Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Petr Pelech

Neceločíselné derivace, teorie a aplikace

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Václav Kučera, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2014

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu doktoru Václavu Kučerovi za čas, který mi věnoval. Zvláště pak za pečlivé opravy mé vznikající práce a trpělivost při blížícím se termínu odevzdání. Dále bych chtěl poděkovat docentu Bohumíru Opicovi a docentu Daliboru Pražákovi za rady, které mi poskytli. V neposlední řadě bych chtěl vyjádřit svůj dík mé ženě Kateřině, bez jejíž podpory by tato práce nevznikla.

Věnováno mé ženě Kateřině.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Neceločíselné derivace, teorie a aplikace

Autor: Petr Pelech

Katedra: Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Václav Kučera, Ph.D., Katedra numerické matematiky

Abstrakt: Práce je rešerší na dané téma. Po krátkém historickém úvodu jsou uvedeny potřebné části klasické teorie derivace a integrace. Vlastní část práce se věnuje Riemann-Liouvilleovu (R-L) integrálu a derivaci reálných funkcí reálné proměnné definovaných na kompaktním intervalu. Jsou dokázány některé základní vlastnosti jak pro funkce integrovatelné, tak spojité. Kromě R-L definice je ještě uvedena Caputova a Grünwald-Letnikovova a jsou popsány vztahy mezi těmito třemi definicemi. Dále jsou spočteny R-L derivace některých elementárních funkcí a bázových funkcí, které se používají v metodě konečných prvků. Poslední část práce je věnována numerické aproximaci R-L derivace. Jsou popsány a implementovány dva algoritmy, které následně testujeme na několika funkcích.

Klíčová slova: integrály a derivace neceločíselného řádu na kompaktu, zlomkový kalkulus, Riemann-Liouvilleův integrál a derivace, Caputova derivace, Grünwald-Letnikovova derivace, numerická aproximace Riemann-Liouvilleovy derivace.

Title: Fractional derivatives, theory and applications

Author: Petr Pelech

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: RNDr. Václav Kučera, Ph.D., Department of Numerical Mathematics

Abstract: This work represents an overview of the given topic. After a short historical introduction, we present all necessary results from the classical theory of differentiation and integration. The core of the thesis is concerned with the Riemann-Liouville (R-L) integral and derivative of real functions defined on compact intervals. We prove basic properties for integrable as well as continuous functions. Along with the R-L definition, we also give the Caputo and Grünwald-Letnikov definitions and their mutual relations. Furthermore, we calculate the R-L derivatives of some elementary functions as well as basis functions from the finite element method. The last part is concerned with the numerical approximation of R-L derivatives. We describe and implement two algorithms, which we test on several functions.

Keywords: fractional integrals and derivatives on compact intervals, integration and differentiation of arbitrary order, Riemann-Liouville integral and derivative, Caputo derivative, Grünwald-Letnikov derivative, numerical approximation of RL derivative

Obsah

Úvod

Tato práce se věnuje teorii derivace a integrace neceločíselného řádu, někdy souhrnně označované jako zlomkový kalkulus. Ačkoli vznik tohoto oboru byl motivován čistě matematickými pohnutkami, řada prací se věnuje i praktickým aplikacím. Použití ve fyzice obecně se věnuje např. [9] a [16, str. 17 nn]. Problematice difúze a jí podobných procesů jsou věnovány práce [1], [2], [3], [4], [8], [15], [16] a [20]. Využitím v teorii viskoelasticity se zabývá kniha [18]. Rozsáhlý výčet prací pojednávajících o rozličných aplikacích lze nalézt v [6]. Existují samozřejmě i čistě matematické aplikace. Některé z nich jsou uvedeny v [20] a také v [7], kde lze navíc nalézt množství odkazů na další matematicky zaměřené práce.

Cílem práce je shrnutí základů teorie neceločíselných derivací, některých její aplikací a popis algoritmů používaných k numerické aproximaci.

V Kapitole 1 uvádíme velice stručnou historii této teorie. Rozsáhlosti oboru a jeho vývoje je značná, ale není cílem této práce podat jeho vyčerpávající přehled. Při rozhodování, které osobnosti a jejich přínosy do našeho krátkého výčtu zařadit, pro nás byly důležité dvě věci. Zaprvé jednoduchost matematické teorie potřebné k porozumění danému přístupu k problematice a zadruhé aby tento přístup měl nějaký užší vztah k té části teorie neceločíselných derivací, kterou se v naší práci zabýváme.

Kapitoly 2 a 3 jsou věnovány teorii klasické derivace a integrace a některým speciálním funkcím. Ne všechny věty zde dokazujeme, ale u hlubších vět uvádíme odkaz na literaturu, kde lze tyto věty často i s důkazem nalézt. Na poznatky zde uvedené pak navážeme v Kapitole 4, která se věnuje neceločíselným derivacím. Podrobněji se věnujeme Riemann-Liouvilleově derivaci a integrálu a to zejména pro jejich matematickou jednoduchost. Dále uvádíme definici Caputovu a Grünwald-Letnikovovu a některé jejich základní vlastnosti včetně toho, za jakých podmínek se shodují s definicí Riemann-Liouvilleovou.

V Kapitole 5 spočítáme Riemann-Liouvilleovy integrály a derivace některých základních funkcích. Kromě toho počítáme neceločíselné derivace bázových funkcí používaných v metodě konečných prvků. V budoucnu bychom se této metodě chtěli hlouběji věnovat a použít ji k řešení i neceločíselných diferenciálních rovnic.

Poslední Kapitola 6 je věnována numerické matematice. Konkrétně popíšeme dva algoritmy pro aproximaci Riemann-Liouvilleovy derivace. Jeden je založen na Grünwald-Letnikovově definici a druhý na Riemann-Liouvilleově. Následně oba algoritmy otestujeme na několika funkcích, pro které se obě definice shodují, a počítáme jejich efektivitu.

Kapitola 1

Historie neceločíselné integrace a derivace

Nápad zobecnit operaci derivace $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n$ i pro neceločíselné n je stejně starý jako kalkulus sám. Už G. W. Leibniz, jeden ze zakladatelů diferenciální a integrálního počtu, se zabýval myšlenkou, jak tuto operaci interpretovat pro hodnotu $n = \frac{1}{2}$. Jím navrhované řešení však vedlo k paradoxu, [16]. Kromě mnoha jiných matematiků přispěl k pokroku L. Euler, který použil Gama funkci k definici neceločíselné derivace pro funkce tvaru x^β, konkrétně

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}, \tag{1.1}$$

kde α i β jsou reálná čísla. Nabízí se tak možnost definovat neceločíselné derivace pro všechny funkce vyjádřitelné mocninou řadou.

