

Oponentský posudek bakalářské práce

M. Hubatová: Transformace \mathcal{Z} a její aplikace na řešení diferenčních rovnic

Práce se zabývá výkladem teorie transformace \mathcal{Z} . Použití většiny tvrzení je ilustrováno na konkrétních příkladech a samostatnou kapitolu pak tvoří aplikace transformace \mathcal{Z} na řešení lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty.

Transformace \mathcal{Z} je vlastně vcelku jednoduchý kalkulus (založený ovšem na výsledcích teorie funkcí komplexní proměnné) pracující s funkcemi holomorfními v nekonečnu. Nabízí se zde tedy přirozená otázka, proč se nepracuje raději s funkcemi holomorfními v nule – celá teorie prezentovaná v práci by pak byla mírně jednodušší.

Práce je napsána velmi pěkně a příjemně se čte. Nicméně předpokládám, že cílem práce bylo korektně matematicky vyložit celou teorii, a zde vidím jeden podstatný nedostatek: Problém spočívá v Poznámce 3. Není totiž vůbec vysvětleno, jak se na množině $\mathcal{H}(\infty)$ vyrobí struktura vektorového prostoru. To totiž není tak triviální, jak je uvedeno v práci – jsou zde problémy s definičními obory a proto je třeba faktorizovat a používat opět výsledky z komplexní analýzy. Nakonec nejjednodušší způsob, jak to udělat, je právě ztotožnit funkce z $\mathcal{H}(\infty)$ s posloupnostmi koeficientů Laurentova rozvoje v 0 (neboli provést vlastně transformaci \mathcal{Z}^{-1}), pak by ovšem byla podstatná část teorie v práci založena na „důkazu kruhem“ (pokud bychom vydávali Větu 10 za větu a ne za definici). Ostatně nedotaženost definičních oborů se táhne celou prací; např. Věta 29 ani neplatí!

Kromě nedostatečné promyšlenosti celé problematiky mi tento problém vadí ještě z jednoho důvodu: Celá práce je založena na výsledcích funkcí teorie komplexní proměnné známých ze základní přednášky, takže jakmile se objeví nějaká hlubší myšlenka, je zde pouze odkaz na základní přednášku či literaturu. To je v pořádku, ale práce pak obsahuje jen velmi jednoduché a triviální myšlenkové obraty a jediné místo, kde je potřeba si něco hlouběji promyslet, přešla autorka bez povšimnutí.

Dále nechápu důkaz Věty 38 a zdá se mi krajně podezřelé, že ačkoli se mluví o dělení polynomů, což je algebraická operace, tak ve formuli v důkazu je nekonečná řada, což je analytická operace.

Formální a jazyková úroveň práce je výborná.

Dle mého názoru předložená práce rozhodně splňuje požadavky, aby byla uznána jako bakalářská práce oboru Obecná matematika.

Některé další nedostatky a neobratnosti:

- 1) str. 4: Neřeší se konzistence definic pojmů v Definicí 2.
- 2) str. 4 dole: Místo $2 \max(|a|M, |b|N)$ stačí $|a|M + |b|N$.
- 3) str. 5 dole: Má být $R \in [|y_0|, \infty]$ místo $R \in [y_0, \infty]$.
- 4) str. 6: Na konci důkazu Věty 6 má být $\mathcal{E}(0, \max_{z \in C_\rho} |F(z)|, \max\{\ln \rho, 0\})$ namísto $\mathcal{E}(\max_{z \in C_\rho} |F(z)|, \ln \rho)$ (2 chyby).
- 5) str. 6: V Definicí 7 je číslo R je nazýváno konvergenčním poloměrem *řady*, ale posléze se tam mluví o konvergenčním poloměru *posloupnosti*.
- 6) str. 6: V Definicí 8 se za definiční obor obrazu transformace bere celé mezikruží konvergence, ale dále v příkladech se tento definiční obor příliš neřeší.
- 7) str. 7: V poznámce za Definicí 8 by spíše mělo být něco jako „...k nalezení obrazu v explicitním tvaru ...“ s vysvětlením, co je tím míněno.
- 8) str. 7: Příklad 9 platí i pro $a = 0$.
- 9) str. 7, důkaz Věty 10: Vzorec (2.1) neplyne (jen) z věty o jednoznačnosti.

