexová množina a prvky $x_i \in S, i \in I$ sú body procesu predstavujúce pozorované udalosti.

Definícia. *Definujme zobrazenie*

$$\begin{aligned} \pi_B : \mathcal{N} &\rightarrow \bar{\mathbb{N}}_0 \\ \mu &\mapsto \mu(B). \end{aligned}$$

Zavedme

$$\mathfrak{N} = \sigma(\{\pi_B : B \in \mathcal{B}(S)\}) = \sigma(\{\pi_B^{-1}(C) : B \in \mathcal{B}(S), C \subseteq \bar{\mathbb{N}}_0\}),$$

najmenšiu σ -algebru na \mathcal{N} , voči ktorej sú zobrazenia $\pi_B, B \in \mathcal{B}(S)$ merateľné.

Definícia. Nech (Ω, \mathcal{A}, P) je pravdepodobnostný priestor. Merateľné zobrazenie

$$N : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathcal{N}, \mathfrak{N})$$

sa nazýva **bodový proces** na S . Bodový proces teda chápeme ako lokálne konečnú náhodnú celočíselnú mieru.

Bodový proces je **jednoduchý**, ak $P[N \in \mathcal{N}^*] = 1$.

Poznámka. Pre elementárny jav $\omega \in \Omega$ je N^ω lokálne konečná náhodná celočíselná miera. Potom $N^\omega(B)$ predstavuje počet elementárnych udalostí, resp. bodov procesu patriacich do $B \in \mathcal{B}(S)$.

Tvrdenie 1. Merateľné zobrazenie $N : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathcal{N}, \mathfrak{N})$ je bodový proces vtedy a len vtedy, keď zobrazenie

$$\begin{aligned} N(B) : \Omega &\rightarrow \tilde{\mathbb{N}}_0 \\ \omega &\mapsto N^\omega(B) \end{aligned}$$

je náhodná veličina pre každé $B \in \mathcal{B}(S)$.

Dôkaz. Najskôr si uvedomme, že $N(B)$ môžeme vyjadriť pomocou π_B a N ako zložené zobrazenie $N(B) = \pi_B \circ N$.

\Rightarrow Buď N bodový proces na S . Z definície je N merateľné zobrazenie vzhľadom na (Ω, \mathcal{A}, P) . Potom však zobrazenie $N(B) = \pi_B \circ N$ je pre každé $B \in \mathcal{B}(S)$ zloženie dvoch merateľných zobrazení. Teda je to tiež merateľné zobrazenie na (Ω, \mathcal{A}, P) a podľa definície je to náhodná veličina.

\Leftarrow Buď N zobrazenie $(\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathcal{N}, \mathfrak{N})$. Z predpokladu je $N(B)$ náhodná veličina, čiže merateľné zobrazenie z (Ω, \mathcal{A}, P) pre každé $B \in \mathcal{B}(S)$. Pre ľubovoľné $C \subseteq \tilde{\mathbb{N}}_0$ potom dostávame

$$N(B)^{-1}(C) = (\pi_B \circ N)^{-1}(C) = N^{-1}(\pi_B^{-1}(C)).$$

Keďže $N(B)^{-1}(C) \in \mathcal{A}$, aby sa zachovala rovnosť, musí aj $N^{-1}(\pi_B^{-1}(C)) \in \mathcal{A}$. Pretože množiny $\pi_B^{-1}(C)$ generujú σ -algebru \mathfrak{N} , zobrazenie N spĺňa definíciu merateľnosti a teda N je podľa definície bodový proces na S . □

Ďalej budeme uvažovať iba jednoduché bodové procesy na $S = \mathbb{R}$.

Poznámka. Bodový proces na \mathbb{R} niekedy nazývame tiež bodový proces v čase. A to v prípade, keď os reálnych čísel \mathbb{R} interpretujeme ako čas.

V prípade, že sa jedná o bodový proces na \mathbb{R}^+ , môžeme takýto proces chápať aj ako systém náhodných veličín (respektíve náhodný proces) $\{N_t, t \in T\}$, kde $N_t = N((0, t])$ a $T \subseteq \mathbb{R}^+$. Tento náhodný proces nadobúda iba nezáporné celočíselné hodnoty pre každé $t \in T$ a funkcia $t \rightarrow N_t(\omega)$ je zprava spojitá a neklesajúca pre skoro všetky $\omega \in \Omega$. Takýto prístup je uvedený napríklad v Prášková and Lachout [2012].

Náhodnú veličinu N_t tak chápeme ako počet udalostí, ktoré nastali do času t .

Definícia. Zavedíme $t_h : \mu \mapsto t_h\mu$ operátor posunutia na \mathcal{N} , pre $h \in \mathbb{R}$ taký, že $t_h\mu(B) = \mu(B - h)$, kde $B - h = \{y \in \mathbb{R}, \exists b \in B : y = b - h\}$ a $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Poznámka. Ak uvažujeme prepis miery $\mu \in \mathcal{N}$ ako $\mu = \sum_{i \in I} \delta_{x_i}$, potom máme $t_h\mu = \sum_{i \in I} \delta_{x_i+h}$.

Definícia. Hovoríme, že bodový proces N na \mathbb{R} je **stacionárny**, ak pre každé $h \in \mathbb{R}$ platí, že N sa v distribucii rovná bodovému procesu $t_h N$. Hovoríme, že rozdelenie bodového procesu N je **translačne invariantné**.

Definícia. Základnou charakteristikou bodového procesu N na \mathbb{R} je **miera intenzity** Λ taká, že

$$\Lambda(B) = \mathbb{E} N(B) \text{ pre všetky } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Naviac, pokiaľ existuje hustota $\lambda(t)$ miery intenzity, čiže platí

$$\Lambda(B) = \int_B \lambda(t) dt \text{ pre všetky } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

nazývame túto hustotu **funkcia intenzity**.

Hodnotu $\Lambda(B)$ vnímame ako očakávaný počet bodov procesu, resp. pozorovaných udalostí, na $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Tvrdenie 2. Miera intenzity Λ bodového procesu N na $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ je miera.

Dôkaz. Miera intenzity spĺňa všetky podmienky z definície miery. Zjavne platí $\Lambda(B) \geq 0$, pretože $N(B) \geq 0$ pre všetky $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ a tiež $\Lambda(\emptyset) = 0$, pretože $N(\emptyset) = 0$. Ďalej ukážeme, že Λ je σ -aditívna. Nech $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), i \in \mathbb{N}$ sú po dvoch disjunktné množiny, potom máme

$$\Lambda \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \right) = \mathbb{E} N \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \right) = \mathbb{E} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} N(B_i) \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E} N(B_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \Lambda(B_i).$$

□

Tvrdenie 3. Nech N je stacionárny bodový proces na \mathbb{R} so σ -konečnou mierou intenzity Λ .

Potom funkcia intenzity $\lambda(t)$ bodového procesu N existuje a je konštantá, t. j.

$$\lambda(t) = \lambda.$$

Konštantu $\lambda \geq 0$ nazývame **intenzita**.

Ďalej pre bodový proces N a pre každé $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ platí

$$\Lambda(B) = \lambda|B|,$$

kde „ $|\cdot|$ “ značí Lebesgueovu mieru. (Λ je λ násobkom Lebesgueovej miery.)

Dôkaz. Buď N stacionárny bodový proces na \mathbb{R} . Potom z definície je rozdelenie $N(B)$ rovné rozdeleniu $t_h N(B)$ pre všetky $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, z čoho plynie $E[N(B)] = E[t_h N(B)] = E[N(B-h)]$ pre všetky $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ a pre všetky $h \in \mathbb{R}$. Teda platí $\Lambda(B) = \Lambda(B-h)$ pre všetky $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ a pre všetky $h \in \mathbb{R}$, čo znamená, že Λ je translačne invariálna miera. Z toho plynie, že Λ je násobkom Lebesgueovej miery, konkrétne nejakým jej λ násobkom, kde $\lambda \geq 0$. Potom teda existuje funkcia intenzity $\lambda(t)$ rovná konštante λ . □

Definícia. Hodnotu intenzity λ spočítame ako $\lambda = \frac{E N(B)}{|B|}$ pre ľubovoľné $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, také že $0 < |B| < \infty$.

Nestranný odhad intenzity je potom $\hat{\lambda} = \frac{N(B)}{|B|}$.

Definícia. Pre bodový proces N na \mathbb{R} ďalej uvažujme mieru

$$M^{(k)}(\tilde{B}) = E N^k(\tilde{B}) \left(= \int_{\tilde{B}} \lambda^{(k)}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \right)$$

na \mathbb{R}^k pre všetky $\tilde{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^k$ (kde N^k značí k -tú mocninu N v zmysle obvyklého súčinu mier). Posledná rovnosť platí, pokiaľ existuje hustota $\lambda^{(k)}$. Miera $M^{(k)}$ sa nazýva **momentová miera k -tého rádu**.

Poznámka. Povšimnime si, že $N^k(\times_{i=1}^k B_i) = \prod_{i=1}^k N(B_i)$.

