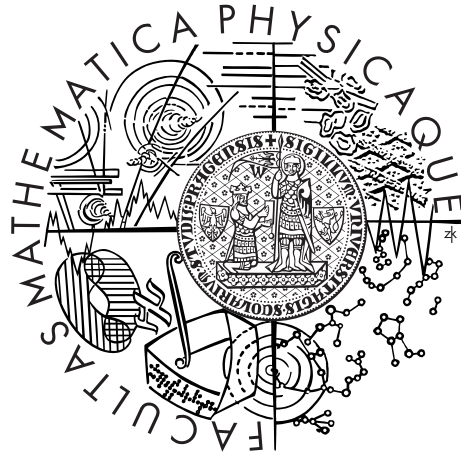


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Pavel Čáha

## Spolehlivost systémů s redundandními podsystemy a/nebo prvky

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jaromír Antoch, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2014

Rád bych na tomto místě poděkoval vedoucímu bakalářské práce prof. RNDr. Jaromíru Antochovi, CSc. za cenné rady, připomínky a čas, který mi věnoval při psaní této bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Název práce: Spolehlivost systémů s redundandními podsystémy a/nebo prvky

Autor: Pavel Čáha

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jaromír Antoch, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Bakalářská práce popisuje základní pojmy z teorie spolehlivosti systémů, jako jsou porucha, doba do poruchy, funkce spolehlivosti, střední doba do poruchy, intenzita poruch, atd. Popsána jsou také pravděpodobnostní rozdělení, která se v teorii spolehlivosti používají nejčastěji. Ve 4. kapitole je popsána spolehlivost základních systémů metodou Booleových algeber a také pomocí Markovových řetězců. Poslední část práce se zabývá simulací spolehlivosti složitých systémů. Pro tuto část jsou vytvořeny dva programy. První simuluje spolehlivost základních systémů, druhý simuluje spolehlivost sítě budovy MFF UK, Karlín.

Klíčová slova: Spolehlivost, redundandní systém, MTTF, MTBF, boolovské systémové funkce

Title: Reliability of systems with redundant subsystems and/or elements

Author: Pavel Čáha

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Jaromír Antoch, CSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The thesis deals with the basic notions of the (system) reliability theory as e.g., failure, time to failure, reliability function, mean time to failure, intensity of failures, etc. It also describes probability distributions that are frequently used in the field of (system) reliability. Fourth chapter is focused on the reliability of basic systems as, e.g., serial, parallel, circle and star, using Boolean algebra and Markov chains. The last part of the thesis describes the simulation of complex systems. This part also includes two programmes. The first one enables a simulation of reliability of basic systems and the second reliability of the network of the building MFF UK, Karlín.

Keywords: Reliability, redundant systems, MTTF, MTBF, boolean system functions

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Úvod do teorie spolehlivosti</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Základní pojmy a definice</b>	<b>5</b>
3.1	Porucha . . . . .	5
3.2	Doba do poruchy . . . . .	5
3.3	Funkce spolehlivosti . . . . .	5
3.4	Střední doba do poruchy . . . . .	6
3.5	Intenzita poruch . . . . .	7
3.6	Vanová křivka spolehlivosti . . . . .	7
3.7	Exponenciální rozdělení . . . . .	8
3.8	Weibullovo rozdělení . . . . .	9
3.9	Gama rozdělení . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Spolehlivost vybraných systémů</b>	<b>11</b>
4.1	Metoda Booleových algeber . . . . .	11
4.1.1	Sériový systém . . . . .	12
4.1.2	Paralelní systém . . . . .	13
4.1.3	Systém „k z n“ . . . . .	14
4.1.4	Cyklus . . . . .	15
4.1.5	Hvězda . . . . .	15
4.2	Markovovy řetězce . . . . .	17
4.2.1	Paralelní systém . . . . .	20
4.2.2	Ostatní systémy . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Odhad spolehlivosti pomocí simulace</b>	<b>24</b>
5.1	Síť MFF UK, Karlín . . . . .	24
5.1.1	Fungující systém . . . . .	25
5.2	Simulace jednotlivých systémů . . . . .	25
5.2.1	Důležité proměnné . . . . .	25
5.2.2	Popis programu, algoritmus . . . . .	26
5.2.3	Výstup programu . . . . .	26
5.2.4	Vyhodnocení . . . . .	27
5.3	Simulace sítě budovy MFF UK, Karlín . . . . .	27
5.4	Výstup . . . . .	27
5.5	Vyhodnocení . . . . .	27
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>30</b>
<b>7</b>	<b>Apendix</b>	<b>31</b>
<b>8</b>	<b>Literatura</b>	<b>33</b>
	<b>Seznam obrázků</b>	<b>34</b>
	<b>Seznam tabulek</b>	<b>35</b>

# 1 Úvod

Teorie spolehlivosti se zabývá spolehlivostí nejrůznějších systémů. Z technického pohledu souvisí s konstrukcí, použitými materiály, technologií, diagnostikou a strategií údržby. Matematická teorie spolehlivosti je zaměřena na prognózu, odhad a optimalizaci bezporuchového provozu systému. Cílem této práce je seznámit čtenáře se základní problematikou a metodami analýzy spolehlivosti různých systémů.

Bakalářská práce je rozdělena do čtyř kapitol. V prvních dvou kapitolách se seznámíme s pojmem teorie spolehlivosti. Jsou zde také uvedeny a vysvětleny základní pojmy a vztahy, které jsou v teorii spolehlivosti běžně používané, například porucha, doba do poruchy, funkce spolehlivosti, střední doba do poruchy, intenzita poruch, atd. Dále jsou popsána některá pravděpodobnostní rozdělení, se kterými se v souvislosti se spolehlivostí systémů setkáme nejčastěji.

Ve třetí kapitole ukážeme dva postupy, jak můžeme analyzovat základní typy systémů, tj. sériový, paralelní (a jeho modifikaci), cyklus a hvězdu. Prvním uvedeným postupem je metoda Booleových algeber. Seznámíme se zde s pojmem strukturní funkce a u jednotlivých systémů uvedeme pravděpodobnosti jejich fungování a funkci spolehlivosti. Druhý postup používá k analýze systémů Markovovy řetězce. Systémy popíšeme pomocí matic pravděpodobností přechodu, matic intenzit přechodu, stacionárního rozdělení,...

Poslední kapitola je zaměřena na simulace jednoduchých, i složitých systémů. Pokud jde o jednoduché systémy, je k této kapitole vytvořen program, který simuluje spolehlivost základních systémů, zmiňovaných v předchozí kapitole. V tomto programu můžeme různě nastavovat intenzity poruch a oprav prvků, abychom mohli pozorovat změny v chování systémů. Jako zástupce složitějšího systému je vytvořena simulace spolehlivosti sítě budovy MFF UK, Karlín.

## 2 Úvod do teorie spolehlivosti

Spolehlivost systému je vlastnost, která se často popisuje pomocí pravděpodobnosti, že tento systém bude schopný vykonávat své očekávané funkce během daného časového intervalu za normálních (nebo jinak specifikovaných) podmínek. Jakýkoliv systém se může skládat z různých podsystémů a jednotlivých prvků, kterých může být jen pár, nebo třeba i statisíce. Každý samostatný prvek funguje na odlišném principu, potřebuje jiné podmínky k tomu, aby správně pracoval, vykonává různé funkce, pro které je určený, a zejména má každý prvek jinou spolehlivost. Odtud je zřejmé, že určení spolehlivosti systému jako jednoho celku není triviální záležitost a vyžaduje informace nejen o každé své součástce, ale také o vzájemné provázanosti mezi prvky i podsystémy.

Jeden z hlavních cílů v teorii spolehlivosti je zvyšování spolehlivosti systémů.<sup>1</sup> Asi první možnost jak zvýšit spolehlivost, která by nás napadla, je zvyšování spolehlivosti jednotlivých prvků. Na jednoduchém příkladě můžeme tento způsob ilustrovat.

Příklad 1.1. Uvažujme systém, který se skládá z 50 identických prvků a předpokládejme, že všechny prvky jsou nezávislé. Nechť se systém porouchá právě tehdy, když přestane fungovat alespoň jeden prvek. Označme  $p$  pravděpodobnost, že se jeden prvek neporouchá. Jelikož jsou prvky nezávislé, můžeme lehce vypočítat pravděpodobnosti, že se systém v daný časový interval neporouchá.

$$P[\text{systém se neporouchá při } p = 0,9] = 0,9^{50} = 0,005153$$

$$P[\text{systém se neporouchá při } p = 0,99] = 0,99^{50} = 0,605006$$

$$P[\text{systém se neporouchá při } p = 0,999] = 0,999^{50} = 0,951205$$

$$P[\text{systém se neporouchá při } p = 0,9999] = 0,9999^{50} = 0,995012$$

Podívejme se na tento příklad ještě z jiné strany. Budeme požadovat, aby pravděpodobnost, že se systém složený z  $n$  nezávislých, identických prvků neporouchá, byla 0,995. A budeme zkoumat, jak spolehlivé by jednotlivé prvky musely být. Hodnoty  $p$  jsou pro některá  $n$  vypočítány v následující tabulce. Hodnota  $p$  opět označuje pravděpodobnost, že se jeden prvek neporouchá.

$n$	5	10	50	100
$p$	0,998997	0,999498	0,999899	0,999949

Tabulka 1: Spolehlivost  $n$  prvků při požadované spolehlivosti systému

Abychom dosáhli požadované spolehlivosti systému, musíme se zvyšujícím se počtem prvků výrazně zvýšit i jejich spolehlivost. Také si musíme uvědomit, že nejsložitější systém, který byl v příkladu popsán, měl pouze 100 prvků. Proto bychom se měli poohlédnout po jiných metodách, jak zvýšit spolehlivost, např.:

<sup>1</sup>V poslední době se objevuje nový trend, kdy se například výrobci domácích spotřebičů snaží o to, aby jejich výrobky vydržely po dobu záruky a poté přestaly fungovat. Jinými slovy usilují o to, aby byl daný systém spolehlivý po určitou dobu. Důvodem je vidina vyšších zisků, jelikož si zákazník bez nároku na reklamaci bude nucen zakoupit nový výrobek. Důležitou roli v tomto případě také hraje fakt, že oprava domácích spotřebičů či elektroniky bývá často dražší, než zakoupení výrobku nového.

- jiné uspořádání systému
- jiná struktura systému
- údržba
- zálohování důležitých prvků
- apod.

Podívejme se na teorii spolehlivosti ještě z ekonomického hlediska. Jak již bylo zmíněno, často požadujeme, aby systém (počítač, vlaková souprava, motor rakety, či obyčejná žárovka) měl co největší spolehlivost, tj. aby správně fungoval co nejdéle. Samozřejmě lze každý jednotlivý prvek například zálohovat a tím zvýšit spolehlivost systému. Porovnáme-li ale spolehlivost a finanční nákladnost, dostaneme optimální (ve smyslu cena - spolehlivost) řešení? Odpověď rozhodně není jednoznačná. U některých systémů můžeme tímto způsobem získat optimální řešení, u jiných nikoliv. Z tohoto důvodu musíme v souvislosti se spolehlivostí systémů vzít v úvahu i finanční stránku věci.

