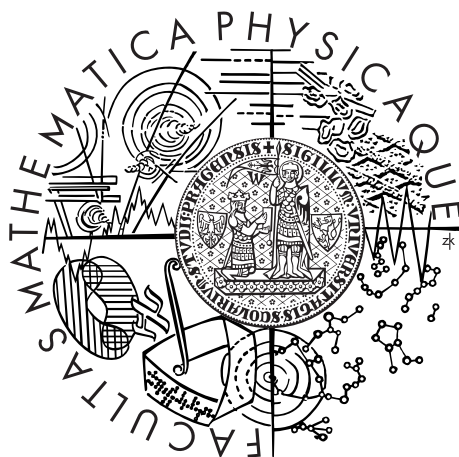


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jakub Pejcha

Magnetická pole proudových smyček kolem černých děr

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2014

Chtěl bych v první řadě velmi poděkovat vedoucímu mé práce, docentu Oldřichu Semerákovi, za veškeré poskytnuté rady a úpravy k mé práci a za jeho obrovskou trpělivost se mnou. Také chci hodně poděkovat doktoru Tomáši Ledvinkovi, za naučení mě práce s programem MAPLE a za jeho velmi cenné rady a připomínky týkající se zpracování tématu s použitím tohoto programu. Dále děkuji své rodině, za obrovskou podporu v celém mém dosavadním studiu, mým přátelům a v neposlední řadě též mé přítelkyni Lence, díky které jsem měl dobrou náladu a klidnější mysl, bez níž by na práci nebylo možno efektivně pracovat.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Magnetická pole proudových smyček kolem černých děr

Autor: Jakub Pejcha

Katedra: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc., ÚTF MFF UK

Abstrakt: Magnetické pole kruhové ekvatoriální proudové smyčky kolem Schwarzschildovy (či Kerroy) černé díry bylo v literatuře studováno na vícero místech a výsledky byly vyjádřeny různým způsobem. V této práci podáváme přehled jejich odvození, ilustrujeme je na konkrétních případech a tyto příklady pak porovnáváme. Naznačujeme také analytické srovnání některých formulí. Publikované vzorce dle očekávání vedou ke stejným výsledkům, ale některé z nich jsou pro numerické vyhodnocení výhodnější než jiné.

Klíčová slova: černé díry, magnetická pole, akreční disky

Title: Magnetic fields of current loops around black holes

Author: Jakub Pejcha

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: doc. RNDr. Oldřich Semerák, DSc., Institute of Theoretical Physics

Abstract: Magnetic field of equatorial current loop around Schwarzschild (or Kerr) black hole has been studied in many papers and solutions expressed in different forms. In this work we summarize derivations of some of these solutions, illustrate them on specific examples and compare these examples. We also indicate analytic comparison of some of the formulas. Published formulas lead, as expected, to same results, but some of them are more convenient for numerical evaluation.

Keywords: black holes, magnetic fields, accretion discs

Obsah

1	Úvod	3
1.1	Obecná teorie relativity a černé díry	3
1.2	Magnetická pole kolem černých děr	4
2	Pole proudové smyčky kolem Schwarzschildovy černé díry	7
2.1	Smyčka v plochem prostoročase	7
2.2	Řešení Pettersona	12
2.3	Řešení Bičáka a Dvořáka	19
2.4	Limita řešení Chitreho a Vishveshwary pro Kerrovu černou díru .	26
2.5	Limita řešení Mosse pro Kerrovu černou díru	31
2.6	Limita řešení Pettersona pro Kerrovu černou díru	35
2.7	Limita řešení Znajeka pro Kerrovu černou díru	41
2.8	Analytické srovnání studovaných řešení	43
2.9	Numerické srovnání studovaných řešení	46
3	Dodatky	51
3.1	Spinově vážené sférické harmoniky	51
3.2	Newmanův-Penroseův formalismus	52
4	Závěr	55
	Seznam použité literatury	57

1. Úvod

1.1 Obecná teorie relativity a černé díry

Obecná teorie relativity, elegantní “minimální” varianta geometrické teorie gravitace, je i po 99 letech od svého dokončení teoreticky inspirativní, ale také mimořádně úspěšná jako nástroj pro pochopení astrofyzikálních procesů. Její hlavní předpovědi, totiž existence černých děr, existence gravitačních vln a teorie dynamického vesmíru, jsou téměř bezvýhradně přijímány, ačkoli o černých dírách i gravitačních vlnách zatím stále svědčí jen nepřímá pozorování, a ačkoli při studiu vesmíru v největším měřítku nás tato teorie nutí připustit, že povaha většiny kosmické hmoty je nám neznámá.

Historie nejnámější relativistické předpovědi, černých děr, začíná jen necelý měsíc po Einsteinově “závěrečné” přednášce 25.11.1915: Karl Schwarzschild ještě do konce roku (a o pár měsíců později také Johannes Droste) předložil první netriviální (neploché), sféricky symetrické řešení vakuových polních rovnic, o němž se v dalších letech ukázalo, že jeho zdrojem může ve speciálním případě být černá díra, tedy oblast obklopená horizontem. O více než 50 let později pak Israel dokázal, že Schwarzschildova metrika popisuje *jediný možný* vakuový a sféricky symetrický obecně relativistický prostoročas.

Schwarzschildovo řešení záhy zobecnil Reissner (později nezávisle také Nordström) na případ navíc elektricky nabitý. Diskuse o černých dírách (tehdy o významu “Schwarzschildovy singularity”) však vyvolalo zejména až Chandrasekharovo zjištění z roku 1930, že navzdory Pauliho vylučovacímu principu nemůže ani tlak relativistického degenerovaného fermionového plynu vzdorovat gravitaci, pokud hmotnost tělesa, které “podpírá”, přesáhne zhruba 1.5 hmotnosti Slunce. I přední příznivci nové fyziky (např. Eddington či Landau) představu úplného gravitačního kolapsu odmítali, a sám Einstein ji v roce 1939 zavrhl na základě analýzy speciálního modelu sféricky symetrického zdroje. V témže roce sice Oppenheimer a Snyder publikovali první plně relativistické řešení pro úplný gravitační kolaps, avšak pozornost se právě tou dobou přesunula naopak k výbuchům, takže výzkum extrémně silných gravitačních polí se znovu více rozběhl až v 50. letech.

Studium černých děr bylo nesmírně urychleno v roce 1963, v důsledku objevu Kerrova řešení Einsteinových rovnic a v důsledku objevu kvasarů. Zpočátku zdánlivě nesouvisející čistě matematický a čistě observační výsledek od té doby vymezují obor *relativistické astrofyziky*, který se zabývá modelováním procesů ve velmi silných gravitačních polích kolem extrémně kompaktních objektů (tedy černých děr a neutronových, případně kvarkových hvězd) a jejich možných observačních projevů. Během zhruba 12 let od přelomového roku pak byla získána většina výsledků, ze kterých vychází dnešní teorie černých děr i její aplikace v astrofyzikálním kontextu. Těmito aplikačními oblastmi jsou především jádra většiny galaxií (speciálně té naší) a některé rentgenové dvojhvězdy. Historie výzkumu černých děr je detailně popsána v knize [1].

1.2 Magnetická pole kolem černých děr

Ve skutečném fyzikálním vesmíru existují i jiná než gravitační pole. V obecné relativitě mají tato pole buď povahu zdroje, který ovlivňuje prostoročasovou geometrii, nebo jsou studována jako *testovací*, tj. “žijící na pozadí”, v předem zadaném prostoročase. Jediným dalším fundamentálním polem dalekého dosahu (kromě gravitačního) je pole elektromagnetické, takže je přirozené studovat v rámci obou přístupů právě jeho prostoročasové konfigurace. Důvody jsou jak čistě teoretické, tak astrofyzikální. Z hlediska teorie je zajímavé studovat, jak silně zakřivený prostoročas působí na přítomné elektromagnetické pole, nebo naopak, jaký vliv na geometrii prostoročasu má velmi silné elektromagnetické pole. Toto vzájemné ovlivnění obou polí je obzvláště ilustrativní v nestacionárním případě, kdy elektromagnetické vlny indukují gravitační vlny a naopak, nebo kdy může např. docházet k extrakci energie z černé díry protřednictvím elektromagnetického vlnění (efekt tzv. superradiance), avšak i ve stacionárních situacích byly zjištěny nové efekty, jako například vymizení magnetického toku horizontem v případě, kdy se černá díra blíží extrémnímu stavu (např. extrémně rotující Kerrova černá díra), tedy jakási obdoba Meissnerova jevu u supravodičů (viz např. [2] a odkazy tam uvedené).¹

Ve vesmíru se prakticky nevyskytují silně elektricky nabitá tělesa, avšak vyskytují se elektrické proudy, proto se “kosmická elektrodynamika” většinou omezuje na pole magnetická.² Speciálně v prostoročasech černých děr jsou magnetická pole studována především v souvislosti s modely akrečních disků. Skutečně, látka přitahovaná černou dírou a přitom mající (vůči díře) nenulový orbitální moment hybnosti, tedy “poháněná” gravitační a odstředivou silou, typicky vytváří kolem díry disk nebo toroid, v rámci něhož pak postupně klesá, neboť její sousední vrstvy v důsledku silné nehomogenity pole obíhají odlišnými rychlostmi, dochází k jejich viskóznímu tření, a tím k disipaci energie a transportu momentu hybnosti do vzdálenějších oblastí. Látka akrečního disku je globálně elektricky neutrální, avšak vodivá (ionizovaná), takže se má za to, že kombinací jejího oběhu a “konvekce” způsobené viskozitní disipací energie dochází k “efektu dynama” (analogicky případu jiných astronomických těles jako Země nebo hvězd) a k vytvoření snad i velmi silného magnetického pole. Efektivně si pak lze akreční disk představit jako spojitě rozprostřenou soustavu vodivých smyček, protékaných extrémně silným proudem.

Právě z takto zjednodušené představy akrečního disku budeme vycházet v této práci. Navíc přidáme předpoklady, že kosmologická konstanta je nulová, že akreční disk a jím generované magnetické pole jsou testovací a že centrální černá díra nerotuje, tedy problém budeme řešit ve Schwarzschildově prostoročase. Úvodní úlohou bude nalezení magnetického pole kruhové ekvatoriální proudové smyčky. V literatuře byla tato úloha řešena několikrát a výsledky byly vyjádřeny v různých tvarech (viz zejména články [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]), které na sebe jednoduše nepřecházejí a jejichž ekvivalence tedy není “vidět”. V další kapitole tyto výsledky projdeme, nejdříve vždy nastíníme jejich odvození a poté ilustrujeme jednotlivé

¹Je zcela mimo naše možnosti uvádět v tomto úvodu úplnější přehled literatury, avšak zmíníme aspoň některé práce zdejší relativistické skupiny.

²U podobných výroků je však třeba dát pozor na to, že pojmy elektrického a magnetického pole nejsou invariantní, tedy že různí pozorovatelé mohou dané elektromagnetické pole vnímat do značné míry rozdílně.

formule na magnetických polích spočítaných podle nich v konkrétních situacích a obrázky porovnáme; kromě toho se pokusíme i o analytické srovnání některých vzorců. V obou případech využijeme programu MAPLE, který umožňuje algebraické manipulace, ale také numerické výpočty s grafickým výstupem.

Poznamenejme, že astrofyzikálně motivované studium magnetických polí v okolí kompaktních objektů již dnes není omezeno na velmi zjednodušené (vysoce symetrické) modely jako ten, který uvažujeme v této práci: úroveň dnešní výpočetní techniky dovoluje numericky zvládnout i velmi sofistikované 3D magnetohydrodynamické simulace akrečních toků, v nichž jsou případně zahrnuty i relevantní mikroskopické procesy a generované záření. Obdobné kódy jsou využívány též k modelování “jetů” – kolimovaných výtrysků, které často z akrečních systémů vycházejí podél jejich rotační osy a v jejichž generaci, stabilitě a směrovosti zřejmě magnetická pole rovněž hrají podstatnou roli.

Z dalších problémů spojených s magnetickým polem akrečních disků ještě uvedme klíčovou otázku stability (viz např. [10]), která se ostatně objevuje již v souvislosti se samotným efektem dynama (tzv. magnetorotační nestabilita), a problematiku magnetických rekonexí a jejich observačních implikací [11]. Studium magnetických polí kolem kompaktních objektů však není vázáno jen na akreční disky. Významnou oblastí jsou zvláště magnetická pole kolem neutronových hvězd, jejich interakce s látkou a modelování pulsarů. Dalším tématem je pohyb nabitých testovacích částic kolem kompaktních objektů za přítomnosti (jak vlastního, tak vnějšího) magnetického pole. Ukazuje se, že Lorentzova síla může vést k pohybu velmi odlišnému od geodetického, včetně observačních důsledků [12]; speciálním aspektem je výskyt chaotického chování [13]. Studovány jsou také situace, kdy (vnější) magnetické pole není vůči kompaktnímu objektu symetrické [14, 15] a/nebo kdy se objekt “vůči poli” pohybuje [16].

2. Pole proudové smyčky kolem Schwarzschildovy černé díry

2.1 Smyčka v plochém prostoročase

Nejprve uvedeme pro srovnání výpočet magnetického pole kolem nenabitě kruhové proudové smyčky v plochém prostoročase, tedy když není přítomna černá díra. Metod řešení je více, například s využitím Biotova-Savartova zákona. Zde budeme vycházet z řešení podaného v článku [3].

Dále v celé práci užíváme geometrizovaných jednotek, v nichž rychlost světla ve vakuu a gravitační konstanta jsou rovny jedné.

V případě plochého prostoročasu popsaného metrikou ve sférických souřadnicích

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.1)$$

mají Maxwellovy rovnice tvar

$$F_{\mu\nu,\alpha} + F_{\alpha\mu,\nu} + F_{\nu\alpha,\mu} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}(|g|^{1/2}F^{\mu\nu}) = 4\pi|g|^{1/2}J^\mu, \quad (2.3)$$

kde čárka značí příslušnou parciální derivaci, $|g|^{1/2}$ je determinant kovariantní matice metriky, v našem případě $|g|^{1/2} = r^2 \sin\theta$, a $F_{\mu\nu}$ je tenzor elektromagnetického pole, daný pomocí vektorového potenciálu A_μ vztahem

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}. \quad (2.4)$$

J^μ je pak hustota čtyřproudu.

Za předpokladu axiální symetrie a vymizení elektrické složky pole jsou jedinými nenulovými komponentami tenzoru elektromagnetického pole

$$\begin{aligned} F^{\theta\phi} &= -F^{\phi\theta} = g^{\theta\theta}g^{\phi\phi}A_{\phi,\theta} = r^{-4}\sin^{-2}\theta A_{\phi,\theta}, \\ F^{r\phi} &= -F^{\phi r} = g^{rr}g^{\phi\phi}A_{\phi,r} = r^{-2}\sin^{-2}\theta A_{\phi,r}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dosazením složek do rovnice (2.3) ((2.2) je splněna identicky díky (2.4)) dostaneme rovnici

$$\sin^{-1}\theta \frac{\partial^2}{\partial r^2}A_\phi + r^{-2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^{-1}\theta \frac{\partial}{\partial \theta} A_\phi \right) = -4\pi r^2 \sin\theta J^\phi. \quad (2.6)$$

Řešení homogenní rovnice (s nulovými proudy) hledáme v separovaném tvaru

$$A_\phi = R(r)\Theta(\theta). \quad (2.7)$$

Rovnice (2.6) se pak rozseparuje na dvě rovnice,

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2}R - (l+1)(l+2)R = 0, \quad (2.8)$$

$$\sin\theta \frac{d}{d\theta} \left[\sin^{-1}\theta \frac{d}{d\theta} \Theta \right] + (l+1)(l+2)\Theta = 0. \quad (2.9)$$

Konstantu $(l+1)(l+2)$ jsme zvolili v souladu s článkem [3].

Substitucí $x = \cos \theta$ nabyde rovnice (2.9) tvaru

$$(1-x^2) \frac{d^2}{d\theta^2} \Theta + (l+1)(l+2)\Theta = 0, \quad (2.10)$$

jehož řešení se dá zapsat pomocí Gegenbauerových polynomů $C_l^{3/2}$,

$$\Theta_l(x) = (1-x^2) C_l^{3/2}(x) \text{ resp. } \Theta_l(\cos \theta) = \sin^2 \theta C_l^{3/2}(\cos \theta). \quad (2.11)$$

Řešení rovnice (2.8) je snadné a je tvaru

$$R(r) = \alpha_l r^{l+2} + \beta_l r^{-l-1}. \quad (2.12)$$

Člen s konstantou α_l je nulový v počátku, má však nekonečnou hodnotu v nekonečnu, tam ovšem požadujeme vymizení pole. Jedná se tedy o vnitřní řešení, tj. označíme-li místo smyčky souřadnicí $r = b$, je to v oblasti $r \leq b$. Druhý člen vymizí v nekonečnu, jak je požadováno, jedná se tedy o vnější řešení, tzn. řešení v oblasti $r \geq b$. Obě konstanty položíme rovny nule v oblastech, na nichž příslušná řešení neuvažujeme. Konstanty ovšem nejsou nezávislé, jak lze zjistit z podmínky spojitosti potenciálu v místě proudové smyčky. Musí totiž platit

$$\alpha_l b^{l+2} = \beta_l b^{-l-1}, \quad (2.13)$$

neboli

$$\alpha_l = \beta_l b^{-2l-3}. \quad (2.14)$$

Dosazením (2.14) do (2.12) a přeznačením β_l na α_l lze psát řešení rovnice (2.6) bez pravé strany ve tvaru sumy

$$A_\phi = \sum_{l=0,2}^{\infty} \alpha_l [b^{-2l-3} r^{l+2} \Theta(b-r) + r^{-l-1} \Theta(r-b)] \sin^2 \theta C_l^{3/2}(\cos \theta), \quad (2.15)$$

kde $\Theta(r)$ je Heavisideova funkce. Dále je sčítáno pouze přes sudá l , neboť díky zrcadlové symetrii vůči rovině $\theta = \pi/2$ se vyruší všechny módy s lichou paritou.

Nyní se podíváme na pravou stranu rovnice (2.6). Proudovou hustotu volíme tak, aby v místě smyčky $r_0 = b$, $\theta_0 = \pi/2$ protékal plochou $r_0^2 \sin \theta_0 dr d\theta$ celkový proud I , tedy

$$\int J^\phi r_0^2 \sin \theta_0 dr d\theta = \int J^\phi b^2 dr d\theta = I. \quad (2.16)$$

To znamená, že hustotu můžeme volit

$$J^\phi = \frac{1}{b^2} I \delta(r-b) \delta(\cos \theta) \quad (2.17)$$

nebo také

$$J^\phi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} I \delta(r-b) \delta(\cos \theta). \quad (2.18)$$

Využili jsme toho, že $\frac{1}{b^2} \delta(r-b) \delta(\cos \theta)$ se dá napsat jako $\frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r-b) \delta(\cos \theta)$ ve smyslu distribucí, to znamená, že oba výrazy jsou totožné, provedeme-li integraci přes r a $\cos \theta$. Toto druhé vyjádření se ukáže jako výhodnější.

Nyní dosadíme do rovnice (2.6) vztahy (2.15) a (2.18):

$$\begin{aligned} & \sum_l \alpha_l \left[\sin \theta C_l^{3/2}(\cos \theta) \frac{d^2}{dr^2} R_l + \frac{R_l}{r^2} \frac{d}{d\theta} \sin^{-1} \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin^2 \theta C_l^{3/2}(\cos \theta) \right) \right] \\ & = -4\pi I \delta(r - b) \delta(\cos \theta), \end{aligned} \quad (2.19)$$

kde jsme označili $R_l(r) = b^{-2l-3} r^{l+2} \Theta(b - r) + r^{-l-1} \Theta(r - b)$.

