Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lucie Chybová

Nestandardní sady hracích kostek

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2014

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucímu práce RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D. za téma, které pro mě vymyslel, čas, který mi věnoval, veškeré jeho připomínky a především milé vedení. Také bych chtěla poděkovat svým blízkým, kteří mě podporovali v průběhu celého mého studia, a navíc mi ochotně pomohli s posledními úpravami práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Název práce: Nestandardní sady hracích kostek

Autor: Lucie Chybová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Bakalářská práce pojednává o vybraných typech nestandardních sad hracích kostek s některými překvapivými až paradoxními vlastnostmi. Takové kostky se uplatňují v nejrůznějších hazardních hrách, jejich vlastnosti jsou však zajímavé i z čistě teoretického hlediska. Postupně se zaměřujeme na netranzitivní sady kostek, Lake Wobegon sady a Sichermanovy sady. Při studiu vlastností těchto sad využíváme zejména elementární teorii pravděpodobnosti a teorii cyklotomických polynomů. Veškeré pojmy a výsledky jsou ilustrovány na řadě příkladů.

Klíčová slova: hrací kostka, netranzitivní sada, Lake Wobegon sada, Sichermanova sada, teorie pravděpodobnosti, cyklotomický polynom

Title: Nonstandard dice sets

Author: Lucie Chybová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: The bachelor thesis discusses selected types of nonstandard dice sets with surprising and, in some cases, paradoxical properties. These dice are used in various gambling games, but they are also interesting from a purely theoretical perspective. The thesis focuses, one after another, on nontransitive, Lake Wobegon and Sicherman dice sets. When studying their properties, it mainly uses elementary probability theory and theory of cyclotomic polynomials. All the terms and results are demonstrated on examples.

Keywords: dice, nontransitive dice set, Lake Wobegon dice set, Sicherman dice set, probability theory, cyclotomic polynomial

Obsah

Kapitola 1

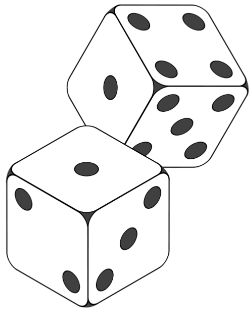
Úvod

Mnoho stolních her využívá prvku náhody, který se vytváří různými jednoduchými generátory čísel. Zpravidla se k tomuto účelu používají pravidelné mnohostěny, mezi které patří pravidelný čtyřstěn, šestistěn, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn. Ne všechny však mají vhodné vlastnosti. Čtyřstěn se těžko otáčí, dvanáctistěn a dvacetistěn mají zbytečně mnoho stran. Zbylá dvě tělesa jsou na tom v těchto ohledech lépe a klasická šestistěnná kostka má ještě jednu praktickou výhodu navíc – je jednoduchá na výrobu, a proto se také nejvíce rozšířila, jak píše M. Gardner [6]. V některých hrách se využívají i nepravidelné mnohostěny, přičemž nejčastěji se jedná o desetistěn (např. ve hře Dungeons & Dragons, jejíž součástí jsou i všechny pravidelné mnohostěny (obr. 1.1)).

Obrázek 1.1: Kostky ze hry Dungeons & Dragons

Obrázek 1.2: Starověká egyptská kostka

Díky archeologickým nálezům víme, že se hrací kostky používaly již v době před 40 tisíci lety. Nejprve se jednalo o přírodní nepravidelné předměty, například o hlezenní kosti kopytníků (proto se dodnes říká kostka), které mohly po dopadu zaujmout jednu ze čtyř různých poloh. Pozdější verze kostek (podobné už těm dnešním (obr. 1.2)) se od sebe lišily velikostí, materiálem, z kterého byly vyrobeny, i způsobem, jakým na nich byly umístěny cifry. Dnes je zvykem nejprve přiřadit cifry 1, 2, 3 třem navzájem sousedícím stěnám, a to proti směru pohybu hodinových ručiček (obr. 1.3), a poté doplnit cifry 4, 5, 6 tak, aby součet čísel na protilehlých stěnách byl vždy 7.



Obrázek 1.3: Umístění čísel na kostce

My se v dalších kapitolách budeme zabývat sadami kostek s některými překvapivými vlastnostmi.

Pravděpodobně nejznámější z nich jsou tzv. netranzitivní sady, kterým je věnována první část kapitoly 2. Jde o sady, kde ke každé kostce existuje jiná kostka, na které s pravděpodobností větší než 1/2 padne vyšší číslo než na první kostce.

V další části kapitoly 2 se zabýváme tzv. Lake Wobegon sadami, ve kterých na každé kostce padne ve více jak polovině případů číslo vyšší než průměr sady v daném hodu.

Přestože netranzitivní a Lake Wobegon sady mají na první pohled podobné vlastnosti, na konci kapitoly 2 ukážeme, že ani jedna z vlastností neimplikuje druhou.

V kapitole 3 ukážeme, že existují sady kostek (ne nutně šestistěnných) s nestandardním očíslováním, které však dávají stejné součty se stejnými pravděpodobnostmi jako klasické sady.

Kapitola 2 využívá pouze základů teorie pravděpodobnosti, a proto by měla být srozumitelná i pro středoškoláky. Kapitola 3 je o něco náročnější a opírá se o teorii cyklotomických polynomů, nicméně všechny pojmy a vlastnosti jsou zde sepsány a vysvětleny, takže nejsou potřeba žádné předběžné znalosti.

Práce je především přehledem existujících výsledků ze zahraniční literatury (zejména časopiseckých článků), která je na patřičných místech citována. V původních článcích však byly některé části obtížně srozumitelné a důkazy pouze naznačené. Naším dalším cílem proto bylo sepsat vše v co nejsrozumitelnější podobě.

Kapitola 2

Netranzitivní a Lake Wobegon sady

2.1 Netranzitivní sady

V této podkapitole se budeme zabývat kostkami s libovolným počtem stěn, které jsou ohodnoceny nezápornými celými čísly.

Definice 1 (dominance kostky)**.** *Mějme dvě kostky K_1 a K_2. Řekneme, že kostka K_1* dominuje *kostce K_2, jestliže na ní s pravděpodobností větší než $\frac{1}{2}$ padne číslo větší než na kostce K_2.*

Na první pohled by se mohlo zdát, že dominance je tranzitivní vlastnost. Tedy jestliže kostka K_1 dominuje kostce K_2 a kostka K_2 dominuje kostce K_3, pak kostka K_1 dominuje kostce K_3. Dále si ale ukážeme, že toto nemusí být nutně pravda. Pro začátek si uvedeme několik dalších definic.

Definice 2 (netranzitivní sada kostek)**.** *Řekneme, že sada n kostek je* netranzitivní*, pokud lze kostky uspořádat tak, že pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ platí, že K_i dominuje K_{i+1} a zároveň K_n dominuje K_1.*

Definice 3 (míra dominance kostky)**.** Míra dominance kostky *K_i nad kostkou K_{i+1} je rovna pravděpodobnosti, s jakou padne na kostce K_i vyšší číslo než na kostce K_{i+1}. Tuto hodnotu budeme značit P_i.*

Definice 4 (míra dominance sady kostek)**.** *O* míře dominance sady kostek *budeme mluvit, pokud budou mít všechny kostky v sadě stejnou míru dominance. Tuto hodnotu budeme značit P.*

Jak uvádí Richard A. Epstein [3], první netranzitivní sady šestistěnných kostek objevil Bradley Efron (tab. 2.1–2.3). Známějšími se staly díky Martinu Gardnerovi, který o nich psal v prosincovém vydání časopisu Scientific American z roku 1970. Později byly nalezeny další příklady, a to nejen se šestistěnnými kostkami (tab. 2.4).

Poznámka 5. Na prvním příkladu si ukážeme, jak se počítá míra dominance jedné kostky nad druhou. Protože uvažujeme šestistěnné kostky, máme celkem $6 \cdot 6 = 36$ dvojic čísel, které mohou padnout. Na první pozici vždy uvádíme číslo z první kostky, na druhé pozici číslo z druhé kostky. Pravděpodobnost, že na kostce A

K_1	0	0	4	4	4	4
K_2	3	3	3	3	3	3
K_3	2	2	2	2	6	6
K_4	1	1	1	5	5	5
$P = \frac{2}{3}$						

Tabulka 2.1: Efron 1 [7]

padne číslo větší než na kostce B, se počítá jako podíl, kde v čitateli je počet dvojic, ve kterých je číslo na první pozici vyšší než číslo na druhé pozici, a ve jmenovateli je počet všech dvojic, které mohou padnout. V našem konkrétním případě počítáme následovně:

- Číslo 4 je vyšší než 3 a kombinace těchto čísel se nám objevila ve $4 \cdot 6 = 24$ případech (na kostce K_1 je číslo 4 čtyřikrát a na kostce K_2 je číslo 3 šestkrát). Pro P_1 tedy platí $P_1 = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.
- Číslo 3 je vyšší než 2 a kombinace těchto čísel se nám objevila v $6 \cdot 4 = 24$ případech (na kostce K_2 je číslo 3 šestkrát a na kostce K_3 je číslo 2 čtyřikrát). Pro P_2 tedy platí $P_2 = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.
- Číslo 2 je vyšší než 1 a kombinace těchto čísel se nám objevila ve $4 \cdot 3 = 12$ případech (na kostce K_3 je číslo 2 čtyřikrát a na kostce K_4 je číslo 1 čtyřikrát). Číslo 6 je vyšší než 1 i 5 a kombinace těchto čísel se nám objevila ve $2 \cdot (3+3) = 12$ případech (na kostce K_3 je číslo 6 dvakrát a na kostce K_4 jsou čísla 1 a 5 dohromady šestkrát). Pro P_3 tedy platí $P_3 = \frac{12+12}{36} = \frac{2}{3}$.
- Číslo 1 je vyšší než 0 a kombinace těchto čísel se nám objevila v $3 \cdot 2 = 6$ případech (na kostce K_4 je číslo 1 třikrát a na kostce K_1 je číslo 0 dvakrát). Číslo 5 je vyšší než 0 i 4 a kombinace těchto čísel se nám objevila v $3 \cdot (2+4) = 18$ případech (na kostce K_4 je číslo 5 třikrát a na kostce K_1 jsou čísla 0 a 4 dohromady šestkrát). Pro P_4 tedy platí $P_4 = \frac{6+18}{36} = \frac{2}{3}$.