Jiný způsob, který použil J. Liouville, je vyjít ze vztahu pro derivaci exponenciální funkce a definovat

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^\alpha f(x) = \sum_k c_k \lambda_k^\alpha e^{\lambda_k x}, \tag{1.2}$$

pro všechny funkce vyjádřitelné řadou exponenciál

$$f(x) \sim \sum_k c_k e^{\lambda_k x}.$$

Na základě této definice Liouville odvodil vztah pro funkce tvaru $x^{-\beta}$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^\alpha x^{-\beta} = \frac{(-1)^\alpha\, \Gamma(\beta+\alpha)}{\Gamma(\beta)\, x^{\beta+\alpha}}. \tag{1.3}$$

Avšak tyto přístupy se vzájemně liší. Např. pro funkci e^x a $\alpha = -1$ je podle Liouvilleovy definice

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{-1} e^x = e^x = \int\limits_{-\infty}^{x} e^t \mathrm{d}t,$$

ale podle Eulerovy definice je

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1 = \int\limits_0^x e^t \mathrm{d}t.$$

Pomocí integrálu lze pro $\alpha = -1$ zapsat i vzorec (1.1)

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{-1} x^{\beta} = \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1} = \int\limits_{0}^{x} y^{\beta}\mathrm{d}y$$

a vzorec (1.3)

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{-1} x^{-\beta} = \frac{x^{1-\beta}}{1-\beta} = -\int\limits_{x}^{+\infty} y^{-\beta}\mathrm{d}y = \int\limits_{-\infty}^{x} y^{-\beta}\mathrm{d}y.$$

Je tedy vidět, že rozdílnost definic souvisí s dolní mezí integrace. Tak tomu je i pro reálná α, jak ukážeme v Kapitole 5.

Liouville dále definoval derivaci řádu α jako limitu diferenčního podílu $\delta_h^{\alpha} f/h^{\alpha}$, kde δ_h^{α} je diference neceločíselného řádu. Nijak víc se však této myšlence nevěnoval. Důkladně byla tato možnost prozkoumána až Grünwaldem a Letnikovem. Důležité je, že tato definice je použitelná pro mnohem obecnější třídu funkcí.

Posledním matematikem, jehož práci v tomto úvodu zmíníme, je Riemann, který pro obecnou funkci f a $\alpha < 0$ definoval

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_{k}^{x} \frac{f(t)}{(x-a)^{\alpha+1}}\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{+\infty} K_n \frac{x^{-\alpha-n}}{\Gamma(-\alpha-n+1)}. \tag{1.4}$$

Stručné vysvětlení jeho definice lze nalézt v [16]. Až na tzv. komplementární funkci reprezentovanou nekonečnou sumou se definice (1.4) schoduje s Riemann-Liouvilleovou definicí z Kapitoly 4. Jak se k tomuto současnému tvaru dospělo je popsáno v [23].

Podrobnější popis, množství jiných definic i nedávnou historii lze dohledat např. v [7], [16], [20] a [23].

Kapitola 2

Potřebné základy teorie derivace a integrace

V této kapitole shrnujeme dobře známé výsledky z teorie derivace a Lebesgueova integrálu, které budeme potřebovat v Kapitole 4 o neceločíselných derivacích. Pro náš záměr nejdůležitější jsou vlastnosti absolutně spojitých funkcí a Cauchyův vzorec pro výpočet n-násobného integrálu. V obou těchto případech budeme uvažovat omezené intervaly.

2.1 Fubiniho věta

Fubiniho větu lze vyslovit v různých úrovních abstrakce, pro naše potřeby však bude stačit následující „početní" formulace.

Věta 2.1 (Fubiniho věta)**.** *Nechť* $\Omega_1 = [a, b]$, $\Omega_2 = [c, d]$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, $-\infty \le c < d \le +\infty$ *a nechť* $f(x, y)$ *je měřitelná funkce definovaná na* $\Omega_1 \times \Omega_2$. *Pokud alespoň jeden z integrálů*

$$\int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Omega_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \quad \iint\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \int\limits_{\Omega_2}\int\limits_{\Omega_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{2.1}$$

je absolutně konvergentní, pak si jsou navzájem rovny.

Důkaz. Lze najít v učebnicích matematické analýzy, např. [14] nebo [22]. Zde uvedené znění je převzato z [7]. □

Poznámka. Absolutní konvergencí dvojnásobného integrálu rozumíme

$$\int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Omega_2} |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Pouhá konvergence dvojnásobného integrálu k záměně pořadí integrace nestačí (viz [22, str. 186]).

Jednoduchým důsledkem Fubiniho věty je tzv. Dirichletův vzorec platný pro integraci přes trojúhelník.

Důsledek 2.2 (Dirichletův vzorec). *Buď $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ a nechť $g(x,y)$ je měřitelná funkce definovaná na $[a,b]^2$. Potom*

$$\int_a^b \int_a^x g(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_a^b \int_y^b g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{2.2}$$

pokud alespoň jeden z obou integrálů je absolutně konvergentní.

Důkaz. Definujme pomocnou funkci $f(x,y) = \chi(x,y)g(x,y)$, kde

$$\chi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } a \leq y \leq x \leq b, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a označme $\Omega_1 = \Omega_2 = [a,b]$. Funkce χ je zřejmě měřitelná a proto můžeme dvojnásobné integrály z (2.2) psát pomocí funkce f jako

$$\int_a^b \int_a^x g(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \tag{2.3}$$

$$\int_a^b \int_y^b g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{2.4}$$

Protože také platí

$$\int_a^b \int_a^x |g(x,y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \tag{2.5}$$

$$\int_a^b \int_y^b |g(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{2.6}$$

je díky předpokladům věty alespoň jeden dvojnásobný integrál z funkce f absolutně konvergentní. Použijeme-li tedy na funkci f Větu 2.1, je vzhledem k (2.3) a (2.4) tvrzení dokázáno. ☐

2.2 Konvoluce funkcí

Pojem konvoluce není v naší práci nijak stěžejní, vystačíme si pouze s definicí a základní podmínkou pro existenci.

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Věta 2.3. *Jsou-li $f,g \in L^1(\mathbb{R})$, potom pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y < +\infty.$$

Pro tato x definujme

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Pak je $(f * g) \in L^1(\mathbb{R})$ a

$$\| f * g \|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \| f \|_{L^1(\mathbb{R})} \| g \|_{L^1(\mathbb{R})} .$$

Důkaz. Lze najít v [22, str. 191]. □

2.3 Absolutně spojité funkce

V Kapitole 4 při definování derivace neceločíselného řádu, pro nás bude východiskem vztah klasické derivace a integrálu. Uvádíme zde proto tzv. základní větu kalkulu pro spojité a integrovatelné funkce a nejdůležitější vlastnosti absolutně spojitých funkcí.

Věta 2.4. *Pro funkci $\varphi \in C[a,b]$ je*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(x), \quad \textit{pro všechna } x \in [a,b]. \tag{2.7}$$

Důkaz. Viz [13, str. 49, 50]. □

Věta 2.5. *Pro funkci $\varphi \in L^1[a,b]$ je*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(x), \quad \textit{pro s.v. } x \in [a,b]. \tag{2.8}$$

Důkaz. Viz [14, str. 190]. □

Derivace je tedy operace inverzní k integraci. Avšak rovnost $\int_a^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(x)$ vždy neplatí, například je-li $\varphi(a) \neq 0$. Obecně se $\int_a^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ liší od $\varphi(x)$ o libovolnou funkci $\psi(x)$ takovou, že $\psi'(x) \equiv 0$. Uvažujeme-li derivaci ve všech bodech, je nutně ψ konstantní (např. [11]). Ale zeslabíme-li rovnost pouze na s.v. body, situace se změní. Existují spojité nekonstantní funkce(viz [12]), které mají s.v. derivaci rovnou nule. Absolutně spojité funkce jsou právě ty, pro které platí $\int_a^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(x) - \varphi(a)$.