Využitím vztahu (2.9) přepíšeme rovnici (2.19) na tvar

$$\sum_l \alpha_l \sin \theta C_l^{3/2}(\cos \theta) \left[\frac{d^2}{dr^2} R_l - (l+1)(l+2) \frac{R_l}{r^2} \right] \quad (2.20)$$

$$= -4\pi I \delta(r - b) \delta(\cos \theta). \quad (2.21)$$

Nyní obě strany zintegrujeme přes nekonečně tenkou vrstvu v $r = b$ a dostaneme

$$\sum_l \alpha_l \sin \theta C_l^{3/2}(\cos \theta) \left[\frac{dR_l(r)}{dr} \right]_{r=b} = -4\pi I \delta(\cos \theta). \quad (2.22)$$

Člen $\frac{R_l(r)}{r^2}$ vypadl při integraci ze spojitosti funkce $R_l(r)$ a $\left[\frac{dR_l(r)}{dr} \right]_{r=b}$ značí skok v derivaci potenciálu v místě smyčky. Skok vyčíslíme jednoduše, je dán rozdílem derivací zprava a zleva v bodě b :

$$\left[\frac{dR_l(r)}{dr} \right]_{r=b} = (l+2)b^{-2l-3}b^{l+1} - (-l-1)b^{-l-2} = (2l+3)b^{-l-2}. \quad (2.23)$$

Pro Gegenbauerovy polynomy platí vztah

$$\int_{-1}^1 \sin^2 \theta C_l^{3/2}(\cos \theta) C_n^{3/2}(\cos \theta) d \cos \theta = \begin{cases} \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3/2)} & \text{pro } n = l \\ 0 & \text{pro } n \neq l. \end{cases} \quad (2.24)$$

Nyní rovnici (2.22) vynásobíme $\sin \theta C_n^{3/2}(\cos \theta)$, dosadíme (2.119) a s využitím vztahu ortogonality (2.24) dostaneme integraci přes $\cos \theta$

$$\alpha_n (2l+3) b^{-l-2} \frac{(n+1)(n+2)}{(n+3/2)} = -4\pi I C_n^{3/2}(0). \quad (2.25)$$

Dále díky vztahům

$$C_n^{3/2}(0) = (-1)^{n/2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(n+3))}{\Gamma(\frac{3}{2})(\frac{n}{2})!} \quad (2.26)$$

a $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ a $\frac{\Gamma(\frac{1}{2}(n+3))}{(n+1)} = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}(n+1))$ pak pro multipólové momenty dostaneme vztah

$$\alpha_l = (-1)^{\frac{(l+2)}{2}} \frac{4\sqrt{\pi} I (l + \frac{3}{2}) \Gamma(\frac{1}{2}(l+1))}{(l+2)(\frac{l}{2})! (2l+3) b^{-l-2}}, \quad (2.27)$$

kde jsme opět přejmenovali n na l .

Nyní spočteme, jak vypadá magnetické pole. Magnetické pole je dáno průmětem duálního tenzoru elektromagnetického pole na čtyřrychlost stojícího pozorovatele $u^{\hat{\mu}} = (u^{\hat{0}}, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)$, v jehož systému platí

$$B_{\hat{\mu}} = {}^*F_{\hat{\mu}\hat{\nu}} u^{\hat{\nu}} = {}^*F_{\hat{\mu}\hat{0}} = \frac{1}{2} \epsilon_{\hat{\mu}\hat{0}\hat{\alpha}\hat{\beta}} F^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}. \quad (2.28)$$

Jediné dvě nenulové složky jsou dány

$$\begin{aligned} B_{\hat{r}} &= \frac{1}{2} 2\epsilon_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{\phi}} F^{\hat{\theta}\hat{\phi}} = F^{\hat{\theta}\hat{\phi}}, \\ B_{\hat{\theta}} &= \frac{1}{2} 2\epsilon_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{r}} F^{\hat{\phi}\hat{r}} = F^{\hat{\phi}\hat{r}}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Pro souřadnice pozorovatele platí

$$\begin{aligned} d\hat{t} &= dt, \\ d\hat{r} &= dr, \\ d\hat{\theta} &= r d\theta, \\ d\hat{\phi} &= r \sin \theta d\phi. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Transformace tenzoru elektromagnetického pole do souřadnic tohoto pozorovatele z původních souřadnic je obecně dána

$$F^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \frac{\partial x^{\hat{\mu}}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\hat{\nu}}}{\partial x^{\nu}} F^{\mu\nu}, \quad (2.31)$$

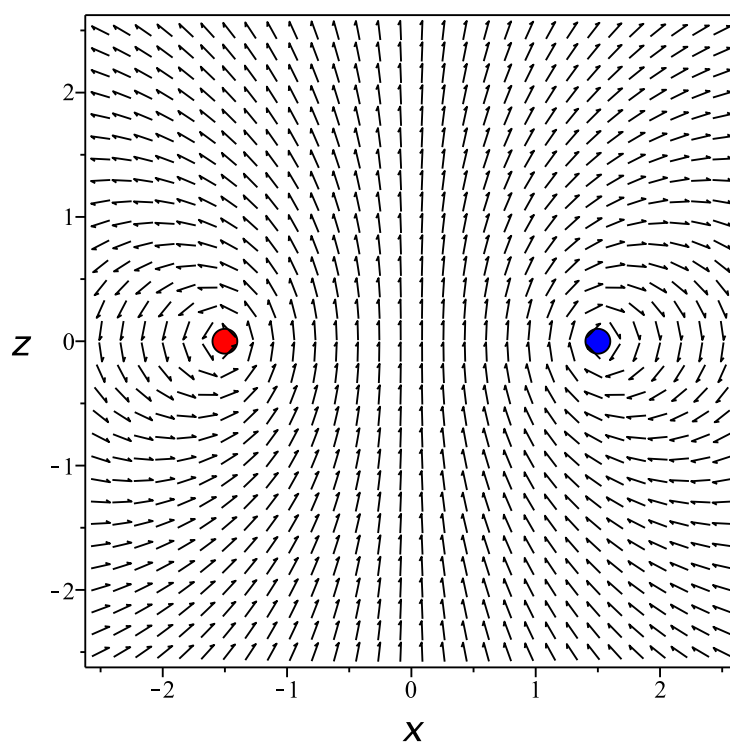
v našem případě s využitím (2.5) a (2.30) dostaneme

$$\begin{aligned} F^{\hat{\theta}\hat{\phi}} &= \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} \frac{d\hat{\phi}}{d\phi} F^{\theta\phi} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} A_{\phi,\theta}, \\ F^{\hat{\phi}\hat{r}} &= \frac{d\hat{\phi}}{d\phi} \frac{d\hat{r}}{dr} F^{\phi r} = -\frac{1}{r \sin(\theta)} A_{\phi,r}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Magnetické pole je tedy dáno vztahy

$$\begin{aligned} B_{\hat{r}} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} A_{\phi,\theta}, \\ B_{\hat{\theta}} &= -\frac{1}{r \sin \theta} A_{\phi,r}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

“Meridionální” průběh pole je vykreslen na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Pole rovinné proudové smyčky o poloměru $b = 1.5$ v plochém prostoročase. Sumu v potenciálu (2.15) jsme sčítali do $l = 30$, proud jsme zvolili $I = 1$. Hodnota proudu je faktorem jenž nemá vliv na tvar pole, pouze se jím škáluje intenzita pole. V obrázku je intenzita potlačena, je kladen důraz na tvar pole. Proto mají všechny vektory stejnou velikost. Obrázek ukazuje rovinu kolmou na rovinu smyčky.

2.2 Řešení Pettersona

Podívejme se na článek [3], zabývající se smyčkou kolem Schwarzschildovy černé díry. Výpočet bude zcela analogický jako v plochém prostoročase, budeme proto vypisovat jen rovnice, v nichž se výpočty liší.

Zde jde o to najít řešení Maxwellových rovnic na pozadí Schwarzschildovy metriky

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.34)$$

kde M představuje hmotnost černé díry.

Jedinými nenulovými komponentami tenzoru elektromagnetického pole jsou v našem axiálně symetrickém případě a za nepřítomnosti elektrické složky

$$F^{\theta\phi} = r^{-4} \sin^{-2}\theta A_{\phi,\theta}, \quad (2.35)$$

$$F^{r\phi} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) r^{-2} \sin^{-2}\theta A_{\phi,r}, \quad (2.36)$$

kde A_ϕ je složka vektorového potenciálu. Dosazením složek a determinantu metrického tenzoru, který je v tomto případě stejný jako v plochém řešení, do rovnice (2.3) dostaneme

$$\sin^{-1}\theta \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} A_\phi \right] + r^{-2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin^{-1}\theta \frac{\partial}{\partial \theta} A_\phi \right) = -4\pi r^2 \sin\theta J^\phi. \quad (2.37)$$

Řešíme nejprve homogenní rovnici. Provedeme-li stejnou separaci jako v plochém případě, dostaneme dvě rovnice

$$r^2 \frac{d}{dr} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{d}{dr} R \right] - (l+1)(l+2)R = 0, \quad (2.38)$$

$$\sin\theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin^{-1}\theta \frac{d}{d\theta} \Theta \right) + (l+1)(l+2)\Theta = 0. \quad (2.39)$$

Rovnice (2.39) je stejná jako v plochém případě, její řešení je tedy také stejné a je tvaru

$$\Theta_l(\cos\theta) = \sin^2\theta C_l^{3/2}(\cos\theta). \quad (2.40)$$

Rovnici (2.38) řešíme substitucí $u = \frac{r}{2M}$, tím se převede na tvar

$$u(1-u) \frac{d^2}{du^2} R - \frac{d}{du} R + (l+1)(l+2)R = 0. \quad (2.41)$$

Jedno její řešení je tvaru

$$U_l = u^2 (2M)^{l+2} P_l^{(2,0)}(1-2u), \quad (2.42)$$

kde $P_l^{(2,0)}(1-2u)$ jsou Jacobiho polynomy a faktor $(2M)^{l+2}$ je přidán, aby řešení bylo konečné v limitě $M \rightarrow 0$. Zde je v práci [3] chyba. Petterson zvolil faktor $(2M)^l$, jenž ale nezaručuje konečnost v limitě plochého prostoru. Řešení v limitě

s tímto faktorem stále diverguje. Avšak explicitní tvary řešení, které uvádí, jsou již správné. První tři módy jsou dány

$$\begin{aligned} U_0 &= r^2, \\ U_1 &= r^2(6M - r), \\ U_2 &= r^2(24M^2 - 40Mr + 15r^2), \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.43)$$

Je vidět, že v limitě plochého prostoročasu řešení přechází na $U_l \sim r^{l+2}$. Druhé nezávislé řešení rovnice (2.38) je dáno

$$V_l = c U_l \int \frac{u \, du}{(1-u)U_l^2}, \quad (2.44)$$

kde c je nějaká konstanta. Tuto konstantu lze určit ze srovnání s Pettersonovým řešením pole dipólu na konci článku jako $c = -2M$. Abychom určili plochou limitu vnějšího řešení, vypíšeme nejprve pár módů,

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{r^2 \ln(1 - \frac{2M}{r}) + 2Mr + 2M^2}{8M^3}, \\ V_1 &= \frac{-6r^3 \ln(1 - \frac{2M}{r}) + 9r^2 M \ln(1 - \frac{2M}{r}) - 12Mr^2 + 6M^2 r + 2M^3}{48M^5}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.45)$$

Za použití rozvoje

$$\ln(1-x) \sim -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 + O(x^6), \quad (2.46)$$

kde x značí bezrozměrný faktor $2M/r$, dostaneme chování v limitě $M \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} V_0 &\sim -\frac{1}{3} \frac{1}{r}, \\ V_1 &\sim \frac{4}{5} \frac{1}{r^2}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

tedy $V_l \sim r^{-l-2}$. Řešení se tedy redukuje na řešení v plochém prostoročasu.

Program MAPLE má problémy s vyčíslením integrálů v (2.44), proto jsme rovnici nechali vyřešit přímo program a dále pracovali s řešením ve tvaru

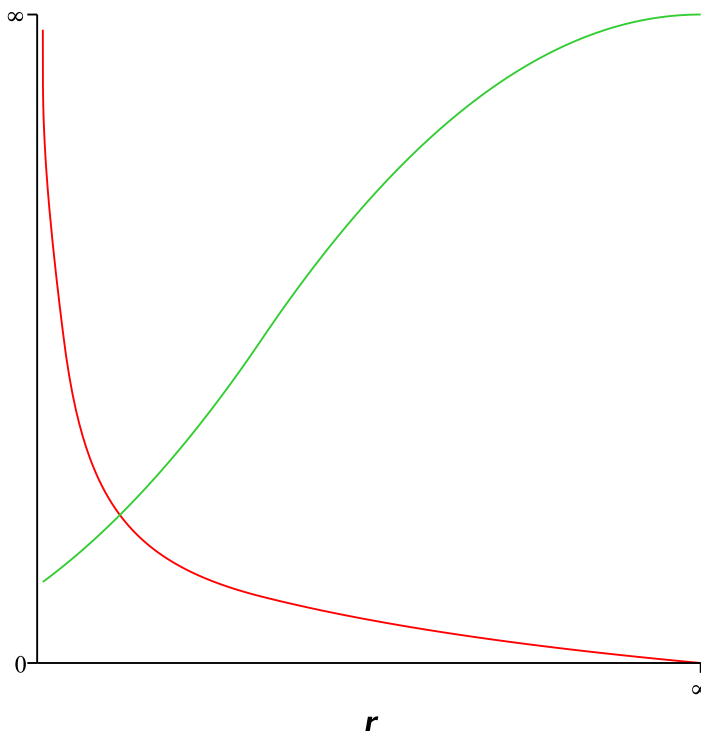
$$\begin{aligned} R_l(u) &= a_l F\left(-l, -l-2, -2-2l; \frac{1}{u}\right) u^{l+2} \\ &+ b_l F\left(l+1, l+3, 4+2l; \frac{1}{u}\right) u^{-l-1}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

kde F značíme hypergeometrické funkce.

Vyjádření pro potenciál má podle článku tvar

$$A_\phi = \sum_{l=0,2}^{\infty} (\alpha_l U_l + \beta_l V_l) \sin^2 \theta C_l^{3/2}(\cos \theta), \quad (2.49)$$

kde je sčítáno přes sudé členy ze stejných důvodů jako v plochém případě. Jelikož řešení (2.42) je úměrné mocninám u resp. r , roste nade všechny meze, pošleme-li r do nekonečna: jedná se o vnitřní řešení. Naopak řešení (2.44) není regulární na horizontu ($u = 1$), neboť ve jmenovateli integrandu se vyskytuje člen $(1 - u)$. Jak je vidět na obrázku 2.2 chování obou řešení, odpovídá řešení u koeficientu α_l vnitřnímu řešení a řešení u koeficientu β_l vnějšímu řešení.



Obrázek 2.2: Asymptotické chování vnitřního a vnějšího řešení. Řešení jsou vykreslena pro $l = 0$, což je postačující, neboť nás zajímají pouze asymptotická chování. Lze tedy zvolit jakýkoli jiný mód s jinou hodnotou l . Řešení $U_0(r)$ jsou znázorněna zeleně, řešení $V_0(r)$ červeně.

Z podmínek spojitosti potenciálu se dají obě řešení napojit následujícím způsobem (podobný jaký byl užít v plochém případě, stejný princip), zavedeme-li označení pro radiální část $R_l(r)$:

$$R_l(r) = \begin{cases} r^2(2M)^l P_l^{(2,0)}(1 - r/M) V_l(b) & \text{pro } 2M \leq r \leq b \\ b^2(2M)^l P_l^{(2,0)}(1 - b/M) V_l(r) & \text{pro } r \geq b, \end{cases} \quad (2.50)$$

kde b značíme radiální souřadnici smyčky (její poloměr). Nyní můžeme potenciál přepsat

$$A_\phi = \sum_{l=0,2}^{\infty} a_l R_l(r) \sin^2 \theta C_l^{3/2}(\cos \theta). \quad (2.51)$$

Zde volíme proudovou hustotu vyskytující se na pravé straně rovnice (2.37) tak,

aby pozorovatel v lokálně inerciálním systému

$$\begin{aligned} d\hat{t} &= dt, \\ d\hat{r} &= dr, \\ d\hat{\theta} &= r d\theta, \\ d\hat{\phi} &= r \sin\theta d\phi \end{aligned} \quad (2.52)$$

naměřil celkový proud I skrz rovinu \hat{r} , $\hat{\theta}$, to jest

$$\int J^\phi d\hat{r} d\hat{\theta} = I. \quad (2.53)$$

Ve Schwarzschildových souřadnicích má (2.53) tvar

$$\int J^\phi \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} r^2 \sin\theta dr d\theta = I. \quad (2.54)$$

To umožňuje psát proudovou hustotu ve tvaru

$$J^\phi = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} r^{-2} \sin^{-1}\theta \delta(r-b) \delta(\cos\theta). \quad (2.55)$$

Po dosazení (2.51) a (2.55) do (2.37) obdržíme

$$\begin{aligned} &\sum_l a_l \sin\theta C_l^{3/2}(\cos\theta) \left[\frac{d}{dr} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{d}{dr} R_l - (l+1)(l+2) \frac{R_l}{r^2} \right] \\ &= -4\pi \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} I \delta(r-b) \delta(\cos\theta). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Nyní zopakujeme stejný postup jako u smyčky v plochém prostoročase, tzn. budeme nejprve integrovat přes nekonečně tenkou vrstvu v $r = b$ a pak přes $\cos\theta$ s využitím ortogonality Gegenbauerových polynomů (2.24). Takto získáme vztah pro koeficienty rozvoje v (2.51)

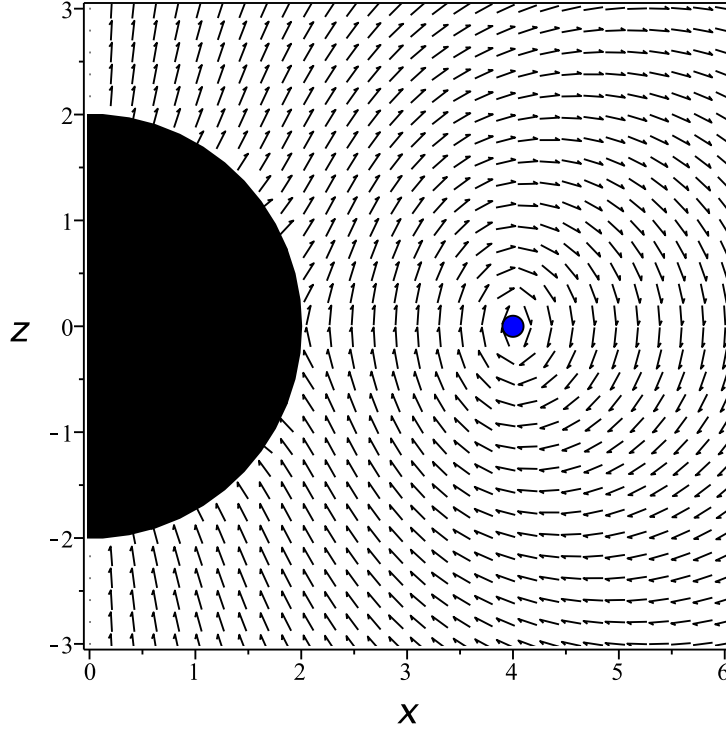
$$a_l = (-1)^{\frac{(l+2)}{2}} \frac{4\sqrt{\pi} I (l + \frac{3}{2}) \Gamma(\frac{1}{2}(l+1))}{(l+2)(\frac{l}{2})! \left(1 - \frac{2M}{b}\right)^{1/2} \left(\frac{dR_l}{dr}\right)_{r=b}}, \quad (2.57)$$

kde $\left(\frac{dR_l}{dr}\right)_{r=b}$ opět značí skok derivace v místě smyčky. Ten se spočítá naprosto stejně, jako rozdíl derivací obou řešení v bodě b , nebudeme ho však zde explicitně uvádět kvůli délce výrazu. Použijeme ho však v programu MAPLE pro výpočet a vykreslení pole.