Preto $M^{(k)}(\times_{i=1}^k B_i) = E \left(\prod_{i=1}^k N(B_i) \right)$ pre $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, k$.

Poznámka. Z vyššie uvedených definícií je pre bodový proces N na \mathbb{R} zrejmá rovnosť $\Lambda = M^{(1)}$.

Definícia. Špeciálne, pre momentovú mieru druhého rádu ($k = 2$) a množiny $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ definujeme, pokiaľ existuje, **súčinovú hustotu druhého rádu** $\lambda^{(2)}(s, t)$, ktorá splňuje

$$M^{(2)}(B_1 \times B_2) = E(N(B_1)N(B_2)) = \int_{B_2} \int_{B_1} \lambda^{(2)}(s, t) ds dt.$$

Definícia. Pre bodový proces N na \mathbb{R} definujeme **mieru kovariancie** $\gamma^{(2)}$ na \mathbb{R}^2 ,

$$\gamma^{(2)} = M^{(2)} - \Lambda^2.$$

Pre dvojicu $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tak stanovíme

$$\gamma^{(2)}(B_1 \times B_2) = M^{(2)}(B_1 \times B_2) - \Lambda(B_1)\Lambda(B_2) \left(= \int_{B_2} \int_{B_1} q^{(2)}(s, t) ds dt \right),$$

kde posledná rovnosť platí, pokiaľ existuje hustota $q^{(2)}(s, t)$.

Miera kovariancie $\gamma^{(2)}$ je znamienkovou mierou.

Definícia. Majme N bodový proces na \mathbb{R} . Nech existuje hustota $q^{(2)}(s, t)$ miery kovariancie taká, že sa dá vyjadriť ako funkcia jednej premennej a to tak, že

$$q^{(2)}(s, t) = q^{(2)}(|s - t|) = q^{(2)}(u) \text{ pre všetky } s, t \in \mathbb{R}.$$

Potom funkciu $q^{(2)}(u)$ z tejto rovnosti nazývame **kovariančná funkcia**.

Poznámka. Poznamenajme, že pokiaľ je bodový proces N na \mathbb{R} stacionárny a existuje hustota $q^{(2)}(s,t)$ miery kovariancie, potom preň existuje kovariančná funkcia $q^{(2)}(u)$.

Miera kovariancie je mierou závislosti medzi početnosťami bodov bodového procesu na dvoch množinách. Vraví nám to nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 4. *Buď N bodový proces na \mathbb{R} a $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Pre kovarianciu náhodných veličín $N(B_1)$ a $N(B_2)$ platí

$$\text{cov}(N(B_1), N(B_2)) = \gamma^{(2)}(B_1 \times B_2).$$

Dôkaz. Pre ľavú stranu rovnosti dostávame z definície kovariancie:

$$\begin{aligned} \text{cov}(N(B_1), N(B_2)) &= \text{E} [(N(B_1) - \text{E} N(B_1))(N(B_2) - \text{E} N(B_2))] \\ &= \text{E}(N(B_1)N(B_2)) - \text{E} N(B_1) \text{E} N(B_2). \end{aligned}$$

Z predchádzajúcich definícií dostávame pre pravú stranu rovnice:

$$\begin{aligned} \gamma^{(2)}(B_1 \times B_2) &= M^{(2)}(B_1 \times B_2) - \Lambda^2(B_1 \times B_2) \\ &= \text{E}(N^2(B_1 \times B_2)) - \Lambda^2(B_1 \times B_2) \\ &= \text{E}(N(B_1)N(B_2)) - \Lambda(B_1)\Lambda(B_2) \\ &= \text{E}(N(B_1)N(B_2)) - \text{E} N(B_1) \text{E} N(B_2). \end{aligned}$$

Čím je rovnosť dokázaná. □

Poznámka. Pokiaľ je bodový proces N na \mathbb{R} stacionárny s intenzitou λ , dostávame navyše pre všetky $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vzťah

$$\text{cov}(N(B_1), N(B_2)) = M^{(2)}(B_1 \times B_2) - \lambda^2|B_1||B_2|.$$

Táto rovnosť plynie priamo z *Tvrdenia 3*.

Dôsledok 1. *Špeciálne pre $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ a rozptyl náhodnej veličiny $N(B)$ platí*

$$\text{var} N(B) = \gamma^{(2)}(B \times B).$$

Navyše, pokiaľ je bodový proces N stacionárny s intenzitou λ ,

$$\text{var} N(B) = M^{(2)}(B \times B) - \lambda^2|B|^2.$$

1.2 Dvojrozmerný bodový proces

V nasledujúcich kapitolách budeme uvažovať dva bodové procesy rovnakého typu na \mathbb{R} , značíme N_1, N_2 . Budeme sa zaoberať ich vzťahom a závislosťou. Pre problém skúmania vzťahu dvoch bodových procesov môžeme tieto dva procesy formulovať ako jeden bodový proces $N_{1,2}$ na $S = \mathbb{R} \times \{1,2\}$.

Definícia. Ako už bolo spomenuté, **dvojrozmerný bodový proces** na \mathbb{R} definujeme ako bodový proces na $S = \mathbb{R} \times \{1,2\}$ a značíme $N_{1,2}$. Môžeme ho rozčleniť na dva bodové procesy N_1, N_2 a to tak, že

$$N_1(B) = N_{1,2}(B \times \{1\}) \quad \text{a} \quad N_2(B) = N_{1,2}(B \times \{2\}), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Definícia. Hovoríme, že dvojrozmerný bodový proces $N_{1,2}$ so zložkami N_1, N_2 je **stacionárny**, keď pre každé $h \in \mathbb{R}$ platí, že (N_1, N_2) má rovnaké rozdelenie ako $(t_h N_1, t_h N_2)$.

Pre prehľadnosť budeme dvojrozmerný bodový proces prezentovať a značiť ako dva bodové procesy N_1 a N_2 definované vyššie. Miery Λ_1, Λ_2 sú postupne ich miery intenzity.

V tejto podkapitole vychádzame v istej miere taktiež z článku Halliday et al. [2006].

Definícia. Pre dva bodové procesy N_1, N_2 na \mathbb{R} a pre každé $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ zavedme **krížovú momentovú mieru druhého rádu** $M_{12}^{(2)}$ ako

$$M_{12}^{(2)}(B_1 \times B_2) = EN_1(B_1)N_2(B_2) \left(= \int_{B_2} \int_{B_1} \lambda_{12}(s,t) ds dt \right).$$

Posledná rovnosť platí, pokiaľ existuje hustota $\lambda_{12}(s,t)$, ktorú nazývame **krížová súčinná hustota druhého rádu**.

Dôsledok 2. Pokiaľ sú bodové procesy N_1 a N_2 nezávislé potom platí

$$M_{12}^{(2)}(B_1 \times B_2) = \Lambda_1(B_1)\Lambda_2(B_2)$$

pre všetky $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pokiaľ N_1 a N_2 majú funkcie intenzity $\lambda_1(s)$ a $\lambda_2(t)$, tak potom existuje aj krížová súčinná hustota druhého rádu $\lambda_{12}(s,t)$ a platí

$$\lambda_{12}(s,t) = \lambda_1(s)\lambda_2(t).$$

Dôkaz. Dôsledok plynie z vety o strednej hodnote súčinu nezávislých náhodných veličín. □

Definícia. Podobne ako pre jeden bodový proces, teraz pre dva bodové procesy N_1, N_2 na \mathbb{R} a pre každé $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ zavedieme **krížovú mieru kovariancie** $\gamma_{12}^{(2)}$ takú, že

$$\gamma_{12}^{(2)}(B_1 \times B_2) = M_{12}^{(2)}(B_1 \times B_2) - \Lambda_1(B_1)\Lambda_2(B_2) \left(= \int_{B_2} \int_{B_1} q_{12}(s,t) ds dt \right).$$

Posledná rovnosť platí, pokiaľ existuje hustota $q_{12}(s,t)$.

Definícia. Majme N_1, N_2 bodové procesy na \mathbb{R} . Nech pre ne existuje hustota krížovej miery kovariancie $q_{12}(s,t)$ taká, že sa dá vyjadriť ako funkcia jednej premennej a to rozdielu, t. j.

$$q_{12}(s,t) = q_{12}(|s - t|) = q_{12}(u), \quad \text{pre všetky } s, t \in \mathbb{R}.$$

Potom funkciu $q_{12}(u)$ z tejto rovnosti nazývame **krížová kovariančná funkcia**.

Poznámka. Pre prehľadnosť používame rovnaké značenie pre hustotu $q_{12}(s,t)$ (funkciu dvoch premenných) a aj pre krížovú kovariančnú funkciu $q_{12}(u)$ (funkciu jednej premennej).

Podobný spôsob značenia platí aj pre kovariančnú funkciu $q^{(2)}$ z predošlej podkapitoly.

Poznámka. Pokiaľ $N_{1,2}$ je stacionárny dvojrozmerný bodový proces, tak potom pre zmiešanú súčinovú hustotu druhého rádu λ_{12} platí, že ju môžeme vyjadriť ako funkciu jednej premennej, a to $\lambda_{12}(s,t) = \lambda_{12}(u)$, kde $u = |t - s|$, $s, t \in \mathbb{R}$.