## 3 Základní pojmy a definice

Abychom mohli dále pokračovat, je důležité specifikovat některé základní pojmy z teorie spolehlivosti.

### 3.1 Porucha

Porucha je částečná nebo úplná ztráta, popřípadě změna, takových vlastností systému, která podstatným způsobem sníží nebo znemožní danému systému plnit jeho funkce.

Tento pojem je však velmi relativní. Uvažujme jako příklad systému osobní automobil. Pokud přestane fungovat rádio či klimatizace, sníží se kvalita celého automobilu. Nicméně tato porucha není fatální, vůz může bez jakýchkoliv problémů bezpečně přepravovat osoby. Pokud se ovšem porouchají brzdové destičky, auto je v podstatě nepoužitelné do té doby, než se porucha vyřeší.

Abychom mohli poruchy blíže specifikovat, dělíme je na občasné (intermittent failures) a dlouhodobé (extended failures). Občasné poruchy mají krátkou dobu trvání. Dobrým příkladem jsou chyby softwaru, které se objevují pouze za určitých podmínek a nesouvisle<sup>2</sup>. Naproti tomu dlouhodobé poruchy trvají do té doby, než je někdo opraví, a dále se rozdělují na částečné a úplné.

Jak název napovídá, částečné poruchy způsobují jen částečnou ztrátu funkcí systému, zatímco celkové poruchy znamenají ztrátu všech funkcí systému. Obě tyto poruchy lze ještě dále dělit na náhlé (objeví se bez jakéhokoliv varování a nelze je tudíž předvídat) a na postupné (objevují se různé signály, které upozorňují na blížící se poruchu).

Podle podmínek vzniku můžeme poruchy rozlišit na vnější a vnitřní. Vnější porucha je způsobena nedodržením podmínek, které jsou systému stanoveny. V této práci se však budu odvolávat spíše na vnitřní poruchy, které jsou způsobeny vlastní nedokonalostí, opotřebením<sup>3</sup>, apod.

### 3.2 Doba do poruchy

Uvažujme jeden samostatný prvek. Ten začne pracovat v čase  $t = 0$  a porouchá se v náhodném okamžiku  $t$ . Doba, během které pracoval prvek bez poruch, se nazývá doba do poruchy. Pro náhodnou veličinu  $X$ , popisující dobu do poruchy, platí  $P[X \geq 0] = 1$ .

„Časový“ interval  $[0, t]$  lze chápat různými způsoby, např.: běžný nepřetržitý čas, provozní čas, nebo ale také například počet ujetých kilometrů, počet spuštění/nastartování, atd. (U dopravních prostředků by asi nebylo vhodné měřit jejich spolehlivost jen vzhledem k času).

### 3.3 Funkce spolehlivosti

Distribuční funkce náhodné veličiny  $X$ ,  $F(x) = P[X \leq x]$ , vyjadřuje pravděpodobnost, že doba do poruchy bude menší než nebo rovna,  $x$ . My ale potřebujeme častěji znát pravděpodobnost, že doba do poruchy bude větší než  $x$ , jinými slovy,

---

<sup>2</sup>Blischke W. R., Murthy D. N. P.

<sup>3</sup>Opotřebením není přímo považováno za poruchu, nicméně k poruše často vede.

že se v časovém intervalu  $[0, x]$  prvek neporouchá. To můžeme zapsat následovně:  $P[X > x] = 1 - F(x)$ . Dále označme  $R(x) = 1 - F(x)$ . Funkci  $R(x)$ , která vyjadřuje pravděpodobnost toho, že na intervalu  $[0, x]$  nedojde k poruše, nazveme funkce spolehlivosti.

Nechť  $X$  je diskrétní náhodná veličina, která nabývá celých nezáporných hodnot  $i$  (např. počet nastartování) a  $p_i = P[X = i]$ , tedy pravděpodobnost, že se systém porouchá při  $i$ -tém nastartování,  $p_i \in [0, 1]$ ,  $\sum_i p_i = 1$ . Potom

$$F(x) = \sum_{i \leq x} p_i.$$

Nechť  $X$  je spojitá náhodná veličina (např. čas) s hustotou  $f(x) \geq 0$ , pro  $x \geq 0$ . Potom

$$F(x) = \int_0^x f(y) dy.$$

V praxi se ve většině případech předpokládá, že  $F(x)$  je absolutně spojitá. To neplatí, pokud je náhodná veličina  $X$  diskrétní, například pokud  $X$  reprezentuje počet nastartování. Výjimkou může být počátek  $t = 0$ , protože se některé výrobky mohou porouchat v okamžiku spuštění. V takové situaci lze vzít v úvahu podmíněnou distribuční funkci doby do poruchy  $P[X \leq x \mid X > 0]$ ,  $x > 0$ .

### 3.4 Střední doba do poruchy

Při analýze spolehlivosti systémů hrají důležitou roli momenty a kvantily rozdělení doby do poruchy. Následující věta nám zjednoduší výpočet momentů nezáporných náhodných veličin pomocí funkce spolehlivosti.

**Věta 3.1.** Nechť  $X$  je nezáporná náhodná veličina s funkcí spolehlivosti  $R(x)$  a nechť  $EX^k < \infty$ , pro  $k \in \mathbb{N}$ . Potom

$$EX^k = k \int_0^{\infty} x^{k-1} R(x) dx. \quad (1)$$

Pokud navíc

$$\int_0^{\infty} x^{k-1} R(x) dx < \infty, \quad (2)$$

potom existuje  $k$ -tý moment  $EX^k$ .

*Důkaz.* Hurt, teorie spolehlivosti, str. 10. □

Díky větě 3.1 jsme získali důležitý vztah pro střední dobu do poruchy:

$$EX = \int_0^{\infty} R(x) dx. \quad (3)$$

Ze znalosti výpočtu  $EX^k$  můžeme snadno odvodit i rozptyl doby do poruchy:

$$\text{var} X = 2 \int_0^{\infty} x R(x) dx - (EX)^2. \quad (4)$$

### 3.5 Intenzita poruch

Nechť náhodná veličina  $X$  (doba do poruchy) má absolutně spojitou distribuční funkci  $F(x)$  a hustotu  $f(x)$ . Potom se funkce

$$\Lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{R(x)}, \quad \{x; F(x) < 1\}, \quad (5)$$

nazývá intenzita poruch pro spojitá rozdělení. Tento vzorec dává do poměru hustotu a pravděpodobnost bezporuchového provozu.

Existuje více interpretací funkce  $\Lambda(x)$ , přičemž následující je pravděpodobně nejvýstižnější.

Předpokládejme, že  $x > 0$ . Pravděpodobnost jevu, že se prvek porouchá v časovém intervalu  $(x, x + \Delta x]$  za podmínky, že v intervalu  $[0, x]$  pracoval bez poruchy, lze zapsat:

$$P[x < X \leq x + \Delta x | X > x] = \frac{P[x < X \leq x + \Delta x, X > x]}{P[X > x]} = \frac{P[x < X \leq x + \Delta x]}{P[X > x]} = \frac{1}{1 - F(x)} \cdot \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x.$$

Pro  $\Delta x \rightarrow 0$  platí:  $\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \rightarrow f(x)$ .

Pro malé hodnoty  $\Delta x$  potom přibližně platí  $P[x < X \leq x + \Delta x | X > x] \cong \Lambda(x) \cdot \Delta x$ . Intenzita poruch  $\Lambda(x)$  tedy říká: Pokud v časovém intervalu  $[0, x]$  pracoval prvek bez poruch, tak pravděpodobnost, že přestane pracovat v intervalu  $(x, x + \Delta x)$ , je přibližně  $\Lambda(x) \cdot \Delta x$ .

Nechť  $X$  je diskrétní náhodná veličina, která nabývá hodnot  $i \in \mathbb{N}_0$ , a  $p_i \in [0, 1]$  je pravděpodobnost jevu, že se systém/ prvek porouchá při  $i$ -tém použití/ nastartování/ spuštění/... Potom se funkce

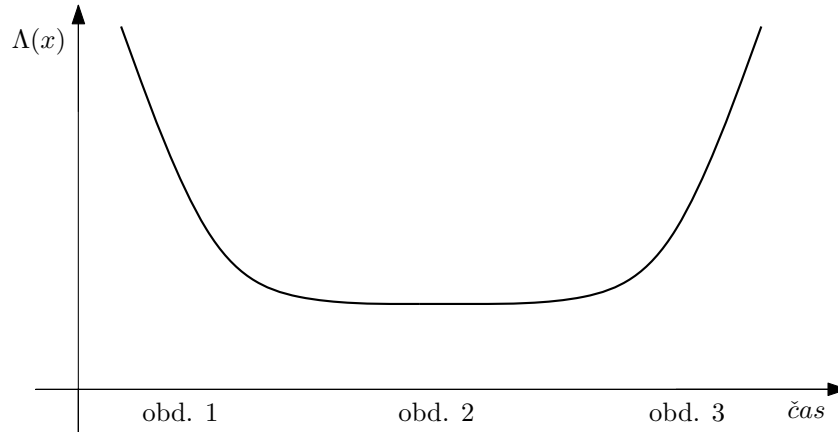
$$\Lambda(x) = \frac{p_i}{1 - F(x)} = \frac{p_i}{1 - \sum_{i \leq x} p_i}, \quad (6)$$

nazývá intenzita poruch pro diskrétní rozdělení.

### 3.6 Vanová křivka spolehlivosti

Pro většinu reálných systémů platí, že funkce intenzity poruch má profil, který je zachycen na obrázku 1. Křivka připomíná profilem vanu, proto se jí říká vanová křivka.

Křivka je rozdělena na tři části. První (období záběhu, nebo také období dětských nemocí) zahrnuje krátké období od spuštění systému. Systém se může porouchat ihned, nebo krátce po spuštění z důvodu výrobní vady, nesprávné montáže, apod. V druhé části (období bezproblémového fungování) je intenzita poruch přibližně konstantní. V tomto období dochází k běžnému využívání systému. Dochází sice k opotřebení, to by ale mělo mít v této části minimální vliv na fungování systému. Poruchy jsou způsobeny zejména vnějšími faktory. V poslední, třetí části (opotřebení), dochází ke stárnutí a opotřebování systému, a proto intenzita poruch roste.



Obrázek 1: Vanová křivka spolehlivosti

### 3.7 Exponenciální rozdělení

Dobu do poruchy lze modelovat různými rozděleními, ať už diskrétními, či spojitými. Pro všechna rozdělení musíme vznést požadavek, aby  $F(x) = 0, x < 0$ . Velmi často se v teorii spolehlivosti používá exponenciální rozdělení s parametrem  $\lambda > 0$ .

Distribuční funkce a hustota exponenciálního rozdělení jsou:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0, \lambda > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (7)$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0, \lambda > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (8)$$

Ze znalosti exponenciálního rozdělení můžeme také snadno vyjádřit funkci spolehlivosti a intenzitu poruch:

$$R(x) = e^{-\lambda x}, \quad (9)$$

$$\Lambda(x) = \lambda. \quad (10)$$

Všimněme si, že intenzita poruch je konstantní a nezávisí na hodnotě  $x$ . Proto se exponenciální rozdělení využívá především pro aproximaci *období bezproblémového fungování* (viz *Vanová křivka spolehlivosti*). Toto rozdělení je tedy vhodné, pokud se poruchy objevují náhodně, a pokud nejsou závislé na stáří systému.