Magnetické pole určíme stejně jako v plochém případě, dostaneme

$$\begin{aligned} B_{\hat{r}} &= \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} A_{\phi,\theta}, \\ B_{\hat{\theta}} &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \frac{1}{r \sin(\theta)} A_{\phi,r}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Obrázek 2.3 pak vykresluje pole v meridionální rovině



Obrázek 2.3: Pole kruhové proudové smyčky o poloměru $b = 4M$ kolem Schwarzschildovy černé díry v ekvatoriální rovině, podle Pettersona (viz [3]). Obrázek ukazuje řez kolmý na ekvatoriální rovinu. Potenciál byl vysčítán do hodnoty $l = 30$, proud byl zvolen $I = 1$. Osy jsou v jednotkách M .

Nyní bude dobré se podívat na průběh potenciálu. Zajímavé jsou póly a ekvatoriální rovina, kde se nachází smyčka. Podíváme-li se na úhlovou část, vidíme, že na pólech, tj. v našem případě v úhlech $\theta = 0$ a $\theta = \pi$, potenciál vymizí. Na obrázku 2.4 je zobrazen průběh potenciálu pro různé dané hodnoty úhlu θ . Začíná se od místa smyčky až po jeden z pólů.

Co se magnetického pole týče, na pólech je čistě radiální,

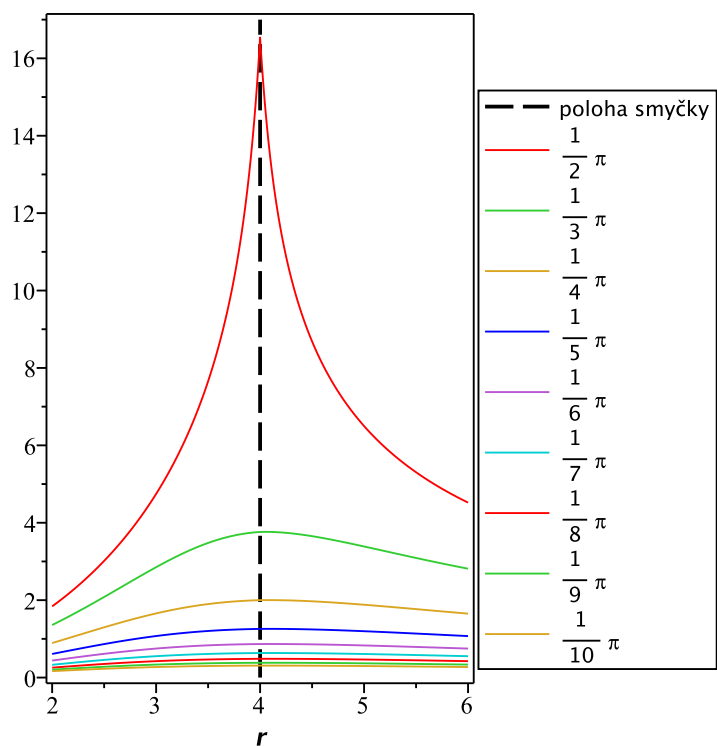
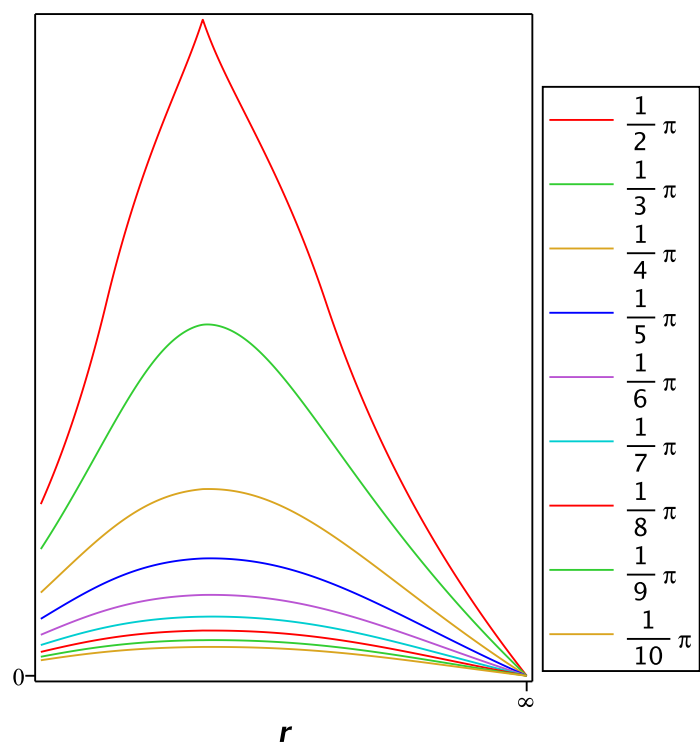
$$\begin{aligned} B_\theta(r, \theta = 0, \pi) &= 0, \\ B_r(r, \theta = 0, \pi) &= f(r), \end{aligned} \quad (2.59)$$

a v ekvatoriální rovině platí

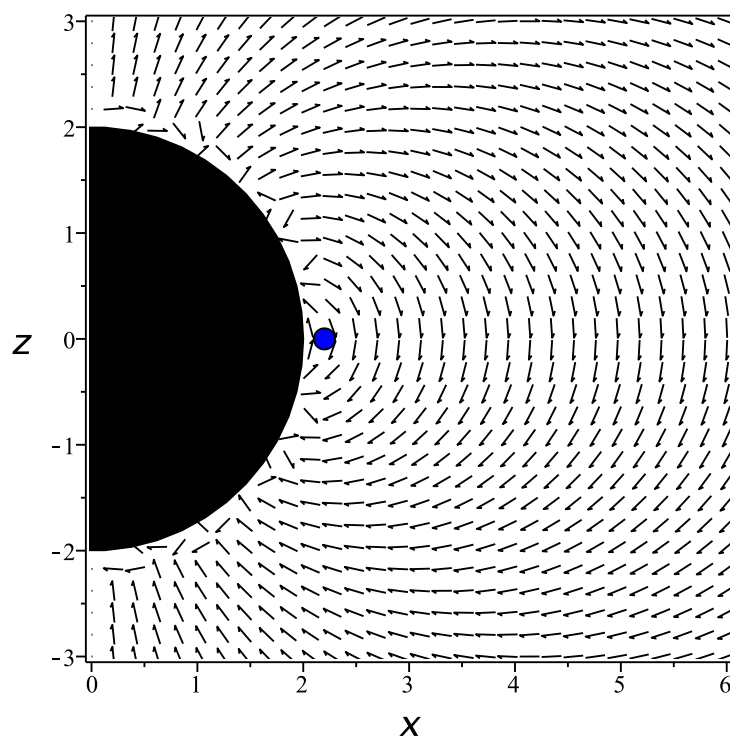
$$\begin{aligned} B_\theta(r, \theta = \frac{\pi}{2}) &= g(r), \\ B_r(r, \theta = \frac{\pi}{2}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.60)$$

kde $f(r)$ a $g(r)$ jsou nějaké funkce r . Toto se ale dá očekávat, neboť z axiální symetrie není možné, aby pole na pólech mělo úhlovou složku nenulovou.

Pro srovnání přidáváme ještě obrázek s jiným umístěním smyčky: obrázek 2.5.



Obrázek 2.4: Radiální průběh potenciálu A_ϕ v různých úhlových směrech. Obrázek nahoře ukazuje průběh v radiální souřadnici až do nekonečna. MAPLE provedl škálování automaticky. Proto uvádíme ještě detail (spodní obrázek), kde r jde do konečné hodnoty, ukazující nepřeskálovaný průběh potenciálu v místě smyčky.



Obrázek 2.5: Jako na obrázku 2.3, tentokrát pro poloměr $b = 2.2M$. Vznik defektu na obrázku je komentován v kapitole 2.9, kde je také vykresleno pole již bez defektu. Osy jsou opět v jednotkách M .

2.3 Řešení Bičáka a Dvořáka

Dalším článkem je [5]. Ve Schwarzschildově geometrii má nulová tetráda (Dodatek 3.2) tvar

$$\begin{aligned} l^\mu &= \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, 1, 0, 0 \right], \\ n^\mu &= \frac{1}{2} \left[1, -\left(1 - \frac{2M}{r}\right), 0, 0 \right], \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}r} \left[0, 0, 1, \frac{i}{\sin\theta} \right]. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Dosazením příslušných spinových koeficientů a položením časových derivací rovných nule, dále s využitím faktu, že budeme počítat pole axiální smyčky (tj. jediné j_m a \bar{j}_m jsou nenulové), mají Maxwellovy rovnice tvar

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right] \phi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}r} {}^* \bar{\delta} \phi_0 &= 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}r} {}^* \bar{\delta} \phi_1 + \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right] \phi_0 &= 2\pi j_m, \\ \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right] \phi_2 + \frac{1}{\sqrt{2}r} {}^* \bar{\delta} \phi_1 &= 2\pi \bar{j}_m, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}r} {}^* \bar{\delta} \phi_2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right] \phi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Ze zavedení ϕ_0 , ϕ_1 a ϕ_2 v Dodatku 3.2 a dle Dodatku 3.1 je vidět, že veličiny ϕ_0 , ϕ_1 , ϕ_2 mají spinové váhy $1, 0, -1$ v tomto pořadí. Je možné tyto veličiny rozvinout do báze s-harmonik. Za axiální symetrie přejdou s-harmoniky na Legendreovy polynomy (Dodatek 3.1) a ϕ_0 , ϕ_1 a ϕ_2 mají tvar

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \sum_l \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi l(l+1)}} {}^0 R_l(r) \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos\theta), \\ \phi_1 &= \sum_l \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi}} {}^1 R_l(r) P_l(\cos\theta), \\ \phi_2 &= -\sum_l \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi l(l+1)}} {}^2 R_l(r) \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos\theta), \end{aligned} \quad (2.63)$$

kde bylo využito také toho, že smyčka je nenabitá (u ϕ_1 vypadl jeden přídatný člen, který, jak se ukáže, souvisí s nábojem, viz článek [5]).

S využitím relací ortogonalit pro s-harmoniky (Dodatek 3.1) plyne z Dodat-

ku 3.2, dosazením (2.63) do (3.14), vztah pro radiální části

$$\begin{aligned}
r(r-2M)\frac{d^2}{dr^2} {}^0R_l + 4(r-M)\frac{d}{dr} {}^0R_l - (l-1)(l+2) {}^0R_l &= -4\pi {}^0j_l, \\
r(r-2M)\frac{d^2}{dr^2} {}^1R_l + 2(2r-3M)\frac{d}{dr} {}^1R_l - (l-1)(l+2) {}^1R_l &= -4\pi {}^1j_l, \\
r(r-2M)\frac{d^2}{dr^2} {}^2R_l + 4(r-2M)\frac{d}{dr} {}^2R_l - \left[(l-1)(l+2) + \frac{4M}{r} \right] {}^2R_l \\
&= -4\pi {}^2j_l, \tag{2.64}
\end{aligned}$$

kde je zavedeno značení

$$\begin{aligned}
{}^0j_l(r) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} \int j_0(r, \theta, \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) r^2 d\Omega, \\
{}^1j_l(r) &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int j_1(r, \theta, \phi) P_l(\cos \theta) r^2 d\Omega, \\
{}^2j_l(r) &= -\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} \int j_2(r, \theta, \phi) \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) r^2 d\Omega \tag{2.65}
\end{aligned}$$

a kde j_0 , j_1 a j_2 jsou zavedeny v Dodatku 2.

Nejprve budeme řešit homogenní rovnici (2.64), tj. když vymizí proudy. Vezměme například druhou z rovnic. Substitucí $x = r/2M$ přejde na tvar

$$x(x-1)\frac{d^2}{dx^2} {}^1R_l + (4x-3)\frac{d}{dx} {}^1R_l - (l-1)(l+2) {}^1R_l = 0, \tag{2.66}$$

což je hypergeometrická rovnice, jejímiž dvěma nezávislými řešeními jsou:

pro $l \neq 0$

$$\begin{aligned}
{}^1R_l^{(I)} &= F(1-l, l+2, 3; x), \\
{}^1R_l^{(II)} &= (-x)^{-l-2} F(l, l+2, 2l+2; x^{-1}), \tag{2.67}
\end{aligned}$$

pro $l = 0$

$$\begin{aligned}
{}^1R_0^{(I)} &= x^{-2} \ln(x-1) + x^{-1}, \\
{}^1R_0^{(II)} &= x^{-2}. \tag{2.68}
\end{aligned}$$

Obecné řešení je tedy tvaru

$${}^1R_l = a_l {}^1R_l^{(I)} + b_l {}^1R_l^{(II)}. \tag{2.69}$$

Pokud se nyní dosadí rozvoje (2.63) do (2.62), dostaneme vztahy mezi jednotlivými radiálními částmi,

$$\begin{aligned}
{}^0R_l &= 2^{1/2} [l(l+1)]^{-1/2} r^{-1} \frac{d}{dr} (r^2 {}^1R_l), \\
{}^2R_l &= \frac{1}{2} 2^{1/2} [l(l+1)]^{-1/2} (r-2M) r^{-2} \frac{d}{dr} (r^2 {}^1R_l), \tag{2.70}
\end{aligned}$$

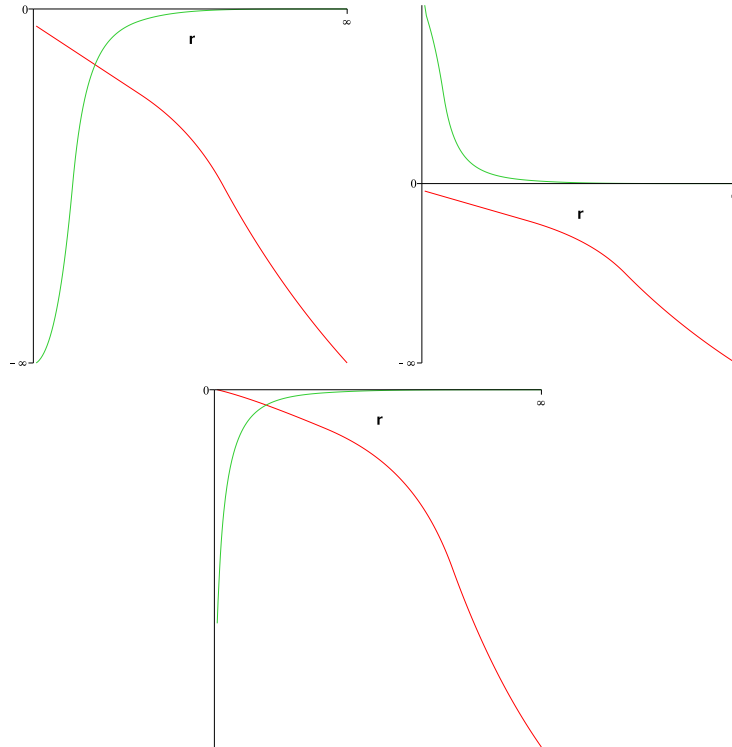
což opět umožňuje napsat

$$\begin{aligned} {}^0R_l &= a_l {}^0R_l^{(I)} + b_l {}^0R_l^{(II)}, \\ {}^2R_l &= a_l {}^2R_l^{(I)} + b_l {}^2R_l^{(II)}, \end{aligned} \quad (2.71)$$

přičemž

$$\begin{aligned} {}^0R_l^{(I)} &= 2^{3/2}[l(l+1)]^{-1/2}F(1-l, l+2, 2; x), \\ {}^0R_l^{(II)} &= -(2l)^{1/2}(l+1)^{-1/2}(-x)^{-l-2}F(l+1, l+2, 2l+2; x^{-1}), \\ {}^2R_l^{(I)} &= -2^{1/2}[l(l+1)]^{-1/2}x^{-1}F(-l, l+1, 2; x), \\ {}^2R_l^{(II)} &= -l^{1/2}[2(l+1)]^{-1/2}(-x)^{-l-2}F(l+1, l, 2l+2; x^{-1}). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Z asymptotického chování řešení (obrázek 2.6) zjistíme, že řešení R_l^I se chovají regulárně na horizontu, jedná se tedy o vnitřní řešení, zatímco R_l^{II} , chovající se regulárně v nekonečnu, jsou vnější řešeními.



Obrázek 2.6: Obrázek nalevo nahoře ukazuje asymptotické chování řešení ${}^0R_2^{(I)}$ a ${}^0R_2^{(II)}$, napravo nahoře pak řešení ${}^1R_2^{(I)}$ a ${}^1R_2^{(II)}$ a dole ${}^2R_2^{(I)}$ a ${}^2R_2^{(II)}$. Zeleně jsou vykreslena řešení s indexem (II), červeně s indexem (I).

Pro to, abychom mohli provést plochou limitu, napíšme nejprve explicitně pár

módů:

$$\begin{aligned}
{}^1R_1^{(I)} &= 1, \\
{}^1R_2^{(I)} &= 1 - \frac{2r}{3M}, \\
{}^1R_2^{(I)} &= 1 - \frac{5r}{3M} + \frac{5r^2}{8M^2}, \\
&\dots
\end{aligned} \tag{2.73}$$

a

$$\begin{aligned}
{}^1R_1^{(II)} &= 3 \ln\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2}, \\
&\dots,
\end{aligned} \tag{2.74}$$

zde program MAPLE nebyl schopen vyčíslit explicitně další módy. Je vidět, že pokud vnitřní řešení přenásobíme konstantou $(2M)^{l-1}$ a vnější konstantou $(2M)^{-l-2}$ a dále použitím rozvoje logaritmu (2.46) získáme chování řešení ${}^1R_l^{(I)} \sim r^{l-1}$ a ${}^1R_l^{(II)} \sim r^{-l-2}$, což jsou řešení druhé rovnice v (2.64) v plochem případě.