Dôsledok 3. *Nech N_1, N_2 sú stacionárne bodové procesy na \mathbb{R} s intenzitami po poradi λ_1, λ_2 a zmiešanou súčinovou hustotou druhého rádu $\lambda_{12}(u)$. Potom krížová kovariančná funkcia existuje a platí*

$$q_{12}(u) = \lambda_{12}(u) - \lambda_1 \lambda_2 \text{ pre všetky } u \in \mathbb{R}.$$

Dôkaz. Zrejmé. □

Inak povedané, pokiaľ je dvojrozmerný bodový proces stacionárny jeho krížová súčinová hustota druhého rádu a potom i krížová kovariančná funkcia nezávisia na funkčných hodnotách s a t , ale na ich vzdialenosti u , ktorú nazývame aj posunutie.

Krížová miera kovariancie a teda aj krížová kovariančná funkcia vyjadrujú, rôznymi spôsobmi, mieru závislosti medzi dvoma bodovými procesmi. Vraví nám to nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 5. *Nech N_1, N_2 sú dva bodové procesy na \mathbb{R} a $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Pre kovarianciu náhodných veličín $N_1(B_1)$ a $N_2(B_2)$ platí

$$\text{cov}(N_1(B_1), N_2(B_2)) = \gamma_{12}^{(2)}(B_1 \times B_2).$$

Dôkaz. Pri dôkaze tvrdenia postupujeme analogicky ako pri dôkaze *Tvrdenia 4*. Pre ľavú a pravú stranu rovnosti postupne dostávame:

$$\begin{aligned} \text{cov}(N_1(B_1), N_2(B_2)) &= E(N_1(B_1)N_2(B_2)) - E N_1(B_1) E N_2(B_2) \\ \gamma_{12}^{(2)}(B_1 \times B_2) &= E(N_1(B_1)N_2(B_2)) - E N_1(B_1) E N_2(B_2), \end{aligned}$$

čím je rovnosť dokázaná. □

Pokiaľ sú dva bodové procesy stacionárne, kovariancia veličín $N_1(B_1)$ a $N_2(B_2)$ nezávisí priamo na množinách B_1 a B_2 ale na ich veľkosti a vzdialenosti.

Poznámka. Z tejto rovnosti zjavne plynie, že ak sú bodové procesy N_1 a N_2 nezávislé potom $\gamma_{12}^{(2)}(B_1 \times B_2) = 0$. Inak, ak $\gamma_{12}^{(2)}(B_1 \times B_2) \neq 0$ existuje medzi bodovými procesmi N_1 a N_2 určitá závislosť.

Preto pokiaľ existuje krížová kovariančná funkcia $q_{12}(u)$ a je rôzna od 0 tak by sme mohli za určitých podmienok usudzovať, že sa pri danom u prejavuje medzi bodovými procesmi N_1 a N_2 určitá závislosť.

Kapitola 2

Metódy analýzy dát

Niektoré série náhodných dejov vo svete môžeme považovať za realizácie bodových procesov. Takýto náhľad nám umožňuje lepšie skúmanie týchto dejov a ich priebehu a vlastností. V tejto kapitole sa budememe zaoberať analýzou dát takýchto procesov (dejav). Pomocou existujúcich, rôznorodých a početných metód analýz môžeme na základe týchto dát určiť rozdielne vlastnosti a charakteristiky skúmaných procesov. Táto práca je špeciálne zameraná na prípady kde máme dva rôzne bodové procesy (resp. dvojrozmerný bodový proces) a zaujíma nás závislosť medzi nimi a ich vzájomné vzťahy. Jedná sa teda o rozborov pozorovaní reprezentujúcich dvojrozmerný bodový proces.

Najskôr však stanovme takéto dáta, reprezentujúce dvojrozmerný bodový proces.

Definícia. *Majme dvojrozmerný bodový proces N_{12} , resp. dva bodové procesy N_1 a N_2 na \mathbb{R} . Označme postupne*

$$\{x_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1(B_1)\} \quad a \quad \{y_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, N_2(B_2)\}$$

množinu bodov (súradníc) realizácie bodového procesu N_1 na $B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ a množinu bodov realizácie bodového procesu N_2 na $B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Pričom tieto množiny sú usporiadané indexované množiny a to tak, že

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{N_1(B_1)} \quad a \quad y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{N_2(B_2)}.$$

Body týchto množín, x_i a y_j , predstavujú pozorované udalosti.

Definícia. *Pre ľubovoľnú množinu $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ premenná $T = |B|$ označuje jej Lebesgueovu mieru. Pokiaľ je B interval, T udáva jeho dĺžku.*

Väčšinou skúmame dáta výskytu nejakých udalostí v čase, čiže bodové procesy v čase, čo sú bodové procesy na \mathbb{R} pri spomínanej interpretácii osi \mathbb{R} ako časovej osi.

Poznámka. Vo väčšine prípadov v praxi sú množiny realizácie dát bodových procesov B_1 a B_2 intervaly rovnakej dĺžky T . Pokiaľ sa jedná o bodové procesy v čase, intervaly B_1 a B_2 sú vlastne časovými úsekmi (dobami) záznamu dát bodového procesu. Sú to intervaly typu $(t_0, t_0 + T]$, začínajúce počiatočným bodom záznamu t_0 , resp. počiatkom merania (zväčša $t_0 = 0$).

Ďalej budeme uvažovať iba takéto B_1 a B_2 a bez újmy na všeobecnosti stanovíme $t_0 = 0$.

Zaujímá nás závislosť medzi bodmi (časmi udalostí) dvoch bodových procesov N_1 a N_2 a to, či udalosti bodového procesu N_2 „reagujú“ na udalosti procesu N_1 (alebo naopak). Vravíme aj, že jeden bodový proces, teda N_1 , vedie druhý, teda N_2 .

Poznámka. Stanovme premennú $u \in \mathbb{R}$, ktorej hodnota udáva vzdialenosť medzi dvoma rôznymi bodmi dvoch rôznych bodových procesov na \mathbb{R} . Pokiaľ budeme na tieto bodové procesy nahliadať ako na procesy v čase, predstavuje u časový úsek. V takomto prípade interpretujeme u ako dobu „reakcie“ jedného procesu na druhý. To znamená, že pomocou nej zisťujeme závislosť dvoch bodových procesov v čase. Premennú u preto nazývame aj časové oneskorenie alebo posunutie.

Pri analýze závislosti bodových procesov nás častokrát nezaujímajú iba miera ich závislosti, ale aj pri akom posunutí u sa táto závislosť prejavuje. Zaujímá nás i vzťah dvoch bodových procesov na \mathbb{R} v závislosti na u . Posunutie u je teda častokrát ďalšou špecifikáciou závislosti dvoch bodových procesov.

Ukážeme niektoré metódy, pomocou ktorých analyzujeme vyššie uvedené dáta a na základe toho odhadujeme charakteristiky dvojrozmerného bodového procesu uvedené v predošlej kapitole, čím analyzujeme závislosť dvoch bodových procesov.

V celej tejto kapitole budeme pre všetky metódy uvažovať len stacionárne bodové procesy na \mathbb{R} .

2.1 Histogram krížovej korelácie

Histogram krížovej korelácie ako analýza dát založená na korelácií a kovariancií je jeden zo základných spôsobov akým môžeme zistiť skúmanú závislosť. Kovariancia je základnou a známou mierou závislosti dvoch náhodných veličín. Princípom tejto metódy je odhadnutie kovariančnej funkcie $q_{12}(u)$, pomocou histogramu krížovej korelácie. Je teda založená na tejto funkcii popisujúcej vzájomnú závislosť bodov dvoch bodových procesov a to v závislosti od ich vzájomnej časovej vzdialenosti u .

Práve premenná či parameter u spomýnaný vyššie je to, čo nás pri tejto metóde zaujíma. Preto vravíme, že táto analýza je analýzou na doméne času.

Histogram krížovej korelácie a s ním spojené tvrdenie uvedieme vzhľadom na články [Halliday et al., 2006, str. 1057, 1058] a [Brillinger, 1992, str. 262].

Definícia. Definujme *histogram krížovej korelácie* $J_{12}^T(u)$ ako celočíselnú náhodnú veličinu, funkciu premennej u ,

$$J_{12}^T(u) = \sum_{i=1}^{N_1(B_1)} \sum_{j=1}^{N_2(B_2)} \mathbf{1}_{(u-\frac{h}{2}, u+\frac{h}{2}]}(y_j - x_i), \quad (2.1)$$

kde pevne volená premenná h je šírka koša.

Histogram udáva početnosť intervalov (x_i, y_j) medzi bodmi bodových procesov, ktorých veľkosť $(y_j - x_i)$ leží v koši šírky h so stredom v oneskorení u . Je teda histogramom vzdialeností (časových rozdielov) medzi udalosťami jedného a druhého bodového procesu.