Dále můžeme snadno spočítat střední hodnotu a rozptyl exponenciálního rozdělení:

$$EX \equiv \mu = \frac{1}{\lambda}, \quad (11)$$

$$\text{var}X \equiv \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (12)$$

Příklad 3.1. Střední doba do poruchy určité značky žárovek je  $\mu = 1500$  hodin. Pravděpodobnost, že žárovka bude svítit po dobu  $[0, x]$ , tedy  $R(x)$ , je pro různé hodnoty  $x$  vyjádřena v následující tabulce.

Medián životnosti žárovky je 1039,6 hodin, což je mnohem kratší doba, než střední hodnota.

$x$	500	1000	1500	2000	3000	5000
$R(x)$	0,7164	0,5132	0,3679	0,2633	0,1356	0,0356

Tabulka 2: Pravděpodobnosti, že se žárovka neporouchá do času  $x$

*Poznámka 3.1.* Významnou vlastností exponenciálního rozdělení také je, že „nemá paměť“. Nechť  $X$  je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením s parametrem  $\lambda$  a  $x, y > 0$ . Potom:

$$\begin{aligned} P[X > x + y \mid X > y] &= \frac{P[X > x+y, X > y]}{P[X > y]} = \frac{P[X > x+y]}{P[X > y]} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} \\ &= e^{-\lambda x} = P[X > x]. \end{aligned} \quad (13)$$

To znamená, že  $P[X > x+y \mid X > y]$  nezávisí na  $y$ . Je-li  $X$  doba do poruchy nějakého prvku, pak nám uvedená vlastnost říká, že prvek nestárne (neopotřebovává se). Tato vlastnost je pro exponenciální rozdělení charakteristická, ostatní spojitá rozdělení ji nemají. Z diskrétních rozdělení má tuto vlastnost pouze rozdělení geometrické.

### 3.8 Weibullovo rozdělení

Weibullovo rozdělení je další rozdělení, které se v teorii spolehlivosti často používá.

Weibullovo rozdělení s parametry  $\theta > 0$ ,  $\beta > 0$  má distribuční funkci a hustotu:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(\frac{x}{\theta})^\beta} & x > 0, \theta > 0, \beta > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (14)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\theta} (\frac{x}{\theta})^{\beta-1} e^{-(\frac{x}{\theta})^\beta} & x > 0, \theta > 0, \beta > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (15)$$

Ze znalosti Weibullova rozdělení můžeme opět snadno vyjádřit funkci spolehlivosti a intenzitu poruch:

$$R(x) = e^{-(\frac{x}{\theta})^\beta}, \quad (16)$$

$$\Lambda(x) = \frac{\beta}{\theta} (\frac{x}{\theta})^{\beta-1}, \quad (17)$$

a střední hodnotu a rozptyl:

$$EX \equiv \mu = \theta \Gamma(1 + \frac{1}{\beta}), \quad (18)$$

$$\text{var} X \equiv \sigma^2 = \theta^2 [\Gamma(1 + \frac{2}{\beta}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{\beta})]. \quad (19)$$

Pomocí Weibullova rozdělení lze velmi dobře aproximovat rozdělení doby do poruchy s monotónní intenzitou poruch. V závislosti na parametru  $\beta$  je intenzita  $\Lambda(x)$  Weibullova rozdělení:

- klesající,  $0 < \beta < 1$

- konstantní,  $\beta = 1$
- rostoucí konkávní,  $1 < \beta < 2$
- lineární rostoucí,  $\beta = 2$
- rostoucí konvexní,  $\beta > 2$

*Poznámka 3.2.* Pokud parametr  $\beta = 1$ , dostaneme z Weibullova rozdělení exponenciální rozdělení s parametrem  $\frac{1}{\theta}$ .

### 3.9 Gama rozdělení

Další rozdělení, pomocí kterého lze modelovat dobu do poruchy, je gama rozdělení s parametry  $a > 0$  a  $p > 0$ . Distribuční funkce a hustota tohoto rozdělení jsou:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{a^p}{\Gamma(p)} \int_0^x t^{p-1} e^{-at} dt & t > 0, a > 0, p > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (20)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax} & x > 0, a > 0, p > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (21)$$

Ze znalosti gama rozdělení můžeme snadno vyjádřit funkci spolehlivosti a intenzitu poruch:

$$R(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} \int_x^\infty t^{p-1} e^{-at} dt, \quad (22)$$

$$\Lambda(x) = \frac{x^{p-1} e^{-ax}}{\int_x^\infty t^{p-1} e^{-at} dt}. \quad (23)$$

Dále můžeme vypočítat střední hodnotu a rozptyl gama rozdělení:

$$EX \equiv \mu = \frac{p}{a}, \quad (24)$$

$$\text{var} X \equiv \sigma^2 = \frac{p}{a^2}. \quad (25)$$

**Věta 3.2.** Intenzita poruch  $\Lambda(x)$  gama rozdělení je v závislosti na parametru  $p > 0$ :

- klesající,  $0 < p < 1$
- konstantní,  $p = 1$
- rostoucí,  $p > 1$

■

*Důkaz.* Hurt, Teorie spolehlivosti, str. 43. □

Gama rozdělení může být použito pro modelování  $n$ -té poruchy systému/prvku, který má exponenciální rozdělení poruch. (Náhodná veličina  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  má gama rozdělení s parametry  $\lambda$  a  $n$ , pokud  $X_i$  jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametrem  $\lambda$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ .)

## 4 Spolehlivost vybraných systémů

### 4.1 Metoda Booleových algeber

Metoda Booleových algeber využívá symboliky, která je analogická v elektrických obvodech. Pokud prvek pracuje, je funkční, prochází jím proud. V opačném případě (prvek je porouchaný) jím proud neprochází. Toto tvrzení můžeme zobecnit i na celý systém. Pokud do systému pustíme proud a na výstupu obdržíme výstupní proud, systém je funkční. V opačném případě je porouchaný.

**Definice 4.1** (Booleova algebra). Nechť je dána neprázdňá množina  $B$ , na níž jsou zavedeny binární operace sčítání a násobení a unitární operace doplněk prvku z množiny  $B$ . Tyto operace budeme označovat obvyklým způsobem, tj.  $x + y$ ,  $x \cdot y$  a  $\bar{x}$ . Nechť v množině  $B$  existují dva navzájem různé prvky, které označíme  $0, 1$ . Množinu  $B$  spolu s těmito operacemi nazýváme Booleova algebra, jestliže pro každé prvky platí:

- komutativnost  $x + y = y + x$ ,  $x \cdot y = y \cdot x$
- asociativita  $x + (y + z) = (x + y) + z$ ,  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
- distributivita  $x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$ ,  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
- neutralita  $x + 0 = x$ ,  $x \cdot 1 = x$
- komplementarita  $x + \bar{x} = 1$ ,  $x \cdot \bar{x} = 0$

■

**Definice 4.2** (Strukturní funkce, řád systému). Označme  $x_i, i = 1, \dots, n$ , stav prvku  $i$  následujícím způsobem:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{je-li prvek funkční} \\ 0 & \text{je-li prvek porouchaný} \end{cases}$$

Dále označme vektor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  jako vektor stavů  $n$  prvků. Stav celého systému charakterizujeme strukturní funkcí  $S(\mathbf{x})$ , pro kterou platí, obdobně jako pro jednotlivé prvky:

$$S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{je-li systém funkční} \\ 0 & \text{je-li systém porouchaný} \end{cases}$$

Řádem systému se nazývá počet prvků  $n$ .

■

**Definice 4.3.** Nechť  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , patří do Booleovy algebry. Definujme operátor  $\prod$  následujícím způsobem:

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n. \quad (26)$$

■

*Poznámka 4.1.* Operátor  $\prod$  reprezentuje v Booleově algebře průnik. To znamená, že  $\prod_{i=1}^n x_i = 1$  pokud  $x_i = 1, \forall i = 1, \dots, n$ ; a  $\prod_{i=1}^n x_i = 0$  pokud  $\exists i$  takové, že  $x_i = 0, i = 1, \dots, n$ .

**Definice 4.4.** Pro  $n = 2$  definujeme operátor<sup>4</sup>  $\prod$ :

$$\prod_{i=1}^2 x_i = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2). \quad (27)$$

■

**Věta 4.1.** Necht  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , patří do Booleovy algebry. Potom

$$\prod_{i=1}^n x_i = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2) \cdot \dots \cdot (1 - x_n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i). \quad (28)$$

*Důkaz.* Postupujme indukcí. Pro  $n = 1$  vztah (28) platí triviálně (máme pouze jeden prvek). Pro  $n = 2$  platí dle definice 4.4:

$$S(x) = x_a + x_b - x_a x_b = 1 - (1 - x_a)(1 - x_b). \quad (29)$$

Předpokládejme, že vztah (28) platí pro  $n = N$  a ukažme, že platí i pro  $n = N + 1$ .

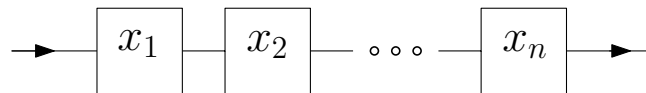
Pomocí (29) a indukčního předpokladu  $S(x) = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - x_i)$ ,  $x_b := x_{N+1}$  můžeme popsat připojení  $(N + 1)$ ního prvku k systému s  $N$  prvky takto:

$$S(x) = 1 - \left[ \prod_{i=1}^N (1 - x_i) \right] (1 - x_{N+1}) = 1 - \prod_{i=1}^{N+1} (1 - x_i).$$

□

*Poznámka 4.2.* Operátor  $\Pi$  reprezentuje v Booleově algebře sjednocení. To znamená, že  $\prod_{i=1}^n x_i = 1$ , pokud alespoň jeden prvek  $x_i = 1$ ; a  $\prod_{i=1}^n x_i = 0$ , pokud  $x_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$ . Proměnné  $x_i$  mohou například reprezentovat prvky paralelního systému.

#### 4.1.1 Sériový systém



Obrázek 2: Sériový systém

<sup>4</sup>Symbol  $\prod$  se čte „ip“ (inverze pro pi).

Pokud je systém sériově zapojený, znamená to, že všechny prvky jsou postupně v řadě propojeny. Proud, který bychom do tohoto systému pustili, má jedinou cestu, jak se ze systému dostat ven. V případě, že jsou všechny prvky nezávislé, sériový systém má strukturní funkci:

$$S(\mathbf{x}) = \min(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i. \quad (30)$$

Stačí tedy, aby jediný prvek v celém systému nefungoval, a tok proudu se přeručí. Jelikož prvky  $x_i$  nabývají hodnot 0 nebo 1, opravdu stačí, aby jediné  $x_i = 0$  a systém přestane pracovat.