Pokud nyní využijeme axiální symetrie, můžeme rozvoje napsat (Dodatek 3.1), po dosazení (2.69) a (2.71) do (2.63):

pro oblast $r \leq b$

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} a_l {}^0R_l^I \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta), \\
\phi_1 &= \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} a_l {}^1R_l^I P_l(\cos \theta), \\
\phi_2 &= - \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} a_l {}^2R_l^I \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta),
\end{aligned} \tag{2.75}$$

pro oblast $r \geq b$

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} b_l {}^0R_l^{II} \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta), \\
\phi_1 &= \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} b_l {}^1R_l^{II} P_l(\cos \theta), \\
\phi_2 &= - \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} b_l {}^2R_l^{II} \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta).
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Je na čase určit proudové členy. Dle Dodatku 3.2 platí

$$j_1 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{i \sin^2 \theta}{2} J^\phi. \tag{2.77}$$

Využili jsme zde axiální symetrie, to znamená položení všech derivací podle ϕ rovnými nule, a transformace mezi kovariantními a kontravariantními složkami tetřady, v tomto případě konkrétně

$$\bar{m}_\mu = g_{\mu\nu}\bar{m}^\nu = \dots = \frac{r}{\sqrt{2}}[0, 0, 1, -i \sin \theta]. \quad (2.78)$$

Ze znalosti j_1 určíme 1j_l z (2.65). Proudová hustota je dána stejně jako v případě [3], tj.

$$J^\phi = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \frac{1}{r^2 \sin \theta} I \delta(r - b) \delta(\cos \theta). \quad (2.79)$$

Proudový element je

$${}^1j_l = -i\pi I \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left(1 - \frac{2M}{b}\right)^{1/2} \delta(r - b). \quad (2.80)$$

Nyní se vyřeší rovnice (2.66) s nenulovou pravou stranou, postupem uvedeným v [5]. Řešení takové rovnice je dáno (s použitím toho, že proudy vymizí mimo zdroj)

$$\begin{aligned} {}^1R_l(x) = & -{}^1R_l^{(I)}(x) \int_{x_b-\epsilon}^{x_b+\epsilon} \frac{4\pi {}^1j_l(x) {}^1R_l^{(II)}(x)}{x(x-1)W({}^1R_l^{(I)}, {}^1R_l^{(II)}, x)} dx - \\ & -{}^1R_l^{(II)}(x) \int_{x_b-\epsilon}^{x_b+\epsilon} \frac{4\pi {}^1j_l(x) {}^1R_l^{(I)}(x)}{x(x-1)W({}^1R_l^{(I)}, {}^1R_l^{(II)}, x)} dx, \end{aligned} \quad (2.81)$$

kde $x_b = b/2M$ a $W({}^1R_l^{(I)}, {}^1R_l^{(II)}, x)$ je wronskián ${}^1R_l^{(I)}, {}^1R_l^{(II)}$ v bodě x . Porovnáním s (2.69), vyjádřením wronskiánu

$$W({}^1R_l^{(I)}, {}^1R_l^{(II)}, x) = W({}^1R_l^{(I)}, {}^1R_l^{(II)}, x_b) \frac{x_b^3(x_b - 1)}{x^3(x - 1)}$$

a využitím vztahu

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty} \left(W({}^1R_l^{(I)}, {}^1R_l^{(II)}, x) \right) = \frac{2(2l+1)!}{[(l+1)!]^2} \frac{1}{x^3(x-1)}$$

dostaneme pro koeficienty rozvoje

$$\begin{aligned} a_l &= -\frac{2\pi[(l+1)!]^2}{(2l+1)!} \int_{x_b-\epsilon}^{x_b+\epsilon} x^2 ({}^1j_l(x)) {}^1R_l^{(II)}(x) dx, \\ b_l &= -\frac{2\pi[(l+1)!]^2}{(2l+1)!} \int_{x_b-\epsilon}^{x_b+\epsilon} x^2 ({}^1j_l(x)) {}^1R_l^{(I)}(x) dx. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Nyní už jsme schopni spočítat koeficienty rozvoje. Dosazením všeho dostaneme

$$\begin{aligned} a_l &= -\frac{\pi^2 i I [l(l+1)]^{1/2} [(l+1)!]^2}{2M (2l+1)!} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi l(l+1)}} \left(1 - \frac{2M}{b}\right)^{1/2} \\ &\quad \times (-x_b)^{-l} F(l, l+2, 2l+2; x_b^{-1}), \\ b_l &= -\frac{\pi^2 i I [l(l+1)]^{1/2} [(l+1)!]^2}{2M (2l+1)!} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi l(l+1)}} \left(1 - \frac{2M}{b}\right)^{1/2} \\ &\quad \times (x_b)^2 F(1-l, l+2, 3; x_b). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Tenzor $F_{\mu\nu}$ spočteme dle Dodatku 3.2, jeho nenulové složky jsou

$$\begin{aligned} F^{r\phi} &= i\sqrt{2}(\phi_2 - \bar{\phi}_2) \frac{1}{r \sin \theta}, \\ F^{\theta\phi} &= -2i\phi_1 \frac{1}{r^2 \sin \theta}, \end{aligned} \quad (2.84)$$

protože $\phi_2 = -\bar{\phi}_2$ a, jak se dá ukázat, $x(x-1)^{-1}\phi_2 = -\frac{1}{2}\phi_0$. Explicitně pak

$$\begin{aligned} F^{r\phi} &= -\frac{i\sqrt{2}}{r \sin \theta} \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{\pi l(l+1)}} a_l^2 R_l^{(\text{I})} \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) \\ &\quad \text{pro } r \leq b, \\ F^{r\phi} &= -\frac{i\sqrt{2}}{r \sin \theta} \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{\pi l(l+1)}} b_l^2 R_l^{(\text{II})} \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) \\ &\quad \text{pro } r \geq b, \\ F^{\theta\phi} &= -\frac{2i}{r^2 \sin \theta} \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{\pi}} a_l^1 R_l^{(\text{I})} P_l(\cos \theta) \\ &\quad \text{pro } r \leq b, \\ F^{\theta\phi} &= -\frac{2i}{r^2 \sin \theta} \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{\pi}} b_l^1 R_l^{(\text{II})} P_l(\cos \theta) \\ &\quad \text{pro } r \geq b. \end{aligned} \quad (2.85)$$

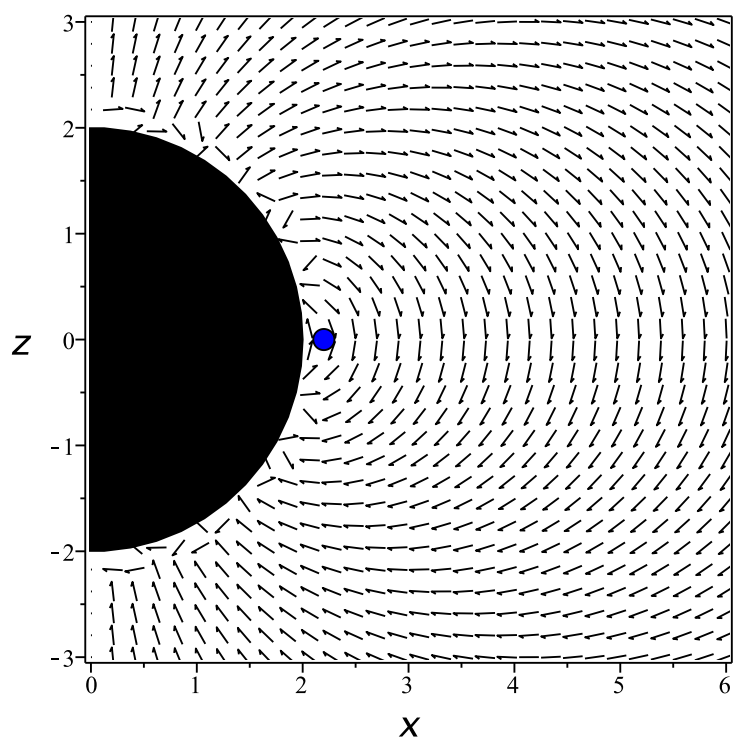
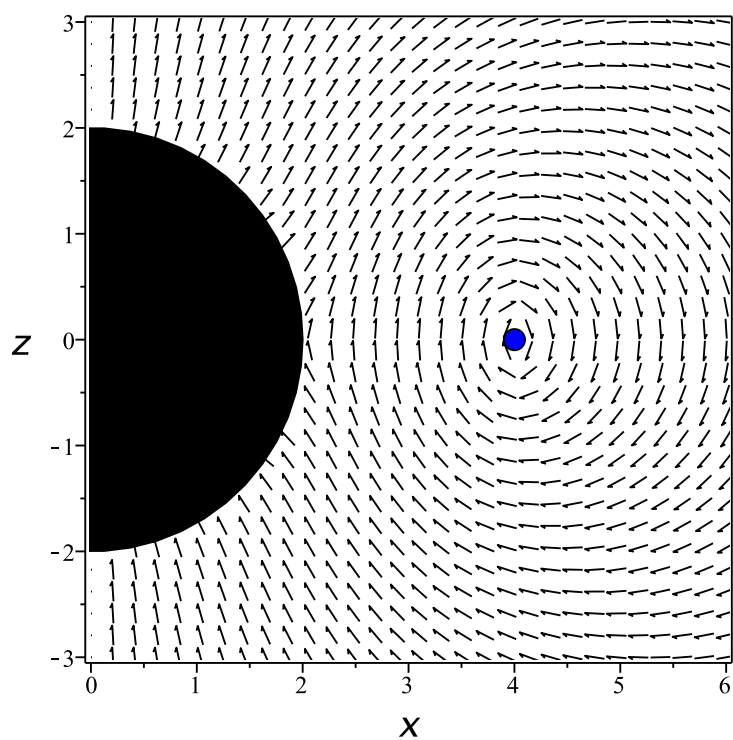
Jednotlivé složky magnetického pole jsou

$$\begin{aligned} B_{\hat{r}} &= r^2 \sin \theta F^{\theta\phi}, \\ B_{\hat{\theta}} &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} r \sin \theta F^{r\phi}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Pole je vykresleno na obrázku 2.7.

Chování na pólech a v ekvatoriální rovině je patrné z obrázků, a také analyticky: úhlové chování pole je dáno $B_r \sim P_l(\cos \theta)$ a $B_\theta \sim P_l^1(\cos \theta)$, platí správně

$$\begin{aligned} B_r(r, \theta = 0, \pi) &= f(r), \\ B_\theta(r, \theta = 0, \pi) &= 0, \\ B_r(r, \theta = \pi/2) &= 0, \\ B_\theta(r, \theta = \pi/2) &= g(r). \end{aligned} \quad (2.87)$$



Obrázek 2.7: Pole kruhové proudové smyčky v ekvatoriální rovině kolem Schwarzschildovy černé díry, podle Bičáka a Dvořáka (viz [5]), o poloměru $b = 4M$ (nahore) a $b = 2.2M$ (dole). Vznik defektu na obrázku dole je komentován v kapitole 2.9, kde je také připojen upravený obrázek již bez defektu. Pole bylo vysčítáno do $l = 30$ pro $I = 1$. Obrázek ukazuje meridionální rovinu. Osy jsou v jednotkách M .

2.4 Limita řešení Chitreho a Vishveshwary pro Kerrovu černou díru

V článku [7] se autoři zabývají magnetickým polem smyčky kolem Kerrové černé díry. My zde ovšem provedeme schwarzschildovskou limitu a porovnáme ji s předchozími výsledky. Kerrova metrika má v Boyerových-Lindquistových souřadnicích podobu

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4Mar\sin^2\theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2r\sin^2\theta}{\Sigma}\right) \sin^2\theta d\phi^2, \quad (2.88)$$

kde M je hmotnost černé díry, a je rotační parametr (jedná se o moment hybnosti na hmotnost, tj. aM je moment hybnosti černé díry), $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$ a $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$.

Schwarzschildovská limita spočívá v položení rotačního parametru rovným nule. Je vidět, že při $a \rightarrow 0$ přejde metrika (2.88) na Schwarzschildovu metriku (2.34). Dále využijeme jednoho ze spinových koeficientů (Dodatek 3.2), který ve schwarzschildovské limitě je $\rho = -1/r$. Veličiny ϕ_{-1} , ϕ_0 a ϕ_1 jsou dány jako v kapitole 2.3.

Rovnice, která se řeší v tomto článku, má tvar

$$-\Delta \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \Psi}{\partial\theta} \right) + (\cot^2\theta + 1) \Psi = 4\pi j, \quad (2.89)$$

kde $\Psi = \phi_2/\rho^2$ a j zde značíme člen, jenž zahrnuje zdrojové členy a je dán vztahem (viz [8])

$$j = r^2 \left(\Delta + \frac{r^2 - 2Mr}{2} \right) \frac{1}{r^2} j_{\bar{m}}, \quad (2.90)$$

kde Δ (v tomto případě se jedná o směrovou derivaci) a $j_{\bar{m}}$ jsou popsány v Dodatku 3.2.

Proudová hustota je dána

$$J^\phi = \frac{I}{b^2} \left(1 - \frac{2M}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \delta(r - b) \delta(\cos\theta), \quad (2.91)$$

kde b je poloha smyčky. Výraz (2.91) se dá zapsat stejně jako v (2.55) a (2.79), jak je komentováno v kapitole 2.1.

Dále provedeme rozpis do spinových kulových funkcí (Dodatek 3.1),

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_{l=1}^{\infty} R_l(r) {}_{-1}Y_{l0}(\theta), \\ j &= \sum_{l=1}^{\infty} j_l(r) {}_{-1}Y_{l0}(\theta), \end{aligned} \quad (2.92)$$

a dosazením (2.92) do (2.89) dostaneme rovnici pro radiální části $R_l(r)$,

$$\frac{d^2 R_l}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2 - 2Mr} R_l = -4\pi \frac{j_l}{r^2 - 2Mr}, \quad (2.93)$$

kde j_l je dáno

$$j_l(r) = -\frac{i\pi b I}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} \sqrt{1-\frac{2M}{b}} \left. \frac{dP_l(\cos\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=\pi/2} \times [(b^2 - 2Mb) \delta(b-r) + (r^2 - 2Mr) \delta'(b-r)], \quad (2.94)$$

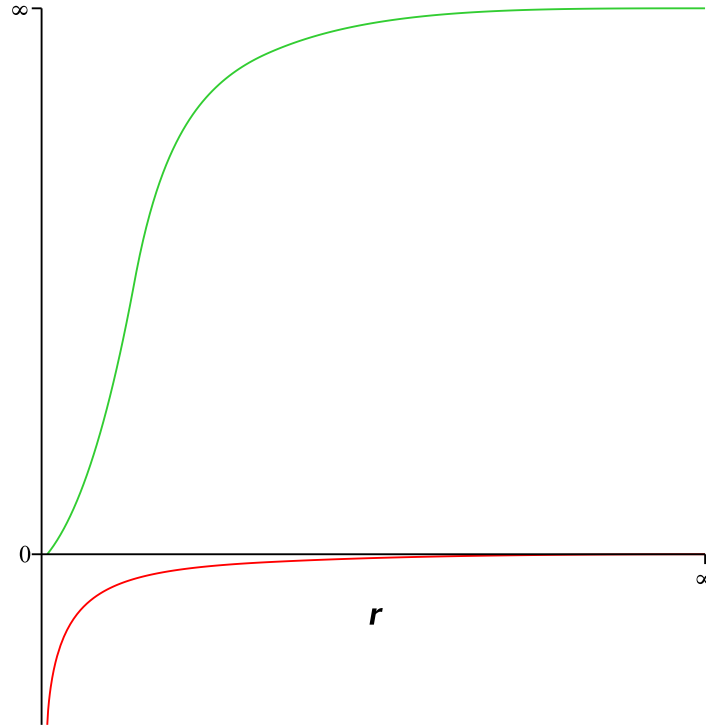
kde čárka značí derivaci podle r .

Řešení homogenní části rovnice (2.93) je, zachováme-li značení podle článku,

$$F_l(r) = -\frac{(2l+1)!}{2^l(l+1)!l!M^{l+1}} (r^2 - 2Mr) \frac{dQ_l(u)}{dr},$$

$$G_l(r) = \frac{2^l(l-1)!l!M^l}{(2l)!} (r^2 - 2Mr) \frac{dP_l(u)}{dr}, \quad (2.95)$$

kde $u = \frac{r-M}{M}$ a P_l jsou Legendreovy polynomy prvního druhu a Q_l jsou Legendreovy funkce druhého druhu. Z chování obou řešení na horizontu a v nekonečnu zjistíme, že $F_l(r)$ jsou vnější řešení a $G_l(r)$ jsou vnitřní řešení. Viz obrázek 2.8.



Obrázek 2.8: Asymptotické chování řešení $F_2(r)$ (červeně) a $G_2(r)$ (zeleně).

Plochou limitu odkládáme na kapitolu 2.5 věnovanou článku Mosse [8], protože v těchto případech se radiální řešení sestává z Legendreových polynomů a v případě Mosse je řešení v jednodušším tvaru. Je proto zbytečné uvádět na několika místech to samé, když i rovnice (2.89) je v obou případech stejná. To samé platí pro ostatní odstavce, v nichž není uvedena plochá limita řešení.

Řešení nehomogenní rovnice (2.93) se dá napsat

$$\begin{aligned} R_l(r) &= F_l(r) \left[\int \left(\frac{-4\pi j_l(r)}{r^2 - 2Mr} \right) G_l(r) dr \right] / W \quad \text{pro } r > b, \\ R_l(r) &= G_l(r) \left[\int \left(\frac{-4\pi j_l(r)}{r^2 - 2Mr} \right) F_l(r) dr \right] / W \quad \text{pro } r < b, \end{aligned} \quad (2.96)$$

kde $W = -(2l + 1)$ je wronskián. Z (2.95) a 2.94) dosazením do (2.96) získáme konečně

pro $r > b$

$$\begin{aligned} \phi_2(r, \theta) &= 2\sqrt{\pi}I \sqrt{\frac{b-2M}{2b}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l(l+1)} \left[-i \left(b \frac{dG_l}{dr}(b) - G_l(b) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \sin \frac{\pi l}{2} \frac{\Gamma((l+2)/2)}{\Gamma((l+1)/2)} \right] \frac{1}{r^2} F_l(r) \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta}, \end{aligned} \quad (2.97)$$

pro $r < b$

$$\begin{aligned} \phi_2(r, \theta) &= 2\sqrt{\pi}I \sqrt{\frac{b-2M}{2b}} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l(l+1)} \left[-i \left(b \frac{dF_l}{dr}(b) - F_l(b) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \sin \frac{\pi l}{2} \frac{\Gamma((l+2)/2)}{\Gamma((l+1)/2)} \right] \frac{1}{r^2} G_l(r) \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta}, \end{aligned} \quad (2.98)$$

kde jako v článku [7] označíme

$$\begin{aligned} H_l^>(b) &= 2\sqrt{\pi}I \sqrt{\frac{b-2M}{2b}} \frac{1}{l(l+1)} \left[-i \left(b \frac{dF_l}{dr}(b) - F_l(b) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \sin \frac{\pi l}{2} \frac{\Gamma((l+2)/2)}{\Gamma((l+1)/2)} \right], \\ H_l^<(b) &= 2\sqrt{\pi}I \sqrt{\frac{b-2M}{2b}} \frac{1}{l(l+1)} \left[-i \left(b \frac{dG_l}{dr}(b) - G_l(b) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \sin \frac{\pi l}{2} \frac{\Gamma((l+2)/2)}{\Gamma((l+1)/2)} \right]. \end{aligned} \quad (2.99)$$

Integrovaním Maxwellových rovnic je v článku získáno řešení pro ϕ_1 :

pro $r > b$

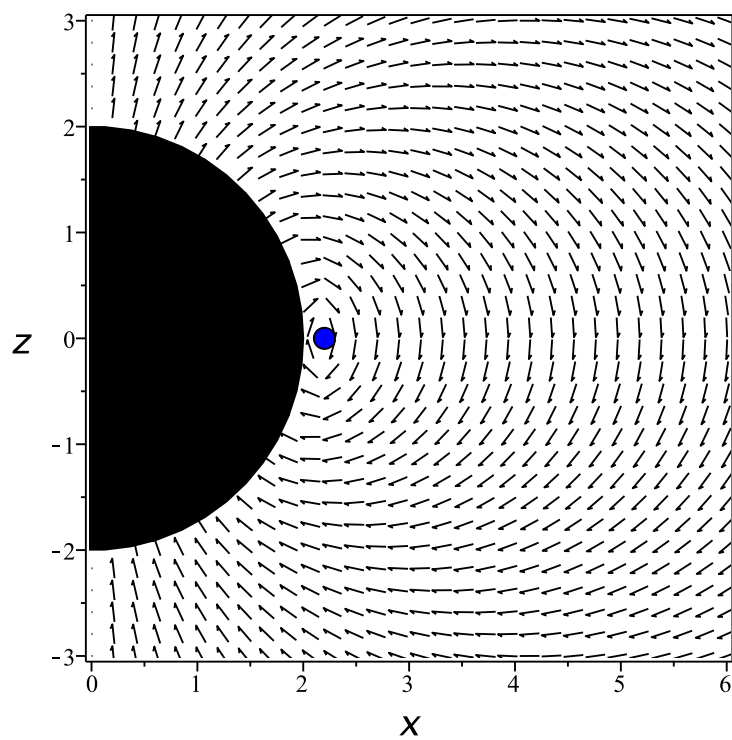
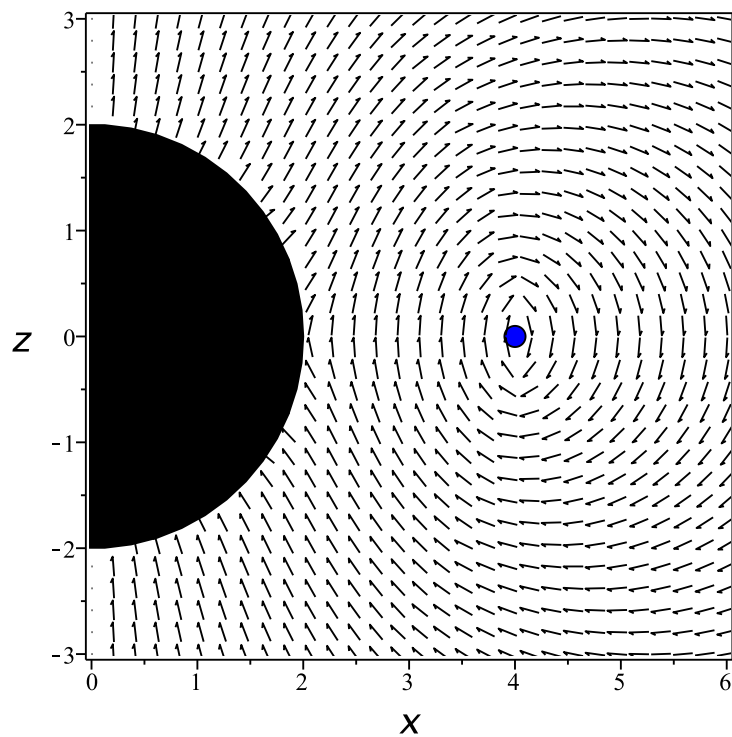
$$\phi_1(r, \theta) = \frac{\sqrt{2}}{r^2} \sum_{l=1}^{\infty} H_l^>(b) \left[r \frac{dF_l(r)}{dr} - F_l(r) \right] P_l(\cos \theta),$$

pro $r < b$

$$\phi_1(r, \theta) = \frac{\sqrt{2}}{r^2} \sum_{l=1}^{\infty} H_l^<(b) \left[r \frac{dG_l(r)}{dr} - G_l(r) \right] P_l(\cos \theta). \quad (2.100)$$

Ze známých ϕ_{-1} , ϕ_0 a ϕ_1 dostaneme $F^{\mu\nu}$ způsobem popsáním v kapitole 2.3, konkrétně z (2.84). Magnetické pole pak máme jako v (2.86). Pole je vykresleno na obrázku 2.9.