Definice 2.1 (Funkce absolutně spojitá)**.** *Funkci $f\colon[a,b] \mapsto \mathbb{R}$ nazveme* absolutně spojitou na intervalu $[a,b]$*, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý konečný soubor navzájem disjunktních intervalů $[a_k, b_k] \subset [a,b]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, splňující $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$, platí $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.*

Prostor všech těchto funkcí značíme $AC[a,b]$.

Poznámka. Je ihned vidět, že absolutně spojité funkce jsou spojité.

Věta 2.6 (Charakterizace prostoru $AC[a,b]$)**.** *Funkce f patří do $AC[a,b]$ právě tehdy, když existuje $\varphi \in L^1[a,b]$ a konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že*

$$f(x) = \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t + c.$$

Důkaz. Obě implikace jsou obsahem vět 84, 91, 92, 93 a 94 obsažených v [14]. □

Poznámka. Zdůrazněme, že podle Věty 2.5 je $\varphi = f'$ s.v. v $[a,b]$ a že zřejmě $c = f(a)$.

Následující definice a věta jsou přímým zobecněním Definice 2.1 a Věty 2.6 pro derivace vyšších řádů.

Definice 2.2. *Označme $AC^n[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, prostor všech funkcí $f{:}[a,b] \mapsto \mathbb{R}$, které mají spojité derivace až do řádu $n-1$ a splňují $f^{(n-1)} \in AC[a,b]$.*

Poznámka. Je-li $\varphi \in AC^n[a,b]$, je též $\varphi \in C[a,b]$. Pro $n = 1$ jsou definice prostorů $AC^1[a,b]$ a $AC[a,b]$ naprosto stejné a absolutně spojitá funkce je též spojitá. Pro $n \geq 2$ má funkce ψ v každém bodě intervalu $[a,b]$ vlastní derivaci, takže je spojitá, [11, str. 213].

Věta 2.7 (Charakterizace prostoru $AC^n[a,b]$)**.** *Funkce f patří do $AC^n[a,b]$ právě tehdy, když existuje $\varphi \in L^1[a,b]$ a konstanty $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n-1$, takové, že*

$$f(x) = \int_a^x \int_a^{x_1} \ldots \int_a^{x_{n-1}} \varphi(x_n)\,\mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x_{n-1}\ldots\mathrm{d}x_1 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k\,(x-a)^k\,. \tag{2.9}$$

Platí, že $\varphi = f^{(n)}$ s.v. v $[a,b]$ a $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, $k = 1, \ldots, n-1$.

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle $n \in \mathbb{N}$. Platnost tvrzení pro $n = 1$ plyne z Věty 2.6 a poznámky pod ní. Nechť tedy tvrzení platí pro $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ a dokazujme případ $k = n$.

Nejprve předpokládejme, že $f \in AC^n[a,b]$. Pak zřejmě $f' \in AC^{n-1}[a,b]$, takže podle indukčního předpokladu je $f^{(n)} = (f')^{(n-1)} \in L^1[a,b]$ a lze psát

$$f'(x) = \int_a^x \int_a^{x_1} \ldots \int_a^{x_{n-2}} (f')^{(n-1)}(x_{n-1})\,\mathrm{d}x_{n-1}\,\mathrm{d}x_{n-2}\ldots\mathrm{d}x_1 + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k\,.$$

Z definice prostoru $AC^n[a,b]$ taky víme, že funkce f má spojitou první derivaci. Takže funkce f je lipschitzovská a tedy i absolutně spojitá. To lze ověřit snadným výpočtem přímo z definice absolutní spojitosti. Platí proto, podle Věty 2.6 a následující poznámky,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int\limits_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t + f(a) \\
&= \int\limits_a^x \int\limits_a^{x_1} \dots \int\limits_a^{x_{n-1}} (f')^{(n-1)}(x_n)\,\mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x_{n-1}\dots\mathrm{d}x_1 \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(f')^{(k)}(a)}{(k+1)!}\,(x-a)^{(k+1)} + f(a) \\
&= \int\limits_a^x \int\limits_a^{x_1} \dots \int\limits_a^{x_{n-1}} f^{(n)}(x_n)\,\mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x_{n-1}\dots\mathrm{d}x_1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k\,,
\end{aligned}
$$

což jsme měli ukázat.

Na druhou stranu předpokládejme, že funkci f lze psát ve tvaru (2.9). Jednoduchými úpravami dostáváme

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int\limits_a^x \int\limits_a^{x_1} \dots \int\limits_a^{x_{n-1}} \varphi(x_n)\,\mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x_{n-1}\dots\mathrm{d}x_1 + \sum_{k=0}^{n-1} c_k\,(x-a)^k \\
&= \int\limits_a^x \int\limits_a^{x_1} \dots \int\limits_a^{x_{n-1}} \varphi(x_n)\,\mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x_{n-1}\dots\mathrm{d}x_1 + \int\limits_a^x \sum_{k=1}^{n-1} k c_k\,(x_1-a)^{k-1}\,\mathrm{d}x_1 + c_0 \\
&= \int\limits_a^x \psi(x_1)\,\mathrm{d}x_1 + c_0,
\end{aligned}
$$

kde

$$
\psi(x_1) = \int\limits_a^{x_1} \dots \int\limits_a^{x_{n-1}} \varphi(x_n)\,\mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x_{n-1}\dots\mathrm{d}x_2 + \sum_{k=1}^{n-1} k c_k\,(x_1-a)^{k-1}\,.
$$

Nebo-li vyjádřeno v jiných proměnných

$$
\psi(x) = \int\limits_a^x \int\limits_a^{x_1} \dots \int\limits_a^{x_{n-2}} \varphi(x_{n-1})\,\mathrm{d}x_{n-1}\,\mathrm{d}x_{n-2}\dots\mathrm{d}x_1 + \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)\,c_{k+1}\,(x-a)^k\,.
$$

Podle indukčního předpokladu je tak $\psi \in AC^{n-1}\,[a,b]$, z čehož plyne její spojitost a tudíž i integrovatelnost. Podle Věty 2.4 pak je $f' = \psi$ všude v $[a,b]$, takže podle definice je $f \in AC^n\,[a,b]$. $\square$

Pro snadnější práci s funkcemi z prostorů $AC\,[a,b]$ a $AC^n\,[a,b]$ uvádíme jejich základní vlastnosti.

Věta 2.8. *Nechť funkce f a g jsou absolutně spojité v intervalu $[a,b]$. Pak i funkce $|f|$, $f \pm g$, $f \cdot g$ jsou absolutně spojité v $[a,b]$ a je-li navíc funkce $\frac{1}{g}$ omezená v $[a,b]$, je i $\frac{1}{g}$ absolutně spojitá v $[a,b]$.*

Je-li funkce f absolutně spojitá na intervalech $[a,c]$ a $[c,b]$, pak je f absolutně spojitá na celém intervalu $[a,b]$.