- 10) str. 8 a dále: Většinou je zbytečně dokazována \mathcal{Z} -transformovatelnost posloupnosti: tento fakt vyplyne z výpočtu a Věty 6. Konkrétně je to zbytečné v Příkladech 11 a 18 a ve Větách 13, 15, 17, 28 a 31.
- 11) str. 9, důkaz Věty 13: Není dokázáno, že posunutá posloupnost patří do $\mathcal{T}(R)$ (je tam jen dolní odhad).
- 12) str. 10, Příklad 14: Opět není odůvodněno, proč $R = 1$.
- 13) str. 10, důkaz Věty 15: Opět se neřeší poloměr konvergence.
- 14) str. 10, důkaz Věty 15: Pokus o korektnost pomocí formalismu s posloupností $1(n-k)$ je stejně nedotažený, např. výraz $f_{-1} \cdot 1(-1)$ stejně není definovaný.
- 15) str. 11: Příklad 16 platí i pro $a = 0$.
- 16) str. 11: V důkazu Věty 17 má být $\mathcal{E}(n_0k, M, s/k)$ místo $\mathcal{E}(n_0, M, s/k)$; navíc je to stejně zbytečné (viz bod 10)). Opět se zde nedokazuje, že posloupnost $\{f_m\}_{m=0}^{\infty}$ patří do $\mathcal{T}(R^{\frac{1}{k}})$.
- 17) str. 12: V Příkladu 18 (i) se neřeší poloměr konvergence.
- 18) str. 12: V důkazu Věty 19 má být všude $\ln|\lambda|$ místo $\ln \lambda$. Navíc jsou ty odhady opět zbytečné.
- 19) str. 12: Jestliže autorka považuje za nutné uvést zde úmluvu $0^0 = 1$, pak měla již na začátku práce také zavést úmluvu $\infty^0 = 1$.
- 20) str. 13: Značení členů konvoluce není vhodné: uvažujeme-li např. posloupnosti $f_n = g_n = n$, co pak znamená výraz $2 * 2$?
- 21) str. 15: Příklad 24 platí i pro $a = 0$.
- 22) str. 15, Definice 25: Je důvod pro zavádění nového termínu místo označení posloupnost částečných součtů řady?
- 23) str. 16, Věta 29: Tvrzení $\{\Delta^k f_n\} \in \mathcal{T}(R)$ neplatí!
- 24) str. 16, důkaz Věty 29: Bylo by vhodnější napsat „použijeme Lemma 28“ místo „použijeme (3.6)“, aby bylo jasné, co je G .
- 25) str. 18 nahoře: Neplyne z (3.9), ale z indukčního předpokladu.
- 26) str. 18: U $\Delta^m f_n$ je rozlišení pro $n = 0$ zbytečné a navíc ve zdrojovém textu chybí dolary.
- 27) str. 18: V Příkladu 30 naopak je třeba nejprve dokázat transformovatelnost posloupnosti a též že patří do $\mathcal{T}(1)$!
- 28) str. 18, důkaz Věty 31: Nedokazuje se příslušnost k $\mathcal{T}(R)$.
- 29) str. 19: Ve formuli (3.14) na konci chybí $= \lambda$.
- 30) str. 21: Příklad 36 platí i pro $a = 0$.
- 31) str. 23: V prvním odstavci sekce 4.3 má být $\mathcal{Z}^{-1}(R)$ místo $\mathcal{Z}^{-1}(F)$.
- 32) str. 25: Důkaz Věty 42 neplyne z (iv) \Rightarrow (i), protože tam důkaz vzorce (2.1) není.
- 33) str. 25: V Poznámce 43 má být „integrál funkce $z \mapsto F(z)z^{n-1}$ “ místo „integrál funkce F “.
- 34) str. 25: Ve formuli (4.3) má být k místo K .
- 35) str. 25: V bodě (ii) je čárka za \mathbb{C} navíc.
- 36) str. 28: Ty počáteční podmínky v Lemmatu 48 jsou zbytečné.
- 37) str. 28 úplně dole vlevo: Má být \leq místo $=$.
- 38) str. 27, 29, 30: Není uvedeno, pro jaká z platí formule po transformaci rovnice.
- 39) str. 30: Bylo by vhodné připsat, že (5.8) plyne z Věty 29.
- 40) str. 30 úplně dole: Má být buď $n/2(n+1+n-1)1(n-2) + \delta_n^1$, nebo celé vynechat.
- 41) str. 31: Má být z^{n-1} místo z^{n-2} .

3.9.2014
Michal Johanis