Pokud bychom si označili  $p_i$  pravděpodobnost, že prvek  $x_i$  bude pracovat, mohli bychom také (díky nezávislosti prvků) vyjádřit pravděpodobnost, že systém bude fungovat, jako

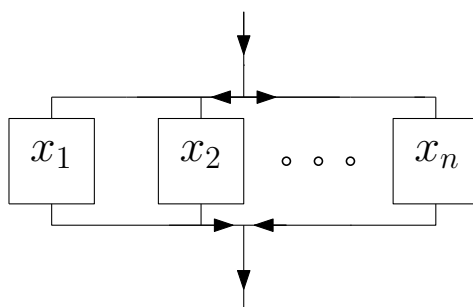
$$Q = \prod_{i=1}^n p_i. \quad (31)$$

Totéž platí i pro funkci spolehlivosti. Necht'  $R_i(x)$  je spolehlivost  $i$ -té komponenty. Potom pro funkci spolehlivosti sériového systému platí:

$$R(x) = \prod_{i=1}^n R_i(x). \quad (32)$$

Tento systém je sice velmi jednoduchý, nicméně stačí, aby nastala porucha u jediného prvku, a celý systém přestane pracovat.

#### 4.1.2 Paralelní systém



Obrázek 3: Paralelní systém

Paralelní systém (podobně jako sériový systém) si umíme představit ze zobrazování elektrických obvodů. Proud, který vstupuje, je rozdělen mezi všechny prvky, následně se opět shromáždí do jednoho výstupu. To znamená, že průchod jakýmkoliv prvkem nezávisí na žádném jiném prvku. Aby se proud dostal na výstup, musí fungovat alespoň jeden prvek.

Systém bude tedy porouchaný v momentě, kdy budou všechny prvky porouchané. Proto můžeme napsat strukturní funkci:

$$S(\mathbf{x}) = \max(x_1, \dots, x_n) = 1 - (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) = \prod_{i=1}^n x_i. \quad (33)$$

Pro pravděpodobnost, že systém bude fungovat, platí vztah:

$$Q = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i). \quad (34)$$

Funkce spolehlivosti paralelního systému je:

$$R(x) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(x)). \quad (35)$$

Tento základní systém má výhodu v tom, že je schopen fungovat do té doby, než se porouchá nejspolehlivější prvek. V praxi se s ním můžeme setkat poměrně často. Uvažujme paralelní systém se zálohováním - pracuje pouze první prvek a ostatní „čekají“, než se porouchá. V tu chvíli začne pracovat druhý prvek. Pokud se porouchá, spustí se třetí prvek, atd.

#### 4.1.3 Systém „k z n“

Jedná se o modifikaci předchozího systému. Opět uvažujeme paralelní systém, ale přidáme k němu následující podmínku: Aby proud protekl, musí fungovat alespoň  $k$  libovolných prvků z  $n$ . Pro systém tohoto typu vypadá strukturní funkce následovně:

$$S(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \sum_{i=1}^n x_i \geq k \\ 0 & \text{pokud } \sum_{i=1}^n x_i < k \end{cases} \quad (36)$$

Nyní vypočítáme pravděpodobnost, že systém složený z  $n$  nezávislých identických prvků, bude fungovat. Nejprve si musíme uvědomit, že

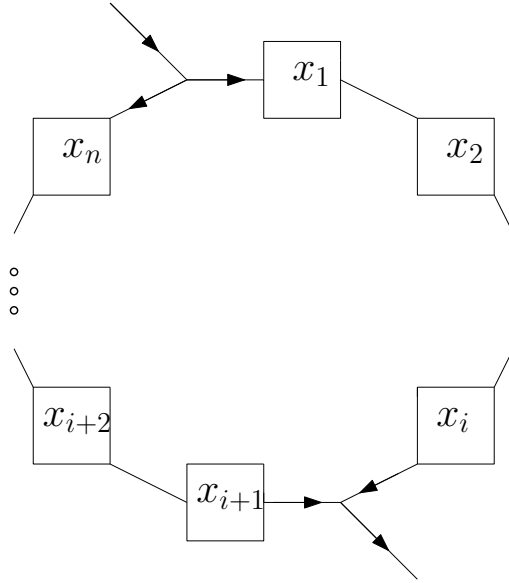
$$P[\text{právě } k \text{ prvků z } n \text{ bude fungovat}] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}. \quad (37)$$

Tento vztah platí, neboť zde počítáme s binomickým rozdělením. Pro výpočet pravděpodobnosti fungování systému stačí vzít v úvahu základní požadavek, že je zapotřebí alespoň  $k$  neporouchaných prvků, tedy:

$$P[\text{alespoň } k \text{ prvků bude fungovat}] \equiv Q = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}. \quad (38)$$

Touto modifikací paralelního systému se nám podařilo přiblížit se k reálným systémům. Můžeme zde uvést jednoduchý příklad.

*Příklad 4.1.* Čtyřválcový motor je schopen funkce, jestliže alespoň tři válce fungují. Stačí, aby tři libovolné válce plnily svůj úkol. Zde se jedná o systém 3 ze 4.



Obrázek 4: Cyklus

#### 4.1.4 Cyklus

Představme si sériový systém, jehož poslední prvek propojíme s prvním prvkem. Na jednom místě mezi libovolnými dvěma prvky vstupuje proud a mezi dvěma jinými prvky vystupuje. Tento systém nazýváme cyklus.

Nechť veličiny  $x_i$  označují po řadě stavy prvků, a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že proud vstupuje do systému mezi prvky  $x_1$  a  $x_n$  a vystupuje mezi prvky  $x_i$  a  $x_{i+1}$ . Potom můžeme psát:

$$S(\mathbf{x}) = \max(\min(x_1, \dots, x_i), \min(x_{i+1}, \dots, x_n)) = \max\left(\prod_{k=1}^i x_k, \prod_{k=i+1}^n x_k\right). \quad (39)$$

Proud má totiž dvě možnosti, kudy může procházet. Buďto přes prvky  $x_1, \dots, x_i$ , nebo přes prvky  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{i+1}$ . Obě dvě možnosti představují sériový systém popsany výše a strukturní funkce „vybírání“ ten, který bude pracovat déle.

Pravděpodobnost, že systém bude pracovat je

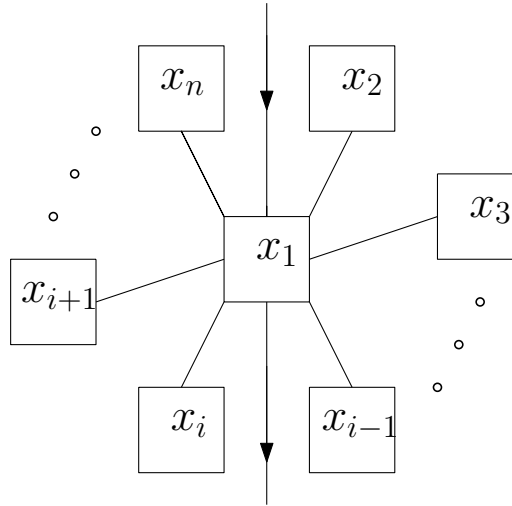
$$Q = \max\left(\prod_{k=1}^i p_k, \prod_{k=i+1}^n p_k\right). \quad (40)$$

Pro funkci spolehlivosti systému dostáváme vztah:

$$R(x) = \max\left(\prod_{k=1}^i R_k(x), \prod_{k=i+1}^n R_k(x)\right). \quad (41)$$

#### 4.1.5 Hvězda

Hvězda je systém s jedním centrálním prvkem, z kterého vychází propojení do jednotlivých prvků. Do tohoto centrálního prvku také vstupuje a zároveň z něj



Obrázek 5: Hvězda

vystupuje proud. Je zřejmé, že centrální prvek je nejdůležitější částí celého systému.

Pokud bychom měli určit spolehlivost systému, úkol by byl velmi jednoduchý. Stačilo by, aby proud procházel přes centrální prvek. Označíme-li tento prvek  $x_1$ , pravděpodobnost, že jím bude procházet proud  $p_1$  a jeho spolehlivost  $R_1(x)$ , potom lze psát následující vztahy:

Strukturní funkce:

$$S(x) = x_1. \quad (42)$$

Pravděpodobnost, že systém funguje:

$$Q = p_1. \quad (43)$$

Spolehlivost systému:

$$R(x) = R_1(x). \quad (44)$$

Tento důležitý požadavek je v praxi nejspíš bezcenný. Přírozanější požadavek by byl, aby fungovaly všechny prvky. Potom jsou  $S(x)$ ,  $Q$  a  $R(x)$  obdobné jako v sériovém systému, jelikož chceme, aby byl bez poruchy každý prvek. Tedy:

$$S(\mathbf{x}) = \min(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i, \quad (45)$$

$$Q = \prod_{i=1}^n p_i, \quad (46)$$

$$R(x) = \prod_{i=1}^n R_i(x). \quad (47)$$

## 4.2 Markovovy řetězce

V předchozí kapitole byla spolehlivost systémů popsána pomocí Booleových algeber. Tento způsob zjišťování spolehlivosti je statický, a proto popíšeme spolehlivost systémů pomocí Markovových řetězců, které mohou pracovat se spojitým časem.

Předpokládejme, že máme systém, který se skládá z  $n$  prvků. Kdykoliv se nějaký prvek porouchá, začne se opravovat a po opravě může normálně pracovat. Každý prvek se může nacházet ve dvou stavech, a to ve fungujícím nebo v porouchaném stavu. Proto se celý systém může nacházet v  $2^n$  různých stavech. Dále předpokládejme, že rozdělení pravděpodobnosti poruch prvků mají exponenciální rozdělení<sup>5</sup> s parametrem  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ . Pomocí Markovových řetězců dokážeme popsat například pravděpodobnosti, že se systém nachází v nějakém stavu, pravděpodobnost, že systém přejde ze stavu  $i$  do stavu  $j$  v čase  $t$ , atd.

Uveďme tedy definici a některé důležité vlastnosti Markovových řetězců.

**Definice 4.5.** Necht  $\{X_t, t \geq 0\}$  je systém náhodných veličin, které nabývají celočíselných hodnot z množiny  $S$  (obvykle  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ ). Říkáme, že  $\{X_t, t \geq 0\}$  je Markovův řetězec se spojitým časem, jestliže:

$$P[X_t = j \mid X_s = i, X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_1} = i_1] = P[X_t = j \mid X_s = i], \quad (48)$$

$$\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < s < t, \quad \forall i, j, i_1, \dots, i_n \in S,$$

pro která

$$P[X_s = i, X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_1} = i_1] > 0. \quad (49)$$

■

Vztah (48) se nazývá Markovovská vlastnost.

Označme podmíněnou pravděpodobnost  $P[X_t = j \mid X_s = i] = p_{ij}(s, t)$ . Potom  $p_{ij}(s, t)$  nazveme pravděpodobnost přechodu ze stavu  $i$  v čase  $s$  do stavu  $j$  v čase  $t$ . Dále označme  $p_j(t) = P[X_t = j]$ ,  $j \in S$  absolutní pravděpodobnosti v čase  $t$  ( $p_j(t)$  označuje pravděpodobnost, že se řetězec nachází v čase  $t$  ve stavu  $j$ ) a  $p_j(0) = P[X_0 = j]$ ,  $j \in S$  počáteční pravděpodobnosti (kde  $p_j(0)$  je pravděpodobnost, s jakou se řetězec nacházel ve stavu  $j \in S$  v čase 0).