Poznámka. Označme množinu

$$A = \{(x, y) : (y - x) \in (u - \frac{h}{2}, u + \frac{h}{2}], x \in B_1, y \in B_2\}.$$

Pre histogram krížovej korelácie platí $J_{12}^T(u) = (N_1 \times N_2)(A)$, kde $N_1 \times N_2$ značí dvojrozmerný bodový proces určený karteziánskym súčinom dvoch jednorozmerných bodových procesov.

Pre strednú hodnotu potom, na základe predošlej kapitoly, dostávame

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{J_{12}^T(u)\} &= \mathbb{E}(N_1 \times N_2)(A) = M_{12}^{(2)}(A) \\ &= \int_A \lambda_{12}(x, y) \, dy \, dx = \int_A \lambda_{12}(y - x) \, dy \, dx. \end{aligned}$$

Poznámka. Poznamenajme, že takmer vždy nás zaujímajú hodnoty posunutia u , ktoré sú malé vzhľadom k celkovej dĺžke dát T . Môžeme uvážiť, že pre väčšie hodnoty u (blízke T) by analýza strácala zo štatistického hľadiska význam a výpovednú hodnotu pre nedostatok dát.

Keďže teda premenné u a taktiež h volíme malé v porovnaní s hodnotou rozsahu dát T , dovoľme si ďalej v tejto kapitole z technických dôvodov zanedbať okrajové efekty histogramu. A teda pre výpočet histogramu krížovej korelácie budeme uvažovať dáta bodových procesov N_1 a N_2 nasledovne:

pre $u \geq 0$ budeme uvažovať body $x_i \in B_1 = (0, T - u]$ a body $y_i \in B_2 = \mathbb{R}$,

pre $u < 0$ budeme uvažovať body $x_i \in B_1 = (-u, T]$ a body $y_i \in B_2 = \mathbb{R}$.

Respektíve si pre histogramu krížovej korelácie dovoľme nahradiť množinu A množinou $\tilde{A} = \{(x, y) : (y - x) \in (u - \frac{h}{2}, u + \frac{h}{2}], x \in B_1, y \in \mathbb{R}\}$.

Tvrdenie 6. *Pre histogram krížovej korelácie a zmiešanú súčinovú hustotu platí nasledujúci vzťah*

$$\mathbb{E}\{J_{12}^T(u)\} = (T - |u|) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda_{12}(z + u) \, dz \approx h(T - |u|)\lambda_{12}(u).$$

Dôkaz. Pre ľubovoľné $u \geq 0$ platí

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{J_{12}^T(u)\} &= \int_{\tilde{A}} \lambda_{12}(y - x) \, dy \, dx \\ &= \int_0^{T-u} \int_{x+u-\frac{h}{2}}^{x+u+\frac{h}{2}} \lambda_{12}(y - x) \, dy \, dx \\ &= \int_0^{T-u} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda_{12}(z + u) \, dz \, dx \\ &= (T - |u|) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda_{12}(z + u) \, dz \approx h(T - |u|)\lambda_{12}(u). \end{aligned}$$

Pri výpočte integrálu sme použili substitúciu $z = y - x - u$.

Pre ľubovoľné $u < 0$ analogickým postupom dostávame taktiež

$$\mathbb{E}\{J_{12}^T(|u|)\} = (T - |u|) \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \lambda_{12}(z + u) \, dz \approx h(T - |u|)\lambda_{12}(u).$$

Čím sme ukázali platnosť tvrdenia.

Podobná idea dôkazu je uvedená v Cox [1965].



Odhad pre krížovú kovariančnú funkciu, čiže aj kovarianciu a pre ďalšie veličiny z predošlej kapitoly získame z histogramu krížovej korelácie.

Definícia. Na základe predchádzajúceho tvrdenia získavame odhad pre krížovú súčinnú hustotu druhého rádu $\lambda_{12}(u)$ ako

$$\hat{\lambda}_{12}(u) = \frac{J_{12}^T(u)}{h(T - |u|)}.$$

Taktiež získavame odhad pre krížovú kovariančnú funkciu $q_{12}(u)$ ako

$$\hat{q}_{12}(u) = \hat{\lambda}_{12}(u) - \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2, \quad (2.2)$$

kde $\hat{\lambda}_1$ a $\hat{\lambda}_2$ sú odhady intenzít.

Aby sme dospeli k riešeniu nášho problému závislosti dvoch bodových procesov, je potrebná následná diskusia výsledkov získaných z histogramu krížovej korelácie.

Poznámka. Pri analýze nás často krát zaujíma histogram krížovej korelácie len pre určité u . Histogram krížovej korelácie teda počítame pre u na množine $u \in \{-mh, -(m-1)h, \dots, 0, \dots, (m-1)h, mh\}$, kde za premennú m volíme ľubovoľné číslo. Hodnota $2m + 1$ predstavuje počet košov zvolený pre výpočet histogramu. Je to preto, že histogram krížovej korelácie zvykneme zostavovať graficky.

Vrcholom histogramu krížovej korelácie $J_{12}^T(u)$, resp. odhadu krížovej kovariančnej funkcie $\hat{q}_{12}(u)$ nazveme časť histogramu pre ktorú histogram nadobúda značne najvyššie hodnoty, pokiaľ taký existuje. Charakterizujú ho celočíselné parametre a a b udávajúce jeho šírku tak, že hodnota $(b - a + 1)$ je rovná počtu košov šírky h tvoriacich vrchol a tieto koše prislúchajú hodnotám $u \in \{ah, \dots, bh\}$.

Polohu a šírku vrcholu histogramu môžeme určiť rôznymi spôsobmi. Niekedy ho odhadneme na pohľad, môžeme ho však potvrdiť aj na základe opakovaných výpočtov histogramu, alebo určíme parametre a, b z odhadu $\hat{q}_{12}(u)$ a to ako priesečníky histogramu $\hat{q}_{12}(u)$ a hornej medze konfidenčného intervalu pre hodnotu $\hat{q}_{12}(u)$ za predpokladu nezávislosti dvoch bodových procesov.

Pokiaľ neexistuje výraznejší vrchol histogramu, čiže hodnota $\hat{q}_{12}(u)$ sa pohybuje v malom rozsahu okolo nuly (v konfidenčnom intervale) pre všetky u , môžeme predpokladať, že dva skúmané bodové procesy by mohli byť nezávislé.

Pokiaľ však spomínaný vrchol histogramu existuje a vieme ho určiť, značí to, že dva skúmané bodové procesy sú na sebe závislé. Posunutie u pri ktorom sa táto závislosť dvoch bodových procesov prejavuje následne určíme na základe stredového vrcholu, napríklad ako jeho maximum a na základe diskusie riešenia problematiky určenia závislosti.

Pri výsledkoch tejto a i ďalej spomenutých metód riešenia problému závislosti dvoch bodových procesov je potrebné dbať na ich správnu interpretáciu.

2.2 Index synchronizácie

Pre lepšiu interpretáciu a možnosť väčšej výpovednej hodnoty výsledkov analýzy histogramu krížovej korelácie boli zavedené rôzne indexy, nazývané indexy synchronizácie. Sú to väčšinou pomery plynúce z histogramu krížovej korelácie a jeho vrcholu.

Všetky indexy a veličiny v tejto podkapitole definujeme s rešpektom ku histogramu krížovej korelácie uvedenému v predošlej podkapitole.

Indexy synchronizácie definujeme na základe článku [Halliday et al., 2006, str. 1058, 1059].

Najskôr zavedieme dve pomocné veličiny charakterizujúce histogram krížovej korelácie.

Definícia. Zavedíme „očakávaný počet“

$$C_{12}^O(u) = h(T - |u|)\lambda_1\lambda_2 \left(= M_{12}^{(2)}(A)|_{N_1, N_2 \text{ nez.}} \right),$$

veličinu rovnú pravdepodobnostne očakávanej početnosti koša histogramu krížovej korelácie, teda početnosti histogramu za predpokladu, že N_1, N_2 sú nezávislé.

Ďalej zavedíme „dodatočný počet“

$$C_{12}^D(u) = h(T - |u|)q_{12}(u) \left(\approx E \{ J_{12}^T(u) \} - C_{12}^O(u) = \gamma_{12}^{(2)}(A) \right),$$

premennú rovnú takej početnosti koša histogramu, ktorá presahuje početnosť očakávanú za predpokladu nezávislosti, pre konkrétne u .

Definícia. Odhady pre veličiny $C_{12}^O(u)$ a $C_{12}^D(u)$ získame ako

$$\hat{C}_{12}^O(u) = h(T - u)\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2 \quad a \quad \hat{C}_{12}^D(u) = h(T - u)\hat{q}_{12}(u).$$

Uvedieme dva základné z viacerých indexov synchronizácie. Pre oba indexy platí implicitná závislosť na krížovej kovariančnej funkcii $q_{12}(u)$. A teda i implicitná závislosť na ostatných príbuzných charakteristikách bodových procesov. Sú preto citlivé na zmeny odchýlok u oboch bodových procesov.