Chování pole na ose symetrie a v ekvatoriální rovině je dáno jako v kapitole 2.3, tj. θ -složka vymizí na ose symetrie a r -složka vymizí v ekvatoriální rovině. Řešení jsou totiž opět úměrná Legendreovým polynomům v úhlové části.



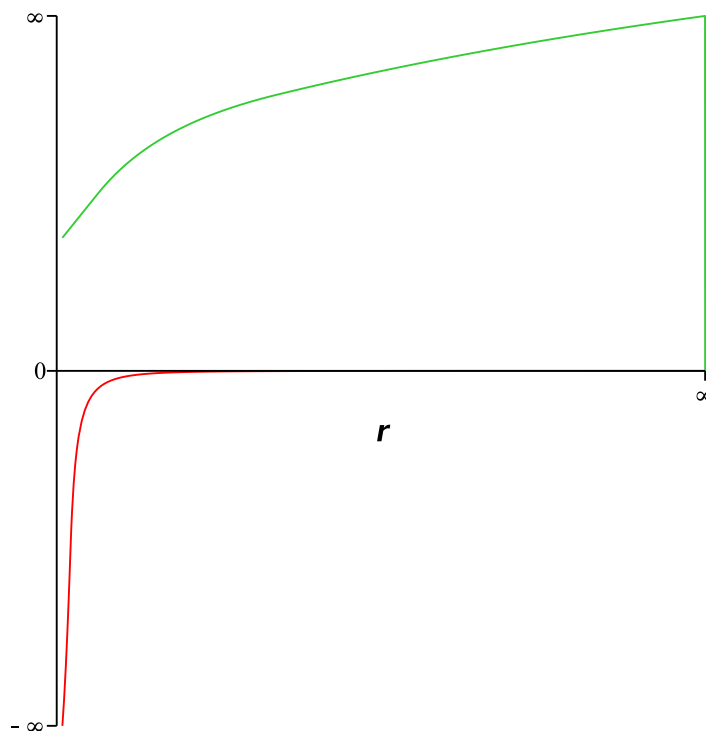
Obrázek 2.9: Pole proudové smyčky kolem Schwarzschildovy černé díry o poloměru $b = 4M$ (nahore) a $b = 2.2M$ (dole) podle řešení Chitreho a Vishveshwary [7]. Osy jsou v jednotkách M .

2.5 Limita řešení Mosse pro Kerrovu černou díru

Článek [8] se zaměřuje na kritické porovnání předchozích článků, zabývajících se poli proudových smyček kolem Kerrovu černé díry. Také zde prezentuje své vlastní řešení, a to i v řeči vektorového potenciálu. Je zde řešena stejná rovnice jako v článku [7] pro funkci $\Psi = -\Delta\phi_0$, kde Δ je dána stejně jako v [7] ve Schwarzschildovské limitě. Řešení homogenní rovnice, prezentované v tomto článku, je tvaru

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\alpha_l \frac{dP_l(u)}{dr} P_l^1(\cos\theta) + \beta_l \frac{dQ_l(u)}{dr} P_l^1(\cos\theta) \right], \quad (2.101)$$

kde P_l a Q_l jsou Legendreovy polynomy. Proměnná u je $u = (r - M)/M$. Členy u koeficientu α_l jsou regulární na horizontu, členy u β_l jsou regulární v nekonečnu, jak ukazuje obrázek 2.10.



Obrázek 2.10: Asymptotické chování řešení $\frac{dQ_2}{dr}$ (červeně) a $\frac{dP_2}{dr}$ (zeleně).

Moss zde dále uvádí řešení ve tvaru vektorového potenciálu. My se zde opět omezíme na případ nenabitě smyčky kolem nerotující černé díry. Potenciál pak má tvar

pro $r < b$

$$A_\phi = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l^i \left[r P_l(u) \sin\theta P_l^1(\cos\theta) - \frac{(r^2 - 2Mr)}{l(l+1)} \frac{dP_l(u)}{dr} \sin\theta P_l^1(\cos\theta) \right],$$

pro $r > b$

$$A_\phi = \sum_{l=1}^{\infty} \beta_l^i \left[r Q_l(u) \sin \theta P_l^1(\cos \theta) - \frac{(r^2 - 2Mr)}{l(l+1)} \frac{dQ_l(u)}{dr} \sin \theta P_l^1(\cos \theta) \right], \quad (2.102)$$

kde bylo zavedeno $\alpha_l = \alpha_l^r + i\alpha_l^i$, β_l analogicky. Ve Schwarzschildovi se projeví pouze imaginární část.

Podívejme se na plochou limitu. Tvary radiálních částí, jež označíme R_l^I pro vnitřní a R_l^{II} pro vnější řešení, mají explicitně tvar

$$\begin{aligned} R_1^I &= \frac{r^2}{2M}, \\ R_2^I &= -\frac{r^2}{4M^2}(6M - r), \\ R_3^I &= \frac{r^2}{8M^3}(24M^2 - 40Mr + 15r^2), \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$\begin{aligned} R_1^{II} &= -\frac{r^2 \ln(1 - \frac{2M}{r}) + 2Mr + 2M^2}{4M}, \\ R_2^{II} &= \frac{-6r^3 \ln(1 - \frac{2M}{r}) + 9r^2 M \ln(1 - \frac{2M}{r}) - 12Mr^2 + 6M^2 r + 2M^3}{12M^2}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.104)$$

Podobnou procedurou jako v kapitolách 2.2 a 2.3 dostaneme chování v limitě plochého prostoročasu, $R_l^I \sim r^{l+1}$ a $R_l^{II} \sim r^{-l}$. To jsou skutečně správná řešení rovnice (2.93) z článku [7] v případě plochého prostoročasu.

Proudová hustota je ve tvaru

$$J^\phi = \frac{I}{b^2} \delta(r - b) \delta(\cos \theta). \quad (2.105)$$

Zdrojový člen na pravé straně rovnice (2.89) v [7] je dán jako v kapitole 2.4 vztahem (2.90).

Dále se proud j i funkce Ψ rozvinou do báze přidružených Legendreových polynomů,

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_l R_l P_l^1(\cos \theta), \\ j &= \sum_l j_l P_l^1(\cos \theta). \end{aligned} \quad (2.106)$$

Obráceně můžeme psát

$$\begin{aligned} R_l &= \int_{-1}^1 \Psi P_l^1(\cos \theta) d(\cos \theta), \\ j_l &= \int_{-1}^1 j P_l^1(\cos \theta) d(\cos \theta). \end{aligned} \quad (2.107)$$

Nyní řešíme rovnici (2.93) v [7] a řešení nalezneme ve tvaru

$$\begin{aligned} R_l(r) &= -\frac{(r^2 - 2Mr)}{\sqrt{2}} \frac{2l(l+1)}{2l+1} \alpha_l \frac{dP_l(u)}{dr} & r < b, \\ &= -\frac{(r^2 - 2Mr)}{\sqrt{2}} \frac{2l(l+1)}{2l+1} \beta_l \frac{dQ_l(u)}{dr} & r > b. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Pokud dosadíme proudovou hustotu (2.105) do vztahu pro j , získáme pravou stranu rovnice (2.89) v [7] ve tvaru

$$-\frac{i}{\sqrt{2}} 4\pi I P_l^1(0) [b \delta'(r-b) + \delta(r-b)], \quad (2.109)$$

kde čárka značí derivaci podle r . Integrací rovnice (2.89) v [7] s pravou stranou (2.109) přes delta-funkci dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} (r^2 - 2Mr) \frac{2l(l+1)}{2l+1} \left(\beta_l \frac{dQ_l(u)}{dr} - \alpha_l \frac{dP_l(u)}{dr} \right) &= 4\pi i I P_l^1(0) b, \\ (r^2 - 2Mr) \frac{2l(l+1)}{2l+1} (\beta_l Q_l - \alpha_l P_l) &= 4\pi I \frac{r^2 - 2Mr}{l(l+1)} \frac{i}{\sqrt{2}} P_l^1(0). \end{aligned} \quad (2.110)$$

Kombinací rovnic (2.110) lze získat vztah pro β_l ,

$$\beta_l = -2\pi i I \frac{2l+1}{l(l+1)} \frac{1}{W} P_l^1(0) \left[\frac{1}{l(l+1)} \frac{dP_l(u)}{dr} - \frac{b}{b^2 - 2Mb} P_l(u) \right]_{r=b}, \quad (2.111)$$

kde W je wronskián, pro nějž platí

$$W = \left[P_l(u) \frac{dQ_l(u)}{dr} - Q_l(u) \frac{dP_l(u)}{dr} \right]_{r=b} = \frac{M}{b^2 - 2Mb}. \quad (2.112)$$

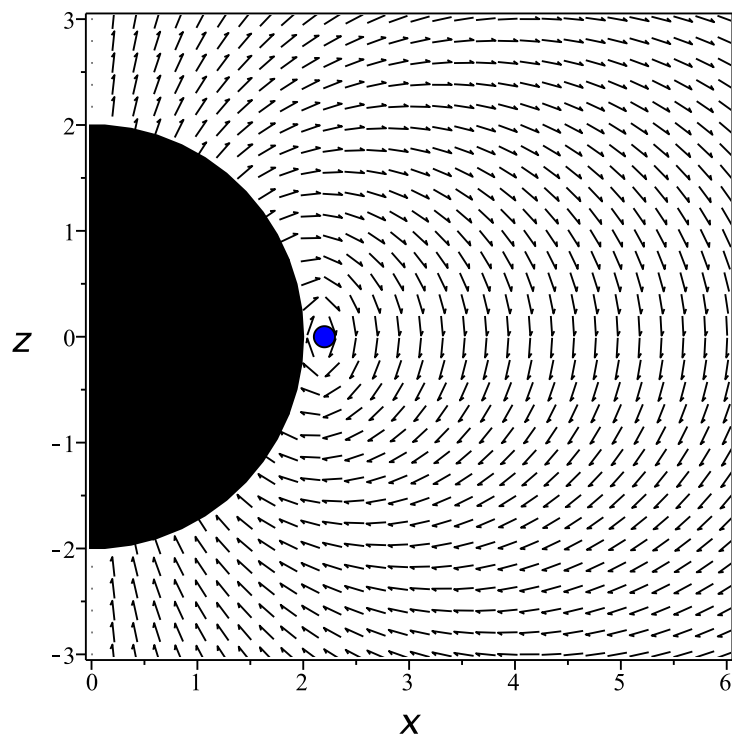
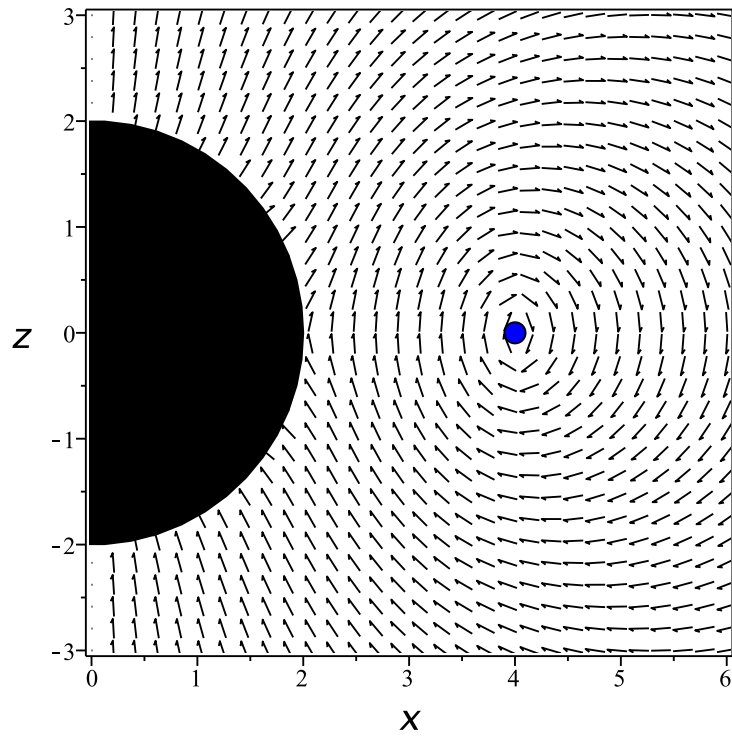
Vztah pro α_l se získá pouze záměnou P_l za Q_l v (2.111).

Jelikož reálná část obou koeficientů je nulová, odečteme z (2.111) a analogické rovnice pro α_l přímo

$$\begin{aligned} \beta_l^i &= 2\pi \frac{2l+1}{l(l+1)} \frac{I}{M} \left[b P_l(u) - \frac{b^2 - 2Mb}{l(l+1)} \frac{dP_l(u)}{dr} \right]_{r=b} P_l^1(0), \\ \alpha_l^i &= 2\pi \frac{2l+1}{l(l+1)} \frac{I}{M} \left[b Q_l(u) - \frac{b^2 - 2Mb}{l(l+1)} \frac{dQ_l(u)}{dr} \right]_{r=b} P_l^1(0). \end{aligned} \quad (2.113)$$

Pole získáme stejným způsobem jako v kapitole 2.2. Je vykresleno na obrázku 2.11.

Pole na ose symetrie a v ekvatoriální rovině je stejné jako v kapitolách 2.3 a 2.4, θ -složka vymizí na ose symetrie a r -složka vymizí v ekvatoriální rovině.



Obrázek 2.11: Pole proudové smyčky o poloměru $b = 4M$ (nahore) a $b = 2.2M$ (dole) podle schwarzschildovské limity řešení Mosse. Osy jsou v jednotkách M .

2.6 Limita řešení Pettersona pro Kerrovu černou díru

Dále je třeba se podívat na článek [4], kde Petterson zobecňuje své řešení [3] na smyčku kolem Kerrovu černé díry. V tomto článku se vyskytuje chyba, na kterou upozornil Moss [8] a kterou budeme rovněž řešit. Dále zde budeme na chvíli uvažovat nenulový náboj smyčky, abychom mohli vypsát celé rovnice, v nichž se vyskytuje chyba, se všemi členy, které jsou v článku. V dalších kapitolách se již opět omezíme na nenabitou proudovou smyčku.

Maxwellovy rovnice mají tvar [5]. Po separaci $\phi_0 = R_0(r)S(\theta)$ dostaneme dvě rovnice

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} \frac{d}{dr} \left(\Delta^2 \frac{dR_0}{dr} \right) - (l-1)(l+2)R_0 &= 0, \\ \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dS}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{1}{\sin^2\theta} \right] S &= 0. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Dosazením $R_0(r) = \Delta^{-1/2}R_l$, kde $\Delta = r^2 - 2Mr$, do radiální rovnice v (2.114) a zavedením $u = (r - M)/M$ dostaneme řešení

$$\phi_0 = \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\Delta}} [\alpha_l P_l^1(u) + \beta_l Q_l^1(u)] P_l^1(\cos\theta), \quad (2.115)$$

kde α_l i β_l jsou dány jako v [8]. Dosazením (2.115) do Maxwellových rovnic [5] a jejich integrací dostaneme vztah pro ϕ_1 , který má konečný tvar

$$\phi_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} [\alpha_l A_l(r, \theta) + \beta_l B_l(r, \theta)], \quad (2.116)$$

kde

$$\begin{aligned} A_l &= -r l(l+1)P_l(u)P_l(\cos\theta) + \Delta \frac{dP_l(u)}{dr} P_l(\cos\theta), \\ B_l &= -r l(l+1)Q_l(u)P_l(\cos\theta) + \Delta \frac{dQ_l(u)}{dr} P_l(\cos\theta). \end{aligned} \quad (2.117)$$

Nyní zopakujeme postup pro odvození koeficientů, abychom ukázali, kde se dopustil chyby Petterson a posléze výpočet opravíme. Dosazením

$$J^\phi = \frac{I}{2\pi b^2} \delta(r-b) \delta(\cos\theta) \quad (2.118)$$

do proudového členu, dosazením spinových koeficientů do prvních dvou Maxwellových rovnic a integrací přes nekonečně tenkou vrstvu v místě smyčky $r = b$ dostaneme pro nespojitosti ϕ

$$\begin{aligned} [\phi_1] &= 0, \\ [\phi_0] &= \frac{2i I b}{\sqrt{2}(b^2 - 2Mb)}, \end{aligned} \quad (2.119)$$

kde $[\]$ značí skok veličiny v místě b . Dále, jak je vidět z (2.115) a (2.116),

$$\begin{aligned} [\phi_1] &= \sum_l b^{-2} (\beta_l B_l - \alpha_l A_l) , \\ [\phi_0] &= \sqrt{2} \sum_l \left[\beta_l \frac{dQ_l}{dr}(u) - \alpha_l \frac{dP_l}{dr}(u) \right]_{r=b} P_l^1(\cos \theta) , \end{aligned} \quad (2.120)$$

kde bylo použito relace [3]

$$\frac{dP_l(u)}{dr} = \Delta^{-1/2} P_l(u) \quad (2.121)$$

a kde

$$\begin{aligned} A_l &= \left[\Delta \frac{dP_l}{dr} - l(l+1)r P_l(u) \right]_{r=b} P_l(\cos \theta) , \\ B_l &= \left[\Delta \frac{dQ_l}{dr} - l(l+1)r Q_l(u) \right]_{r=b} P_l(\cos \theta) . \end{aligned} \quad (2.122)$$

Spojením (2.119) a (2.120), rozepsáním α_l a β_l jako v [8] a ponecháním pouze imaginární části obdržíme

$$\begin{aligned} &\sum_l \left\{ \beta_l^i \left[\Delta \frac{dQ_l}{dr} - l(l+1)r Q_l(u) \right] - \alpha_l^i \left[\Delta \frac{dP_l}{dr} - l(l+1)r P_l(u) \right] \right\}_{r=b} \\ &\times P_l(\cos \theta) = 0 , \\ &\sum_l \left[\beta_l^i \frac{dQ_l}{dr} - \alpha_l^i \frac{dP_l}{dr} \right]_{r=b} P_l^1(\cos \theta) = \frac{I b}{(b^2 - 2Mb)} \delta(\cos \theta) . \end{aligned} \quad (2.123)$$

Z první rovnice v (2.123) plyne podmínka

$$\beta_l^i \left[\Delta \frac{dQ_l}{dr} - l(l+1)r Q_l(u) \right]_{r=b} = \alpha_l^i \left[\Delta \frac{dP_l}{dr} - l(l+1)r P_l(u) \right]_{r=b} . \quad (2.124)$$

A právě zde se Petterson dopustil chyby. Jeho podmínka má tvar

$$\begin{aligned} \beta_l^i [Q_l(u)]_{r=b} &= \alpha_l^i [P_l(u)]_{r=b} , \\ \beta_l^r \left[\frac{dQ_l}{dr} \right]_{r=b} &= \alpha_l^r \left[\frac{dP_l}{dr} \right]_{r=b} , \end{aligned} \quad (2.125)$$

kde v Kerrově případě je α_l^r a β_l^r nenulové. Druhá podmínka z (2.125) je správná, ta první však ne. Petterson v článku uvádí čtyři rovnice jako podmínky, ovšem v té první vynechal člen, a další, která by měla být tvaru (2.124), je napsána také chybně. Uvedeme zde pouze dvě chybné rovnice:

$$\begin{aligned} &\sum_l \left\{ \beta_l^r \left[\Delta \frac{dQ_l}{dr} - l(l+1)r Q_l(u) \right] - \alpha_l^r \left[\Delta \frac{dP_l}{dr} - l(l+1)r P_l(u) \right] \right\}_{r=b} \\ &\times P_l(\cos \theta) = (a I - q) \delta(\cos \theta) , \\ &\sum_l [\beta_l^i Q_l(u) - \alpha_l^i P_l(u)] P_l^1(\cos \theta) = 0 . \end{aligned} \quad (2.126)$$

Předně, ve druhé podmínce v (2.126) má být $P_l(\cos \theta)$, a nikoli $P_l^1(\cos \theta)$. To ale není hlavní problém. V Kerrově případě platí ještě

$$\begin{aligned} A_l &= \left[\Delta \frac{dP_l}{dr} - l(l+1)r P_l(u) \right] P_l(\cos \theta) - i a P_l(u) P_l^1(\cos \theta), \\ B_l &= \left[\Delta \frac{dQ_l}{dr} - l(l+1)r Q_l(u) \right] P_l(\cos \theta) - i a P_l(u) P_l^1(\cos \theta). \end{aligned} \quad (2.127)$$

První z rovnic (2.126) by měla vypadat

$$\begin{aligned} \sum_l \left\{ \beta_l^r \left[\Delta \frac{dQ_l}{dr} - l(l+1)r Q_l(u) \right] - \alpha_l^r \left[\Delta \frac{dP_l}{dr} - l(l+1)r P_l(u) \right] \right. \\ \left. + a [\beta_l^i Q_l(u) - \alpha_l^i P_l(u)] \right\}_b P_l(\cos \theta) = (a I - q) \delta(\cos \theta), \end{aligned} \quad (2.128)$$

kde q je celkový náboj smyčky. Zde se porovnávají reálné a imaginární části. Jelikož se násobí mezi sebou dvě komplexní jednotky, je zde ještě tato přidaná reálná část, kterou Petterson opomněl. Druhá z rovnic (2.126) by měla mít tvar (2.124).