V tomto textu budeme používat pouze homogenní Markovské řetězce. To jsou takové řetězce, pro jejichž pravděpodobnosti přechodu platí

$$p_{ij}(s, s+t) = P[X_{s+t} = j \mid X_s = i] = p_{ij}(t), \quad \forall s \geq 0, t \geq 0. \quad (50)$$

Celý systém pravděpodobností  $\{p_{ij}(t), t > 0\}$  takových, že  $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$ , lze zapsat jako matici pravděpodobností přechodu  $\{\mathbf{P}(t), t > 0\}$ . Obvykle definujeme  $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$ , tedy  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$ .

**Věta 4.2.** Pro každé  $i \in S$  existuje limita

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1 - p_{ii}(h)}{h} = q_i \leq \infty, \quad (51)$$

<sup>5</sup>Význam exponenciálního rozdělení v teorii spolehlivosti byl popsán v kapitole 2.6.

pro každé  $i, j \in S, i \neq j$ , existují limity

$$\lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{p_{ij}(h)}{h} = q_{ij} < \infty, \quad (52)$$

a pro každé  $i \in S$  platí

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} \leq q_i. \quad (53)$$

■

*Důkaz.* Prášková, Lachout, Základy náhodných procesů, str. 74.

*Poznámka 4.3.* Využijeme-li vlastností stochastické matice, máme<sup>6</sup> pro každé  $h \geq 0$

$$\frac{1-p_{ii}(h)}{h} = \sum_{j \in S, j \neq i} \frac{p_{ij}(h)}{h}.$$

Odtud dostaneme limitním přechodem pro  $h \rightarrow 0_+$  vztah  $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$ . Je-li množina stavů  $S$  konečná<sup>7</sup>, potom tento vztah platí vždy, neboť

$$0 = 1 - \sum_{j \in S} p_{ij}(h), \quad h \geq 0,$$

odtud limitním přechodem (protože v konečném případě lze zaměnit limitu a sumu)

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{1 - \sum_{j \in S} p_{ij}(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{1 - p_{ii}(h) - \sum_{j \neq i} p_{ij}(h)}{h} = q_i - \sum_{j \neq i} q_{ij}.$$

**Definice 4.6.** Nezáporná čísla  $q_{ij}$  zavedená vztahem (34) se nazývají intenzity přechodu ze stavu  $i$  do stavu  $j$ , nezáporné číslo  $q_i$  se nazývá celková intenzita. Matice  $\mathbf{Q} = \{q_{ij}, i, j \in S\}$ , kde  $q_{ii} = -q_i$ , se nazývá matice intenzit přechodu.

■

*Poznámka 4.4.* Více o intenzitě (poruch) nalezneme v kapitole 3.5.

**Věta 4.3** (Kolmogorovy diferenciální rovnice). Předpokládejme, že  $q_i < \infty$  pro všechna  $i \in S$  a platí  $\sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i$ . Potom pravděpodobnosti přechodu  $p_{ij}(t)$  jsou diferencovatelné pro všechna  $i, j \in S$  a  $t > 0$  a platí

$$p'_{ij}(t) = -q_{ij}p_{ij}(t) + \sum_{k \neq i} q_{ik}p_{kj}(t) = \sum_{k \in S} q_{ik}p_{kj}(t). \quad (54)$$

Maticově lze zapsat soustavu rovnic jako

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{QP}(t). \quad (55)$$

■

<sup>6</sup>Prášková, Lachout, Základy náhodných procesů, str. 74.

<sup>7</sup>V této práci předpokládáme, že se každý systém skládá z konečně mnoha prvků. Potom je množina stavů  $S$  vždy konečná, neboť se každý prvek může nacházet pouze ve dvou stavech - stav, ve kterém funguje a porouchaný stav.

*Poznámka 4.5.* Tato věta udává souvislost intenzit přechodu s derivacemi pravděpodobností přechodu v obecném bodě.

Nyní můžeme vypočítat elementární příklad.

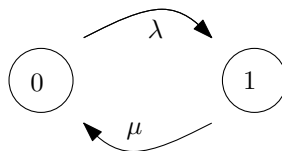
**Příklad 3.1.** Doba, během které nějaký stroj pracuje bez poruchy, je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením s parametrem  $\lambda > 0$ . Střední hodnota doby do poruchy je tedy  $\frac{1}{\lambda}$  a z kapitoly 2.6. víme, že intenzita poruch takového stroje je  $\lambda$ . Stroj začne být opravován v okamžiku, kdy se porouchá. Doba opravy je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením s parametrem  $\mu > 0$ . Střední doba opravy stroje je  $\frac{1}{\mu}$  a intenzita pro dobu opravy je  $\mu$ . Stroj začne pracovat v okamžiku, kdy je opraven.

Definujme náhodnou veličinu  $X_t$ , která může nabývat dvou hodnot:

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{stroj v čase } t \text{ pracuje} \\ 1 & \text{stroj je v čase } t \text{ porouchaný (a nepracuje)} \end{cases} \quad (56)$$

Potom  $\{X_t, t \geq 0\}$  je Markovův řetězec se spojitým časem a množinou stavů  $S = \{0, 1\}$ .

Přechod ze stavu 0 do stavu 1 tedy znamená, že se stroj porouchal. Naopak přechod ze stavu 1 do stavu 0 říká, že stroj byl opraven a normálně pracuje. Graficky lze zobrazit popsany příklad takto:



Obrázek 6: Přechody mezi stavy

Matrice intenzit přechodů v tomto příkladu je

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

Nyní můžeme pomocí věty 3.2. pro pravděpodobnosti přechodu  $p_{ij}(t)$  psát rovnice:

1.  $p'_{00}(t) = -\lambda p_{00}(t) + \lambda p_{10}(t)$
2.  $p'_{10}(t) = \mu p_{00}(t) - \mu p_{10}(t)$

Získali jsme tedy soustavu dvou diferenciálních rovnic o dvou neznámých. Po vypočítání obdržíme výsledek:

$$\begin{aligned} p_{00}(t) &= \frac{\mu}{\mu+\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\mu+\lambda)t}, \\ p_{10}(t) &= \frac{\lambda}{\mu+\lambda} - \frac{\lambda}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)t}. \end{aligned}$$

Analogicky, nebo pomocí doplňku ( $\sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1$ ) můžeme vypočítat zbylé pravděpodobnosti  $p_{01}(t)$  a  $p_{11}(t)$ .

Výsledná matice pravděpodobností přechodu má tvar

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\mu + \lambda} \begin{pmatrix} \lambda + \mu e^{-(\mu+\lambda)t} & \mu - \mu e^{-(\mu+\lambda)t} \\ \lambda - \lambda e^{-(\mu+\lambda)t} & \mu + \lambda e^{-(\mu+\lambda)t} \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Pomocí<sup>8</sup> můžeme určit absolutní pravděpodobnosti v čase  $t$ . Předpokládejme, že počáteční rozdělení je  $p_0 = P[X_0 = 0] = 1, p_1 = P[X_0 = 1] = 0$ . Potom

$$\begin{aligned} p_0(t) &= p_0 p_{00}(t) + p_1 p_{10}(t) = p_{00}(t), \\ p_1(t) &= p_0 p_{01}(t) + p_1 p_{11}(t) = p_{01}(t), \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} p_0(t) &= P[X_t = 0] = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} + \frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\mu + \lambda)t}, \\ p_1(t) &= P[X_t = 1] = \frac{\mu}{\mu + \lambda} - \frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-(\mu + \lambda)t}. \end{aligned}$$

#### 4.2.1 Paralelní systém

V této kapitole popíšeme spolehlivost paralelních systémů pomocí Markovových řetězců a uvedeme postupy, pomocí kterých analyzujeme i ostatní systémy.

Nejprve uvažujme systém, který se skládá ze dvou nezávislých prvků A a B. Nadále předpokládejme, že pravděpodobnosti poruch prvků mají exponenciální rozdělení. To samé platí i pro doby oprav.

Opět platí, že každý prvek může nabývat dvou stavů - správného fungování a poruchy. Množina stavů  $S$  má tedy 4 prvky,  $S = \{0, 1, 2, 3\}$ . Definujme náhodnou veličinu  $X_t$ , která nabývá hodnot z množiny  $S$ .

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{A, B fungují} \\ 1 & \text{A funguje, B je porouchaný} \\ 2 & \text{A je porouchaný, B funguje} \\ 3 & \text{A, B jsou porouchané} \end{cases} \quad (58)$$

Systém funguje, pokud se nachází ve stavech 0, 1 a 2, naopak systém přestane pracovat, pokud se dostane do stavu 3. V čase 0 se systém nachází ve stavu 0, tedy obě jeho části fungují.

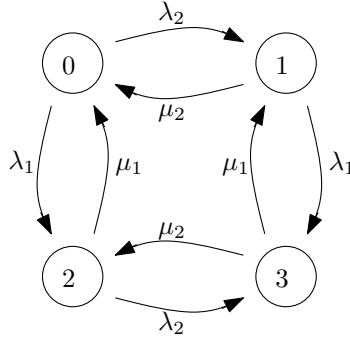
Jakmile nějaký prvek přestane pracovat, okamžitě se začne opravovat. V momentě, kdy se opraví, začne fungovat a předpokládáme, že je stejně dobrý, jako by byl nový.

Nechť prvky mají intenzity poruch  $\lambda_i, i = 1, 2$  ( $\lambda_1$  patří prvku A,  $\lambda_2$  prvku B). Dále označme  $\mu_i, i = 1, 2$ , intenzity oprav ( $\mu_1$  patří prvku A,  $\mu_2$  prvku B). Přejechy mezi stavy systému jsou znázorněny na obrázku číslo 7.