Definícia. Definujme *index synchronizácie* k udávajúci pomer maxima vrcholu skutočného histogramu krížovej korelácie k očakávanej hladine tohto histogramu za nekorelovanosti bodových procesov

$$k = 1 + \max_{u \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{C_{12}^D(u)}{C_{12}^O(u)} \right\}.$$

Index k odhadneme ako

$$\hat{k} = 1 + \frac{\max_{u \in \{-mh, \dots, mh\}} \{ \hat{q}_{12}(u) \}}{\hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2}. \quad (2.3)$$

Poznámka. Index k môžeme zapísať aj pomocou ďalších vzájomne ekvivalentných výrazov. Ľahko si povšimneme, že platí

$$k = 1 + \frac{\max_{u \in \mathbb{R}} \{ q_{12}(u) \}}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{\max_{u \in \mathbb{R}} \{ \lambda_{12}(u) \}}{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Poznámka. Ak $k = 1$ alebo hodnote v blízkom okolí jednotky, môžeme predpokladať, že dva bodové procesy N_1 a N_2 sú nekorelované.

Inak, ak $k \neq 1$ tak potom k je určitou pomerovou mierou závislosti dvoch bodových procesov.

Aby sme zmenšili vplyv odchýlky spôsobenej výkyvmi pri získavaní jednotlivých konkrétnych dát, zavedieme index založený na vrchole histogramu krížovej korelácie. Tento index k' teda na rozdiel od predošlého indexu k berie v úvahu celú plochu pod vrcholom histogramu krížovej korelácie.

Definícia. *Definujme index synchronizácie k' pomocou pomeru počtu bodov v košoch vrcholu histogramu krížovej korelácie k očakávanému počtu bodov za predpokladu, že bodové procesy sú nezávislé,*

$$k' = 1 + \int_{ah-\frac{h}{2}}^{bh+\frac{h}{2}} \frac{C_{12}^D(u)}{h(b-a+1)C_{12}^O(u)} du.$$

Index k' odhadneme ako

$$\hat{k}' = 1 + \frac{\sum_{i=a}^b \hat{q}_{12}(ih)}{(b-a+1)\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2}. \quad (2.4)$$

Poznámka. Integrál $\int_{ah-\frac{h}{2}}^{bh+\frac{h}{2}} q_{12}(u) du$ vyjadruje priamu závislosť indexu k' . Pre index k' platí vzťah

$$\int_{ah-\frac{h}{2}}^{bh+\frac{h}{2}} q_{12}(u) du = (k' - 1)h(b-a+1)\lambda_1\lambda_2.$$

Existujú i ďalšie indexy vyjadrujúce rôzne iné pomery. Tieto indexy sú však taktiež závislé na $\int_{ah-\frac{h}{2}}^{bh+\frac{h}{2}} q_{12}(u) du$ a môžeme ich vyjadriť pomocou k' . Bližšie špecifikované ich môžeme nájsť napríklad v už spomenutom Halliday et al. [2006].

Vidíme teda, že uvedené indexy synchronizácie majú implicitnú závislosť priamo na krížovej kovariančnej funkcii $q_{12}(u)$ a intenzitách, čo nám jasne ukazuje vzťah medzi intenzitami bodových procesov a ich kovarianciou.

Interpretácia a použitie indexov pri analýze závislosti dvoch bodových procesov záleží do značnej miery na charaktere dát, respektíve na deji z ktorého pochádzajú a ktorého správanie skúmame.

2.3 Koherencia

V tejto podkapitole vychádzame z článkov Halliday et al. [1995] a Amjad et al. [1997].

Častokrát môžeme na deje, ktoré sme uvážili za bodové procesy, alebo na bodové procesy samotné nahliadať aj ako na nejaký náhodný signál. Takýto pohľad nás motivuje analyzovať bodové procesy pomocou spektrálnej analýzy. Spektrálna analýza je analýza založená na spektrálnom rozklade bodových procesov a to v závislosti na frekvenciách. Má mnoho metód. V tejto podkapitole uvedieme spektrálnu metódu analýzy založenej na koherencii, ktorá rieši náš problém závislosti dvoch bodových procesov na \mathbb{R} .

Poznámka. Pri aplikácii spektrálnej analýzy založenej na koherencii predpokladáme, že bodový proces je stacionárny a spĺňa tzv. zmiešavaciu podmienku, ktorá vraví, že hodnoty bodového procesu oddelené od seba veľkým časovým rozdielom sú asymptoticky nezávislé.

Spektrálna analýza prevedie bodové procesy z časovej domény na doménu frekvencie. Je viacero spôsobov transformácií na doménu frekvencie no keďže nás zaujímajú bodové procesy na \mathbb{R} , čiže bodové procesy v čase zvolíme Fourierovu transformáciu, ktorá je prehľadná a dobre známa.

Pri tejto metóde si najskôr rozdelíme interval dát na menšie úseky, pre ktoré spočítame ich Fourierovu transformáciu.

Definícia. *Interval dát I rozdelíme na L disjunktných úsekov dĺžky $H = \frac{T}{L}$. Pričom každej časti priradíme číslo $l = 1, \dots, L$.*

Definícia. *Pre bodový proces N na \mathbb{R} definujeme **konečnú Fourierovu transformáciu** l -tého úseku dĺžky H pri frekvencii ω ako*

$$d_N^H(\omega, l) = \sum_{(l-1)H \leq x_j < lH} e^{-i\omega x_j}, \quad (2.5)$$

kde $x_j, j \in \mathbb{N}$ sú body realizácie bodového procesu N na I a $l = 1, \dots, L$.

Poznámka. Zo stacionarity bodového procesu N na \mathbb{R} vieme, že náhodné veličiny $d_N^H(\omega, l)$ pre $l = 1, \dots, L$ majú rovnaké rozdelenie. Označme $d_N^H(\omega)$ náhodnú veličinu, ktorá má toto rozdelenie, predstavuje Fourierovu transformáciu nezávislú na premennej l , teda na úseku, pre ktorý ju počítame.

Analýza teda takto ďalej rozloží bodové procesy na ich frekvenčné zložky, čiže spektrum, čím nám umožňuje nahliadnuť na bodové procesy na \mathbb{R} a ich charakteristiku z inej novej perspektívy. Takto môžeme taktiež zistiť určitú periodicitu bodového procesu na \mathbb{R} alebo jeho zložiek.

Prevod bodových procesov na doménu frekvencie prináša značné výhody.

Jednou zreteľnou výhodou parametrov na doméne frekvencie je, že môžeme ľahko skonštruovať hranice spoľahlivosti pre odhady týchto parametrov, výrazy sú jednoduché a veličiny sú všeobecne nezávislé na charaktere dát ([Amjad et al., 1997, str. 69]). Vyplýva to z faktu, že pri veľkom vzorku dát sú štatistické vlastnosti konečnej Fourierovej transformácie stacionárneho procesu často jednoduchšie ako takéto vlastnosti procesu samotného, a vedú k ľahko zvládnuteľným veličinám vyhovujúcim pre konštrukciu hraníc spoľahlivosti ([Amjad et al., 1997, str. 69, 70]).

Pre vyjadrenie závislosti dvoch bodových vlastností touto analýzou definujeme rôzne parametre závislé na frekvencií. Parametre analýz na časovej a tie na frekvenčnej doméne majú doplňujúcu sa povahu čo dáva možnosť charakterizovať rôzne aspekty u rovnakých dát ([Halliday et al., 1995, str. 238]).

Definícia. *Definujeme **krížové spektrum**, $f_{12}(\omega)$, medzi dvoma bodovými procesmi N_1 a N_2 na \mathbb{R} ako*

$$f_{12}(\omega) = \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi H} \text{E} \{d_{N_1}^H(\omega) \overline{d_{N_2}^H(\omega)}\},$$

kde označením $\overline{d_{N_2}^H(\omega)}$ sa myslí komplexne združené číslo.

Poznámka. Pre $\omega \neq 0$ môžeme koherenciu $f_{12}(\omega)$ vyjadriť aj ako

$$f_{12}(\omega) = \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi H} \text{cov}(d_{N_1}^H(\omega), d_{N_2}^H(\omega)).$$

Pre krížové spektrum takto nachádzame interpretáciu v kovariancií zložiek bodového procesu N_1 a N_2 pri frekvencii ω . (Halliday et al. [1995])

Tvrdenie 7. *Odhad*

$$\hat{f}_{12}(\omega) = \frac{1}{2\pi LH} \sum_{l=1}^L d_{N_1}^H(\omega, l) \overline{d_{N_2}^H(\omega, l)}$$

je konzistentným odhadom pre krížové spektrum $f_{12}(\omega)$, t. j. $\hat{f}_{12}(\omega) \xrightarrow{P} f_{12}(\omega)$, $L \rightarrow \infty$, $H \rightarrow \infty$.