Důkaz. Lze najít v [12, str. 199-200]. □

Věta 2.9. *Nechť funkce f, $g \in AC^n[a,b]$, Pak i $f \pm g$ patří do $AC^n[a,b]$. Je-li $f \in AC^n[a,c] \cap AC^n[c,b]$, pak $f \in AC^n[a,b]$.*

Důkaz. První část tvrzení plyne z Věty 2.6 o reprezentaci funkcí z prostoru $AC^n[a,b]$.

K důkazu druhé části je třeba podle definice ověřit, že funkce f má derivace až do řádu $n-1$ spojité na intervalu $[a,b]$ a že $f^{(n-1)} \in AC[a,b]$. Absolutní spojitost $(n-1)$-vé derivace plyne z Věty 2.6 a spojitost prvních $(n-1)$ derivací z obdobného tvrzení pro spojité funkce, viz [11]. □

2.4 Cauchyův vzorec pro výpočet n-násobného integrálu

Při definování integrálů neceločíselného řádu pro nás bude východiskem vzorec pro výpočet n-násobného integrálu.

Věta 2.10 (Výpočet n-násobného integrálu)**.** *Buď $-\infty < a < b < +\infty$, $\varphi \in L^1[a,b]$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak*

$$\int_a^x \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_{n-1}} \varphi(x_n)\,\mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x_{n-1}\dots\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2.10}$$

a

$$\int_x^b \int_{x_1}^b \dots \int_{x_{n-1}}^b \varphi(x_n)\,\mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x_{n-1}\dots\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_x^b (t-x)^{n-1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2.11}$$

pro všechna $x \in [a,b]$.

Důkaz. Dokážeme jen (2.10), druhá rovnost se dokazuje analogicky. Budeme postupovat indukcí podle n.

Pro $n = 1$ rovnost (2.10) zřejmě platí.

Buď $n \in \mathbb{N}$ libovolné a předpokládejme, že (2.10) platí pro všechna $k \in \{1,\dots,n-1\}$. Zvolme nějaké pevné $x \in [a,b]$ a pravou stranu integrujme per partes

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t \\
&\qquad = \left[(x-t)^{n-1}\int_a^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]_{t=a}^{t=x} + \frac{n-1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-2}\int_a^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \\
&\qquad = \frac{1}{(n-2)!}\int_a^x (x-t)^{n-2}\int_a^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Protože platí odhady

$$\int_a^b \left| \int_a^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right| \mathrm{d}t \le \int_a^b \int_a^t |\varphi(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t$$
$$\le \int_a^b \int_a^b |\varphi(\tau)|\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \le (b-a) \int_a^b |\varphi(\tau)|\,\mathrm{d}\tau < +\infty,$$

je funkce $f(t) = \int_a^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ prvkem $L^1[a,b]$. Můžeme tedy použitím indukčního předpokladu přepsat poslední výraz v (2.12) jako

$$\frac{1}{(n-2)\,!} \int_a^x (x-t)^{n-2} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_{n-2}} f(x_{n-1})\,\mathrm{d}x_{n-1}\,\mathrm{d}x_{n-2} \dots \mathrm{d}x_1$$
$$= \int_a^x \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_{n-1}} \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}x_{n-1} \dots \mathrm{d}x_1.$$

Protože na pojmenování integračních proměnných nezáleží, je tímto tvrzení dokázáno. □

Kapitola 3

Integrální funkce

V průběhu budování teorie neceločíselných derivací nebo počítání konkrétních příkladů se budou vyskytovat některé integrály, které nejdou zapsat konečnou kombinací elementárních funkcí a základních operací. Kvůli větší přehlednosti zde pro ně zavádíme jména a značení a dokazujeme některé jejich vlastnosti.

3.1 Gama funkce

Asi nejdůležitější z těchto integrálů pro nás bude Gama funkce, protože je zobecněním faktoriálu pro reálná čísla (s výjimkou celých záporných čísel a nuly).

Pro kladná reálná čísla definujeme Gama funkci takto.

Definice 3.1. Gama funkce *je definovaná vztahem*

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

pro $s > 0$.

Při výpočtech využijeme i tzv. dolní neúplnou Gama funkci.

Definice 3.2. Dolní neúplná Gama funkce *je definovaná vztahem*

$$\gamma(s, x) = \int\limits_0^{x} x^{s-1} e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

pro $s > 0$.

Jak je popsáno např. v [14, str. 685], dá se Gama funkce definovat i pro s záporná, avšak různá od $-1, -2, \ldots$. Následující věta uvádí nejdůležitější vlastnost Gama funkce.

Věta 3.1. *Pro* $s \neq -1, -2, \ldots$ *je*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Důkaz. Viz [14, str. 286]. □

Dvě speciální hodnoty Gama funkce, které budeme potřebovat, jsou

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{3.1}$$

První z nich se snadno ověří přímým výpočtem, pro druhou se odkazujeme na [7, str. 16]. Z předchozí věty pak indukcí plyne věta následující.

Věta 3.2. *Pro $n \in \mathbb{N}$, $s > -n$ a $s \neq -1, -2, \ldots, -n$ platí*

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{s(s+1)\ldots(s+n-1)}, \quad \Gamma(n) = (n-1)\,!.$$

Celočíselné diference, viz Sekce 4.4, jsou definované pomocí kombinačních čísel. Při definování diferencí neceločíselného řádu proto využijeme rozšířené definice kombinačního čísla a hlavně jeho vyjádření pomocí Gama funkce.

Definice 3.3 (Kombinační číslo)**.** *Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$ definujeme binomický koeficient jako*

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{(\alpha)\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Dále definujeme

$$\binom{\alpha}{0} = 1. \tag{3.2}$$

Kombinační číslo lze zapsat pomocí Gama funkce.

Věta 3.3. *Pro $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ a $k \in \mathbb{N}_0$ platí*

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)\Gamma(k+1)} = \frac{(-1)^k\,\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}.$$

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle k. Pro $k = 0$ obě rovnosti platí. Nechť první rovnost platí pro $k-1$. Podle definice je

$$\binom{\alpha}{k} = \binom{\alpha}{k-1}\frac{\alpha-k+1}{k}.$$

Využitím indukčního předpokladu a Věty 3.2 dostáváme

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+2)\Gamma(k)}\frac{\alpha-k+1}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)\Gamma(k+1)},$$

takže první rovnost je dokázána.

Předpokládejme, že druhá rovnost platí pro $k-1$. Opět podle indukčního předpokladu a Věty 3.2 je

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{k} &= \binom{\alpha}{k-1}\frac{(-1)\,(k-1-\alpha)}{k} = \frac{(-1)^{k-1}\,\Gamma(k-1-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k)}\cdot\frac{(-1)\,(k-1-\alpha)}{k}\\ &= \frac{(-1)^k\,\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}.\end{aligned}$$

□

3.2 Beta funkce

Další integrální funkcí, kterou budeme potřebovat, je Beta funkce.

Definice 3.4. Beta funkce *je definovaná vztahem*

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$$

pro $p > 0$ *a* $q > 0$.

Často budeme využívat následující vztah mezi Beta a Gama funkcí.