Matice intenzity přechodu paralelního systému se dvěma prvky je

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_2) & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ \mu_2 & -(\mu_2 + \lambda_1) & 0 & \lambda_1 \\ \mu_1 & 0 & -(\mu_1 + \lambda_2) & \lambda_2 \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 & -(\mu_1 + \mu_2) \end{pmatrix}. \quad (59)$$

<sup>8</sup>Prášková, Lachout, Základy náhodných procesů, str. 72



Obrázek 7: Přejchod mezi stavy, paralelní systém se dvěma prvky

Pro výpočet matice pravděpodobností přechodu pomocí Kolmogorovových rovnic jsme použili software Mathematica. Celá matice je příliš velká, proto zde vypíšeme jen několik jejích prvků.

$$\begin{aligned}
 p_{30}(t) &= -\frac{\mu_1\mu_2(e^{-(\mu_2+\lambda_2)t} + e^{-(\mu_1+\lambda_1)t} - e^{-(\mu_2+\lambda_2+\mu_1+\lambda_1)t} - 1)}{(\mu_2 + \lambda_2)(\mu_1 + \lambda_1)}, \\
 p_{31}(t) &= \frac{\mu_1(e^{-(\mu_2+\lambda_2)t}\mu_2 - e^{-(\mu_2+\lambda_2+\mu_1+\lambda_1)t}\mu_2 + \lambda_2 - e^{-(\mu_1+\lambda_1)t}\lambda_1)}{(\mu_2 + \lambda_2)(\mu_1 + \lambda_1)}, \\
 p_{32}(t) &= \frac{\mu_2(e^{-(\mu_1+\lambda_1)t}\mu_1 - e^{-(\mu_2+\lambda_2+\mu_1+\lambda_1)t}\mu_1 + \lambda_1 - e^{-(\mu_2+\lambda_2)t}\lambda_1)}{(\mu_2 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_1)}, \\
 p_{33}(t) &= \frac{\mu_1\mu_2e^{-(\mu_2+\lambda_2+\mu_1+\lambda_1)t} + e^{-(\mu_1+\lambda_1)t}\lambda_2\mu_1 + e^{-(\mu_2+\lambda_2)t}\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\lambda_1}{(\mu_2 + \lambda_2)(\mu_1 + \lambda_1)}.
 \end{aligned}$$

Pomocí<sup>9</sup> můžeme určit absolutní pravděpodobnosti v čase  $t$ . Předpokládejme, že počáteční rozdělení je  $p_0 = P[X_0 = 0] = 1$ ,  $p_i = P[X_0 = i] = 0$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , tj. při spuštění fungují oba prvky systému. Potom

$$\begin{aligned}
 p_0(t) &= P[X_t = 0] = \frac{\lambda_1\lambda_2e^{-(\mu_2+\lambda_2+\mu_1+\lambda_1)t} + e^{-(\lambda_1+\mu_1)t}\mu_2\lambda_1 + e^{-(\lambda_2+\mu_2)t}\mu_1\lambda_2 + \mu_2\mu_1}{(\lambda_2 + \mu_2)(\lambda_1 + \mu_1)}, \\
 p_1(t) &= P[X_t = 1] = -\frac{\lambda_2(e^{-(\mu_2+\lambda_2)t}\mu_1 + e^{-(\mu_2+\lambda_2+\mu_1+\lambda_1)t}\lambda_1 - \mu_1 - e^{-(\mu_1+\lambda_1)t}\lambda_1)}{(\mu_2 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_1)}, \\
 p_2(t) &= P[X_t = 2] = -\frac{\lambda_1(e^{-(\mu_1+\lambda_1)t}\mu_2 + e^{-(\mu_2+\lambda_2+\mu_1+\lambda_1)t}\lambda_2 - \mu_2 - e^{-(\mu_2+\lambda_2)t}\lambda_2)}{(\mu_2 + \lambda_2)(\mu_1 + \lambda_1)}, \\
 p_3(t) &= P[X_t = 3] = -\frac{\lambda_1\lambda_2(e^{-(\mu_2+\lambda_2)t} + e^{-(\mu_1+\lambda_1)t} - e^{-(\mu_2+\lambda_2+\mu_1+\lambda_1)t} - 1)}{(\mu_2 + \lambda_2)(\mu_1 + \lambda_1)}.
 \end{aligned}$$

Abychom mohli pokračovat dále, je nutné zadefinovat některé pojmy a ukázat jejich použití (viz appendix).

Chceme-li najít stacionární rozdělení, musíme řešit soustavu rovnic:

$$\pi^T \mathbf{Q} = \mathbf{0}^T,$$

<sup>9</sup>Prášková, Lachout, Základy náhodných procesů, str. 72

za podmínky

$$\sum_{j \in S} \pi_j = 1.$$

V našem případě dostaneme pět rovnic o čtyřech neznámých

$$\begin{aligned} -(\lambda_1 + \lambda_2)\pi_0 + \mu_2\pi_1 + \mu_1\pi_2 &= 0 \\ \lambda_2\pi_0 - (\mu_2 + \lambda_1)\pi_1 + \mu_1\pi_3 &= 0 \\ \lambda_1\pi_0 - (\mu_1 + \lambda_2)\pi_2 + \mu_2\pi_3 &= 0 \\ \lambda_1\pi_1 + \lambda_2\pi_2 - (\mu_1 + \mu_2)\pi_3 &= 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 0 \end{aligned} \tag{60}$$

Řešení těchto rovnic (a tedy stacionární rozdělení) je

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{\mu_1\mu_2}{(\mu_1 + \lambda_1)(\mu_2 + \lambda_2)}, \\ \pi_1 &= \frac{\mu_1\lambda_2}{(\mu_1 + \lambda_1)(\mu_2 + \lambda_2)}, \\ \pi_2 &= \frac{\lambda_1\mu_2}{(\mu_1 + \lambda_1)(\mu_2 + \lambda_2)}, \\ \pi_3 &= \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\mu_1 + \lambda_1)(\mu_2 + \lambda_2)}. \end{aligned} \tag{61}$$

Pokud bychom chtěli popsat spolehlivost paralelních systémů s počtem prvků  $n = 3, 4, \dots$ , postupovali bychom analogicky, jako se dvěma prvky. Množina stavů takových systémů by byla  $S = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ , stav  $2^n - 1$  by vždy značil poruchu systému.

Matice intenzit přechodu by měla rozměr  $2^n \times 2^n$  a pro vypočítání matice pravděpodobností přechodu bychom museli spočítat soustavu  $2^n$  rovnic o  $2^n$  neznámých.

#### 4.2.2 Ostatní systémy

Všechny systémy popsané v kapitole 3.1 se skládají z  $n$  prvků. Rozdělení pravděpodobnosti poruch jednotlivých prvků mají exponenciální rozdělení s parametrem  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ . Podobně i doby oprav jednotlivých prvků mají exponenciální rozdělení s parametrem  $\mu_i, i = 1, \dots, n$ . Prvky se mohou nacházet ve dvou stavech - ve fungujícím a v porouchaném. Množina všech stavů je tedy  $S = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ , kde stav 0 vždy označuje situaci, ve které všechny prvky fungují, naopak poslední stav  $2^n - 1$  označuje poruchu všech prvků.

Definujme stavy systému pro různý počet prvků  $n$  následujícím způsobem:

- $n = 1$ :  $S_0 \equiv$  prvek funguje,  $S_1 \equiv$  prvek nefunguje
- $n = 2$ , označme prvky A, B:  $S_{0,0} \equiv$  A, B fungují,  $S_{0,1} \equiv$  A funguje, B je porouchaný,  $S_{1,0} \equiv$  A je porouchaný, B funguje,  $S_{1,1} \equiv$  A, B jsou porouchané

Obecně:  $S_{i_1, \dots, i_n}$  označuje stav, ve kterém  $i_j$ -tý prvek funguje, pokud  $i_j = 0$  a nefunguje, pokud  $i_j = 1, j = 1, \dots, n$ .

Potom systém se 2 prvky má stejnou matici pravděpodobností přechodu, matici intenzit přechodu a stacionární rozdělení, jako paralelní systém popsaný v předchozí kapitole. Abychom mohli charakterizovat systémy s  $n > 2$  prvky, použili bychom analogické postupy, jako v kapitole 4.2.

*Poznámka 4.6.* O každém systému víme, za jakých podmínek funguje a za jakých nikoliv. Proto k charakteristice systémů pomocí Markovových řetězců potřebujeme ještě rozdělit množinu stavů na ty, ve kterých systém funguje a na ty, ve kterých je porouchaný.

Označme tedy  $A$  množinu stavů, ve kterých systém vykonává požadovanou funkci a  $B$  množinu stavů, ve kterých je systém porouchaný. Průnik množin  $A$  a  $B$  je prázdný, sjednocením těchto množin získáme množinu všech stavů systému  $S$ .

Potom pro sériový systém je množina  $A$  jednoprvková,  $A = \{S_{0,\dots,0}\}$ , naopak pro paralelní systém můžeme jednoduše napsat množinu  $B = \{S_{1,\dots,1}\}$ . Pro systém hvězda dostaneme množinu<sup>10</sup>  $B = \{S_{1,i_2,\dots,i_n}; i_2,\dots,i_n \in \{0,1\}\}$ . Pro systém cyklus snadno získáme množinu<sup>11</sup>  $A = \{S_{i_1,\dots,i_n}; i_1 = \dots = i_k = 0 \vee i_{k+1} = \dots = i_n = 0\}$ , pokud se výstup ze systému nachází mezi prvky  $k, k+1$ .

---

<sup>10</sup>podle odstavce 4.1.5 je první prvek centrální

<sup>11</sup>značení prvků odpovídá sekci 4.1.4

## 5 Odhad spolehlivosti pomocí simulace

Dalším nástrojem, který lze použít ke zkoumání spolehlivosti systémů, jsou simulační metody. Ty se používají zejména při analýze složitých systémů, kdy nejsme schopni hledanou spolehlivost spočítat explicitně, a kdy známe různé charakteristiky (střední dobu do poruchy, střední dobu opravy, atd.) jednotlivých prvků, jejich propojení, podmínky za kterých považujeme systém jako fungující/porouchaný,...

Cílem této kapitoly je namodelovat síť budovy MFF UK, Karlín a popsat její spolehlivost.

### 5.1 Síť MFF UK, Karlín

Nejprve musíme vytvořit model sítě budovy MFF UK, Karlín. Základní částí celého systému (sítě) jsou hlavní a vedlejší páteř. Obě páteře procházejí suterénem a 1.- 4.patrem. Ve všech patrech (i v suterénu) je na páteři přepínač, který rozvádí signál do daného patra. V každém patře se tedy nacházejí dva přepínače, a ty jsou spolu spojeny pomocí podsystémů - cyklů.

V suterénu jsou na cyklu napojeny dvě místnosti, a to učebna K11 a počítačová laboratoř. Ty jsou reprezentovány systémem hvězda. Pro náš model to znamená, že na cyklu jsou napojeny dva přepínače, ze kterých je rozváděn signál do jednotlivých počítačů v těchto místnostech.

1.- 4.patro jsou reprezentovány dvěma cykly. Na jednom cyklu jsou napojeny přepínače, které rozvádějí signál do telefonů, na druhém cyklu jsou přepínače, které rozvádějí signál do koncových zařízení. Koncová zařízení jsou počítače, tiskárny, skenery a datové promítače.

V prvním patře je do cyklu navíc napojena knihovna, která je reprezentována systémem hvězda, tedy jedním přepínačem, ze kterého vede signál do počítačů uvnitř místnosti.

Signál přichází do budovy a tedy do celé sítě MFF UK, Karlín do prvního přepínače na hlavní páteři, v suterénu.

Na obou páteřích je dohromady 10 přepínačů. V učebně K11, v počítačové laboratoři i v knihovně je 21 počítačů. Počet telefonů v každém patře je 26. Dále je v každém patře 30 počítačů, 10 tiskáren a 6 skenerů, nebo datových promítačů.

V tomto modelu předpokládáme, že doby do poruchy a doby oprav jednotlivých prvků mají exponenciální rozdělení. Střední doba opravy je pro každý prvek stejná, a to jeden den. Střední doba do poruchy se ovšem liší podle toho, o jaký prvek se jedná. Požadujeme, aby hlavní páteř byla co nejméně poruchová, proto je její střední doba do poruchy  $3 \cdot 10^6$  hodin. Ostatní prvky mají následující střední doby do poruchy:

- přepínače na vedlejší páteři, telefony:  $10^6$  hodin
- přepínače na cyklech:  $2 \cdot 10^5$  hodin
- koncová zařízení:  $1,5 \cdot 10^5$  hodin
- přepínače v učebně K11, v počítačové laboratoři a v knihovně:  $10^5$  hodin

Doba, po kterou simulace probíhá, je nastavena na  $10^7$  hodin, což je přibližně 1142 let. Dále předpokládáme, že při spuštění simulace jsou všechny prvky plně funkční.