Protože $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = \frac{2}{3}$, platí podle definice 4 (míra dominance sady kostek) $P = \frac{2}{3}$.

K_1	0	1	7	8	8	8
K_2	5	5	6	6	6	6
K_3	4	4	4	4	12	12
K_4	2	3	3	9	10	11
$P = \frac{2}{3}$						

Tabulka 2.2: Efron 2 [7]

Poznámka 6. Podíváme-li se na hodnoty míry dominance sady kostek v jednotlivých příkladech, mohlo by nás zajímat, jaké nejvyšší mohou být. Podle [7] již Bradley Efron uvedl, že pro 3 kostky jsou to maximálně $\frac{2}{3}$ a s rostoucím počtem kostek v sadě se tato hodnota limitně blíží $\frac{3}{4}$.

Dále by se nabízela otázka, zda existuje nějaký obecný postup, jak konstruovat netranzitivní sady, ale v prostudované literatuře jsme na žádný takový nenarazili.

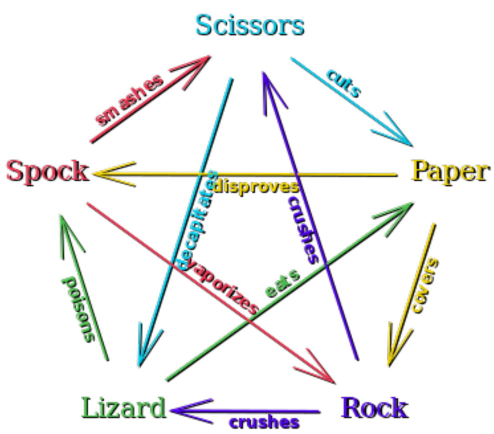
K_1	0	1	7	8	8	9
K_2	5	5	6	6	7	7
K_3	3	4	4	5	11	12
K_4	1	2	3	9	10	11
$P = \frac{11}{18}$						

Tabulka 2.3: Efron 3 [7]

K_1	1	5	9
K_2	3	4	8
K_3	2	6	7
$P = \frac{5}{9}$			

Tabulka 2.4: Tenney & Foster [11]

Netranzitivní sady kostek jsou jen jedním ze zástupců netranzitivních paradoxů. Nejrozšířenějším netranzitivním paradoxem je známá hra „stříhání“, jinak nazývaná kámen–nůžky–papír. Tato hra je přímo založena na tom, že každá věc může být jednou ze zbývajících poražena, zatímco tu druhou porazí. „Stříhání“ pochází zřejmě z Japonska a má i různé obdoby. Z posledních let asi nejznámější je rozšířená verze Rock–Paper–Scissors–Lizard–Spock (obr. 2.1).



Obrázek 2.1: Diagram ke hře Rock–Paper–Scissors–Lizard–Spock

Další jev patřící do této skupiny je volební paradox, který byl zaznamenán v 18. století francouzským matematikem a filozofem Nicolasem de Condorcetem. Řekněme, že ve volbách soupeří tři kandidáti A, B, C o hlasy tří voličů, jejichž preference udává tabulka 2.5. Z ní vidíme, že většina (1. a 3. volič) preferuje kandidáta A před B. Z dvojice B a C by zvítězil kandidát B. Z těchto výsledků bychom tedy čekali, že z kandidátů A a C zvítězí první zmíněný, avšak z tabulky je jasné, že by zvítězil kandidát C. Neexistuje tedy žádný absolutní vítěz a vzniká nám tu netranzitivní paradox.

	volič 1	volič 2	volič 3
1. místo	A	B	C
2. místo	B	C	A
3. místo	C	A	B

Tabulka 2.5: Volební preference [10]

2.2 Lake Wobegon sady

Celá tato podkapitola vychází z článku J. Moraledy a D. G. Storka [8]. V předchozí části jsme si ukázali netranzitivní sady kostek, kde každá kostka dominuje jiné kostce a ke každé kostce najdeme další, která jí dominuje. Porovnávali jsme tedy vždy pouze dvě kostky. Nyní nám ale půjde o sady kostek, kde je každá kostka v jistém smyslu lepší, než průměr všech kostek v sadě. Autoři článku proto tyto sady pojmenovali „Lake Wobegon“ a sami tento název vysvětlují:
„Říkáme těmto kostkám *Lake Wobegon* na počest dětí ze smyšleného města v Minnesotě, kde jsou podle autora Garrisona Keilorra všechny ženy silné, všichni muži krásní a všechny děti nadprůměrné.“
My budeme dále často používat pouze zkratku LW.

Čísla na stěnách kostek budeme uvažovat jen přirozená. V každém hodu označíme jako X_i číslo, které padlo na kostce K_i v daném hodu, A průměr sady v daném hodu (tedy $A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$) a E_i rozdíl hodnot X_i a A ($E_i = X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$).

Definice 7 (LW dominance kostky)**.** *Mějme sadu n kostek a nechť $i \in \{1, \ldots, n\}$. Rozdílu pravděpodobnosti, že na kostce K_i padne číslo větší, než je průměr sady v daném hodu, a pravděpodobnosti, že na kostce K_i padne číslo menší, než je průměr sady v daném hodu, budeme říkat* LW dominance kostky K_i *a budeme ho značit D_i. LW dominanci kostky lze tedy vyjádřit vzorcem*

$$D_i = P[E_i > 0] - P[E_i < 0]. \tag{2.1}$$

Definice 8 (LW dominance sady kostek)**.** LW dominance sady kostek *je rovna LW dominanci nejméně dominantní kostky v sadě a značí se D. Pro sadu n kostek platí tedy rovnost $D = \min_{i\in\{1,2,\ldots,n\}} D_i$.*

Definice 9 (LW sada)**.** *Sadu kostek nazveme* LW sadou*, jestliže má kladnou LW dominanci (tedy $D > 0$).*

Z definice 9 (LW sada) vyplývá, že v LW sadě mají všechny kostky vyšší pravděpodobnost, že přehodí průměr v daném hodu, než že na nich padne menší číslo, než je průměr sady v daném hodu.

K_1	1	2	2
K_2	1	2	2
K_3	1	2	2
$D = \frac{2}{27}$			

Tabulka 2.6: Lake Wobegon sada [8]

Příklad 10. V tabulce 2.6 máme ukázku LW sady tří kostek se třemi stěnami. Na tomto příkladu si ukážeme, jak se spočítá hodnota D.

V tabulce 2.7 uvádíme všech 27 možných hodů, přičemž v prvních třech sloupcích jsou hodnoty, které v daném hodu padly na kostkách K_1, K_2, K_3, ve čtvrtém sloupci je hodnota A a v posledních třech sloupcích hodnoty E_1, E_2 a E_3. Pro přehlednost jsou stejné hodnoty na jedné kostce odlišeny čárkami.

K_1	K_2	K_3	A	E_1	E_2	E_3
1	1	1	1	0	0	0
1	1	2	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	1	$2'$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	2	1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
1	$2'$	1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
1	2	2	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	2	$2'$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	$2'$	2	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	$2'$	$2'$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	1	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
2	1	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	1	$2'$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
2	2	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
2	$2'$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
2	2	2	2	0	0	0
2	2	$2'$	2	0	0	0
2	$2'$	2	2	0	0	0
2	$2'$	$2'$	2	0	0	0
$2'$	1	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$2'$	1	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$2'$	1	$2'$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$2'$	2	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$2'$	$2'$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
$2'$	2	2	2	0	0	0
$2'$	2	$2'$	2	0	0	0
$2'$	$2'$	2	2	0	0	0
$2'$	$2'$	$2'$	2	0	0	0

Tabulka 2.7: Výpočet dominance LW sady

Protože jsou všechny kostky stejné, platí $D_1 = D_2 = D_3 = D$. Stačí proto spočítat libovolnou hodnotu D_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ a rovnou tím získáme hodnotu D, která bude s D_i shodná. Zvolme tedy např. $i = 1$. Vidíme, že E_1 je v devíti případech rovno 0, v osmi menší než 0 a v deseti větší než 0 a všech případů dohromady je 27.

LW dominanci kostky K_1, a tedy LW dominanci sady, lze nyní již jednoduše dopočítat podle vzorečku (2.1): $D = D_1 = \frac{10}{27} - \frac{8}{27} = \frac{2}{27} > 0$. Tím jsme ověřili, že se skutečně jedná o LW sadu.

Věta 11 (Hranice optima)**.** *LW dominance sady n kostek je rovna nejvýše hodnotě $\frac{n-2}{n}$.*

Důkaz. Jestliže s_i je počet stěn i-té kostky, pak celkový počet možností, které při hodu všemi n kostkami mohou nastat, je $N = s_1 \cdots s_n$. Pro dominance jednotlivých kostek pak platí

$$D_1 = \frac{a_1 - b_1}{N}, \ldots, D_n = \frac{a_n - b_n}{N},$$

kde a_i, resp. b_i je počet možností, kdy i-tá kostka je nad, resp. pod průměrem sady.

Představme si, že postupně probíráme všech N možností. Každá kostka, která je v daném hodu nad průměrem, přispěje do příslušného čitatele hodnotou 1, zatímco kostka, která je pod průměrem, přispěje do příslušného čitatele hodnotou -1. Chceme dosáhnout toho, aby po probrání všech případů bylo minimum ze všech čitatelů co největší.