Věta 3.4. *Pro* $p > 0$ *a* $q > 0$ *platí*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{3.3}$$

Důkaz. Lze najít např. v [14, str.261]. □

3.3 Böhmerovy a Fresnelovy integrály

Poslední z netriviálních funkcí jsou Böhmerovy a Fresnelovy integrály.

Definice 3.5. Böhmerovy integrály *jsou definovány následovně*

$$\mathrm{BS}(\alpha,x) = \int_x^{+\infty} t^{\alpha-1}\sin(t)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{BC}(\alpha,x) = \int_x^{+\infty} t^{\alpha-1}\cos(t)\,\mathrm{d}t, \quad \alpha < 1.$$

Označme

$$\mathrm{bs}(\alpha,x) = \int_0^{x} t^{\alpha-1}\sin(t)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{bc}(\alpha,x) = \int_0^{x} t^{\alpha-1}\cos(t)\,\mathrm{d}t, \quad \alpha < 1.$$

Definice 3.6. Fresnelovy integrály *jsou definovány následovně*

$$\mathrm{FS}(x) = \int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{FC}(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka. Použitím substituce $t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}u$ získáme jiný, také často používaný tvar Fresnelových integrálů

$$\int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}x} \sin(\frac{\pi}{2}u^2)\,\mathrm{d}u,$$

$$\int_0^x \cos(t^2)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{\frac{2}{\pi}}x} \cos(\frac{\pi}{2}u^2)\,\mathrm{d}u.$$

Budeme potřebovat znát hodnotu Böhmerových integrálů v nule.

Lemma 3.5. *Platí*

$$\mathrm{BS}(\alpha, 0) = \Gamma(\alpha) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), \quad \mathrm{BC}(\alpha, 0) = \Gamma(\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right). \tag{3.4}$$

Důkaz. Viz [19]. □

Kapitola 4

Neceločíselné integrály a derivace

Jak již bylo zmíněno v Kapitole 1, existuje více možností, jak zavést derivace neceločíselného řádu. V této kapitole se zabýváme pouze několika definicemi pro reálné funkce reálné proměnné, konkrétně funkcemi definovanými na omezeném uzavřeném intervalu. Jsou uvedeny základní vlastnosti *Riemann-Liouvilleovy*, *Caputovy* a *Grünwald-Letnikovovy* derivace a jsou uvedeny podmínky, za jakých se shodují. Některé další definice nebo zobecnění na funkce více proměnných lze nalézt např. v [7].

4.1 Riemann-Liouvilleův integrál

Je známo, že derivace a integrace jsou za určitých podmínek navzájem inverzní operace. Je-li například funkce $\varphi \in L^1[a,b]$, platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(x) \quad \text{pro s.v. } x \in [a,b]. \tag{4.1}$$

Z tohoto vztahu vyjdeme a zavedeme nejdříve integrál neceločíselného řádu jako zobecnění n-násobného integrálu. Neceločíselnou derivaci se pak pokusíme definovat tak, aby platila analogie (4.1) pro funkce φ z nějaké vhodné třídy funkcí.

Ve 4. kapitole jsme dokázali Větu 2.10, podle které lze n-násobný integrál funkce $\varphi(x) \in L^1[a,b]$ počítat jako obyčejný integrál s váhou. Nahradíme-li v (2.10) (resp. (2.11)) faktoriál gama funkcí podle (3.2), získáme vzorec platný i pro $n > 0$ reálná. Je proto přirozené, definovat integrál neceločíselného řádu následovně.

Definice 4.1 (Riemann-Liouvilleův neceločíselný integrál)**.** *Nechť $-\infty < a < b < +\infty$, $\alpha > 0$, a mějme funkci $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Integrál*

$$\left(I_{a+}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b] \tag{4.2}$$

a

$$\left(I_{b-}^{\alpha}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b], \tag{4.3}$$

nazýváme levý*, resp.* pravý Riemann-Liouvilleův neceločíselný integrál funkce φ řádu α.

Integrál (4.2) (resp. (4.3)) se označuje jako levý (resp. pravý), protože jeho hodnota je závislá na chování funkce φ pouze nalevo (resp. napravo) od bodu x. Můžeme však uvažovat libovolnou kombinaci obou těchto integrálů, která by pak zohledňovala chování funkce φ v celém intervalu $[a, b]$. Důležité příklady takové kombinace jsou integrály

$$\begin{aligned}
(I^\alpha\varphi)(x) &= \frac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)}\left(\left(I^\alpha_{a+}\varphi\right)(x) + \left(I^\alpha_{b-}\varphi\right)(x)\right), \quad \alpha \neq 1, 3, 5, \ldots, \\
(H^\alpha\varphi)(x) &= \frac{1}{2\sin(\alpha\pi/2)}\left(\left(I^\alpha_{a+}\varphi\right)(x) - \left(I^\alpha_{b-}\varphi\right)(x)\right), \quad \alpha \neq 2, 4, 6, \ldots,
\end{aligned}$$

které velmi úzce souvisí s *Rieszovým potenciálem.* Podrobnější informace lze nalézt v [7, § 12].

Mezi levým a pravým integrálem platí následující jednoduchý vztah.

Lemma 4.1. *Pro $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$ platí*

$$\left(I^\alpha_{a+}\varphi\right)(a+b-x) = \left(I^\alpha_{b-}\psi\right)(x) \tag{4.4}$$

a

$$\left(I^\alpha_{b-}\varphi\right)(a+b-x) = \left(I^\alpha_{a+}\psi\right)(x), \tag{4.5}$$

kde

$$\psi(t) = \varphi(a+b-t),$$

pokud alespoň jedna strana v každé rovnosti má smysl.

Důkaz. Provedeme důkaz pouze první z rovností, druhá by se dokázala obdobně. Po rozepsání pravé strany (4.4) a substituci $\tau = a + b - t$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\left(I^\alpha_{b-}\psi\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(a+b-t)}{(t-x)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^{a+b-x} \frac{\varphi(\tau)}{((a+b-x)-\tau)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}\tau = \left(I^\alpha_{a+}\varphi\right)(a+b-x),
\end{aligned}$$

což bylo dokázat. □

Poznámka. Tento vztah můžeme formálně zapsat pomocí operátoru „zrcadlení“ $(Q\varphi)(x) = \varphi(a+b-x)$ jako

$$QI^\alpha_{a+} = I^\alpha_{b-}Q, \quad QI^\alpha_{b-} = I^\alpha_{a+}Q, \quad I^\alpha_{b-} = QI^\alpha_{a+}Q.$$

Ještě nebyla zodpovězena otázka, pro jaké funkce φ jsou integrály $\left(I^\alpha_{a+}\varphi\right)(x)$ a $\left(I^\alpha_{b-}\varphi\right)(x)$ v intervalu $[a, b]$ vůbec definovány. Zřejmě, pokud $\alpha \geq 1$ a $\varphi \in L^1[a, b]$, jsou oba integrály konvergentní pro všechna $x \in [a, b]$, protože funkce $\left|(x-t)^{\alpha-1}\right|$ je spojitá a nabývá tak na $[a,b]$ svého maxima. Není však na první pohled jasné, bude-li podmínka $\varphi \in L^1[a, b]$ stačit i v případě $0 < \alpha < 1$. Následující věta říká, že ano, spokojíme-li se s konvergencí $I^\alpha_{a+}\varphi$ a $I^\alpha_{b-}\varphi$ pouze pro *skoro všechna* $x \in [a,b]$.