### 5.1.1 Fungující systém

Abychom mohli simulovat síť MFF UK, Karlín, musíme nejprve definovat, kdy systém považujeme za funkční a které události způsobí poruchu. V kapitole 4.1 jsme ukázali, za jakých podmínek fungují základní systémy, a za jakých nikoliv. Tím se budeme řídit i nadále, jen přidáme další požadavky.

Síť MFF UK, Karlín funguje právě tehdy, když fungují všechna patra, učebna K11, počítačová laboratoř a knihovna. Pokud některý z těchto podsystémů přestane fungovat, řekneme, že nastala porucha. Jednotlivá patra fungují, pokud do nich vstupuje signál a pokud funguje alespoň 35 koncových zařízení a 20 telefonů.

Model a simulaci této sítě provedeme v programu Pascal. Nejprve vytvoříme program, který simuluje funkci jednotlivých systémů (sériový systém, paralelní systém, cyklus a hvězda). Pomocí něj vytvoříme program, který bude simulovat celou síť budovy MFF UK, Karlín.

## 5.2 Simulace jednotlivých systémů

Příložený program `systemy.pas` simuluje spolehlivost čtyř základních systémů, tj. sériového, paralelního, cyklu a hvězdy. Tento program obsahuje algoritmy, které jsou dále použity při modelování celé sítě MFF UK, Karlín.

Každý systém v programu se skládá ze šesti prvků. Pro systém hvězda potom platí, že první prvek je centrální a zbylých pět je na něj napojeno. Střední doba do poruchy všech prvků je 15 000 hodin, střední doba opravy každého prvku je<sup>12</sup> 300 hodin. Doba, po kterou simulujeme spolehlivost systémů je 40 000 hodin. Všechny tyto hodnoty jsou uvedeny v hlavičce programu jako konstanty a lze je libovolně měnit.

### 5.2.1 Důležité proměnné

V této kapitole jsou popsány nejdůležitější proměnné, které jsou v programu použity. Dříve než začneme, definujme pojem změna prvku, který budeme později často používat.

**Definice 5.1.** Přejít z fungujícího stavu do porouchaného, nebo naopak přechod z porouchaného stavu do fungujícího, nazveme změnou prvku. ■

#### Pprvek

Jednotlivé prvky jsou reprezentovány dynamicky alokovanými proměnnými. Pprvek je ukazatel na první prvek v systému. Ten ukazuje na druhý prvek, který ukazuje na třetí, atd. Každý prvek obsahuje následující informace:

- Pole, které má v prvním řádku střídavě uložené délky časů, ve kterých prvek funguje, nebo je porouchaný. V druhém řádku jsou postupně uloženy časy, ve kterých nastala změna - prvek se porouchal, nebo byl naopak opraven. Poslední řádek je pomocný, ukazuje, zda-li jsme již vypsali na výstup změnu daného prvku v daném čase.
- Pořadové číslo prvku.

---

<sup>12</sup>Střední doba opravy 300 hodin je velmi vysoká, nicméně jsou díky ní prvky déle opravovány a mezi jednotlivými systémy se objevují velké rozdíly v jejich spolehlivostech. Střední dobu opravy můžeme v hlavičce programu libovolně měnit podle potřeby.

- Počet změn prvku - kolikrát se celkem porouchal a byl opraven.

## Index

Index je dvourozměrné pole. Uchovává si informaci o tom, které prvky v daném čase fungují a které nikoliv.

## Poruchy

Proměnná poruchy je jednorozměrné pole. Je v ní uložena informace o tom, které podsystémy v daném čase fungují, a které nefungují.

### 5.2.2 Popis programu, algoritmus

Nejprve musíme vygenerovat všechny prvky. To znamená, že do každé proměnné prvek uložíme náhodný vektor  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ , který se skládá z dob do poruchy a z dob oprav, tj.

$$x_i = \begin{cases} \text{doba do poruchy} & i \text{ liché} \\ \text{doba opravy} & i \text{ sudé.} \end{cases} \quad (62)$$

Index  $k$  volíme tak, aby  $\sum_{i=1}^{k-1} x_k < D$  a  $\sum_{i=1}^k x_k \geq D$ , kde  $D$  představuje dobu, po kterou probíhá simulace. Poslední změna prvku tedy nastane až po čase  $D$  a díky tomu lze určit chování jednotlivých prvků po celý interval  $[0, D]$ .

Dále si do každé proměnné prvek uložíme délky intervalů  $[0, x_1]$ ,  $[0, x_1 + x_2], \dots, [0, \sum_{i=1}^k x_k]$ , abychom věděli, v jakém čase od začátku simulace nastala změna prvku.

Pokud máme všechny prvky vygenerované, musíme si do proměnné index uložit časy všech změn a seznam prvků, které po jednotlivých změnách fungují a které jsou porouchané. Nejprve projdeme všechny prvky a najdeme ten, u kterého nastala změna jako první. Čas této změny si uložíme společně s informací, že změna nastala u daného prvku. Pokud předpokládáme, že při spuštění simulace byly všechny prvky funkční, tato první změna implikuje poruchu daného prvku.

Celý seznam jednotlivých prvků následně projdeme od začátku do konce a podle času výskytu poruch je budeme vzestupně řadit za prvek, u kterého nastala porucha jako první.

Další postup je již jednoduchý. V proměnné index jsou chronologicky uloženy všechny časy změn s informací o stavu každého prvku. Stačí tedy stanovit požadavky<sup>13</sup>, za kterých systém funguje a vypsát časové intervaly, ve kterých byl systém porouchaný.

### 5.2.3 Výstup programu

Program nejprve vypíše ke každému prvku časy, kdy u něj nastala změna. Poté vypíše chronologicky časy změn a číslo 1 u prvků, které po dané změně fungují a číslo 0 u prvků, které po dané změně nefungují.

<sup>13</sup>Požadavky pro vybrané systémy jsou popsány v kapitole 4.1.

Dále pro každý systém (sériový, paralelní, cyklus a hvězda) program vypíše, po jakých změnách celý systém fungoval (1) a po kterých nikoliv (0) a časové intervaly, během kterých byl systém porouchaný.

#### 5.2.4 Vyhodnocení

Simulace jednotlivých systémů dle očekávání ukazuje, že nejméně spolehlivý systém je sériový. To je dáno tím, že při poruše jediného prvku přestane fungovat celý systém. Nejspolehlivější je naopak systém paralelní, ve kterém během simulace s výše popsanými parametry většinou nedojde k žádné poruše. Výsledek opět odpovídá požadavkům pro správné fungování tohoto systému - stačí, aby fungoval alespoň jeden prvek.

Pokud jde o zbylé dva systémy, hvězda se ukázala spolehlivější, než cyklus. Měli bychom znovu připomenout, že spolehlivost hvězdy závisí nejvíce na jejím centrálním prvku.

Tato simulace sloužila zejména k vytvoření algoritmu a základních systémů, které se používají v simulaci sítě MFF UK, Karlín. Proto se dále zaměříme na program `simulace.pas`.

### 5.3 Simulace sítě budovy MFF UK, Karlín

Pro simulaci sítě MFF UK, Karlín je vytvořen program `simulace.pas`. Ten pracuje analogicky jako program `systemy.pas`. Odlišnosti můžeme najít v celkovém počtu prvků a jejich intenzitách poruch - různé prvky mají různou intenzitu.

Jelikož program `simulace.pas` zkoumá, zda fungují jednotlivé podsystémy (čtyři patra - telefony a ostatní koncová zařízení, učebna K11, počítačová laboratoř a knihovna), používá proměnnou poruchy jinak, než program `systemy.pas`. V této proměnné jsou uloženy informace o tom, které podsystémy po změnách jednotlivých prvků fungují.

### 5.4 Výstup

Výstupem programu jsou časové intervaly, během kterých byl jeden, či více podsystémů porouchaných. Na závěr je uveden celkový počet poruch, které nastaly během jedné simulace.

### 5.5 Vyhodnocení

V této kapitole se podrobněji zaměříme na výstup programu `simulace.pas`. Program jsme spustili sto krát, abychom zjistili průměrný výskyt poruch. Za sledované období  $10^7$  hodin nastalo během jedné simulace průměrně 421,11 poruch. Rozdělení těchto poruch ukazuje následující tabulka.

Nejčastěji dochází k poruše učebny K11, počítačové laboratoře a knihovny. Tento výsledek lze interpretovat následujícím způsobem: Všechny tři místnosti jsou reprezentovány systémem hvězda. Pokud tedy dojde k poruše centrálního prvku, který má střední dobu do poruchy pouze  $10^5$  hodin, celá místnost přestane fungovat.

Podívejme se dále na podsystémy, které jsou reprezentovány cyklem - jednotlivá patra a telefony v patrech. Zde si můžeme všimnout, že síť telefonů je

typ poruchy	průměrný počet poruch	směrodatná odchylka
1. patro	18,46	4,68
2. patro	18,15	4,34
3. patro	19,5	4,24
4. patro	18,92	4,36
telefony v 1. patře	10,25	3,05
telefony v 2. patře	10,48	3,07
telefony ve 3. patře	11,23	3,52
telefony ve 4. patře	11,06	3,73
počítačová laboratoř	101,08	10,89
učebna K11	102,68	9,63
knihovna	99,3	9,73

Tabulka 3: Průměrné počty poruch za simulované období  $10^7$  hodin a odpovídající směrodatné odchylky

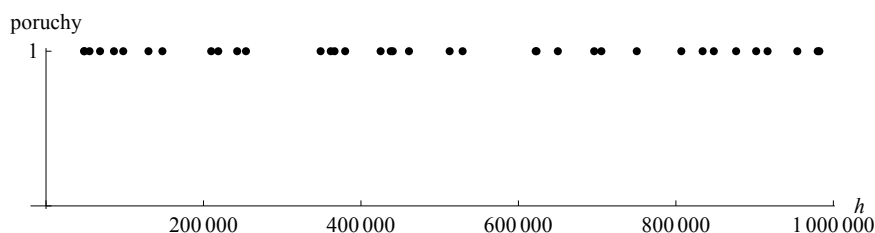
spolehlivější, než síť ostatních koncových zařízení. Důvodem jsou rozdílné hodnoty intenzit poruch u telefonů ( $10^6$  hodin) a u ostatních koncových zařízení ( $2 \cdot 10^5$  hodin).

Pokud nedojde k poruše prvního prvku na hlavní páteři, do kterého je přiváděn signál (a tedy i k poruše celé budovy MFF UK, Karlín), málokdy se setkáme se situací, že by bylo poroucháno více než jedno patro. Umístění hlavní páteře s velmi spolehlivými prvky a vedlejší páteře jako zálohy má podstatný vliv na spolehlivost celé budovy.

Pro podrobnější analýzu sítě jsme také vypočetli směrodatné odchylky počtů poruch jednotlivých podsystémů. Směrodatná odchylka celkového počtu poruch, které nastanou během jedné simulace, je 21,88. Hodnoty odchylek jednotlivých podsystémů jsou uvedeny v tabulce číslo 3.