Řekněme, že jsme během tohoto procesu rozdělili jistý počet jedniček a minus jedniček. Nejmenší z čitatelů určitě nepřevýší průměr všech čitatelů, v optimálním případě budou všechny čitatele stejné a jejich minimum bude rovno průměru všech čitatelů.

Jak dosáhnout toho, aby průměr čitatelů byl co největší? Vraťme se opět k probírání všech N možností. Pokud by v některém případě padly na všech kostkách stejné hodnoty, pak se čitatele nezmění. Jinak musí být aspoň jedna kostka pod průměrem a aspoň jedna nad průměrem sady. Aby se součet čitatelů v každém kroku co nejvíce zvětšil, bude nejlepší, když v každém případě bude právě $n-1$ kostek nad průměrem sady a právě jedna kostka pod průměrem sady. Po skončení procesu pak budou všechny čitatele stejné právě tehdy, když každá kostka bude pod průměrem stejně často, tj. s pravděpodobností $\frac{1}{n}$. Všechny kostky pak budou mít LW dominanci

$$D_i = \frac{n-1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{n-2}{n}, \ i \in \{1, \ldots, n\}.$$

❑

Definice 12 (optimální LW sada)**.** *Řekneme, že LW sada n kostek je* optimální*, jestliže pro ni platí $D = \frac{n-2}{n}$.*

Poznámka 13. Následující věta ukazuje, že optimální sady kostek skutečně existují. Sady budeme popisovat tak, že pro každou kostku uvedeme výčet hodnot na stěnách kostky společně s pravděpodobnostmi, že dané hodnoty padnou. Pro jednodušší pochopení si ukážeme, jak by v tomto zápisu vypadala sada z tabulky 2.6:
$K_1 : \{1 \ (\frac{1}{3}), \ 2 \ (\frac{2}{3})\}$,
$K_2 : \{1 \ (\frac{1}{3}), \ 2 \ (\frac{2}{3})\}$,
$K_3 : \{1 \ (\frac{1}{3}), \ 2 \ (\frac{2}{3})\}$.

Věta 14 (Existence optima)**.** *Mějme $n \geq 3$ a označme $p_{max} = 1 + n(n-1)^{n-2}$. Potom sada kostek*

$K_1 : \{p_{max} - 1 \quad (1)\},$
$K_2 : \{p_{max} \quad (\frac{1}{2}),\ \ p_{max} - n \quad (\frac{1}{2})\},$
$K_3 : \{p_{max} \quad (\frac{2}{3}),\ \ p_{max} - n(n-1) \quad (\frac{1}{3})\},$
$\vdots$
$K_i : \{p_{max} \quad (\frac{i-1}{i}),\ \ p_{max} - n(n-1)^{i-2} \quad (\frac{1}{i})\},$
$\vdots$
$K_n : \{p_{max} \quad (\frac{n-1}{n}),\ \ p_{max} - n(n-1)^{n-2} \quad (\frac{1}{n})\}$
je optimální LW sada.

Důkaz. Ve větě 11 (o hranici optima) jsme si dokázali, že sada kostek je LW optimální, pokud pro každou kostku platí, že na ní s pravděpodobností $\frac{1}{n}$ padne číslo menší, než je průměr sady v daném hodu, a ve všech ostatních případech na ní padne číslo větší, než je průměr sady.

Nejprve ukážeme, že pokud v libovolném hodu padne nejmenší číslo na kostce K_i, pak všechny ostatní kostky mají hodnoty nad průměrem sady v daném hodu. Postup rozdělíme na několik případů.

- Nejprve uvažujme situaci, kdy $i \geq 3$. Pak na každé K_k, $k > i$ padne p_{max}, neboť druhá hodnota na těchto kostkách je menší než hodnota, která padla na kostce K_i, a ta má být minimální, a na každé K_k, $k < i$ může padnout cokoliv.
  Předpokládejme dále, že druhá nejmenší hodnota padne na kostce K_j.
  - Nechť nejprve $1 < j < i$. Ukážeme si, že číslo, které padlo na kostce K_j, je vyšší než průměr sady v daném hodu, a tedy všechny kostky kromě K_i jsou nad průměrem sady v daném hodu.

    V nejhorším případě se může stát, že na všech kostkách kromě K_i a K_j padne jejich nejvyšší číslo. Potom

$$A = \tfrac{1}{n}[(p_{max} - 1) + (p_{max} - n(n-1)^{j-2}) + (p_{max} - n(n-1)^{i-2}) + \\ +(n-3)p_{max}] = p_{max} - (n-1)^{j-2} - (n-1)^{i-2} - \tfrac{1}{n},$$

$$E_j = X_j - A = [p_{max} - n(n-1)^{j-2}] - [p_{max} - (n-1)^{j-2} - (n-1)^{i-2} - \tfrac{1}{n}] = \\ = -(n-1)^{j-1} + (n-1)^{i-2} + \tfrac{1}{n} \geq \tfrac{1}{n} > 0.$$

  - Nechť $j = 1$, $i \geq 3$. Potom

$$A = \tfrac{1}{n}[(p_{max} - 1) + (p_{max} - n(n-1)^{i-2}) + (n-2)p_{max}] = \\ = p_{max} - (n-1)^{i-2} - \tfrac{1}{n},$$

$$E_j = X_j - A = (p_{max} - 1) - [p_{max} - (n-1)^{i-2} - \tfrac{1}{n}] = \\ = -1 + (n-1)^{i-2} + \tfrac{1}{n} \geq \tfrac{1}{n} > 0.$$

- Nechť $i = 2$. Potom nutně $j = 1$, a tedy

  $$A = \frac{1}{n}[(p_{max} - 1) + (p_{max} - n) + (n-2)p_{max}] = p_{max} - 1 - \frac{1}{n},$$

  $$E_j = X_j - A = (p_{max} - 1) - (p_{max} - 1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} > 0.$$

- Konečně nechť $i = 1$. Potom na všech kostkách kromě K_1 padne p_{max}, a tedy

  $$A = \frac{1}{n}[(p_{max} - 1) + (n-1)p_{max}] = p_{max} - \frac{1}{n},$$

  $$E_k = X_k - A = p_{max} - (p_{max} - \frac{1}{n}) \geq \frac{1}{n} > 0,\ 1 < k \leq n.$$

Vidíme tedy, že hodnota X_i na kostce K_i je pod průměrem sady, právě když na K_i padne v daném hodu nejmenší číslo. Výpočet pravděpodobnosti, že se tak stane, musíme rozdělit do dvou případů.

- Nechť nejprve $i > 1$, potom

  $$P[X_i = p_{max} - n(n-1)^{i-2}, X_{i+1} = p_{max}, \ldots, X_n = p_{max}] = \frac{1}{i}\frac{i}{i+1}\cdots\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

- Nyní nechť $i = 1$, potom

  $$P[X_1 = p_{max} - 1, X_2 = p_{max}, \ldots, X_n = p_{max}] = 1\frac{1}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Sada je tedy LW optimální.

❑

Poznámka 15. Pro další účely bude vhodné zavést značení. Nechť tedy n značí počet kostek sady, s počet stěn jedné kostky a p nejvyšší číslo vyskytující se v sadě na stěnách kostek.

Lemma 16 (Nejmenší hodnota p)**.** *Mějme $n \geq 3$ libovolné. Každá optimální LW sada splňuje nerovnost*

$$p \geq p_{max} = 1 + n(n-1)^{n-2}. \tag{2.2}$$

Důkaz. Důkaz lemmatu lze najít v článku [8].

❑

Poznámka 17. V tabulce 2.8 uvádíme příklad optimální LW sady sestavené podle znění věty 14 (o existenci optima) pro $n = 3$. Objevují se nám tu 4 různé kombinace čísel, které mohou padnout v jednotlivých hodech. Konkrétně $\{6,4,1\}$ ve

36 případech, $\{6,7,1\}$ ve 36 případech, $\{6,4,7\}$ v 72 případech a $\{6,7,7\}$ v 72 případech. Odsud dostáváme následující hodnoty LW dominancí jednotlivých kostek:

$$\begin{aligned}
D_1 &= \frac{36+36+72}{216} - \frac{72}{216} = \frac{72}{216} = \frac{1}{3},\\
D_2 &= \frac{36+36+72}{216} - \frac{72}{216} = \frac{72}{216} = \frac{1}{3},\\
D_3 &= \frac{72+72}{216} - \frac{36+36}{216} = \frac{72}{216} = \frac{1}{3},\\
D_1 = D_2 = D_3 = D &= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Protože $n = 3$ a $D = \frac{n-2}{n}$, ověřili jsme, že se skutečně jedná o optimální LW sadu.

K_1	6	6	6	6	6	6
K_2	4	4	4	7	7	7
K_3	1	1	7	7	7	7
$D = \frac{1}{3}$						

Tabulka 2.8: Optimální Lake Wobegon sada [8]

Na závěr si ukážeme, že sada z tabulky 2.8 má tři zajímavé minimální vlastnosti:

Tvrzení 18 (Vlastnost 1)**.** *Žádná sada s n kostkami, kde $n < 3$, není LW sadou.*

Důkaz.

- Nechť $n = 1$. Potom $E_1 = 0$ vždy, a tedy $D = D_1 = 0$. Jedna kostka tedy netvoří LW sadu.
- Nechť $n = 2$. Potom mohou nastat 2 případy:
  - Na kostkách padne stejné číslo, a tedy $E_1 = E_2 = 0$.
  - Na kostkách padnou různá čísla. Pak platí tyto ekvivalence:

    $$E_1 > 0 \Leftrightarrow E_2 < 0 \quad \text{a} \quad E_1 < 0 \Leftrightarrow E_2 > 0.$$

    Proto dále platí

    $$P(E_1 > 0) = P(E_2 < 0) \quad \text{a} \quad P(E_1 < 0) = P(E_2 > 0),$$

    $$D_1 = P(E_1 > 0) - P(E_1 < 0) = P(E_2 < 0) - P(E_2 > 0) = -D_2.$$

    Konečně $D = \min\{D_2, -D_2\}$, a tedy $D \leq 0$.