Rovnice (2.124) se skládá z polynomů $\frac{dQ_l}{dr}$ a Q_l , resp. $\frac{dP_l}{dr}$ a P_l , které nejsou vzájemně ortogonální, tedy nelze ji separovat na dvě oddělené části, platící separátně. Z nich právě jednu má Petterson uvedenou jako podmínku, konkrétně druhou rovnici v (2.126).

Petterson nakonec dospívá k výsledku:

$$\beta_l^i = \frac{l+1/2}{l(l+1)} \frac{(b^2 - 2Mb)}{M} \frac{I b}{(b^2 - 2Mb)} P_l^1(0) [P_l(u)]_{r=b}, \quad (2.129)$$

analogicky pro α_l^i . Správný postup je vyjít přímo z (2.124). Pokud tedy z rovnice (2.124) vyjádříme β_l^i , dosadíme do druhé z (2.123) a označíme

$$a_l = \frac{\alpha_l^i}{\left[\Delta \frac{dQ_l}{dr} - l(l+1)r Q_l(u) \right]_{r=b}}, \quad (2.130)$$

můžeme psát druhou rovnici z (2.123) jako

$$\begin{aligned} \sum_l a_l \left\{ \left[\Delta \frac{dP_l}{dr} - l(l+1)r P_l(u) \right] \frac{dQ_l}{dr} - \left[\Delta \frac{dQ_l}{dr} - l(l+1)r Q_l(u) \right] \frac{dP_l}{dr} \right\}_{r=b} \\ \times P_l^1(\cos \theta) = \frac{I b}{(b^2 - 2Mb)} \delta(\cos \theta). \end{aligned} \quad (2.131)$$

Přenásobením této rovnice $P_n^1(\cos \theta)$, integrováním přes $\cos \theta$, využitím

$$\int_{-1}^1 P_l^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta) d(\cos \theta) = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} & \text{pro } l = n \\ 0 & \text{pro } l \neq n, \end{cases} \quad (2.132)$$

dále roznásobením a vhodnou úpravou, užitím vztahu pro wronskián W [8] a (2.130) dostaneme konečně

$$\alpha_l^i = \frac{2l+1}{l(l+1)} \frac{I}{M} \left[bQ_l(u) - \frac{b^2 - 2Mb}{l(l+1)} \frac{dQ_l(u)}{dr} \right]_{r=b} P_l^1(0). \quad (2.133)$$

Obdobně pro druhý koeficient

$$\beta_l^i = \frac{2l+1}{l(l+1)} \frac{I}{M} \left[bP_l(u) - \frac{b^2 - 2Mb}{l(l+1)} \frac{dP_l(u)}{dr} \right]_{r=b} P_l^1(0), \quad (2.134)$$

stejně jako Moss v [8]. Naše řešení se liší jen násobkem 2π , ale to je dáno odlišným zavedením proudové hustoty, která se právě o tento násobek liší.

Složky tenzoru elektromagnetického pole mají tvar (pro $r < b$)

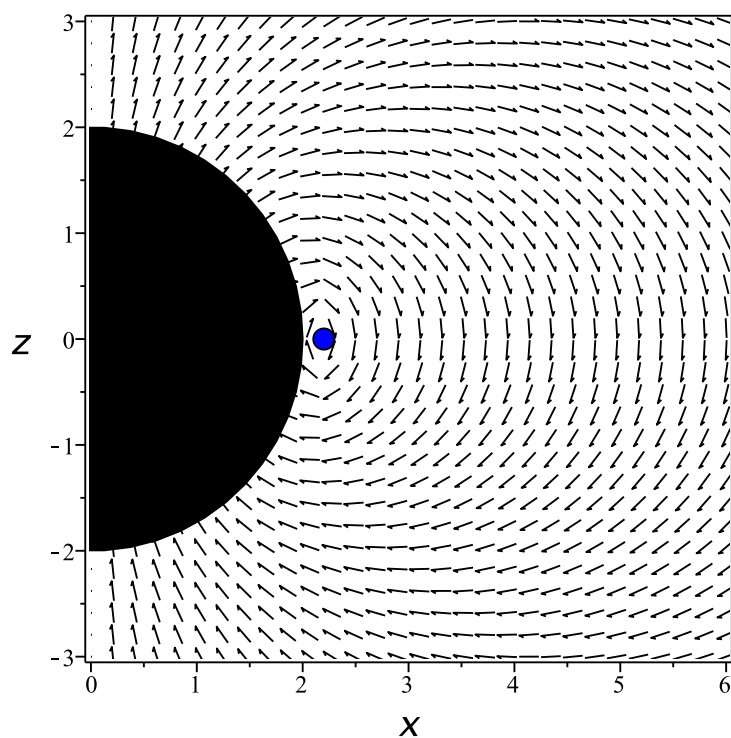
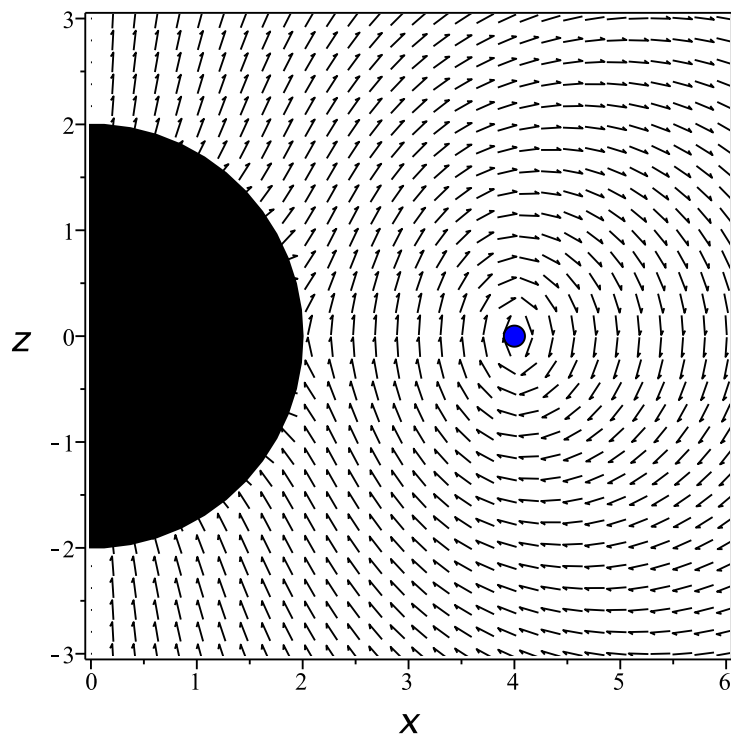
$$\begin{aligned} F^{r\phi} &= \sum_l \alpha_l^i \frac{1}{r \sin \theta} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dP_l(u)}{dr} P_l^1(\cos \theta), \\ F^{\theta\phi} &= \sum_l \alpha_l^i \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dP_l(u)}{dr} - \frac{l(l+1)}{r} P_l(u) \right] P_l(\cos \theta). \end{aligned} \quad (2.135)$$

Pro $r > b$ stačí zaměnit α_l^i za β_l^i a $P_l(u)$ za $Q_l(u)$.

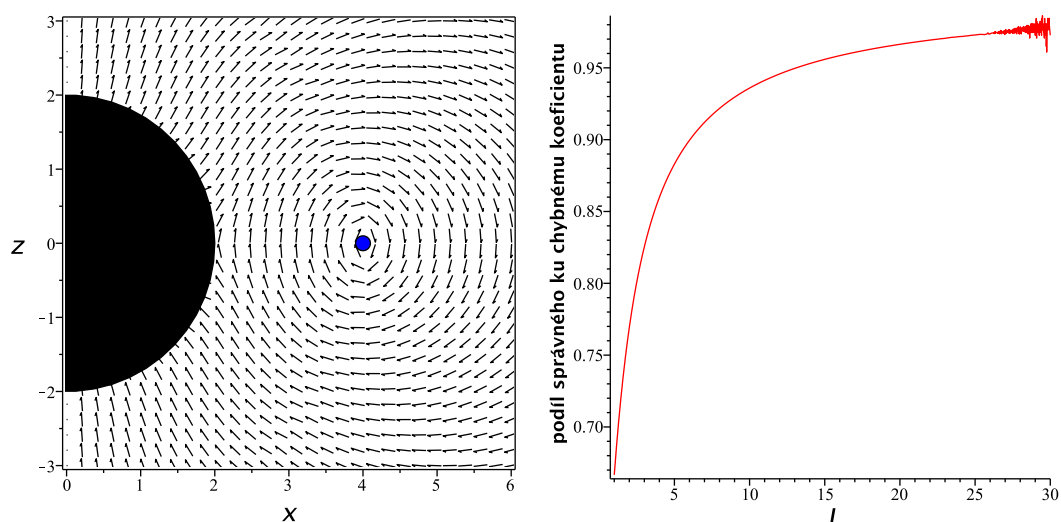
Pole získáme způsobem popsáním v kapitole 2.3. Pole je vykresleno na obrázku 2.12.

Jako v předchozích kapitolách, θ -složka vymizí na ose symetrie a r -složka vymizí v ekvatoriální rovině.

Na obrázku 2.13 jsme pro ilustraci vykreslili ještě pole se špatným koeficientem (2.129).



Obrázek 2.12: Pole proudové smyčky o ploměru $b = 4M$ (nahore) a $b = 2.2M$ (dole) kolem Schwarzschildovy černé díry podle schwarzschildovské limity řešení Pettersona [4]. Na obou obrázcích je pole vykresleno pro opravené koeficienty β_i^i a α_i^i . Osy jsou v jednotkách M .



Obrázek 2.13: Nalevo pole proudové smyčky o poloměru $r = 4M$ podle původního Pettersonova řešení s chybnými koeficienty β_i^i a α_i^i . Je vidět, že tvar pole je přesto stejný. Koeficienty se od správných liší o konstantu závislou na l . To, že tvar pole je stejný, lze vysvětlit tak, že obě složky pole (B_r a B_θ), v rámci jednoho řešení, jsou ve tvaru sumy se stejnými koeficienty, takže obě složky pole jsou normovány stejným způsobem. Pro jiné řešení, tzn. jinou sadu koeficientů, platí to stejné. To znamená, že tvar pole (směr šipek) je stejný pro obě řešení, pouze se liší intenzita pole (délky šipek). Detailnější popis toho, proč obě řešení popisují stejný zdroj, je uveden v kapitole 2.8. Obrázek vpravo ukazuje chování poměru obou koeficientů v závislosti na l . Je vidět, že se zvyšujícím se l se chybné koeficienty stále více přibližují těm správným. Oscilace na grafu vpravo kolem $l = 30$ je způsobena interpolací.

2.7 Limita řešení Znajeka pro Kerrovu černou díru

Dále se podíváme na práci Znajeka [9]. Tato práce je podobná práci Pettersona [4]. Je dobré ji zde uvést, neboť se zaměřuje na opravu [4] a na rozdíl od [8] provádí celý výpočet v případě správného řešení.

Autor uvádí rozvoje ϕ_{-1} , ϕ_0 a ϕ_1 v symetričtější podobě než Petterson. V článku provedl transformaci nulové tetrády (Dodatek 3.2)

$$l^\mu \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{M}{r}} l^\mu, \quad (2.136)$$

která vede k

$$\phi_2 = -\phi_0. \quad (2.137)$$

Dále uvádí explicitně vektorový potenciál v oblasti $r < b$:

$$A_\phi = 2 \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l^i \left[r P_l(u) - \frac{(r^2 - 2Mr)}{l(l+1)} \frac{dP_l(u)}{dr} \right] \sin \theta P_l^1(\cos \theta), \quad (2.138)$$

kde $u = (r - M)/M$. Potenciál pro $r > b$ je dán záměnou $\alpha_l^i \rightarrow \beta_l^i$ a $P_l \rightarrow Q_l$. V článku je suma sčítána od $l = 0$, ovšem [9] ukazuje, že můžeme počítat od $l = 1$, protože platí $\alpha_0^i = 0$ a v případě nenabitě smyčky také $\beta_0^i = 0$.

Koeficienty jsou získány postupem analogickým jako v [4], tedy z navázání vakuových řešení v místě smyčky. Proudová hustota je tvaru

$$J^\phi = \frac{I}{r^2} \delta(r - b) \delta(\cos \theta). \quad (2.139)$$

Znajek dále vypisuje postup pro získání koeficientů rozvoje. Tento postup je analogický jako v [4], ovšem Znajek zde opravuje chybu, které se dopustil Petterson. Rovnice, které se v článku získají, jsou již ve zkrácené podobě uvedeny v části 2.6 věnující se opravení chyby v [4]. Znajek tyto rovnice řeší přímo v Kerrově případě, využívá i schwarzschildovské limity k dosažení správného výsledku. My tuto limitu používáme od začátku počítání, vyhnuli jsme se tak těžkostem, které právě Znajek řeší za pomoci limity v průběhu výpočtu. Ovšem v případě další práce, až se budeme zabývat Kerrovým řešením, bude potřeba tento postup udělat mnohem opatrněji, jako je to právě uvedeno v [9].

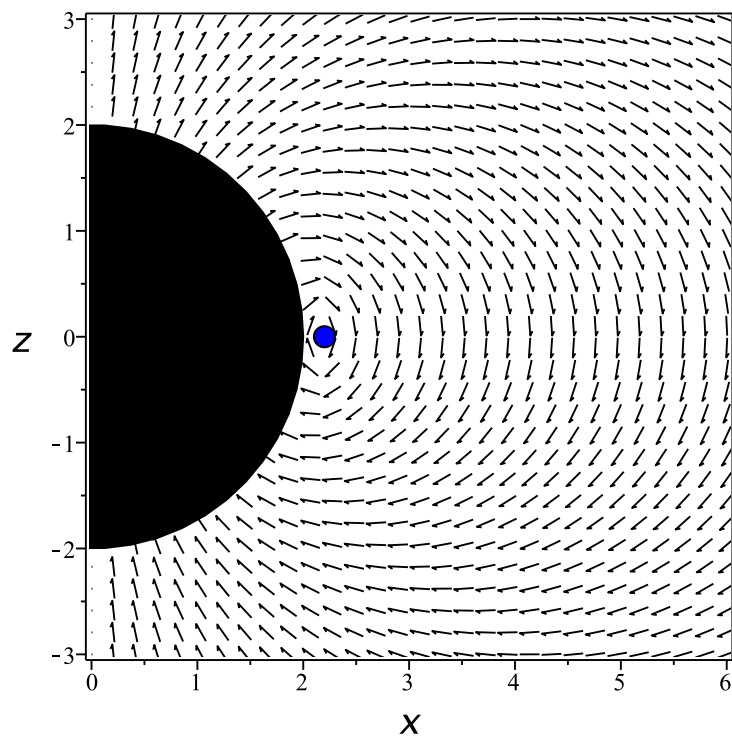
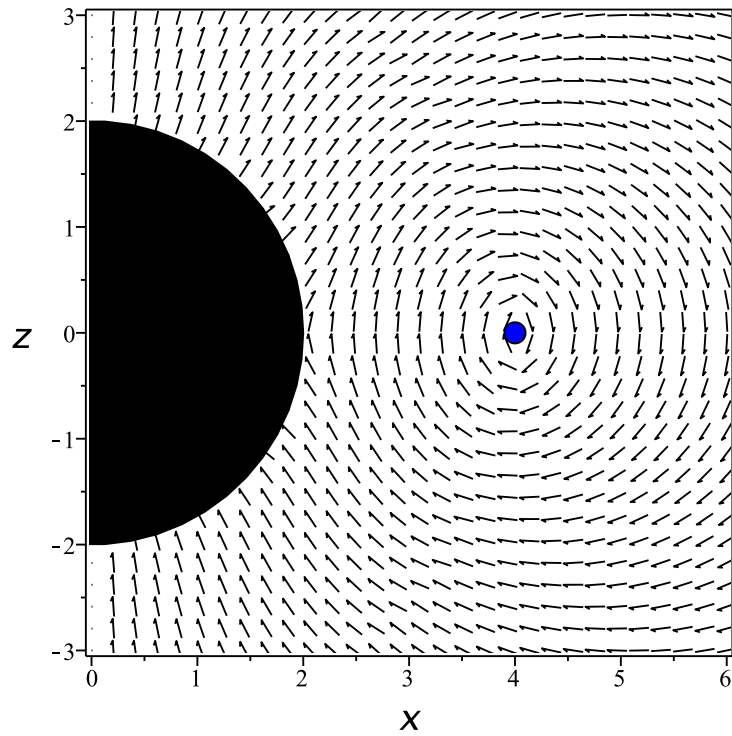
Znajek dospívá ke koeficientům ve tvaru (v našem případě ve schwarzschildovské limitě)

$$\alpha_l^i = \frac{(2l+1)I}{M 2l(l+1)} \left[b Q_l(u) - \frac{(b^2 - 2Mb)}{l(l+1)} \frac{dQ_l(u)}{dr} \right]_{r=b} P_l^1(0). \quad (2.140)$$

Vztah pro β_l^i získáme záměnou Q_l za P_l .

Magnetické pole získáme stejně jako v kapitole 2.2. Pole je vykresleno na obrázku 2.14.

Pole na pólech je pouze radiální, v ekvatoriální rovině radiální složka vymizí.



Obrázek 2.14: Pole kolem proudové smyčky o poloměru $b = 4M$ (nahore) a $b = 2.2M$ (dole) podle schwarzschildovské limity řešení Znajeka [9].