Směrodatné odchylky jednotlivých poruch, i směrodatná odchylka celkového počtu poruch jsou velmi nízké hodnoty. Není třeba obávat se náhlého a vysokého výskytu počtu poruch. Největší směrodatné odchylky jsme zaznamenali u podsystémů typu hvězda, které jsou nejvíce poruchové. Naopak malé směrodatné odchylky mají podsystémy typu cyklus.

Na závěr jsme ještě jednou spustili simulaci sítě MFF UK, Karlín a zaznamenávali jsme časy výskytů jednotlivých poruch, které nastaly během prvních  $10^6$  hodin. Časy poruch jsou uvedeny na obrázku číslo 8.

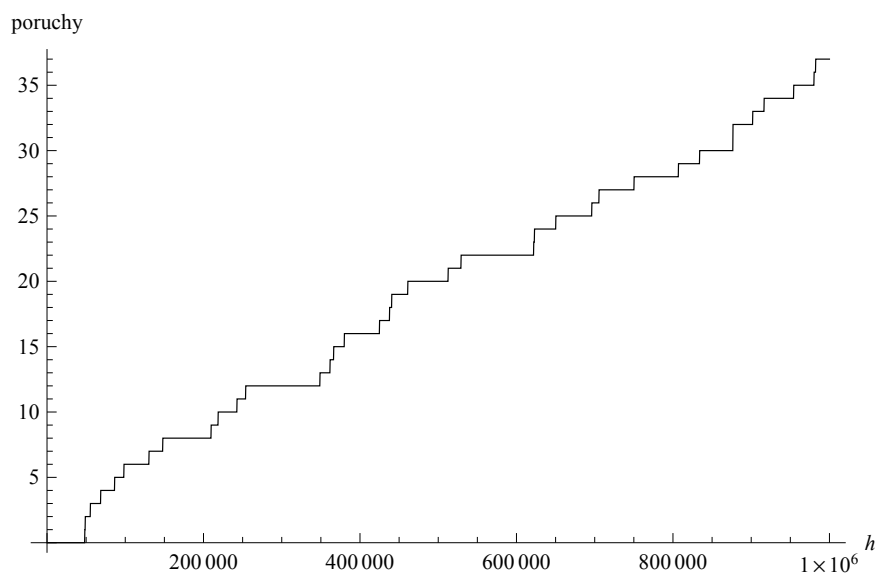


Obrázek 8: Výskyty poruch

Můžeme si všimnout, že za prvních  $10^6$  hodin nenastala situace, při které

by se objevilo více než jedna porucha. Obecně můžeme o simulaci říci, že takové situace nastávají zřídka. Výjimkou jsou časové intervaly, během kterých dojde k poruše prvního prvku na hlavní páteři. V té chvíli je přerušeno přívod signálu do celé budovy, a proto přestanou fungovat všechny podsystémy. Nicméně ani k takovým poruchám nedochází často, neboť střední doba do poruchy prvního prvku na hlavní páteři je  $3 \cdot 10^6$  hodin.

K časům výskytů jednotlivých poruch jsme navíc vytvořili čítací proces, který je na obrázku číslo 9.



Obrázek 9: Čítací proces k poruchám z obrázku 8

Simulace nám ukázala, že síť budovy MFF UK, Karlín je velmi spolehlivá. Průměrný počet poruch není vysoký, stejně jako jejich směrodatná odchylka. Významnější problém představují pouze tři podsystémy - učebna K11, počítačová laboratoř a knihovna. Jejich centrální prvky jsou méně spolehlivé a díky tomu u nich dochází k častějším poruchám. Zde by se mělo vyřešit zálohování právě centrálních prvků.

## 6 Závěr

Teorie spolehlivosti se používá zejména k prognóze a optimalizaci bezporuchového provozu nejrůznějších systémů, například žárovek, běžných domácích spotřebičů, automobilů, stavebních strojů, atd. Velmi často požadujeme vysokou spolehlivost výrobků, ale můžeme se setkat i s výrobky, u kterých je nastavena spolehlivost jen po určitou dobu.

V této práci byly popsány základní pojmy a metody, používané v teorii spolehlivosti. Byly vysvětleny pojmy, jako jsou porucha, doba do poruchy, funkce spolehlivosti, střední doba do poruchy, intenzita poruch a vanová křivka spolehlivosti. Také jsme čtenáře seznámili s exponenciálním, Weibullovým a gama rozdělením a s jejich použitím ve spolehlivosti systémů. Další část práce se zabývá analýzou základních systémů, se kterými se často setkáváme. K tomuto účelu byla použita metoda Booleových algeber a Markovovy řetězce.

Poslední část práce byla zaměřena na simulační metody. Byly vytvořeny dva programy - `systemy.pas` a `simulace.pas`. Program `systemy.pas` simuluje spolehlivost základních systémů, popsaných v kapitole 4.1. Důležitější program je ovšem `simulace.pas`. Ten modeluje spolehlivost budovy MFF UK, Karlín. Oba programy jsou zde popsány, u programu `simulace.pas` jsme se podrobněji zaměřili na jeho výstup. Vyvodili jsme závěr, že síť budovy MFF UK, Karlín můžeme považovat za spolehlivou.

## 7 Apendix

**Definice 7.1.** Necht  $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  je homogenní Markovův řetězec s diskrétním časem a množinou stavů  $S$ . Řekneme, že stav  $j$  je dosažitelný ze stavu  $i$ , jestliže existuje  $n \in \mathbb{N}_0$  tak, že  $p_{ij}^n > 0$ , kde  $p_{ij}^{(n)} = P[X_n = j \mid X_0 = i]$ . ■

**Definice 7.2.** Neprázdná množina stavů  $C$  se nazývá uzavřená, jestliže žádný stav vně  $C$  není dosažitelný z žádného stavu uvnitř  $C$ . Uzavřená množina stavů  $C$  se nazývá nerozložitelná, jestliže neobsahuje žádnou uzavřenou vlastní podmnožinu. ■

**Definice 7.3.** Markovův řetězec se nazývá nerozložitelný, jestliže každý jeho stav je dosažitelný z každého jiného stavu, t.j. neexistuje v něm jiná uzavřená množina než množina všech stavů. V opačném případě je řetězec rozložitelný. ■

Uvažujme posloupnost časových okamžiků  $J_1, J_2, \dots$ , v nichž dochází k přechodům mezi stavy řetězce  $\{X_t, t \geq 0\}$ , a definujme posloupnost

$$Y_0 = X_0$$

$$Y_n = X_{J_n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (63)$$

Je-li  $J_n = \infty$ , definujeme  $Y_\infty = Y_{J_{n-1}}$ . Vzhledem k tomu, že  $J_n$  jsou Markovské časy, jsou  $Y_n$  náhodné veličiny (plyne z věty 3.7., Prášková, Lachout, Základy náhodných procesů, str. 79). Dále lze ukázat, že  $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  je homogenní Markovův řetězec s diskrétním časem a množinou stavů  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Řetězec  $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  se nazývá vnořený diskretní řetězec procesu  $\{X_t, t \geq 0\}$ .

**Definice 7.4.** Necht  $\{X_t, t \geq 0\}$  je Markovův řetězec se spojitým časem, množinou stavů  $S$  a maticí pravděpodobností přechodu  $\mathbf{P}(t), t > 0$ . Vektor  $\eta = \{\eta_i \geq 0, i \in S\}$  takový, že

$$\eta^T \mathbf{P}(t) = \eta^T, \quad t \in T \quad (64)$$

se nazývá invariantní míra procesu  $\{X_t, t \geq 0\}$  na  $S$  vzhledem k  $\{\mathbf{P}(t), t > 0\}$ . Pravděpodobnostní rozdělení  $\pi$  na  $S$ , které splňuje (43), se nazývá *stacionární rozdělení* daného řetězce. ■

**Definice 7.5.** Pravděpodobnostní rozdělení  $\mathbf{a} = \{a_i, i \in S\}$  na  $S$  se nazývá *limitní rozdělení*, jestliže pro každé  $i, j \in S$  platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = a_j. \quad (65)$$

**Věta 7.1.** Pokud existuje limitní rozdělení Markovova řetězce, je to stacionární rozdělení. ■

*Důkaz.* Prášková, Lachout, Základy náhodných procesů, str. 90.

*Poznámka 3.4.* Je-li  $S$  konečná a vnořený řetězec nerozložitelný, je  $\sum_{k \in S} \eta_k$  vždy konečná, stacionární rozdělení  $\pi$  v řetězci  $\{X_t, t \geq 0\}$  existuje a lze ho určit jako řešení rovnice

$$\pi^T \mathbf{Q} = \mathbf{0}^T, \tag{66}$$

které splňuje podmínky  $\pi_j > 0$  pro všechna  $j \in S$  a  $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$ .

## 8 Literatura

Barlow R. E., Proschan F. (1965): *Mathematical theory of reliability*. John Wiley and Sons, New York. ISBN 978-0898713695.

Blischke W. R., Murthy D. N. P. (2000): *Reliability: Modeling, Prediction and Optimization*. J. Wiley, New York. ISBN 0-471-18450-0.

Dupač V., Dupačová J. (1980): *Markovovy procesy II*. Univerzita Karlova, Praha. ISBN 60-63-80.

Hurt J. (1984): *Teorie spolehlivosti*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha. ISBN 17-162-84.

International Electrotechnical Commission (2008): *International Standard*. IEC Central office, Geneva. ISBN 2-8318-9765-3.

Kemeny J. G., Snell J.L. (1976): *Finite Markoc Chains*. Springer-Verlag, New York. ISBN 0-387-90192-2.

Kulich M. (2013): *Přehledový větník*. Pracovní text k přednášce Statistika pro finanční matematiky, MFF UK.

Prášková Z., Lachout P. (2001): *Základy náhodných procesů*. Karolinum, Praha. ISBN 80-7184-688-0.

Raussand M., Hoyland A. (1994): *System Reliability Theory: Models and Statistical Methods*. Wiley, John and Sons, New York. ISBN 13: 9780471593973

Schneeweiss W. (1977): *Teória spoľahlivosti*. ALFA, Bratislava. ISBN 63-177-81.

Zio E. (2007): *An introduction to the basics of reliability and risk analysis*. World Scientific Publishing Company, Singapore. ISBN 10 981-270-639-3.

## Seznam obrázků

1	Vanová křivka spolehlivosti . . . . .	8
2	Sériový systém . . . . .	12
3	Paralelní systém . . . . .	13
4	Cyklus . . . . .	15
5	Hvězda . . . . .	16
6	Přechody mezi stavy . . . . .	19
7	Přechod mezi stavy, paralelní systém se dvěma prvky . . . . .	21
8	Výskyty poruch . . . . .	28
9	Čítací proces k poruchám z obrázku 8 . . . . .	29

## Seznam tabulek

1	Spolehlivost $n$ prvků při požadované spolehlivosti systému . . . .	3
2	Pravděpodobnosti, že se žárovka neporouchá do času $x$ . . . . .	9
3	Průměrné počty poruch za simulované období $10^7$ hodin a odpovídající směrodatné odchylky . . . . .	28