  Dvě kostky tedy také netvoří LW sadu.

❑

Tvrzení 19 (Vlastnost 2)**.** *Máme-li optimální LW sadu kostek s nejvyšším číslem p, pak $p \geq 7$.*

Důkaz. Z předchozího tvrzení 18 (o vlastnosti 1) víme, že $n \geq 3$. Dále ze vzorce (2.2) v lemmatu 16 (o nejmenší hodnotě p) víme, že p musí splňovat nerovnost $p \geq 1 + n(n-1)^{n-2}$.
Odsud plyne

$$p \geq 1 + 3(3-1)^{3-2} = 1 + 3 \cdot 2^1 = 7.$$

❑

Tvrzení 20 (Vlastnost 3)**.** *Máme-li optimální LW sadu tří kostek, kde každá z nich má právě s stěn, pak $s \geq 6$.*

Důkaz. Důkaz tvrzení lze najít v článku [8].

❑

2.3 Porovnání

Může nás napadnout otázka, v jakém vztahu jsou netranzitivní a Lake Wobegon sady kostek. Ukážeme si, že ani jedna vlastnost neimplikuje druhou. Nejprve dokážeme, že netranzitivní sada nemusí být Lake Wobegon, a potom naopak, že Lake Wobegon sada nemusí být netranzitivní.

Vezměme si netranzitivní sadu z tabulky 2.4. Objevuje se v ní 27 různých kombinací čísel, která mohou padnout v jednotlivých hodech. Podrobnějším výpočtem dojdeme k následujícím hodnotám:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \frac{10}{27} - \frac{13}{27} = -\frac{3}{27} = -\frac{1}{9}, \\
D_2 &= \frac{12}{27} - \frac{13}{27} = -\frac{1}{27}, \\
D_3 &= \frac{13}{27} - \frac{12}{27} = \frac{1}{27}, \\
D &= \min_{i \in \{1,2,3\}} D_i = -\frac{1}{9}.
\end{aligned}
$$

Protože je $D < 0$, nejedná se o Lake Wobegon sadu.

Nyní si vezměme optimální Lake Wobegon sadu z tabulky 2.8. Na kostce K_1 padne v 18 případech číslo větší a v 18 případech číslo menší než na kostce K_2. V této dvojici se proto nedá hovořit o dominanci. Na kostce K_1 padne ve 12 případech číslo větší a ve 24 případech číslo menší, než na kostce K_3. Kostka K_3 tedy dominuje kostce K_1. Na kostce K_2 padne ve 12 případech číslo větší a ve 12 případech číslo menší, než na kostce K_3. V této dvojici se proto také nedá hovořit o dominanci. Sada tedy není netranzitivní.

Kapitola 3

Sichermanovy kostky

V této kapitole se budeme zabývat sadami kostek (ne nutně šestistěnných), pro které platí, že pravděpodobnost výskytu jednotlivých součtů je stejná jako u standardních kostek. Na počest objevitele takových sad kostek se jim říká Sichermanovy sady a jednotlivým kostkám v sadách Sichermanovy kostky.

V tabulce 3.1 uvádíme příklad dvou šestistěnných kostek. Výčtem všech možností zjistíme, že mají výše popsanou vlastnost, a můžeme je tedy označit za Sichermanovu sadu. U více kostek je takový způsob ověřování příliš zdlouhavý. Proto si dále ukážeme, jak lze součty a jejich pravděpodobnosti zjistit elegantněji.

K_1	1	2	2	3	3	4
K_2	1	3	4	5	6	8

Tabulka 3.1: Šestistěnné Sichermanovy kostky [5]

Kostky budeme jako dříve značit K_1, K_2, atd. Čísla na kostce K_i si označíme $x_{i1}, x_{i2}, \ldots$ a uvažujeme pouze přirozená x_{ij}.

Každou kostku K_i můžeme jednoznačně reprezentovat pomocí polynomu

$$P_i(a) = a^{x_{i1}} + a^{x_{i2}} + \cdots + a^{x_{im}}. \tag{3.1}$$

V případě kostek z tabulky 3.1 máme

$$\begin{aligned} P_1(a) &= a^1 + a^2 + a^2 + a^3 + a^3 + a^4 = a^1 + 2a^2 + 2a^3 + a^4, \\ P_2(a) &= a^1 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^8. \end{aligned}$$

Definice 21 (m-kostka)**.** *Nechť $m > 0$. Kostce s m stěnami budeme říkat* m-kostka.

Definice 22 (ne-/standardní kostka)**.** *m-kostku s čísly $1, 2, \ldots, m$ na stěnách nazveme* standardní kostkou*. Všem ostatním kostkám budeme říkat* nestandardní kostky*.*

Definice 23 (hra velikosti n)**.** *Pokud hledáme Sichermanovu sadu n kostek ($n > 1$), říkáme, že řešíme* hru velikosti n*.*

Definice 24 (řešení hry velikosti n)**.** *Soubor všech čísel na kostkách v Sichermanově sadě n kostek nazveme* řešení hry velikosti n *a označíme ho P.*

Definice 25 (marginální řešení hry velikosti n)**.** *Soubor všech čísel na kostce K_i ze Sichermanovy sady n kostek nazveme* marginální řešení hry velikosti n.

V dalším textu budeme ztotožňovat marginální řešení a odpovídající polynomy. Řešení P potom můžeme přiřadit součin všech polynomů P_i

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdots P_n. \tag{3.2}$$

V případě n standardních m-kostek má polynom P tvar

$$P(a) = (a^m + a^{m-1} + \cdots + a^2 + a)^n = a^n \left(\frac{a^m - 1}{a - 1} \right)^n. \tag{3.3}$$

Lemma 26. *Pro libovolnou sadu kostek K_1, K_2, ..., K_n platí, že koeficient u a^k v součinu $P_1(a) \cdot P_2(a) \cdots P_n(a)$ je roven počtu možností, kdy padne součet k. Sada kostek je tedy Sichermanova, právě když platí rovnost $P(a) = a^n \left(\frac{a^m-1}{a-1}\right)^n$.*

Důkaz. Tvrzení snadno plyne z vlastností součinu a ze vztahu (3.3). ❑

Příklad 27. Kostky z tabulky 3.1 splňují předpoklady lemmatu 26, neboť platí

$$(a^1+a^2+a^2+a^3+a^3+a^4)(a^1+a^3+a^4+a^5+a^6+a^8) = (a^1+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6)^2$$

(vztah se ověří roznásobením).

Definice 28 (primitivní n-tá odmocnina z 1)**.** *Řekneme, že $\xi \in \mathbb{C}$ je* primitivní n-tá odmocnina z 1, *pokud platí $\xi^n = 1$ a pro každé $k \in \mathbb{N}$ takové, že $0 < k < n$, platí $\xi^k \neq 1$.*

Definice 29 (d-tý cyklotomický polynom)**.** *Normovaný polynom (koeficient u vedoucího členu je roven 1), jehož kořeny jsou právě všechny primitivní d-té odmocniny z jedné a všechny tyto kořeny jsou jednoduché, nazveme* d-tý cyklotomický polynom *a budeme jej značit λ_d.*

λ_d lze tedy vyjádřit i vzorcem

$$\lambda_d(a) = \prod_{\substack{1 \le s \le d \\ NSD(s,d) = 1}} (a - e^{2i\pi \frac{s}{d}}),$$

přičemž $NSD(s,d)$ značí největší společný dělitel čísel s a d.

Příklad 30. Nyní si ukážeme, jak vypadá několik prvních cyklotomických polynomů.

$$\begin{aligned}
\lambda_1(a) &= a - 1 & \lambda_6(a) &= a^2 - a + 1 \\
\lambda_2(a) &= a + 1 & \lambda_7(a) &= a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 \\
\lambda_3(a) &= a^2 + a + 1 & \lambda_8(a) &= a^4 + 1 \\
\lambda_4(a) &= a^2 + 1 & \lambda_9(a) &= a^6 + a^3 + 1 \\
\lambda_5(a) &= a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 & \lambda_{10}(a) &= a^4 - a^3 + a^2 - a + 1
\end{aligned}$$

V následující poznámce si uvedeme základní vlastnosti cyklotomických polynomů. Budeme je dále využívat v důkazech vět, které následují.

Poznámka 31. (Vlastnosti cyklotomických polynomů)

- Cyklotomické polynomy splňují rovnost
$$a^n - 1 = \prod_{d|n} \lambda_d(a). \tag{3.4}$$
Vysvětlení: Kořeny polynomu na levé straně jsou právě všechny n-té odmocniny z jedné a každá z nich je primitivní d-tou odmocninou z jedné pro právě jedno číslo d dělící n. Obráceně platí, že každá d-tá primitivní odmocnina z jedné, kde $d \mid n$, je také n-tá odmocnina z jedné. Polynomy na obou stranách vztahu (3.4) se tedy rovnají, protože jsou normované, jejich kořeny se shodují a všechny z nich mají násobnost 1.

- Z rovnosti (3.4) snadno získáme vztah
$$1 + a + \cdots + a^{n-1} = \prod_{\substack{d|n \\ d\neq 1}} \lambda_d(a). \tag{3.5}$$

- Nechť p je prvočíslo. Potom z rovnosti (3.5) plyne
$$\lambda_p(a) = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} a^i. \tag{3.6}$$

- Pro $d > 1$ lze cyklotomický polynom λ_d napsat ve tvaru
$$\lambda_d(a) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(a^{k_i} - 1)}{\prod_{i=1}^{n}(a^{l_i} - 1)} \tag{3.7}$$
pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, kde k_i, l_i dělí d.
Vysvětlení: Vzorec lze dokázat indukcí podle d.
Pro $d = 2$ tvrzení platí, neboť
$$\lambda_2(a) = \frac{a^2 - 1}{a - 1}.$$
Předpokládejme, že vzorec platí pro $2, \ldots, d-1$, a ukažme, že pak platí i pro d.
Je-li d prvočíslo, pak podle vztahu (3.6) je
$$\lambda_d(a) = \frac{a^d - 1}{a - 1}.$$
Pokud d je složené, můžeme psát $d = m \cdot n$, kde m, $n > 1$ jsou přirozená čísla. Použitím vztahu (3.4) dostaneme
$$\lambda_d(a) = \lambda_{mn}(a) = \frac{a^{mn} - 1}{\prod_{k|mn, 1\leq k<mn} \lambda_k(a)} = \frac{a^{mn} - 1}{a - 1} \cdot \frac{1}{\prod_{k|mn, 1<k<mn} \lambda_k(a)}.$$
Dále stačí použít indukční předpoklad na polynomy ve jmenovateli posledního zlomku.