2.8 Analytické srovnání studovaných řešení

Nyní se pokusíme o srovnání řešení od jednotlivých autorů. Srovnáme nejprve [3] a [8]. Jejich tvar je

Petterson:

$$A_\phi = \sum_{l=0,2}^{\infty} a_l R_l(r) \sin^2 \theta C_l^{3/2}(\cos \theta), \quad (2.141)$$

Moss:

$$A_\phi = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l^i \left[r P_l(u) - \frac{\Delta}{l(l+1)} \frac{dP_l(u)}{dr} \right] \sin \theta P_l^1(\cos \theta), \quad (2.142)$$

kde $\Delta = r^2 - 2Mr$. Dle [4] platí vztahy

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta C_{l-1}^{3/2}(\cos \theta) &= \sin \theta P_l^1(\cos \theta), \\ R_{l-1}(u) &= \alpha_l^i \left[\frac{\Delta}{l(l+1)} \frac{dP_l(u)}{dr} - r P_l(u) \right]. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Za použití (2.143) je vidět, že obě řešení si jsou ekvivalentní, až na znaménko, to ale není důležité, to se dá zahrnout do proudu (dá se říci, že řešení uvažují opačný směr proudu. V práci jsme ovšem v obrázcích tento fakt zohlednili, proto mají všechny obrázky magnetického pole stejně volený směr proudu).

Dále porovnejme vztahy pro ϕ_0 od stejných autorů, u Pettersona vezměme řešení s Kerrovou dírou,

Petterson:

$$\phi_0 = \sqrt{2} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\alpha_l \frac{dP_l(u)}{dr} + \beta_l \frac{dQ_l(u)}{dr} \right] P_l^1(\cos \theta), \quad (2.144)$$

Moss:

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l=1}^{\infty} \left[\alpha_l \frac{dP_l(u)}{dr} + \beta_l \frac{dQ_l(u)}{dr} \right] P_l^1(\cos \theta). \quad (2.145)$$

Až na univerzální číselný faktor to samé. Vztah pro ϕ_1 Moss neuvádí.

Nyní srovnáme s těmito dvěma autory řešení Chitreho a Vishveshwary [7]. Předně platí dle Pettersona

$$\phi_2 = -\frac{\Delta}{2r^2} \phi_0. \quad (2.146)$$

Uvažme pouze vnitřní řešení, které je v případě Chitreho a Vishveshwary dáno

$$\phi_2 = \frac{\Delta}{r^2} \sum_l H_l^<(b) \frac{2^l (l-1)! l! M^l}{(2l)!} \frac{dP_l(u)}{dr} P_l^1(\cos \theta), \quad (2.147)$$

kde $H_l^>(b)$ jasně hrají roli koeficientů rozvoje. Srovnání s Pettersonem za použití (2.146) ukazuje, že se řešení liší pouze v konstantě závislé na l a b a dále na

zavedení proudové hustoty. Co se týče ϕ_1 , ve výrazu pro ϕ_1 u Chitreho a Vishveshwary se vyskytuje člen $rG'_l(r) - G_l(r)$, kde $G_l(r)$ jsou dány v [7]. Čárkou značíme derivaci podle r . Po provedení derivace dostaneme $G'_l = (l + 1)lP_l(u)$, takže

$$rG'_l(r) - G_l(r) = r l(l + 1)P_l(u) - \Delta \frac{dP_l(u)}{dr}. \quad (2.148)$$

Petterson má řešení ve tvaru (uvažujeme radiální část vnitřního řešení)

$$A_l = -r l(l + 1)P_l(u) + \Delta \frac{dP_l(u)}{dr}, \quad (2.149)$$

tedy celkově

$$\phi_1^{\text{Petterson}} = \sum_l \alpha_l^i \left[\frac{-l(l + 1)}{r} P_l(u) + \frac{\Delta}{r^2} \frac{dP_l(u)}{dr} \right] P_l(\cos \theta), \quad (2.150)$$

Chitre a Vishveshwara pak

$$\phi_1^{\text{Chitre}} = \sqrt{2} \sum_l H_l^<(b) \frac{2^l(l - 1)!!M^l}{(2l)!} \left[\frac{l(l + 1)}{r^2} P_l(u) - \frac{\Delta}{r^2} \frac{dP_l(u)}{dr} \right] P_l(\cos \theta), \quad (2.151)$$

čili struktura je stejná, liší se pouze o konstantu závislou na l .

Dále se pokusíme srovnat [4] s řešením Bičáka a Dvořáka [5]. Řešení [5] je ve tvaru

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_l \frac{\sqrt{2l + 1}}{l(l + 1)} a_l F(1 - l, l + 2, 2; x) P_l^1(\cos \theta). \quad (2.152)$$

Dle [17] platí vztah

$$\frac{dP_l(u)}{dr} = \frac{l(l + 1)}{2M} F(1 - l, l + 2, 2; 1 - x), \quad (2.153)$$

díky kterému mohu (2.144) přepsat na

$$\phi_0^{\text{Petterson}} = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l \frac{l(l + 1)}{\sqrt{2M}} F(1 - l, l + 2, 2; 1 - x) P_l^1(\cos \theta). \quad (2.154)$$

Ovšem platí

$$F(1 - l, l + 2, 2; 1 - x) = (-1)^{l+1} F(1 - l, l + 2, 2; x), \quad (2.155)$$

tedy řešení se opět liší pouze v konstantním faktoru závislém na l .

Porovnáme nyní [9] a [8]. Znajek uvádí řešení ve tvaru

$$A_\phi = 2 \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l^i \left[r P_l(u) - \frac{(r^2 - 2Mr)}{l(l + 1)} \frac{dP_l(u)}{dr} \right] \sin \theta P_l^1(\cos \theta), \quad (2.156)$$

který je až na faktor 2 totožný s (2.142).

V této části často uvádíme, že řešení se liší pouze v konstantě, která je závislá na l . Již v části 2.6 je pod obrázkem 2.13 komentováno, proč toto nemá vliv na

tvár řešení v případě Pettersona. Stejně je tomu mezi řešeními různých autorů, v případech, kdy se řešení liší o konstantu závislou na l .

Jde také o to, jak jednotlivé módy řeší Maxwellovy rovnice. Tyto rovnice lze řešit člen po členu, tzn. že je řeší každý jednotlivý mód. Jednotlivé členy řeší nehomogenní rovnici jednotlivě a na pravé straně vždy vyjde člen úměrný delta funkci, kde konstantou úměrnosti budou právě koeficienty rozvoje (tedy konstanta jež je závislá na l) a proud. Je důležité si uvědomit, že přestože se tyto koeficienty liší pro různá l , pořád jsou pravé strany rovnic úměrné delta funkci, kterou je zadán zdroj, v našem případě proudová smyčka. Jednotlivé členy tedy odpovídají poli proudové smyčky, pouze se pro různé koeficienty v různých řešeních jinak normují intenzity polí. To vysvětluje, proč jsou tvary polí stejné v různých vyjádřeních, lišících se navzájem konstantami závislými na l . V člancích Mosse, Chitreho a Bičáka se provádí explicitně rozložení proudu do báze s-harmonik, jednotlivé radiální části (viz (2.92) v kapitole 2.3) jsou právě ty členy, jež jsou pravými stranami nehomogenní Maxwellovy rovnice pro jednotlivé módy. A tyto “proudové módy” jsou zadány konkrétním zdrojem. I proto tvar pole není ovlivněn v případě chybného Pettersonova řešení v [4], neboť v obou případech je zdroj volen stejně, je jím proudová smyčka.

2.9 Numerické srovnání studovaných řešení

Nyní se podívejme na obrázky polí a porovnejme je. Toto porovnání je na obrázku 2.19. Je vidět, že výsledky jednotlivých článků jsou, alespoň v případě Schwarzschilda, prakticky totožné. To jsme očekávali, jak je ukázáno i v části 2.8 věnované analytickému porovnání.

V předchozích kapitolách jsme viděli, že θ -složka pole vymizí na ose symetrie a r -složka vymizí v ekvatoriální rovině. Zatím jsme však uvedli pouze obecný tvar nenulové části pole na ose symetrie a v ekvatoriální rovině. Zde chování pole v těchto místech upřesníme, přičemž vyjdeme z řešení Pettersona, viz vztahy (2.135). Na ose a v ekvatoriální rovině obdržíme

$$\begin{aligned} B_{\hat{r}}(r, \theta = \pi) &= \sum_l \alpha_l^i \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dP_l(u)}{dr} - \frac{l(l+1)}{r} P_l(u) \right], \\ B_{\hat{\theta}}(r, \theta = \pi/2) &= - \sum_l \alpha_l^i \frac{2\sqrt{\pi}i}{\Gamma(-l/2)\Gamma(1/2(l+1))} \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \frac{dP_l(u)}{dr}, \end{aligned} \quad (2.157)$$

když jsme využili vztahů $P_l^1(0) = \frac{-2\sqrt{\pi}i}{\Gamma(-l/2)\Gamma(1/2(l+1))}$ a $P_l(u=1) = 1$. Na horizontu je podle všech článků pole čistě radiální, tj.

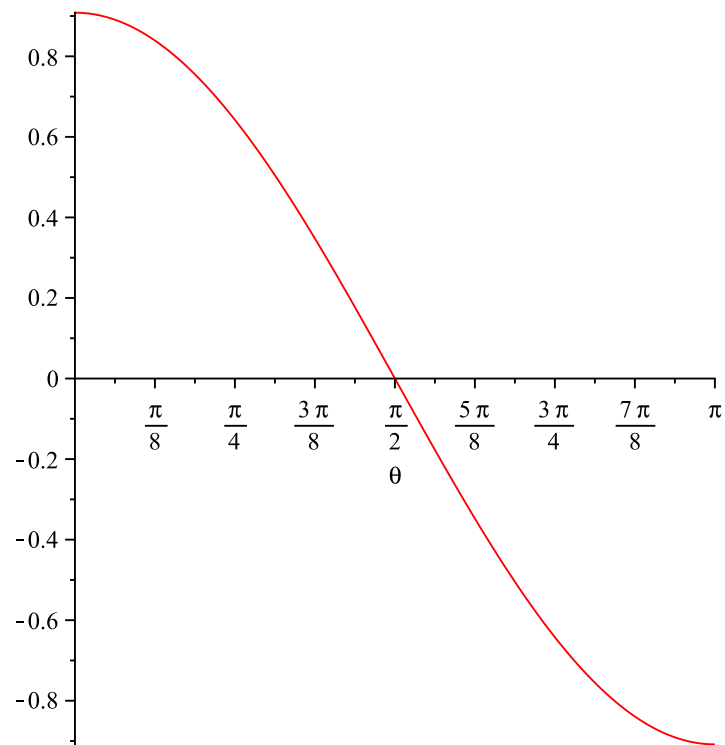
$$\begin{aligned} B_{\hat{r}}(r = 2M, \theta) &= f(\cos \theta), \\ B_{\hat{\theta}}(r = 2M, \theta) &= 0, \end{aligned} \quad (2.158)$$

kde f je nějaká funkce. Konkrétní tvar funkce f je u různých autorů jiný, jak plyne z toho, že řešení se navzájem liší o nějakou konstantu. Z Pettersonova řešení plyne pro radiální složku na horizontu

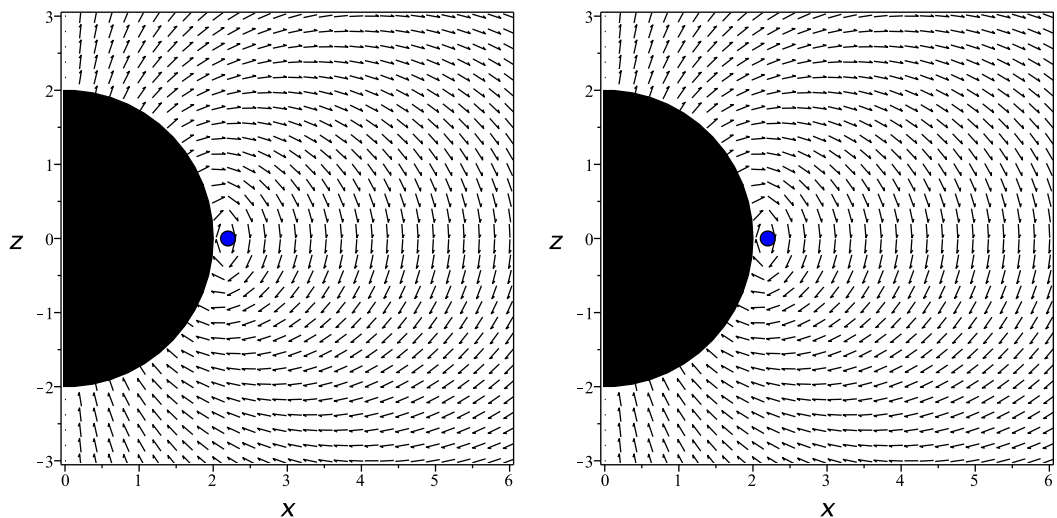
$$B_{\hat{r}}(2M) = - \sum_l \alpha_l^i \frac{l(l+1)}{2} P_l(\cos \theta), \quad (2.159)$$

kde jsme využili toho, že platí $P_l^1(u=1) = 0$. Výsledek je vykreslen na obrázku 2.15.

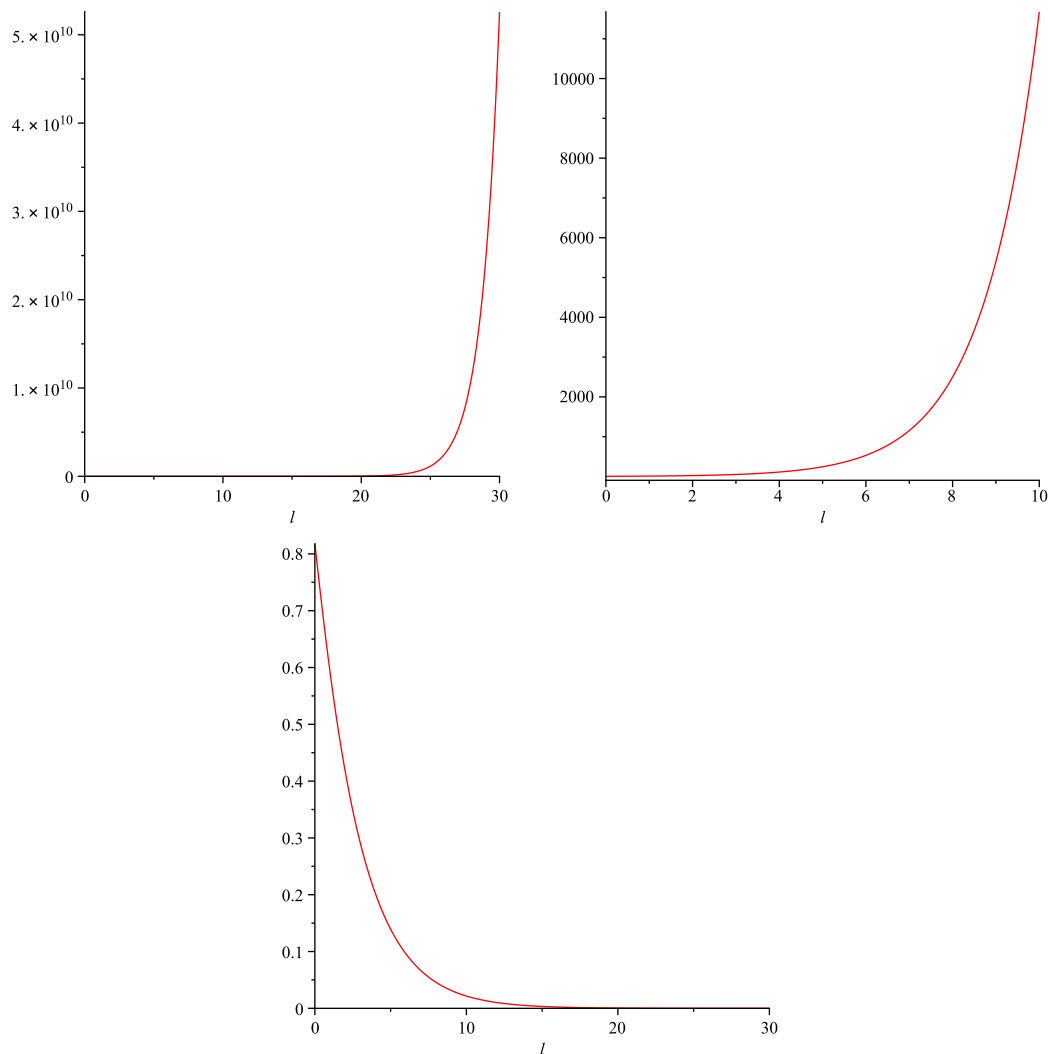
Na obrázku 2.16 je vykresleno pole v případě smyčky v blízkosti horizontu pro ta řešení, u nichž došlo k defektu. Je to způsobeno tím, že hypergeometrické funkce, jež jsou použity pro řešení radiálních částí polí v kapitolách 2.2 a 2.3, velmi rychle narůstají s rostoucím l , je-li jejich argument $r/2M$ blízko hodnotě 1.1, což nastává v případě smyčky o poloměru $b = 2.2M$. V případě řešení vyjádřených ve tvaru derivací Legendreových polynomů defekt nenastává, protože tyto funkce nerostou tak rychle. Podívejme se na to detailněji. Vezměme například řešení Pettersona a Mosse. Faktor, jenž ovlivňuje pole v závislosti na umístění smyčky u vnitřního řešení (kde defekt vzniká) v případě Pettersona, je $F(l+1, l+3, 4+2l; 2M/b)(b/2M)^{-l-1}$. V případě Mosse to je $\left[b Q_l\left(\frac{b-M}{M}\right) - \frac{(b^2-2Mb)}{l(l+1)} \frac{dQ_l}{dr}\left(\frac{b-M}{M}\right) \right]$. Na obrázcích 2.17 a 2.18 jsou ukázány tyto faktory v místě smyčky a v závislosti na l .



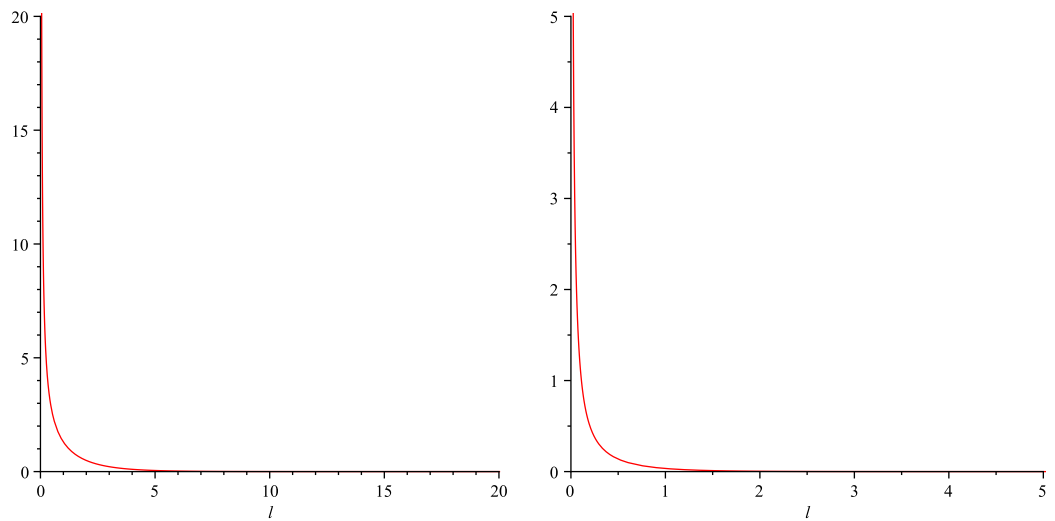
Obrázek 2.15: Tvar radiální části pole na horizontu (úhlová část je nulová) v případě Pettersona. Podle řešení ostatních autorů je průběh stejný, liší se pouze ve velikosti.