Věta 4.2. *Buď $\alpha > 0$ a nechť $\varphi \in L^1[a,b]$. Pak integrály $\left(I^{\alpha}_{a+}\varphi\right)(x)$ a $\left(I^{\alpha}_{b-}\varphi\right)(x)$ konvergují pro s.v. $x \in [a,b]$. Navíc $I^{\alpha}_{a+}\varphi$ a $I^{\alpha}_{b-}\varphi$ jsou samy prvky $L^1[a,b]$.*

Důkaz. Převzatý z [6, str. 14]. Integrál $\left(I^{\alpha}_{a+}\varphi\right)(x)$ můžeme zapsat pomocí konvoluce jako

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(f*g)(x),$$

kde

$$f(u) = \begin{cases} u^{\alpha-1} & \text{pro } 0 < u \le b-a, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a

$$g(u) = \begin{cases} \varphi(u) & \text{pro } a \le u \le b, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Z konstrukce obou funkcí je ihned vidět, že $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Použitím Věty 2.3 pak dostáváme, že $\left(I^{\alpha}_{a+}\varphi\right)(x)$ konverguje pro s.v. $x \in [a,b]$ a je prvkem $L^1[a,b]$.

Díky Lemmatu 4.1 stačí důkaz provést jen pro $I^{\alpha}_{a+}\varphi$. Je-li totiž $\varphi(t) \in L^1[a,b]$, je i $\psi(t) = \varphi(a+b-t) \in L^1[a,b]$. Pak podle právě dokázaného je funkce $f(x) = \left(I^{\alpha}_{a+}\psi\right)(x)$ definovaná pro s.v. $x \in [a,b]$ a $f(x) \in L^1[a,b]$. Podle (4.5) je $\left(I^{\alpha}_{b-}\varphi\right)(x) = f(a+b-x)$, z čehož plyne platnost tvrzení pro $I^{\alpha}_{b-}\varphi$. □

Nadále se budeme zabývat výhradně levým Riemann-Liouvilleovým integrálem. Příslušná tvrzení pro pravý Riemann-Liouvilleův integrál jsou obdobná a snadno se dokáží pomocí Lemmatu 4.1.

Příklad. Spočtěme levý a pravý Riemann-Liouvilleův integrál dvou jednoduchých funkcí $\varphi(x) = (x-a)^{\beta}$ a $\varphi(x) = (b-x)^{\beta}$, kde $\beta > -1$.

$$I^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \frac{(t-a)^{\beta}}{(x-t)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}t.$$

Použitím substituce $t = a + \tau(x-a)$ přejde integrál na tvar

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \frac{\tau^{\beta}(x-a)^{\beta}}{(x-a)^{1-\alpha}(1-\tau)^{1-\alpha}}(x-a)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^1 \tau^{\beta}(1-\tau)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Z Definice 3.4 Beta funkce a z Věty 3.4 o vztahu Beta a Gama funkce dostáváme

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta} &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}B(1+\beta,\alpha) \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(1+\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)} = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Pravý Riemann-Liouvilleův integrál funkce $\varphi(x) = (b-x)^{\beta}$ spočteme snadno pomocí Lemmatu 4.1.

$$\begin{aligned}I_{b-}^{\alpha}(b-x)^{\beta} &= QI_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta} \\ &= Q\frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta} = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}(b-x)^{\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

Při definování integrálu neceločíselného řádu jsme vyšli ze vzorce pro n-násobný integrál, který lze chápat jako n-tou mocninu operátoru $I : \varphi(x) \mapsto \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Bylo by dobré, kdyby se Riemann-Liouvilleův integrál choval jako „neceločíselná mocnina“ I. Tím myslíme, že by měl podobné vlastnosti jako reálné mocniny čísel. Tedy, aby pro každou funkci φ platilo $I^{\alpha}I^{\beta}\varphi = I^{\alpha+\beta}\varphi$ a aby zobrazení $\alpha \mapsto I^{\alpha}\varphi$ bylo spojité. Skutečně, Riemann-Liouvilleův integrál má obě tyto vlastnosti, na rozdíl od neceločíselné derivace (Sekce 4.2).

Věta 4.3. *Buď $\alpha > 0$, $\beta > 0$ a nechť $\varphi \in L^1[a,b]$. Potom s.v. v $[a,b]$ je*

$$I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi. \tag{4.6}$$

Důkaz. Převzatý z [6, str. 14]. Z definice je

$$\left(I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\int_a^t \frac{\varphi(\tau)}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\tau)^{1-\beta}}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t.$$

Podle Věty 4.2 tento integrál konverguje absolutně pro s.v. $x \in [a,b]$ (stačí aplikovat větu na funkci $|\varphi|$). Pro tato x můžeme použít Důsledek 2.2 a prohodit pořadí integrace, čímž dostáváme

$$\begin{aligned}\left(I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}\varphi\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x\int_{\tau}^x \frac{\varphi(\tau)}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\tau)^{1-\beta}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau &(4.7)\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \varphi(\tau)\int_{\tau}^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau. &(4.8)\end{aligned}$$

Vnitřní integrál snadno spočteme následujícím postupem. Nejprve použijeme substituci $t = \tau + s(x-\tau)$, pak Definici 3.4 a nakonec Větu 3.4, takže máme

$$\begin{aligned}\int_{\tau}^x (x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t &= (x-\tau)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}\,\mathrm{d}t \\ &= (x-\tau)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta) = (x-\tau)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.\end{aligned}$$

Dosadíme-li tento výsledek do 4.7, je

$$\left(I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x \frac{\varphi(\tau)}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}}\,\mathrm{d}\tau = \left(I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi\right)(x)$$

pro s.v. $x \in [a,b]$. $\square$

Poznámka. Vlastnost (4.6) budeme nazývat *aditivitou Riemann-Liouvilleova integrálu vzhledem k řádu.*

Poznámka. Tato vlastnost se nám bude v dalším velmi hodit. Neceločíselnou integraci řádu α totiž můžeme rozložit na dolní celou část $\lfloor\alpha\rfloor$ a desetinnou část $\{\alpha\}$, tedy psát $I^{\alpha}_{a+} = I^{\{\alpha\}}_{a+} I^{\lfloor\alpha\rfloor}_{a+} = I^{\lfloor\alpha\rfloor}_{a+} I^{\{\alpha\}}_{a+}$. Většinu následujících tvrzení tak budeme dokazovat jen pro $0 < \alpha < 1$, protože tvrzení pro obecné α ihned vyplyne z předchozího rozepsání a známých vět pro celočíselnou integraci.

Před vyšetřováním spojitosti zobrazení $\alpha \mapsto I^{\alpha}$, rozšiřme ještě definici I^{α}_{a+} pro $\alpha = 0$ následovně.