- Nechť p je prvočíslo. Potom podle [9, Theorem 3.3.5] platí rovnosti

$$\lambda_{bp}(a) = \begin{cases} \frac{\lambda_b(a^p)}{\lambda_b(a)}, & \text{jestliže } p \nmid b, \\ \lambda_b(a^p), & \text{jestliže } p \mid b. \end{cases} \tag{3.8}$$

- Nechť p je liché prvočíslo. Potom podle (3.8) dostáváme

$$\lambda_{2p}(a) = \frac{\lambda_2(a^p)}{\lambda_2(a)} = \frac{a^p+1}{a+1} = 1 - a + a^2 - \cdots + a^{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1}(-a)^i. \tag{3.9}$$

- Nechť p je prvočíslo a $k \in \mathbb{N}$. Pokud opakovaně použijeme vztah (3.8), dostáváme

$$\lambda_{p^k}(a) = \lambda_{p^{k-1}}(a^p) = \lambda_{p^{k-2}}(a^{p^2}) = \cdots = \lambda_p(a^{p^{k-1}}) = \sum_{i=0}^{p-1} a^{ip^{k-1}}, \tag{3.10}$$

  přičemž v posledním kroku jsme využili rovnost (3.6).

- Pro $p = 2$ se součet ve vztahu (3.10) redukuje na dva sčítance a platí

$$\lambda_{2^k}(a) = a^{2^{(k-1)}} + 1. \tag{3.11}$$

- Podle [9, Theorem 3.3.4] jsou cyklotomické polynomy ireducibilní nad $\mathbb{Z}$, tj. nelze je rozložit na součin polynomů kladného stupně s celočíselnými koeficienty. Jelikož λ_d je zároveň normovaný, plyne odsud, že λ_d je minimální polynom libovolné d-té primitivní odmocniny z jedné nad tělesem $\mathbb{Q}$. To znamená, že pokud P je libovolný polynom, jehož kořenem je nějaká d-tá primitivní odmocnina z jedné, pak λ_d dělí P.

Věta 32. *Nechť polynom P_i je marginálním řešením hry s m-kostkami. Potom platí následující:*

(i) *P_i má nezáporné celočíselné koeficienty.*

(ii) *P_i je normovaný.*

(iii) *$P_i(1) = m$.*

(iv) *Všechny kořeny polynomu $\frac{P_i(a)}{a}$ jsou m-té odmocniny z jedné.*

Důkaz.
(i) Koeficient u členu a^k vyjadřuje počet stěn kostky K_i, na kterých je číslo k. Proto nemůže být záporný.
(ii) Koeficient u vedoucího členu vyjadřuje počet stěn kostky s jejím nejvyšším číslem. Omezení na něj vzniká kvůli vlastnosti maximálního součtu. Maximální součet padne na kostkách v případě, že na všech kostkách padlo jejich nejvyšší číslo. Standardní kostky mají každé číslo zastoupeno právě jednou, a tedy i maximální součet může padnout pouze jedním způsobem. Proto je nutné, aby všechny Sichermanovy kostky měly své nejvyšší číslo zastoupeno jen jednou, a tedy koeficient u vedoucího členu polynomu P_i byl roven 1.

(iii) Tvrzení získáme dosazením $a = 1$ do vztahu (3.1).
(iv) Nechť P je řešení hry velikosti n s kostkami velikosti m. Ze vztahu (3.5) aplikovaného na rovnici (3.3) plyne, že lze k zápisu polynomu P využít cyklotomické polynomy

$$P(a) = a^n(a^{m-1} + \cdots + a + 1)^n = a^n \left(\prod_{\substack{d|m \\ d \neq 1}} \lambda_d(a) \right)^n .$$

Vidíme, že P má n-násobný nulový kořen a všechny další kořeny jsou m-té odmocniny z jedné. Víme, že $P = P_1 \cdots P_n$, kde $P_1, \ldots, P_n$ jsou marginální řešení. Libovolný polynom P_i má nulový absolutní člen, neboť na kostkách připouštíme pouze přirozená čísla. Každý polynom P_i tedy má nulový kořen násobnosti 1 a kořeny polynomu $\frac{P_i(a)}{a}$ jsou m-té odmocniny z jedné.

❏

Nyní ověříme, že podmínky pro marginální řešení z předchozí věty jsou nejen nutné, ale i postačující.

Věta 33. *Nechť polynom P_i splňuje následující podmínky:*

(i) P_i má nezáporné celočíselné koeficienty.

(ii) P_i je normovaný.

(iii) $P_i(1) = m$.

(iv) Všechny kořeny polynomu $\frac{P_i(a)}{a}$ jsou m-té odmocniny z jedné.

Potom P_i je marginální řešení hry s m-kostkami.

Důkaz. Z podmínek (i) a (iv) a z poslední vlastnosti uvedené v poznámce 31 (o vlastnostech cyklotomických polynomů) plyne, že polynom P_i lze psát ve tvaru $P_i(a) = ca \prod_i \lambda_{d_i}(a)$, kde $c \in \mathbb{N}$ a d_i jsou dělitelé m různí od 1 (neboť $P_i(1) \neq 0$), přičemž některá čísla d_i se mohou opakovat. Navíc víme, že cyklotomické polynomy jsou normované, a to dohromady s podmínkou (ii) znamená, že $c = 1$.

Dále využijeme vztah (3.7), který platí pro cyklotomické polynomy, a polynom P_i si přepíšeme do tvaru podílu

$$P_i(a) = \frac{a \prod_{i=1}^n (a^{k_i} - 1)}{\prod_{i=1}^n (a^{l_i} - 1)}$$

pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a k_i, l_i dělící m.

Nyní definujme polynom Q předpisem

$$Q(a) = a^n \left(\frac{a^m - 1}{a - 1} \right)^n \frac{1}{P_i(a)} = a^{n-1} \prod_{i=1}^n \left(\frac{a^m - 1}{a^{k_i} - 1} \right) \cdot \prod_{i=1}^n \left(\frac{a^{l_i} - 1}{a - 1} \right)$$

(z vyjádření na pravé straně je vidět, že Q lze spojitě dodefinovat na $\mathbb{C}$, a že se vskutku jedná o polynom).

Dále využijeme skutečnosti, že k_i dělí m, a pomocí rovnosti $\frac{a^{rst}-1}{a^r-1} = \frac{a^{rst}-1}{a^{rs}-1} \cdot \cdot \frac{a^{rs}-1}{a^r-1}$ (kterou v případě potřeby použijeme opakovaně) přepíšeme výrazy $\left(\frac{a^m-1}{a^{k_i}-1}\right)$ a $\left(\frac{a^{l_i}-1}{a-1}\right)$ na součiny výrazů tvaru $\left(\frac{a^{bp}-1}{a^b-1}\right)$, kde p je prvočíslo. Polynom Q jsme si tedy upravili do tvaru

$$Q(a) = a^{n-1} \prod_i \left(\frac{a^{b_i p_i} - 1}{a^{b_i} - 1} \right). \tag{3.12}$$

Z bodu (iii) máme také rovnost

$$Q(1) = \frac{m^n}{m} = m^{n-1}.$$

Pokud dosadíme $a = 1$ i do výrazu $\frac{a^{b_i p_i}-1}{a^{b_i}-1} = 1 + a^{b_i} + \cdots + a^{(p_i-1)b_i}$, dostaneme hodnotu p_i a rovnice (3.12) nám dává rovnost $m^{n-1} = \prod_i p_i$. Můžeme tedy rozdělit indexy i do $n-1$ podmnožin $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ takových, že $\prod_{i \in S_j} p_i = m$ pro každé j.

Pokud pro každé $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ definujeme polynom Q_j předpisem

$$Q_j(a) = a \prod_{i \in S_j} \left(\frac{a^{b_i p_i} - 1}{a^{b_i} - 1} \right) = a \prod_{i \in S_j} (1 + a^{b_i} + a^{2b_i} + \cdots + a^{(p_i-1)b_i}),$$

potom $Q = Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_{n-1}$. Dále vidíme, že polynomy Q_j mají nezáporné celočíselné koeficienty, jejichž součty jsou rovny

$$Q_j(1) = \prod_{i \in S_j} p_i = m.$$

Podobně i P_i má nezáporné celočíselné koeficienty, jejichž součet je roven m (z podmínky (iii)). Proto podle každého z polynomů $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$ a P_i můžeme očíslovat jednu m-kostku, a to tak, že počet stěn kostky s číslem k bude stejný jako koeficient u členu a^k příslušného polynomu.

Na závěr je třeba ověřit, že jsme skutečně našli Sichermanovu sadu, což plyne z rovnosti

$$Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_{n-1} \cdot P_i = Q \cdot P_i = a^n \left(\frac{a^m - 1}{a - 1} \right)^n$$

a z lemmatu 26. Polynom P_i a stejně tak polynomy Q_j jsou tedy marginální řešení hry velikosti n s m-kostkami.