Důkaz. Keďže predpokladáme, že bodový proces spĺňa zmiešavaciu podmienku, platí slabý zákon veľkých čísel, t. j.

$$\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L d_{N_1}^H(\omega, l) \overline{d_{N_2}^H(\omega, l)} \xrightarrow{P} \text{E} \{d_{N_1}^H(\omega) \overline{d_{N_2}^H(\omega)}\}$$

pre $L \rightarrow \infty$. Limitným prechodom pre $H \rightarrow \infty$ dostávame dokazované tvrdenie. \square

Definícia. Špeciálne definujeme spektrum jedného bodového procesu na \mathbb{R} ako *auto-spektrum*,

$$f_{11}(\omega) = \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi H} \text{E} \{d_{N_1}^H(\omega) \overline{d_{N_1}^H(\omega)}\} = \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi H} \text{var}(d_{N_1}^H(\omega))$$

pre bodový proces N_1 . (Podobne $f_{22}(\omega)$ pre bodový proces N_2 .)

Odhad pre auto-spektrum získame podobne ako odhad pre krížové spektrum,

$$\hat{f}_{11}(\omega) = \frac{1}{2\pi LH} \sum_{l=1}^L d_{N_1}^H(\omega, l) \overline{d_{N_1}^H(\omega, l)}.$$

Zavedieme parameter vyjadrujúci mieru závislosti medzi bodovými procesmi.

Definícia. Definujeme *koherenciu* $|R_{12}(\omega)|^2$ medzi dvoma bodovými procesmi N_1 a N_2 na \mathbb{R} ako

$$|R_{12}(\omega)|^2 = \lim_{H \rightarrow \infty} |\text{corr}\{d_{N_1}^H(\omega), d_{N_2}^H(\omega)\}|^2.$$

Definícia. *Koherenciu* medzi dvoma bodovými procesmi N_1 a N_2 na \mathbb{R} môžeme definovať aj ako

$$|R_{12}(\omega)|^2 = \frac{|f_{12}(\omega)|^2}{f_{11}(\omega)f_{22}(\omega)}.$$

Táto definícia vedie k získaniu odhadu pre $|R_{12}(\omega)|^2$,

$$|\hat{R}_{12}(\omega)|^2 = \frac{|\hat{f}_{12}(\omega)|^2}{\hat{f}_{11}(\omega)\hat{f}_{22}(\omega)}. \quad (2.6)$$

Poznámka. Obe definície koherencie $|R_{12}(\omega)|^2$, ktoré sme uviedli sú navzájom ekvivalentné.

Poznamenajme, že z poznámky pre krížové spektrum môžeme koherenciu $|R_{12}(\omega)|^2$ definovanú podľa tohto spektra rozpísať nasledovne:

$$\begin{aligned}
|R_{12}(\omega)|^2 &= \frac{|f_{12}(\omega)|^2}{f_{11}(\omega)f_{22}(\omega)} = \frac{|\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi H} \text{cov}(d_{N_1}^H(\omega), d_{N_2}^H(\omega))|^2}{\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi H} \text{var}(d_{N_1}^H(\omega)) \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi H} \text{var}(d_{N_2}^H(\omega))} \\
&= \frac{\lim_{H \rightarrow \infty} (\frac{1}{2\pi H})^2 |\text{cov}(d_{N_1}^H(\omega), d_{N_2}^H(\omega))|^2}{\lim_{H \rightarrow \infty} (\frac{1}{2\pi H})^2 (\text{var}(d_{N_1}^H(\omega)) \text{var}(d_{N_2}^H(\omega)))} \\
&= \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{|\text{cov}(d_{N_1}^H(\omega), d_{N_2}^H(\omega))|^2}{\text{var}(d_{N_1}^H(\omega)) \text{var}(d_{N_2}^H(\omega))} \\
&= \lim_{H \rightarrow \infty} |\text{corr}\{d_{N_1}^H(\omega), d_{N_2}^H(\omega)\}|^2.
\end{aligned}$$

Teda dostávame vyjadrenie koherencie na základe korelácie.

Odhady funkcie koherencie sú užitočnou mierou lineárneho prepojenia medzi dvoma bodovými procesmi na \mathbb{R} .

Koherencia je obmedzená miera nadobúdajúca hodnôt na intervale $[0, 1]$. Platí, že ak sú dva skúmané bodové procesy nezávislé, tak potom $|R_{12}(\omega)|^2 = 0$. Ďalej v prípade zreteľne silnej lineárnej závislosti oboch skúmaných procesov je hodnota koherencie blízko k jednotke.

Ďalšou výhodou koherencie nad parametrami na časovej doméne je, že je bezjednotkovou mierou, nezávislou na jednotkách merania.

Všetky parametre závislé na frekvencií sa taktiež dajú spätnou transformáciou previesť na parametre na doméne času.

Kapitola 3

Aplikácia metód

V tejto kapitole ukážeme použitie metód analýz uvedených v tejto práci na konkrétnych dátach z praxe. Dáta, ktoré budeme skúmať pochádzajú z medicínskeho výskumu. Sú to záznamy činnosti neurónov. Aplikácia teórie dvojrozmerných bodových procesov a s nimi spojených analýz závislosti na takéto dáta je podľa môjho názoru veľmi zaujímavá a užitočná a práve ona ma inšpirovala k napísaniu tejto práce.

Dáta sme spracovávali v programe R (R Core Team [2014]).

3.1 Neuróny

Vysvetlime bližšie pôvod dát ktoré budeme skúmať.

Neurón, teda nervová bunka je základnou funkčnou a stavebnou jednotkou nervového tkaniva tvoriaceho nervovú sústavu v tele živočíchov. Nervová sústava predstavujúca sieť neurónov zachycuje, prenáša, spracováva a vyhodnocuje podnety zvonku organizmu.

Nebudeme podrobne opisovať stavbu a funkciu neurónov, iba načrtujeme ich obecný princíp. Neurón má schopnosť prijímania a odovzdávania určitého vzruchu, resp. signálu zo zmyslových buniek alebo iných neurónov. Neurón sa skladá z častí nazývaných dendrity, ktoré prijímajú impulz a následne ho vedú do tela neurónu. V tele neurónu je tento impulz vyhodnotený, na základe čoho, buď je, alebo nie je generovaný výstupný impulz. V prípade výstupného impulzu je tento impulz prevzatý axónom do jedeného či viacerých výbežkov nazývaných synapsie. Pomocou synapsii sa vzruch prenáša ďalej, do ďalších neurónov. Neurón však dokáže generovať výstupný signál aj bez vonkajších vplyvov.

Vo viacerých prácach a publikáciách bola diskutovaná redukcia výstupných impulzov neurónu na bodový proces. Na základe analýz a testov, ktoré však nie sú predmetom tejto práce, bolo ukázané, že na postupnosť vzruchov jedného neurónu za identických podmienok môžeme nahliadať ako na realizácie stacionárneho bodového procesu na \mathbb{R} . A to tak, že výstupný impulz vyslaný neurónom predstavuje udalosť bodového procesu.

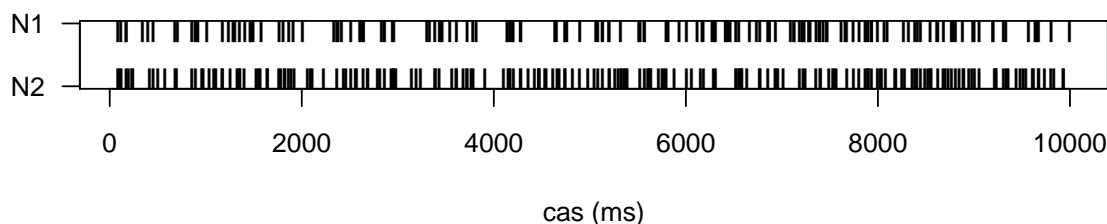
Medicína rieši problém fungovania siete neurónov a vzájomného predávania nervového signálu (impulzov) medzi nimi. Pri riešení tohto problému pomáhajú metódy uvedené v prvých dvoch kapitolách tejto práce. Zaujímá nás existencia závislosti medzi časmi výskytu impulzov dvoch neurónov. A nemenej nás zaujíma

i časová miera takejto závislosti. Problém existencie tejto závislosti riešime ako problém existencie závislosti medzi dvoma bodovými procesmi na \mathbb{R} .

Analýzu uskutočníme najskôr na reálnych a potom na nasimulovaných dátach.

3.2 Reálne dáta

Prvé dáta tvoria dva časové záznamy spontánnych aktivít dvoch rôznych neurónov. Jedná sa o experimentálne merania v sluchovej štruktúre stredného mozgu potkana. Záznamy pochádzajú z pokusov v laboratóriách *Ústavu experimentálnej medicíny AV ČR* a za ich poskytnutie ďakujeme RNDr. Jiřímu Popelářovi, CSc. Jednotkou záznamu dát je 1 ms. Dáta boli zaznamenávané simultánne z oboch neurónov a to v časovom intervale 0–10 000 ms. Veľkosť intervalu je teda $T = 10\,000$. Počas zaznamenávania nastalo 205 impulzov na prvom neuróne a 158 impulzov na druhom. Dáta vo forme časov výskytu udalostí (impulzov) sú znázornené na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Reálne dáta – výskyty impulzov dvoch neurónov

Ako sme už spomínali na takéto dáta môžeme nahliadať ako na dve realizácie dvoch rôznych bodových procesov na množine $B = (0, 10\,000]$, kde vysielanie impulzov prvého neurónu predstavuje realizácie bodového procesu N_1 a vysielanie impulzov druhého neurónu predstavuje realizácie bodového procesu N_2 . Potom $N_1(B) = 205$ a $N_2(B) = 158$. Dáta sú záznamami spontánnej aktivity, preto u oboch procesov predpokladáme stacionaritu.