Definice 4.2. *Pro $-\infty < a < b < +\infty$ a funkci $\varphi:[a,b] \mapsto \mathbb{R}$ definujeme*

$$\left(I^{0}_{a+}\varphi\right)(x) = \varphi(x).$$

Operátor I^{α}_{a+} je na $L^p[a,b]$, $1 \le p < +\infty$, omezený (viz [7, str. 48]) a má proto smysl zkoumat spojitost vzhledem k operátorové normě.

Věta 4.4. *Nechť $X = L^p[a,b]$, $1 \le p < +\infty$. Pak $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} \| I^{\alpha}_{a+} - I^{\alpha_0}_{a+} \|_{\mathcal{L}(X)} = 0$ pro $\alpha_0 > 0$ a $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} \| I^{\alpha}_{a+}\varphi - I^{\alpha_0}_{a+}\varphi \|_X = 0$ pro $\varphi \in X$ a $\alpha_0 \ge 0$.*

Důkaz. Lze nalézt v [7, str. 48]. □

Spojitost v 0 lze také popsat pomocí konvergence s.v.

Věta 4.5. *Buď $\varphi \in L^1[a,b]$. Pak*

$$\lim_{\alpha \to 0} \left(I^{\alpha}_{a+}\varphi\right)(x) = \varphi(x) \quad \textit{pro s.v. } x \in [a,b].$$

Důkaz. Viz [7, str. 51] □

Vidíme, že Riemann-Liouvilleův integrál splňuje podmínky, které bychom od neceločíselné mocniny integrálu očekávali. Dá se navíc ukázat, že je to jediný lineární a nezáporný operátor, který tyto podmínky splňuje. Přesné znění a důkaz tohoto tvrzení jsou sepsány v [5].

Přesto všechno má Riemann-Liouvilleův integrál některé nevýhody. Například pro $\alpha \notin \mathbb{N}$ nezobrazuje periodické funkce na periodické (viz Kapitola 5). Proto se pro periodické funkce definuje *Weylův integrál*, vycházející z Fourierových řad, který tuto vlastnost má a je tak vhodnější pro práci s trigonometrickými řadami, [7].

Až doteď jsme se zabývali vlastnostmi Riemann-Liouvilleova integrálu v kontextu Lebesgueových prostorů. Zde uvádíme analogie Věty 4.2 a Věty 4.3 v souvislosti se spojitými funkcemi. Protože spojitá funkce je i esenciálně omezená, jsou věty formulovány ve větší obecnosti pro funkce z $L^{\infty}[a,b]$, místo z $C[a,b]$, protože důkazy jsou v obou případech prakticky stejné.

Věta 4.6. *Buď $\alpha > 0$ a $\varphi \in L^{\infty}[a,b]$. Pak $I^{\alpha}_{a+}\varphi$ konverguje všude v $[a,b]$ a $I^{\alpha}_{a+}\varphi \in C[a,b]$.*

Důkaz. Důkaz provedeme jen pro $0 < \alpha < 1$. Je-li totiž $\alpha \geq 1$, můžeme psát $I^{\alpha}_{a+} = I^{\{\alpha\}}_{a+} = I^{\lfloor\alpha\rfloor}_{a+}$. Funkce $\psi = I^{\lfloor\alpha\rfloor}_{a+}\varphi$ je absolutně spojitá a tedy i esenciálně omezená, takže se stačí zabývat pouze vlastnostmi $I^{\{\alpha\}}_{a+}\psi$.

Pro libovolné $x \in [a, b]$ platí

$$\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, \mathrm{d}t\right| \leq \|\varphi\|_{L^\infty[a,b]} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\, \mathrm{d}t = \frac{\|\varphi\|_{L^\infty[a,b]}}{\alpha}(x-a)^{\alpha} < +\infty,$$

a tedy integrál $\left(I^{\alpha}_{a+}\varphi\right)(x)$ konverguje pro všechna x z $[a, b]$.

Ukážeme pouze spojitost zprava funkce $I^{\alpha}_{a+}\varphi$, spojitost zleva by se dokázala podobně. Zvolme libovolné $x \in [a, b)$ a $h > 0$ tak, že $x + h \in [a, b]$. Rozepsáním podle definice je

$$\begin{aligned}&\left|\left(I^{\alpha}_{a+}\right)(x+h) - \left(I^{\alpha}_{a+}\right)(x)\right| \\ &\quad = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_a^{x+h} \varphi(t)\,(x+h-t)^{\alpha-1}\, \mathrm{d}t - \int_a^x \varphi(t)\,(x-t)^{\alpha-1}\, \mathrm{d}t\right|. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Integrály v (4.9) mají různé integrandy i integrační obory. Abychom je měli jak porovnat, přičteme a odečteme $\int_a^x \varphi(t)\,(x+h-t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$ uvnitř absolutní hodnoty, a použitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}&\left|\left(I^{\alpha}_{a+}\right)(x+h) - \left(I^{\alpha}_{a+}\right)(x)\right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_a^{x+h} (x+h-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x} (x+h-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_a^{x} (x+h-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x} (x-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_x^{x+h} (x+h-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left|\int_a^{x} \left((x+h-t)^{\alpha-1} - (x-t)^{\alpha-1}\right)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right|.\end{aligned}$$

Absolutní hodnotu integrálu odhadneme integrálem absolutní hodnoty a absolutní hodnotu funkce φ jejím esenciálním supremem, takže

$$\begin{aligned}&\left|\left(I^{\alpha}_{a+}\right)(x+h) - \left(I^{\alpha}_{a+}\right)(x)\right| \\ &\leq \frac{\|\varphi\|_{L^\infty[a,b]}}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_x^{x+h} (x+h-t)^{\alpha-1}\, \mathrm{d}t + \int_a^x \left|(x+h-t)^{\alpha-1} - (x-t)^{\alpha-1}\right|\, \mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

Protože pro $0 < \alpha < 1$ je $(x-t)^{\alpha-1} - (x+h-t)^{\alpha-1} > 0$, můžeme absolutní hodnotu vynechat a oba integrály snadno spočíst:

$$\int_x^{x+h} (x+h-t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\alpha}\Big[(x+h-t)^\alpha\Big]_{t=x}^{t=x+h} = \frac{1}{\alpha}h^\alpha,$$

$$\begin{aligned}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} - (x+h-t)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{\alpha}\Big[(x+h-t)^\alpha - (x-t)^\alpha\Big]_{t=a}^{t=x} \\ &= \frac{1}{\alpha}\left(h^\alpha + (x-a)^\alpha - (x+h-a)^\alpha\right).\end{aligned}$$

Celkem tedy

$$\left|\left(I_{a+}^\alpha\right)(x+h) - \left(I_{a+}^\alpha\right)(x)\right| \le \frac{\|\varphi\|_{L^\infty[a,b]}}{\Gamma(\alpha+1)}\left(2h^\alpha + (x-a)^\alpha - (x+h-a)^\alpha\right).$$

Protože $(x-a)^\alpha - (x+h-a)^\alpha < 0$, můžeme odhad zjednodušit na

$$\left|\left(I_{a+}^\alpha\right)(x+h) - \left(I_{a+}^\alpha\right)(x)\right| \le 2\frac{\|\varphi\|_{L^\infty[a,b]}}{\Gamma(\alpha+1)}h^\alpha. \tag{4.10}$$

Vidíme, že $I_{a+}^\alpha\varphi$ je α-hölderovská funkce, tedy i spojitá. □

Poznámka. Podrobnější vysvětlení závislosti hölderovskosti $I_{a+}^\alpha\varphi$ na L^p integrovatelnosti funkce φ i vztahu Riemann-Liouvilleova integrálu k prostorům funkcí opatřených hölderovskou normou lze najít v [7].