❑

Příklad 34. Využijeme-li předchozí větu, můžeme ukázat, jak jsme našli řešení v tabulce 3.1. V tomto případě máme $m = 6$ a $n = 2$ a hledáme marginální řešení P_i 6-kostkové hry. Tato řešení musí splňovat podmínky z věty 32. Stejně jako na začátku důkazu věty 33 z těchto podmínek odvodíme, že polynomy P_i mají tvar součinu a a cyklotomických polynomů λ_d takových, že $d \mid 6$ a $d \neq 1$, tedy

$$P_i(a) = a(\lambda_6(a))^r (\lambda_3(a))^s (\lambda_2(a))^t = a(a^2 - a + 1)^r (a^2 + a + 1)^s (a + 1)^t \tag{3.13}$$

pro r, s, $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Z bodu (*iii*) věty 33 víme, že $P_i(1) = 6$. Po dosazení hodnoty 1 do příslušných cyklotomických polynomů dostáváme $\lambda_6(1) = 1$, $\lambda_3(1) = 3$ a $\lambda_2(1) = 2$. Ze vztahu (3.13) pak plyne $6 = 3^s 2^t$, neboli $s = t = 1$. Číslo r nemůže být větší než dvě, neboť pak by stupeň polynomu P_i přesáhl 12 a nemohlo by se jednat o marginální řešení 6-kostkové hry velikosti 2. Dosazením do formule (3.13) tedy dostáváme 3 řešení:

$$
\begin{aligned}
t = 0 &: \quad P_1(a) = a(\lambda_3(a))(\lambda_2(a)) = a^4 + 2a^3 + 2a^2 + a, \\
t = 2 &: \quad P_2(a) = a(\lambda_6(a))^2(\lambda_3(a))(\lambda_2(a)) = a^8 + a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a, \\
t = 1 &: \quad P_3(a) = a(\lambda_6(a))(\lambda_3(a))(\lambda_2(a)) = a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a.
\end{aligned}
$$

Polynomy P_1 a P_2 odpovídají kostkám K_1 a K_2 z tabulky 3.1 a polynom P_3 odpovídá standardní kostce.

Příklad 35. Nyní si ukážeme, jak vypadají marginální řešení hry s m-kostkami pro $m = 16$. Podobně jako v předchozím příkladu zjistíme, že polynomy P_i mají tvar součinu a a cyklotomických polynomů λ_d takových, že $d \mid 16$ a $d \neq 1$, tedy

$$
\begin{aligned}
P_i(a) &= a(\lambda_{16}(a))^r(\lambda_8(a))^s(\lambda_4(a))^t(\lambda_2(a))^u = \\
&= a(a^8+1)^r(a^4+1)^s(a^2+1)^t(a+1)^u
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

pro nějaká r, s, t a u. Z bodu (*iii*) věty 33 víme, že $P_i(1) = 16$. Dle (3.11) máme $\lambda_{16}(1) = \lambda_8(1) = \lambda_4(1) = \lambda_2(1) = 2$. Dostáváme tedy rovnost $r + s + t + u = 4$, neboť $16 = 2^4$. Číslo 4 se dá složit součtem 4 nezáporných čísel právě 35 způsoby ($1 \times \{1,1,1,1\}$, $12 \times \{0,1,1,2\}$, $12 \times \{0,0,1,3\}$, $6 \times \{0,0,2,2\}$, $4 \times \{0,0,0,4\}$).

Na závěr si polynomy vzniklé dosazením všech možností do formule (3.14) vyčíslíme.

$$
\begin{aligned}
P_1(a) &= a(a^8+1)(a^4+1)(a^2+1)(a+1) = \\
&= a^{16}+a^{15}+a^{14}+a^{13}+a^{12}+a^{11}+a^{10}+a^9+a^8+a^7+a^6+a^5+a^4+a^3+a^2+a \\
P_2(a) &= a(a^4+1)(a^2+1)(a+1)^2 = \\
&= a^9+2a^8+2a^7+2a^6+2a^5+2a^4+2a^3+2a^2+a \\
P_3(a) &= a(a^4+1)(a^2+1)^2(a+1) = \\
&= a^{10}+a^9+2a^8+2a^7+2a^6+2a^5+2a^4+2a^3+a^2+a \\
P_4(a) &= a(a^4+1)^2(a^2+1)(a+1) = \\
&= a^{12}+a^{11}+a^{10}+a^9+2a^8+2a^7+2a^6+2a^5+a^4+a^3+a^2+a \\
P_5(a) &= a(a^8+1)(a^2+1)(a+1)^2 = \\
&= a^{13}+2a^{12}+2a^{11}+2a^{10}+a^9+a^5+2a^4+2a^3+2a^2+a \\
P_6(a) &= a(a^8+1)(a^2+1)^2(a+1) = \\
&= a^{14}+a^{13}+2a^{12}+2a^{11}+a^{10}+a^9+a^6+a^5+2a^4+2a^3+a^2+a \\
P_7(a) &= a(a^8+1)^2(a^2+1)(a+1) = \\
&= a^{20}+a^{19}+a^{18}+a^{17}+2a^{12}+2a^{11}+2a^{10}+2a^9+a^4+a^3+a^2+a \\
P_8(a) &= a(a^8+1)(a^4+1)(a+1)^2 = \\
&= a^{15}+2a^{14}+a^{13}+a^{11}+2a^{10}+a^9+a^7+2a^6+a^5+a^3+2a^2+a \\
P_9(a) &= a(a^8+1)(a^4+1)^2(a+1) = \\
&= a^{18}+a^{17}+2a^{14}+2a^{13}+2a^{10}+2a^9+2a^6+2a^5+a^2+a \\
P_{10}(a) &= a(a^8+1)^2(a^4+1)(a+1) = \\
&= a^{22}+a^{21}+a^{18}+a^{17}+2a^{14}+2a^{13}+2a^{10}+2a^9+a^6+a^5+a^2+a \\
P_{11}(a) &= a(a^8+1)(a^4+1)(a^2+1)^2 = \\
&= a^{17}+2a^{15}+2a^{13}+2a^{11}+2a^9+2a^7+2a^5+2a^3+a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{12}(a) &= a(a^8+1)(a^4+1)^2(a^2+1) = \\
&= a^{19}+a^{17}+2a^{15}+2a^{13}+2a^{11}+2a^9+2a^7+2a^5+a^3+a \\
P_{13}(a) &= a(a^8+1)^2(a^4+1)(a^2+1) = \\
&= a^{23}+a^{21}+a^{19}+a^{17}+2a^{15}+2a^{13}+2a^{11}+2a^9+a^7+a^5+a^3+a \\
P_{14}(a) &= a(a^2+1)(a+1)^3 = \\
&= a^6+3a^5+4a^4+4a^3+3a^2+a \\
P_{15}(a) &= a(a^2+1)^3(a+1) = \\
&= a^8+a^7+3a^6+3a^5+3a^4+3a^3+a^2+a \\
P_{16}(a) &= a(a^2+1)^2(a+1)^2 = \\
&= a^7+2a^6+3a^5+4a^4+3a^3+2a^2+a \\
P_{17}(a) &= a(a^4+1)(a+1)^3 = \\
&= a^8+3a^7+3a^6+a^5+a^4+3a^3+3a^2+a \\
P_{18}(a) &= a(a^4+1)^3(a+1) = \\
&= a^{14}+a^{13}+3a^{10}+3a^9+3a^6+3a^5+a^2+a \\
P_{19}(a) &= a(a^4+1)^2(a+1)^2 = \\
&= a^{11}+2a^{10}+a^9+2a^7+4a^6+2a^5+a^3+2a^2+a \\
P_{20}(a) &= a(a^4+1)(a^2+1)^3 = \\
&= a^{11}+3a^9+4a^7+4a^5+3a^3+a \\
P_{21}(a) &= a(a^4+1)^3(a^2+1) = \\
&= a^{15}+a^{13}+3a^{11}+3a^9+3a^7+3a^5+a^3+a \\
P_{22}(a) &= a(a^4+1)^2(a^2+1)^2 = \\
&= a^{13}+2a^{11}+3a^9+4a^7+3a^5+2a^3+a \\
P_{23}(a) &= a(a^8+1)(a^2+1)^3 = \\
&= a^{15}+3a^{13}+3a^{11}+a^9+a^7+3a^5+3a^3+a \\
P_{24}(a) &= a(a^8+1)^3(a^2+1) = \\
&= a^{27}+a^{25}+3a^{19}+3a^{17}+3a^{11}+3a^9+a^3+a \\
P_{25}(a) &= a(a^8+1)^2(a^2+1)^2 = \\
&= a^{21}+2a^{19}+a^{17}+2a^{13}+4a^{11}+2a^9+a^5+2a^3+a \\
P_{26}(a) &= a(a^8+1)(a+1)^3 = \\
&= a^{12}+3a^{11}+3a^{10}+a^9+a^4+3a^3+3a^2+a \\
P_{27}(a) &= a(a^8+1)^3(a+1) = \\
&= a^{26}+a^{25}+3a^{18}+3a^{17}+3a^{10}+3a^9+a^2+a \\
P_{28}(a) &= a(a^8+1)^2(a+1)^2 = \\
&= a^{19}+2a^{18}+a^{17}+2a^{11}+4a^{10}+2a^9+a^3+2a^2+a \\
P_{29}(a) &= a(a^8+1)(a^4+1)^3 = \\
&= a^{21}+3a^{17}+4a^{13}+4a^9+3a^5+a \\
P_{30}(a) &= a(a^8+1)^3(a^4+1) = \\
&= a^{29}+a^{25}+3a^{21}+3a^{17}+3a^{13}+3a^9+a^5+a \\
P_{31}(a) &= a(a^8+1)^2(a^4+1)^2 = \\
&= a^{25}+2a^{21}+3a^{17}+4a^{13}+3a^9+2a^5+a \\
P_{32}(a) &= a(a+1)^4 = \\
&= a^5+4a^4+6a^3+4a^2+a \\
P_{33}(a) &= a(a^2+1)^4 = \\
&= a^9+4a^7+6a^5+4a^3+a \\
P_{34}(a) &= a(a^4+1)^4 = \\
&= a^{17}+4a^{13}+6a^9+4a^5+a \\
P_{35}(a) &= a(a^8+1)^4 = \\
&= a^{33}+4a^{25}+6a^{17}+4a^9+a
\end{aligned}
$$

V následujících tabulkách 3.2–3.4 uvádíme příklady Sichermanových sad velikosti 2, 3, 4 (kostka K_i odpovídá polynomu P_i z výše uvedeného seznamu).