Budeme skúmať existenciu závislosti medzi časmi impulzov prvého a druhého neurónu. Konkrétne závislosť časov impulzov druhého neurónu na časoch impulzov na prvom neuróne. Inak povedané, zaujíma nás, či bodový proces N_1 vedie proces N_2 .

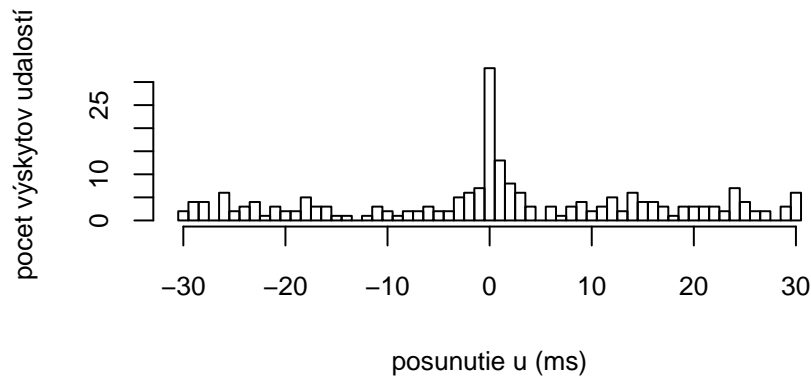
Prvú metódu analýzy, ktorú použijeme je analýza histogramu krížovej korelácie. Najskôr sme spočítali rozdiely časov impulzov prvého a druhého neurónu a na základe definície (2.1) vytvorili histogram krížovej korelácie $J_{12}^T(u)$. Parameter h pre šírku koša sme zvolili $h = 1$ ms. Na obrázku 3.2 je graf časti tohto histogramu, a to pre rozdiely časov impulzov ležiace v intervale od $-30,5$ ms do $30,5$ ms. Teda histogram krížovej korelácie pre posunutie $u \in \{-30, \dots, 0, \dots, 30\}$. Rozdiely

mimo tento interval nás nezaujímajú, pretože nás zaujíma u v okolí nuly, pri ktorom sa prejaví závislosť. Na obrázku 3.2 vidíme, že histogram nadobúda výrazne (neočakávane) vyšších hodnôt v blízkom okolí nuly.

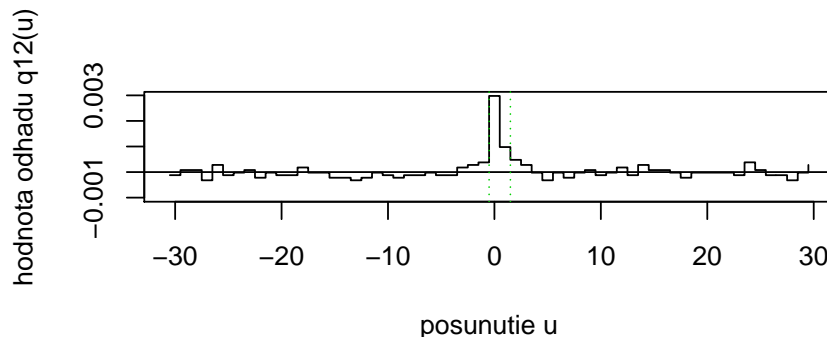
Ďalej sme vypočítali odhad $\hat{\lambda}_{12}(u)$ krížovej súčinovej hustoty druhého rádu a odhad intenzít $\hat{\lambda}_1$ a $\hat{\lambda}_2$. Na základe týchto odhadov sme odhadli krížovú kovariančnú funkciu $q_{12}(u)$ z definície (2.2). Na obrázku 3.3 je skokový graf tohto odhadu pre spomínané $u \in \{-30, \dots, 0, \dots, 30\}$.

Vrchol histogramu sme určili na pohľad. Histogram krížovej korelácie $J_{12}^T(u)$ zjavne nadobúda výrazne vyšších hodnôt pre $u \in \{0, 1\}$. Je to časť grafu vymedzená intervalom $(-0,5, 1,5]$. Teda určíme parametre $a = 0$ a $b = 1$. Podotkneme, že $\hat{q}_{12}(u)$ nadobúda maximum pre $u = 0$.

Z histogramu krížovej korelácie a odhadu krížovej kovariančnej funkcie môžeme na základe vrcholu histogramu predpokladať závislosť dvoch skúmaných neurónov pri $u \in (-0,5, 1,5]$. Premenná u tu predstavuje dobu reakcie impulzov druhého neurónu na impulzy vyvolané prvým neurónom.



Obrázek 3.2: Histogram krížovej korelácie $J_{12}^T(u)$ pre reálne dáta

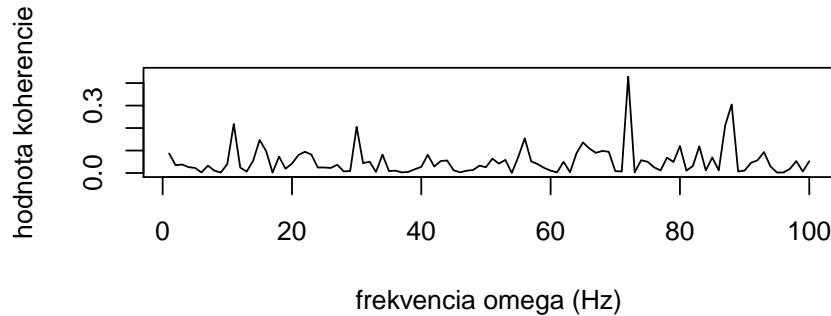


Obrázek 3.3: Graf odhadu $\hat{q}_{12}(u)$ funkcie krížovej kovariancie pre reálne dáta

Keďže existuje vrchol histogramu krížovej korelácie, môžeme určiť indexy synchronizácie. Index k sme odhadli na základe definície (2.3) ako $\hat{k} \doteq 10,253$. Index

k' sme odhadli na základe definície (2.4) a vrcholu histogramu ako $\hat{k}' \doteq 7,146$. Oba indexy vyjadrujú koľko-násobne je navýšená početnosť najpočetnejšej časti histogramu, teda „dodatočnej“ časti oproti očakávanej početnosti. Pri porovnaní oboch indexov vidíme, že $\hat{k}' < \hat{k}$, pretože k' je akýmsi priemerom berúcim v úvahu celý vrchol histogramu.

Ďalšou analýzou, ktorú sme aplikovali na dáta je analýza založená na koherenciách. Záznam dĺžky $T = 10\,000$ sme rozdelili na 20 úsekov, $L = 20$, dĺžky $H = 500$. Pre každý z týchto 20-tich úsekov sme spočítali jeho Fourierovu transformáciu (viz definícia (2.5)). Následne sme odhadli krížové spektrum $f_{12}(\omega)$ a spektrá bodových procesov $f_{11}(\omega)$ a $f_{22}(\omega)$ a koherenciu $|\mathbb{R}_{12}(\omega)|^2$ vzhľadom na definíciu (2.6). Na obrázku 3.4 je znázornený graf tohto odhadu koherencie pre $\omega \in [0,100]$ Hz. Zaujímavá je pre nás hodnota pri frekvenci $\omega = 72$, kde odhad ostro dosahuje až $|\hat{R}_{12}(\omega)|^2 = 0,4$. Odhad ďalej nadobúda výrazne vyšších hodnôt pri frekvenciách $\omega \in \{10, 30, 88\}$.



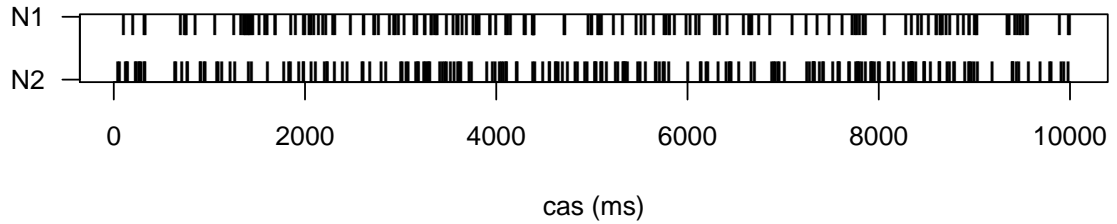
Obrázek 3.4: Graf odhadu koherencie $|\hat{R}_{12}(\omega)|^2$ pre reálne dáta

Všetky vyššie uvedené výsledky vykonaných metód analýz nám potvrdili silnú závislosť medzi časmi impulzov skúmaných neurónov. Môžeme na základe nich usudzovať, že prvý neurón vedie druhý neurón a to tak, že na seba reagujú vo veľmi krátkom časovom intervale.