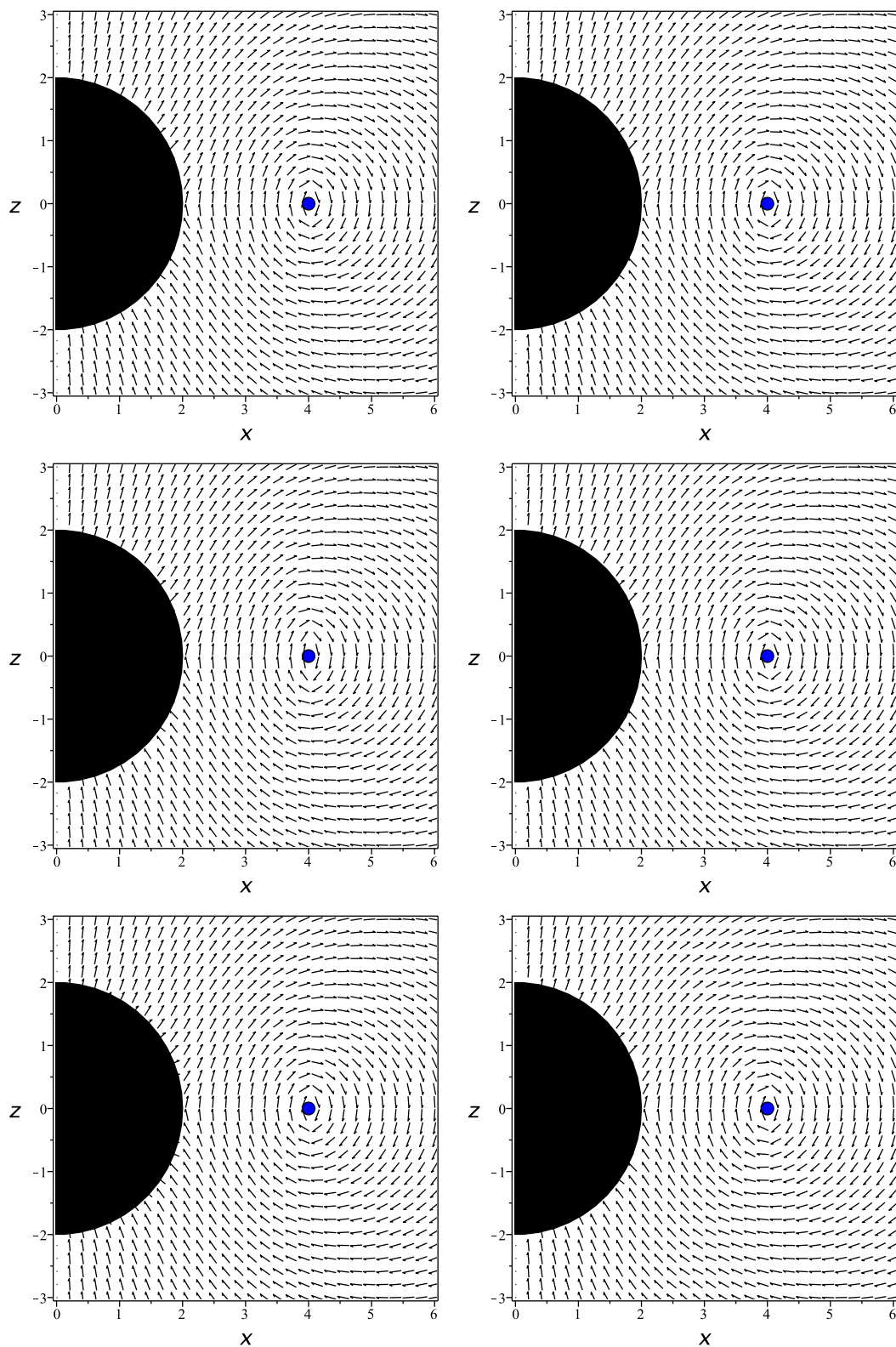
Obrázek 2.16: Zde jsou znovu vykreslena pole, kdy je smyčka blíže horizontu a vzniká defekt. Smyčka má poloměr $b = 2.2M$. Obrázek nalevo je pro případ Pettersona a napravo pro případ Bičáka a Dvořáka. Pole je vysčítáno do $l = 10$.



Obrázek 2.17: Faktor v řešení Pettersona ovlivňující pole v závislosti na umístění smyčky. Nahoře vlevo je případ smyčky poloměru $b = 2.2M$ pro $l = 0..30$, nahoře vpravo smyčka poloměru $b = 2.2M$ pro $l = 0..10$. Pro srovnání je dole případ smyčky poloměru $b = 4M$.



Obrázek 2.18: Faktor v řešení Mosse ovlivňující pole v závislosti na umístění smyčky. Vlevo je případ smyčky poloměru $b = 2.2M$ pro $l = 0..30$, vpravo smyčka poloměru $b = 4M$ pro $l = 0..30$.



Obrázek 2.19: Porovnání polí jednotlivých článků: vlevo nahoře Petterson (Schwarzschildovo řešení) [3], vpravo nahoře Bičák a Dvořák [5], vlevo uprostřed Chitre a Vishveshwara [7], vpravo uprostřed Moss [8], vlevo dole Petterson (Kerrové řešení) [4] a vpravo dole Znajek [9]. Výsledky jsou prakticky totožné.

3. Dodatky

3.1 Spinově vážené sférické harmoniky

Spinové kulové funkce ${}_s Y_{lm}$, tzv. “s-harmoniky”, budeme definovat ve shodě s [5]: Zaved’me (v rámci NP formalismu, Dodatek 2) v každém bodě prostoročasu komplexní nulovou tetradu $l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu$ (Dodatek 2). Říkáme, že η je veličina o spinové váze s , pokud se transformuje dle vztahu

$$\eta \rightarrow \eta' = e^{is\chi} \eta \quad (3.1)$$

při transformaci složek zavedené tetrady

$$m^\mu \rightarrow m'^\mu = e^{i\chi} m^\mu, \quad (3.2)$$

kde χ je nějaký fázový faktor. Dále zavedeme diferenciální operátory ${}^* \bar{\partial}$ a ${}^* \bar{\partial}$ vztahem

$$\begin{aligned} {}^* \bar{\partial} \eta &= -(\sin \theta)^s \left[\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] (\sin \theta)^{(-s)} \eta, \\ {}^* \bar{\partial} \eta &= -(\sin \theta)^{(-s)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] (\sin \theta)^s \eta, \end{aligned} \quad (3.3)$$

kde η je nějaká veličina o spinové váze s .

S tímto aparátem je možné sestavit úplnou množinu ortogonálních funkcí zvaných s-harmoniky ${}_s Y_{lm}$, podle vztahu

$$\begin{aligned} {}_s Y_{lm}(\theta, \phi) &= [(l-s)!/(l+s)!]^{1/2} {}^* \bar{\partial}^s Y_{lm}(\theta, \phi), \quad \text{pro } 0 \leq s \leq l \\ &= (-1)^s [(l+s)!/(l-s)!]^{1/2} {}^* \bar{\partial}^{-s} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad \text{pro } -l \leq s \leq 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

kde Y_{lm} jsou klasické kulové funkce.

Pro s-harmoniky platí relace ortogonality

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 {}_s \bar{Y}_{lm}(\theta, \phi) {}_s Y_{l'm'}(\theta, \phi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (3.5)$$

kde ${}_s \bar{Y}_{lm} = (-1)^{(m+s)} {}_{-s} Y_{l-m}$ a $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$.

V této práci využíváme axiální symetrie, v tomto případě jsou kulové funkce úměrné Legendreovým polynomům,

$$Y_{l0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi}} P_l(\cos \theta). \quad (3.6)$$

V této práci pracujeme s veličinami o spinové váze $1, 0, -1$, a tedy v případě axiální symetrie můžeme explicitně napsat dané s-harmoniky (ve vztahu (3.5) položíme m a derivace podle ϕ rovny nule)

$${}_1 Y_{l0}(\theta) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi l(l+1)}} \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta), \quad (3.7)$$

$${}_{-1} Y_{l0}(\theta) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi l(l+1)}} \frac{\partial}{\partial \theta} P_l(\cos \theta) \quad (3.8)$$

a samozřejmě ${}_0 Y_{lm} = Y_{lm}$.

3.2 Newmanův-Penroseův formalismus

Dle [5] v každém bodě prostoročasu zavedeme komplexní nulovou tetradu $l^\mu, n^\mu, m^\mu, \bar{m}^\mu$, kde \bar{m}^μ je komplexně sdružené m^μ , tak, aby byly splněny následující vztahy: $l_\nu n^\nu = 1$ a $m_\nu \bar{m}^\nu = -1$ (ostatní součiny vymizí). Elektromagnetické pole se dá místo tenzoru elektromagnetického pole $F_{\mu\nu}$ (jenž má šest nezávislých komponent) ekvivalentně popsat třemi skalárními komplexními veličinami, danými projekcemi $F_{\mu\nu}$ na zavedenou tetradu,

$$\begin{aligned}\phi_0 &= F_{\mu\nu} l^\mu m^\nu, \\ \phi_1 &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (l^\mu n^\nu + \bar{m}^\mu m^\nu), \\ \phi_2 &= F_{\mu\nu} \bar{m}^\mu n^\nu.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Nazpět se pak $F_{\mu\nu}$ dá napsat

$$F_{\mu\nu} = \Re \{ \phi_0 \bar{m}_{[\mu} n_{\nu]} + \phi_1 (n_{[\mu} l_{\nu]} + m_{[\mu} \bar{m}_{\nu]}) + \phi_2 l_{[\mu} m_{\nu]} \}, \quad (3.10)$$

kde $\Re\{x\}$ značí reálnou část x a hranaté závorky kolem indexů značí antisymetrizaci. Dále se “přirozeně” zavádějí diferenciální operátory

$$D = l^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \delta = m^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \bar{\delta} = \bar{m}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \Delta = n^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (3.11)$$

Dále se zavádí dvanáct spinových koeficientů

$$\begin{aligned}\kappa &= l_{\mu;\nu} m^\mu l^\nu, & \nu &= -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu n^\nu, \\ \rho &= l_{\mu;\nu} m^\mu \bar{m}^\nu, & \mu &= -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu m^\nu, \\ \sigma &= l_{\mu;\nu} m^\mu m^\nu, & \lambda &= -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu \bar{m}^\nu, \\ \tau &= l_{\mu;\nu} m^\mu n^\nu, & \pi &= -n_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu l^\nu, \\ \beta &= \frac{1}{2} (l_{\mu;\nu} n^\mu m^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu m^\nu), & \alpha &= -\frac{1}{2} (n_{\mu;\nu} l^\mu \bar{m}^\nu - \bar{m}_{\mu;\nu} m^\mu \bar{m}^\nu), \\ \epsilon &= \frac{1}{2} (l_{\mu;\nu} n^\mu l^\nu - m_{\mu;\nu} \bar{m}^\mu l^\nu), & \gamma &= -\frac{1}{2} (n_{\mu;\nu} l^\mu n^\nu - \bar{m}_{\mu;\nu} m^\mu n^\nu).\end{aligned}\quad (3.12)$$

Ve Schwarzschildově prostoročasu se dá tetradu zvolit tak, že $\kappa = \sigma = \nu = \lambda = 0$. V NP formalismu pak mají Maxwellovy rovnice tvar

$$\begin{aligned}(D - 2\rho + 2\epsilon)\phi_1 - (\bar{\delta} + \pi - 2\alpha)\phi_0 &= 2\pi j_l, \\ (\delta - 2\tau)\phi_1 - (\Delta + \mu - \gamma)\phi_0 &= 2\pi j_m, \\ (D - \rho + 2\epsilon)\phi_2 - (\bar{\delta} + 2\pi)\phi_1 &= 2\pi j_{\bar{m}}, \\ (\delta - \tau + 2\beta)\phi_2 - (\Delta + 2\mu)\phi_1 &= 2\pi j_n,\end{aligned}\quad (3.13)$$

kde $j_l = l_\mu J^\mu$, $j_m = m_\mu J^\mu$ apod. Zde J^μ je čtyř-proud.

Teukolsky ukázal, že rovnice (3.13) lze rozseparovat pro jednotlivá ϕ :

$$\begin{aligned}[(D - \epsilon + \bar{\epsilon} - 2\rho - \bar{\rho})(\Delta + \mu - 2\gamma) - (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})(\bar{\delta} + \pi - 2\alpha)] \phi_0 &= 2\pi j_0, \\ [(D + \epsilon + \bar{\epsilon} - \rho - \bar{\rho})(\Delta + 2\mu) - (\delta + \beta - \bar{\alpha} - \tau + \bar{\pi})(\bar{\delta} + 2\pi)] \phi_1 &= 2\pi j_1, \\ [(\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu - \bar{\mu})(D - \rho + 2\epsilon) - (\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau})(\delta - \tau + 2\beta)] \phi_2 &= 2\pi j_2,\end{aligned}\quad (3.14)$$

kde

$$\begin{aligned}j_0 &= (\delta - \beta - \bar{\alpha} - 2\tau + \bar{\pi})j_l - (D - \epsilon + \bar{\epsilon} - 2\rho - \bar{\rho})j_m, \\j_1 &= (\delta + \beta - \bar{\alpha} - \tau + \bar{\pi})j_{\bar{m}} - (D + \epsilon + \bar{\epsilon} - \rho - \bar{\rho})j_n, \\j_2 &= (\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + 2\mu + \bar{\mu})j_{\bar{m}} - (\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau})j_n.\end{aligned}\tag{3.15}$$

4. Závěr

Cílem této práce bylo získat základní zkušenosti s jednoduchými řešeními Maxwellových rovnic v prostoročasech černých děr. Zaměřili jsme se proto na teoreticky i astrofyzikálně zajímavý problém určení magnetického pole kruhové ekvatoriální proudové smyčky umístěné ve Schwarzschildově prostoročasu. Seznámili jsme se s formulemi, které byly jako řešení problému předloženy v literatuře, a porovnali je v konkrétních situacích na numericky získaných obrázcích. Kromě toho jsme naznačili také analytické porovnání některých předpisů.

Konkrétně jsme se zabývali výpočtem pole podle postupů prezentovaných v článkách [3, 4, 5, 7, 8, 9], přičemž jsme využívali program MAPLE.

Nejvhodnějším tvarem řešení je řešení Mosse [8] a Znajeka [9]. Moss i Znajek uvádějí explicitně tvar vektorového potenciálu, což je výhodné, neboť ten je potřeba pro výpočty dynamiky částic v magnetických polích. Také se jeho derivací snadno získá tenzor elektromagnetického pole, což je numericky výhodnější než integrace (to kdybychom chtěli naopak z tenzoru elektromagnetického pole získat vektorový potenciál). Pole je uvedeno ve tvaru rozvoje do Legendreových polynomů a jejich derivací. Se vzorci se snadno pracuje. Také je vidět ze srovnání na obrázku v kapitole 2.8, že vzorce jsou vhodné i numericky.

Další autor, jenž uvádí explicitně tvar vektorového potenciálu, je Petterson [3]. V tomto případě se jedná o rozvoj do Jacobiho a Gegenbauerových polynomů. Ovšem vnější řešení je necháno ve tvaru integrálu, který musí být spočítán pro každý mód. Pokud tedy budeme chtít spočítat sumu v rozvoji, nastanou potíže. My jsme museli v této práci řešení zapsat v jiném, vhodnějším tvaru, aby bylo možno se sumou pracovat.

Limita Kerrova řešení podaného v [4] má v opravené podobě stejný tvar jako [8] a [9]. Ovšem v článku je uvedeno chybné řešení. Přestože se tvar pole neliší od správného případu, mohou nastat potíže v dalších výpočtech.

Řešení Bičáka a Dvořáka [5] je ve tvaru rozvoje do s -harmonik, které se v případě naší situace se smyčkou redukují na přidružené Legendreovy a Legendreovy polynomy. Řešení radiálních částí je uvedeno ve tvaru hypergeometrických funkcí. S těmi se nám pracovalo obtížněji. Předně je více řešení hypergeometrické rovnice než je uvedeno v [5]. Postup získání řešení a koeficientů rozvoje je tak obtížnější než podle ostatních článků. Navíc v případě Schwarzschildova řešení je použití NP formalismu nadbytečné.

Chitreho a Vishveshwarovo řešení [7] je v porovnání s ostatními nejméně vhodné pro analytické manipulace. Provádí se zde druhé derivace Legendreových polynomů a vzorec tak nabývá komplikovaného tvaru.

Pokusili jsme se zpracovat také článek [6], ale zatím jsme nedostali uspokojivé výsledky, totiž pole vycházelo ve schwarzschildovské limitě poměrně rozdílné od výsledku v [5], přestože v obou případech je použit stejný postup.

V dalším bychom především rádi postoupili k řešení úlohy v rotujícím, Kerrově prostoročasu (již v této práci jsme využívali některých formulí platných pro Kerrovo pozadí, avšak pouze v jejich schwarzschildovské limitě). Chceme kupříkladu ověřit, zda a jak v těchto různých řešeních dochází k vymizení magnetického toku přes horizont v limitě extrémně rotující díry. Poté bychom rádi rozšířili úlohu na případ disku tvořeného soustavou (ideálně spojitým rozložením) kruhových

smyček protékaných proudem a počítali jeho celkové magnetické pole integrací přes smyčky (tedy v radiálním směru). Jinou možností rozšíření je zkoumat magnetické pole proudové smyčky, která *není* testovací (přispívá ke gravitačnímu poli), a sledovat, jak se magnetické pole mění s hmotností smyčky.

Seznam použité literatury

- [1] K. S. Thorne, Černé díry a zborcený čas (Mladá fronta, Praha 2004)
- [2] J. Bičák, V. Karas, T. Ledvinka, Black holes and magnetic fields, in *Black Holes from Stars to Galaxies – Across the Range of Masses*, Proc. of IAU Symp. #238, eds. V. Karas and G. Matt (Cambridge Univ. Press, Cambridge 2007), str. 139
- [3] J. A. Petterson, Magnetic field of a current loop around a Schwarzschild black hole, *Phys. Rev. D* **10** (1974) 3166
- [4] J. A. Petterson, Stationary axisymmetric electromagnetic fields around a rotating black hole, *Phys. Rev. D* **12** (1975) 2218
- [5] J. Bičák, L. Dvořák, Stationary electromagnetic fields around black holes I. General solutions and the fields of some special sources near a Schwarzschild black hole, *Czech. J. Phys. B* **27** (1977) 127
- [6] J. Bičák, L. Dvořák, Stationary electromagnetic fields around black holes II. General solutions and the fields of some special sources near a Kerr black hole, *Gen. Rel. Grav.* **7**, (1976) 959
- [7] D. M. Chitre, C. V. Vishveshwara, Electromagnetic field of a current loop around a Kerr black hole, *Phys. Rev. D* **12** (1975) 1538
- [8] I. G. Moss, Black holes with current loops revisited, *Phys. Rev. D* **83** (2011) 124046
- [9] R. L. Znajek, Charged current loops around Kerr holes, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **182** (1976) 639
- [10] J. Hamerský, V. Karas, Effect of the toroidal magnetic field on the runaway instability of relativistic tori, *Astron. Astrophys.* **555** (2013) A32
- [11] R. W. Goosmann, B. Czerny, A.-M. Dumont, M. Mouchet, A. Różanska, V. Karas, M. Dovčiak, X-ray variability of active galactic nuclei and the flare model, *Adv. Space Res.* **38** (2006) 1398
- [12] J. Kovář, O. Kopáček, V. Karas, Z. Stuchlík, Off-equatorial orbits in strong gravitational fields near compact objects – II: halo motion around magnetic compact stars and magnetized black holes, *Class. Quantum Grav.* **27** (2010) 135006
- [13] O. Kopáček, V. Karas, J. Kovář, Z. Stuchlík, Transition from regular to chaotic circulation in magnetized coronae near compact objects, *Astrophys. J.* **722** (2010) 1240
- [14] V. Karas, O. Kopáček, D. Kunneriath, Influence of frame-dragging on magnetic null points near rotating black holes, *Class. Quantum Grav.* **29** (2012) 035010

- [15] O. Kopáček, V. Karas, Inducing chaos by breaking axial symmetry in a black hole magnetosphere, *Astrophys. J.* **787** (2014) 117
- [16] V. Karas, O. Kopáček, Magnetic layers and neutral points near a rotating black hole, *Class. Quantum Grav.* **26** (2009) 025004
- [17] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, Ch. W. Clark, NIST Handbook of Mathematical Functions (Cambridge Univ. Press, Cambridge 2010)