K_2	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9
K_{13}	1	3	5	7	9	9	11	11	13	13	15	15	17	19	21	23

Tabulka 3.2: Šestnáctistěnná Sichermanova sada dvou kostek

K_{11}	1	3	3	5	5	7	7	9	9	11	11	13	13	15	15	17
K_{12}	1	3	5	5	7	7	9	9	11	11	13	13	15	15	17	19
K_{26}	1	2	2	2	3	3	3	4	9	10	10	10	11	11	11	12

Tabulka 3.3: Šestnáctistěnná Sichermanova sada tří kostek

K_{32}	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5
K_{33}	1	3	3	3	3	5	5	5	5	5	5	7	7	7	7	9
K_{34}	1	5	5	5	5	9	9	9	9	9	9	13	13	13	13	17
K_{35}	1	9	9	9	9	17	17	17	17	17	17	25	25	25	25	33

Tabulka 3.4: Šestnáctistěnná Sichermanova sada čtyř kostek

Ukažme si ještě, jak lze dospět např. k sadě z tabulky 3.2. Vezměme polynom P_2 a snažme se utvořit Sichermanovu sadu velikosti dva. Vidíme, že P_2 obsahuje $\lambda_{16}(a)^0$, $\lambda_8(a)^1$, $\lambda_4(a)^1$ a $\lambda_2(a)^2$. V sadě o velikosti dva však musí být všechny tyto polynomy po sečtení příslušných exponentů umocněny na druhou. Hledáme tedy pomyslný doplněk P_2 do tohoto stavu, a tím se ukazuje být polynom P_{13}. Vynásobením těchto dvou polynomů a užitím lemmatu 26 můžeme ověřit, že jsme skutečně dostali Sichermanovu sadu.

Věta 36. *Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každá dvě prvočísla p, q (ne nutně různá) existují právě tři kostky, které se mohou vyskytovat v řešení hry velikosti n s pq-kostkami. Navíc platí, že číslo n nemá na očíslování jednotlivých kostek vliv.*

Důkaz. Předpokládejme, že P_i je řešení hry velikosti n s pq-kostkami. Důkaz si dále rozdělíme do dvou případů podle vztahu p a q.

- Nechť nejprve $p \neq q$. Potom polynomy P_i mají tvar součinu a a cyklotomických polynomů λ_d takových, že $d \mid pq$ a $d \neq 1$, tedy

$$P_i(a) = a(\lambda_p(a))^r(\lambda_q(a))^s(\lambda_{pq}(a))^t \tag{3.15}$$

pro nějaká r, s a t. Z bodu (*iii*) věty 32 víme, že $P_i(1) = pq$. Dle (3.8) máme $\lambda_{pq}(1) = \frac{\lambda_q(1^p)}{\lambda_q(1)} = 1$ a dle (3.6) $\lambda_p(1) = p$ a $\lambda_q(1) = q$. Dostáváme tedy $r = s = 1$ a potřebujeme zjistit, čemu se může rovnat t. Když užijeme vztah (3.8), dostáváme

$$\lambda_{pq}(a) = \frac{\lambda_q(a^p)}{\lambda_q(a)} = \frac{(a^p)^{q-1} + (a^p)^{q-2} + \cdots + 1}{a^{q-1} + a^{q-2} + \cdots + 1}.$$

Dělením polynomů na pravé straně najdeme první dva členy polynomu λ_{pq} s nejvyššími mocninami (další členy již nebudeme potřebovat):

$$\lambda_{pq}(a) = a^{(p-1)(q-1)} - a^{(p-1)(q-1)-1} + \cdots .$$

Odsud plyne

$$\begin{aligned} P_i(a) &= a\lambda_p(a)\lambda_q(a)(\lambda_{pq}(a))^t = \\ &= a(a^{p-1} + a^{p-2} + \cdots)(a^{q-1} + a^{q-2} + \cdots)\cdot \\ &\qquad \cdot (a^{(p-1)(q-1)t} - ta^{(p-1)(q-1)t-1} + \cdots) = \\ &= a^{p+q+(p-1)(q-1)t-1} + (2-t)a^{p+q+(p-1)(q-1)t-2} + \cdots . \end{aligned}$$

Z bodu (i) již zmiňované věty 32 víme, že polynom $P_i(a)$ má pouze nezáporné koeficienty. Proto t může nabývat pouze hodnot z množiny $\{0,1,2\}$. Dosazením hodnot $r = s = 1$ a $t \in \{0,1,2\}$ do formule (3.15) získáme následující trojici polynomů:

$$\begin{aligned} r = s = 1,\ t = 0 &\ :\ P_1(a) = a\lambda_p(a)\lambda_q(a), \\ r = s = t = 1 &\ :\ P_2(a) = a\lambda_p(a)\lambda_q(a)\lambda_{pq}(a), \\ r = s = 1,\ t = 2 &\ :\ P_3(a) = a\lambda_p(a)\lambda_q(a)(\lambda_{pq}(a))^2. \end{aligned}$$

Tyto polynomy splňují podmínky (i)–(iv) z věty 33 a odpovídají tedy marginálním řešením. Zároveň jsme ukázali, že žádná jiná marginální řešení neexistují.

- Nyní nechť $p = q$. Potom polynomy P_i mají tvar součinu a a cyklotomických polynomů λ_d takových, že $d \mid p^2$ a $d \neq 1$, tedy

$$P_i(a) = a(\lambda_p(a))^r(\lambda_{p^2}(a))^s \tag{3.16}$$

pro nějaká r a s. Opět z bodu (iii) věty 32 víme, že $P_i(1) = p^2$. Dle (3.10) máme $\lambda_{p^2}(1) = \sum_{j=0}^{p-1} 1^{jp} = p$ a dle (3.6) $\lambda_p(1) = p$. Dostáváme tedy rovnost $r + s = 2$ a dosazením do formule (3.16) opět můžeme utvořit 3 různé polynomy, které odpovídají všem možným marginálním řešením:

$$\begin{aligned} r = s = 1 &\ :\ P_1(a) = a\lambda_p(a)\lambda_{p^2}(a), \\ r = 2,\ s = 0 &\ :\ P_2(a) = a(\lambda_p(a))^2, \\ r = 0,\ s = 2 &\ :\ P_3(a) = a(\lambda_{p^2}(a))^2. \end{aligned}$$

Vidíme, že jednotlivá řešení nezávisela na hodnotě n, a máme tedy dokázáno i doplňující tvrzení.

❑

Důsledek 37. *Marginální řešení hry velikosti n s $2p$-kostkami ($p > 2$ prvočíslo) vypadají následovně:*

(i) $1, 2, 3, \ldots, 2p$ *(standardní $2p$-kostka)*

(ii) $1, 2, 2, 3, 3, \ldots, p, p, p+1$

(iii) $1, 3, 5, \ldots, p{-}2, p, p{+}1, p{+}2, \ldots, 2p{-}2, 2p{-}1, 2p, 2p{+}2, 2p{+}4, \ldots, 3p{-}1$

Důkaz. Řešení dostaneme, pokud do výsledných polynomů v první části ($p \neq q$) důkazu věty 36 dosadíme $q = 2$, jednotlivé polynomy pomocí vztahů (3.6) a (3.9) vyčíslíme a následně je roznásobíme. Bod (i) odpovídá variantě $t = 1$, bod (ii) variantě $t = 0$ a konečně bod (iii) variantě $t = 2$.

$$\begin{aligned}
P_{(i)}(a) &= a\lambda_p(a)\lambda_2(a)\lambda_{2p}(a) = a(1{+}a{+}\cdots{+}a^{p-1})(a{+}1)(1{-}a{+}a^2{-}\cdots{+}a^{p-1}) = \\
&= a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{2p} \\
P_{(ii)}(a) &= a\lambda_p(a)\lambda_2(a) = a(1 + a + \cdots + a^{p-1})(a + 1) = \\
&= a + 2a^2 + 2a^3 + \cdots + 2a^p + a^{p+1} \\
P_{(iii)}(a) &= a\lambda_p(a)\lambda_2(a)(\lambda_{2p}(a))^2 = \\
&= a(1 + a + \cdots + a^{p-1})(a + 1)(1 - a + a^2 - \cdots + a^{p-1})^2 = \\
&= a + a^3 + \cdots + a^{p-2} + a^p + a^{p+1} + \cdots + a^{2p-1} + a^{2p} + a^{2p+2} + \cdots + a^{3p-1}
\end{aligned}$$

❑

Poznámka 38. V následující větě uvádíme v kulatých závorkách za každým číslem, které je součástí marginálního řešení, kolikrát se na příslušných Sichermanových kostkách objevuje. V bodě (i) tuto informaci vynecháváme, neboť v tomto konkrétním řešení se všechna uvedená čísla vyskytují právě jednou.