3.3 Nezávislé dáta

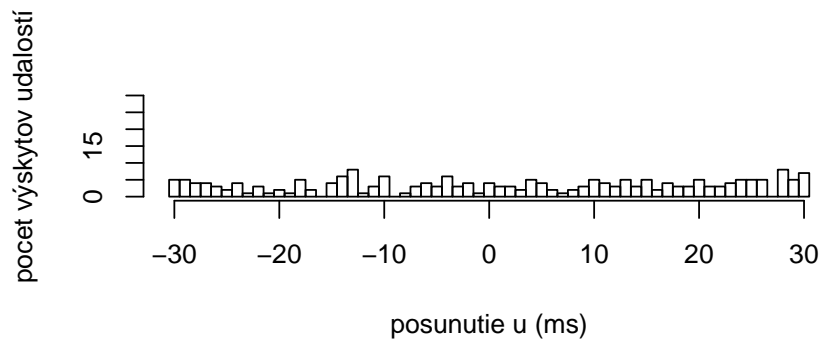
Druhé dáta predstavujú dve vzájomne nezávisle nasimulované realizácie bodových procesov. Dáta sme zostrojili, aby sme demonštrovali priebeh a výsledky analýz závislosti v prípade dát dvoch bodových procesov, ktoré sú nezávislé.

Tieto realizácie sme simulovali tak, aby tvorili „nezávislú alternatívu“ k prvým dátam. Za prvé sú to realizácie na intervale $B = (0, 10\,000]$, takže $T = 10\,000$. Za druhé počet bodov, resp. udalostí bodového procesu sa pri týchto realizáciách zhoduje s počtami udalostí dvojice prvých dát, takže $N_1(B) = 205$ a $N_2(B) = 158$. Udalosti sme simulovali nezávisle z rovnomerného rozdelenia na B . (Poznamenajme, že takto zostavené dáta môžeme považovať za realizácie dvoch binomických bodových procesov.) Nasimulované dáta sú zobrazené na obrázku 3.5.



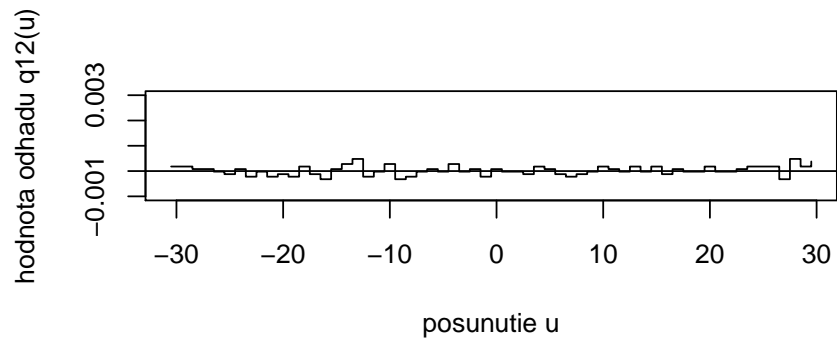
Obrázek 3.5: Nasimulované dáta – výskyty impulzov dvoch neurónov

Na dáta aplikujeme analýzu histogramu krížovej korelácie. Podobne ako v predošlom prípade, sme odhadli príslušné charakteristiky tejto analýzy a zostrojili tak histogram krížovej korelácie $J_{12}^T(u)$ (obrázok 3.6) a skokový graf odhadu $\hat{q}_{12}(u)$ krížovej kovariančnej funkcie (obrázok 3.7). Z oboch grafov je vidieť, že ani histogram ani odhad $\hat{q}_{12}(u)$ na celom intervale nenadobúdajú žiadnych výrazne väčších alebo menších hodnôt. Teda vrchol histogramu krížovej korelácie neexistuje a ne našli sme žiadnu závislosť medzi dvoma neurónmi. Môžeme sa teda domnievať, že sú nezávislé.

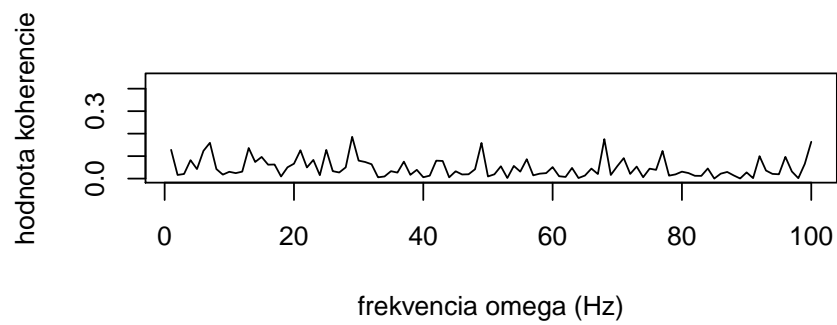


Obrázek 3.6: Histogram krížovej korelácie $J_{12}^T(u)$ pre simulované dáta

Aj pre tieto dáta sme predviedli spektrálnu analýzu založenú na koherencií. Charakteristiky tejto analýzy sme odhadli rovnakým postupom ako v predošlom prípade. Graf odhadu koherencie $|\hat{R}_{12}(\omega)|^2$ je znázornený na obrázku 3.8. Vidíme však, že hodnoty grafu koherencie sa pohybujú blízko nule a neprekročia hornú hranicu 0,2. Odhad koherencie nenadobúda žiadne extrémne hodnoty a to na celom intervale.



Obrázek 3.7: Graf odhadu $\hat{q}_{12}(u)$ funkcie krížovej kovariancie pre simulované dáta



Obrázek 3.8: Graf odhadu koherencie $|\hat{R}_{12}(\omega)|^2$ pre simmuloované dáta

Záver

Úvodom tejto práce sme stanovili samotný bodový proces, jeho základné vlastnosti a charakteristiky, a to stacionaritu, mieru intenzity a momentové miery vyšších rádov (špeciálne druhého rádu), a ich vlastnosti. Potom sme definovali dvojrozmerný bodový proces a taktiež zavedli jeho základné charakteristiky, a to krížovú momentovú mieru druhého rádu a krížovú mieru kovariancie a ukázali ich vlastnosti.

Takmer v celej tejto práci sme sa zaoberali špeciálne stacionárnymi bodovými procesmi na \mathbb{R} , ktorých realizácie sú najčastejším predmetom výskumu.

Ďalej sme sa zaoberali metódami analýz dát realizácie dvoch bodových procesov. Ako prvú sme uviedli metódu založenú na histograme krížovej korelácie, ktorý je jedným zo základných analytických nástrojov k zisteniu korelácie medzi bodovými procesmi. K tomuto histogramu sa viažu aj indexy synchronizácie, vyjadrujúce závislosť pomocou rôznych pomerov. Ďalej sme uviedli spektrálnu analýzu založenú na koherencii, ktorá je analýzou na doméne frekvencie.

Nakoniec sme všetky tieto teoretické poznatky aplikovali na reálne dáta činnosti dvoch neurónov. Pre tieto dáta sme spočítali a vykreslili histogram krížovej korelácie, indexy synchronizácie a koherenciu. Všetky tieto analýzy nám ukázali silnú závislosť medzi časmi impulzov týchto neurónov a taktiež nám ukázali, že neuróny na seba vzájomne reagujú vo veľmi krátkom časovom intervale. Analýzu sme demonštratívne aplikovali aj na nezávisle simulované dáta dvoch bodových procesov. Tu sme taktiež odhadli charakteristiky a na základe grafov sme úsúdili o čakávanú nezávislosť.

V tejto práci sme však pri analýze dát už ďalej neuskutočňovali štatistické testy, ako napr. test na nezávislosť. To už by siahalo mimo rámec témy práce i keď pre skutočný kompletný rozbor dát je žiadúce štatistické testy vykonať.

Literatura

- AM Amjad, DM Halliday, JR Rosenberg, and BA Conway. An extended difference of coherence test for comparing and combining several independent coherence estimates: theory and application to the study of motor units and physiological tremor. *Journal of Neuroscience Methods*, 73(1):69–79, 1997.
- DR Brillinger. Nerve cell spike train data analysis: a progression of technique. *Journal of the American Statistical Association*, 87(418):260–271, 1992.
- DR Cox. On the estimation of the intensity function of a stationary point process. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 27(2):332–337, 1965.
- DM Halliday, JR Rosenberg, AM Amjad, P Breeze, BA Conway, and SF Farmer. A framework for the analysis of mixed time series/point process data—theory and application to the study of physiological tremor, single motor unit discharges and electromyograms. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, 64(2):237–278, 1995.
- DM Halliday, JR Rosenberg, P Breeze, and BA Conway. Neural spike train synchronization indices: definitions, interpretations, and applications. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on*, 53(6):1056–1066, 2006.
- Z Prášková and P Lachout. *Základy náhodných procesů I*. Druhé vydání. Matfyzpress, Praha, 2012. ISBN 978-80-7378-210-8.
- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2014. URL <http://www.R-project.org/>.
- J Rataj. *Bodové procesy*. Druhé vydání. Karolinum, Praha, 2006. ISBN 80-246-1182-1.
- RD Reiss. *A Course on Point Processes*. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 1993. ISBN 0-387-97924-7.