Důsledek 39. *Marginální řešení hry velikosti n s p^2-kostkami ($p > 2$ prvočíslo) vypadají následovně:*

(i) $1, 2, 3, \ldots, p^2$ *(standardní p^2-kostka)*

(ii) $1\ (1), 2\ (2), 3\ (3), 4\ (4), \ldots, p - 1\ (p - 1), p\ (p), p + 1\ (p - 1), \ldots, 2p - 2\ (2), 2p - 1\ (1)$

(iii) $1\ (1), p + 1\ (2), 2p + 1\ (3), \ldots, (p - 1)p + 1\ (p), pp + 1\ (p - 1), \ldots, (2p - 2)p + 1\ (1)$

Důkaz. Řešení dostaneme, pokud pomocí vztahů (3.6) a (3.10) vyčíslíme jednotlivé polynomy v druhé části ($p = q$) důkazu věty 36 a poté je roznásobíme. Bod (i) odpovídá variantě $r = s = 1$, bod (ii) variantě $r = 2$, $s = 0$ a konečně bod (iii) variantě $r = 0$, $s = 2$.

$$\begin{aligned}
P_{(i)}(a) &= a\lambda_p(a)\lambda_{p^2}(a) = a(1 + a + \cdots + a^{p-1})(1 + a^p + a^{2p} + \cdots + a^{(p-1)p}) = \\
&= a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{p^2} \\
P_{(ii)}(a) &= a(\lambda_p(a))^2 = a(1 + a + \cdots + a^{p-1})^2 = \\
&= a + 2a^2 + 3a^3 + \cdots + (p-1)a^{p-1} + pa^p + (p-1)a^{p+1} + \cdots + 2a^{2p-2} + a^{2p-1} \\
P_{(iii)}(a) &= a(\lambda_{p^2}(a))^2 = a(1 + a^p + a^{2p} + \cdots + a^{(p-1)p})^2 = \\
&= a + 2a^{p+1} + 3a^{2p+1} + \cdots + pa^{(p-1)p+1} + (p - 1)a^{pp+1} + \cdots + a^{(2p-2)p+1}
\end{aligned}$$

❑

Věta 40. *Standardní kostka je jediné marginální řešení hry velikosti n s m-kostkami právě tehdy, když je m prvočíslo.*

Důkaz. „$\Leftarrow$“: Nechť m je prvočíslo. Potom $P_i(a) = a\lambda_m(a)^r$. Z bodu (iii) věty 32 víme, že $P_i(1) = m$. Dle (3.6) je $\lambda_m(1) = m$. Dostáváme tedy $r = 1$. Ze vztahu (3.6) vidíme, že polynom $P_i(a) = a\lambda_m(a)$ odpovídá standardnímu očíslování.

„$\Rightarrow$“ (nepřímo): Nyní předpokládejme, že $m = kl$, kde $k,l \neq 1$. Protože platí, že pokud je P řešením hry velikosti n, lze ho doplnit c standardními kostkami a takto vzniklá nová sada bude řešením hry velikosti $n+c$, stačí ukázat, že existuje nestandardní Sichermanova m-kostka ve hře velikosti 2.

Označme

$$P_1(a) = a\left(\tfrac{a^m-1}{a^k-1}\right)\cdot\left(\tfrac{a^m-1}{a^l-1}\right) \quad \text{a} \quad P_2(a) = a\left(\tfrac{a^k-1}{a-1}\right)\cdot\left(\tfrac{a^l-1}{a-1}\right).$$

Polynomy P_1 a P_2 splňují podmínky v bodech (i)–(iv) věty 33 a

$$P_1(a)\cdot P_2(a) = a^2\left(\frac{a^m-1}{a-1}\right)^2,$$

jsou to tedy marginální řešení hry velikosti 2. Když si navíc tyto polynomy rozepíšeme, dostáváme

$$\begin{aligned} P_1(a) &= a(1+a^k+\dots+a^{(l-1)k})(1+a^l+\dots+a^{(k-1)l}) = \\ &= a+a^{k+1}+a^{l+1}+\dots+a^{1+(l-1)k+(k-1)l}, \\ P_2(a) &= a(1+a+\dots+a^{k-1})(1+a+\dots+a^{l-1}) = a+2a^2+\dots+a^{k+l-1}. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že polynom P_1 neodpovídá očíslování standardní kostky, neboť např. vynechává číslo 2, a polynom P_2 neodpovídá očíslování standardní kostky, neboť např. obsahuje číslo 2 dvakrát.

$\square$

Lemma 41. *Jestliže polynom*

$$Q(x) = q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \dots + q_1 x + q_0$$

(kde $q_n, q_0 \neq 0$) má kořeny $x_1, \dots, x_n$ (včetně násobnosti), pak polynom

$$Q^*(x) = q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \dots + q_{n-1}x + q_n$$

má kořeny $\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}$ (včetně násobnosti).

Důkaz. Protože má polynom Q kořeny $x_1, \dots, x_n$, lze ho zapsat ve tvaru

$$Q(x) = q_n(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

Pro $x \neq 0$ je

$$Q^*(x) = x^n Q\left(\frac{1}{x}\right)$$

a dále

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{1}{x}\right) &= q_n\left(\frac{1}{x}-x_1\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-x_2\right)\cdots\left(\frac{1}{x}-x_n\right) = \\ &= q_n\frac{1}{x^n}(1-xx_1)\cdot(1-xx_2)\cdots(1-xx_n), \end{aligned}$$

a tedy $\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}$ jsou kořeny polynomu Q^*.

$\square$

Věta 42. *Mějme marginální řešení hry velikosti n, kde všechna čísla na stěnách kostky jsou mezi* 1 *a k. Označme α_i počet výskytů čísla i na stěnách kostky. Potom $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$ je palindrom, tj.* $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k) = (\alpha_k,\alpha_{k-1},\dots,\alpha_1)$.

Důkaz. Nechť P_i je marginální řešení nějaké hry. Potom můžeme toto řešení zapsat ve tvaru

$$P_i(a) = a\prod_d \lambda_d(a),$$

kde $\{\lambda_d(a)\}$, $d \neq 1$ je soubor cyklotomických polynomů (ne nutně různých).

Uvažujme polynom

$$Q(a) = \prod_d \lambda_d(a).$$

Pro každý kořen polynomu Q je jeho převrácená hodnota také kořen (převrácená hodnota odmocniny z jedné je také odmocnina z jedné). Tedy podle předchozího lemmatu 41 je $Q = Q^*$ (kořeny se nemění, nemění se tedy ani polynomy), a proto koeficienty polynomu Q tvoří palindrom. Odsud plyne, že i koeficienty polynomu P_i tvoří palindrom, pokud nebereme v úvahu nulový absolutní člen (který marginální řešení neobsahuje).

❑

Poznámka 43. Vlastnost, kterou jsme si popsali v předchozí větě, si můžeme prohlédnout na příkladech kostek v tabulkách 3.1–3.4.

Následující důsledek ukazuje, že lze každou Sichermanovu kostku se sudým počtem stěn očíslovat tak, že čísla na protilehlých stěnách dávají stejný součet (stejně jako je tomu u standardní šestistěnné kostky). Vidíme tedy, že k jednoznačnému zadání čísel na Sichermanově kostce vždy stačí znát pouze jednu takovou dvojici protilehlých čísel a jedno číslo z každé další dvojice.

Důsledek 44. *Nechť $x_1, x_2, \dots, x_m$ je m vzestupně seřazených čísel, jež tvoří marginální řešení nějaké hry. Potom*

$$x_i + x_{m+1-i} = 1 + x_m,\ \ i \in \{1,2,\dots,m\}.$$

Kapitola 4

Závěr

Některé sady nestandardních kostek, se kterými jsme se seznámili v předchozích kapitolách, nalézají využití v hazardních hrách. Např. informace o netranzitivních sadách kostek jsou k dispozici na různých internetových stránkách věnovaných právě tomuto typu her. Serióznější pojednání lze dohledat v zahraničních matematických časopisech. Na některé články jsme se již odkazovali v samotné práci, z dalších stojí za zmínku např. článek D. M. Brolina [2], který se zabývá Sichermanovými sadami. Kostky převádí na urny s míčky očíslovanými přirozenými čísly a uvádí příklady Sichermanových kostek ve tvaru pravidelných mnohostěnů. Sichermanovy sady kostek hledají ve svém článku [4] také B. C. Fowler a R. J. Swift. Jejich práce je zajímavá odlišným postupem, který nevyužívá vlastností cyklotomických polynomů, a mohla by proto být přístupnější širšímu okruhu čtenářů.

Na závěr poznamenejme, že existují i sady kostek, které jsou očíslovány tak, že se pravděpodobnosti všech možných součtů rovnají; těmto sadám je věnován článek F. Bermudeze, A. Mediny, A. Rosiny a E. Scotta [1].

Literatura

[1] F. Bermudez, A. Medina, A. Rosin, E. Scott, *Are Stupid Dice Necessary?*, The College Mathematics Journal Vol. 44 (2013), No. 4, 315–322.

[2] D. M. Broline, *Renumbering of the Faces of Dice*, Mathematics Magazine Vol. 52 (1979), No. 5, 312–315.

[3] R. A. Epstein, *Nontransitive Dice*, The Theory of Gambling and Statistical Logic, Elsevier, Burlington, 2009.

[4] B. C. Fowler, R. J. Swift, *Relabeling Dice*, The College Mathematics Journal Vol. 30 (1999), No. 3, 204–208.

[5] J. A. Gallian, D. J. Rusin, *Cyclotomic Polynomials and Nonstandard Dice*, Discrete Mathematics 27 (1979), 245–259.

[6] M. Gardner, *Dice*, Mathematical Magic Show, MAA, Washington D. C., 1989.

[7] M. Gardner, *Nontransitive Dice and Other Probability Paradoxes*, Wheels, Life, and Other Mathematical Amusements, W. H. Freeman and Company, New York, 1983.

[8] J. Moraleda, D. G. Stork, *Lake Wobegon Dice*, The College Mathematics Journal Vol. 43 (2012), No. 2, 152–159.

[9] V. V. Prasolov, *Polynomials*, Algorithms and Computation in Mathematics Vol. 11 (2001), 89–100.

[10] R. P. Savage, Jr., *The Paradox of Nontransitive Dice*, The American Mathematical Monthly Vol. 101 (1994), No. 5, 429–436.

[11] R. L. Tenney, C. C. Foster, *Non-Transitive Dominance*, Mathematics Magazine Vol. 49 (1976), No. 3, 115–120.

Seznam obrázků

Seznam tabulek