Věta 4.7. *Buď $\varphi \in L^1[a,b]$, $\alpha > 0$ a $\beta > 0$. Je-li navíc $\varphi \in L^\infty[a,b]$ anebo $\alpha + \beta \ge 1$, platí rovnost (4.6) všude v $[a,b]$.*

Důkaz. Převzatý z [6]. Je-li $\varphi \in L^\infty[a,b]$, je $I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi \in C[a,b]$ i $I_{a+}^\beta\varphi \in C[a,b]$ a tedy i $I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta\varphi \in C[a,b]$ podle Věty 4.6. Funkce $I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta\varphi$ a $I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi$ se podle Věty 4.3 rovnají s.v. a protože jsou obě spojité, musí se rovnat všude.

Nakonec, pokud je $\varphi \in L^1[a,b]$ a $\alpha + \beta \ge 1$, máme podle Věty 4.3

$$I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta\varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta}\varphi = I_{a+}^{\alpha+\beta-1}I_{a+}^1\varphi \tag{4.11}$$

s.v. v $[a,b]$. Funkce $I_{a+}^1\varphi$ je spojitá (dokonce absolutně spojitá), takže podle Věty 4.6 je $I_{a+}^{\alpha+\beta-1}I_{a+}^1\varphi$ taktéž spojitá. Z rovnosti (4.11) pak vyplývá, že funkce $I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta\varphi$ a $I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta\varphi$ můžeme pozměnit na množině míry nula tak, že budou spojité. Ze stejného důvodu, jako v prvním případě, se tito spojití reprezentanti musí rovnat všude. □

V teorii i aplikacích má integrování per partes důležitou roli. Umožňuje „převést“ derivaci jed -né funkce na derivaci funkce druhé, čehož se následně využívá např. ve slabé formulaci diferenciálních rovnic nebo v teorii distribucí. Chtěli bychom dokázat obdobnou větu i pro derivaci neceločíselného řádu, protože se dá očekávat, že bude stejně užitečná. Neceločíselnou derivaci sice zavedeme až později, ale bude se nám v dokazování hodit následující lemma o převádění neceločíselných integrálů.

Lemma 4.8 (Neceločíselná integrace per partes). *Buď $\alpha > 0$. Pak*

$$\int_a^b \varphi(x)\left(I_{a+}^{\alpha}\psi\right)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(I_{b-}^{\alpha}\varphi\right)(x)\,\psi(x)\,\mathrm{d}x, \tag{4.12}$$

pokud $\varphi \in L^p[a,b]$ a $I_{a+}^{\alpha}|\psi| \in L^q[a,b]$ nebo $I_{b-}^{\alpha}|\varphi| \in L^p[a,b]$ a $\psi \in L^q[a,b]$, kde $1/p + 1/q = 1$.

Důkaz. Oba integrály z (4.12) můžeme zapsat jako dvojnásobné

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(x)\left(I_{a+}^{\alpha}\psi\right)(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\int_a^x \frac{\varphi(x)\psi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\\ \int_a^b \left(I_{b-}^{\alpha}\varphi\right)(x)\,\psi(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\int_x^b \frac{\psi(x)\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Použitím Hölderovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\int_a^x \left|\frac{\varphi(x)\psi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\right|\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x &= \int_a^b |\varphi(x)|\left(I_{a+}^{\alpha}|\psi|\right)(x)\,\mathrm{d}x\\ &\le \|\varphi\|_{L^p[a,b]}\,\|I_{a+}^{\alpha}|\psi|\|_{L^q[a,b]},\\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\int_x^b \left|\frac{\psi(x)\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}\right|\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \left(I_{b-}^{\alpha}|\varphi|\right)(x)\;|\psi(x)|\,\mathrm{d}x\\ &\le \|I_{b-}^{\alpha}|\varphi|\|_{L^p[a,b]}\,\|\psi\|_{L^q[a,b]},\end{aligned}$$

takže vhledem k předpokladům lemmatu je alespoň jeden z integrálů ve (4.13) absolutně konvergentní. Můžeme tak použít Důsledku 2.2 a zaměnit pořadí integrace

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(x)\left(I_{a+}^{\alpha}\psi\right)(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\int_a^x \frac{\varphi(x)\psi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\int_t^b \frac{\varphi(x)\psi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b\int_t^b \frac{\varphi(x)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}x\,\psi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(I_{b-}^{\alpha}\varphi\right)(t)\,\psi(t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

čímž je tvrzení dokázáno. □

Poznámka. Toto lemma, tak jak jsou formulovány jeho předpoklady, není příliš praktické. Bylo by lepší, kdybychom mohli rozhodnout na základě vlastností samotných funkcí φ a ψ. K tomu je však potřeba vědět, jak operátor I_{a+}^{α} (resp. I_{b-}^{α}) mění L^p-integrovatelnost funkcí. Už víme, že pro funkci $\varphi \in L^1[a,b]$ je též $I_{a+}^{\alpha}\varphi \in L^1[a,b]$ a pro $\varphi \in L^{\infty}[a,b]$ je dokonce $I_{a+}^{\alpha}\varphi \in C[a,b]$. Podrobnější vyšetřování těchto vlastností operátoru I_{a+}^{α} je nad rámec této práce, ale je podrobně provedeno např. v [7]. Zmiňme však, že pro pevné $\alpha > 0$ uvedené lemma platí, pokud $\varphi \in L^p[a,b]$ a $\psi \in L^p[a,b]$, kde $1/p + 1/q < 1 + \alpha$. Je-li $p \neq 1$ a $q \neq 1$, je přípustná i rovnost $1/p + 1/q = 1 + \alpha$.

4.2 Riemann-Liouvilleova derivace

Jak již bylo řečeno na začátku kapitoly, Riemann-Liouvilleovu derivaci chceme definovat jako operaci inverzní k Riemann-Liouvilleově integraci. Tedy, je-li pro $\alpha > 0$ a funkci $\varphi \in L^1[a,b]$

$$f(x) = \left(I_{a+}^{\alpha}\varphi\right)(x), \quad g(x) = \left(I_{b-}^{\alpha}\varphi\right)(x), \quad \text{pro s.v. } x \in [a,b],$$

pak definujeme

$$\left(D_{a+}^{\alpha}f\right)(x) := \varphi(x), \quad \left(D_{b-}^{\alpha}g\right)(x) := \varphi(x), \quad \text{pro s.v. } x \in [a,b].$$

Spočtení $D_{a+}^{\alpha}f$ a $D_{b-}^{\alpha}g$ je tedy ekvivalentní vyřešení integrálních rovnic

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}t = f(x), \quad \text{pro s.v. } x \in [a,b], \quad \alpha > 0, \tag{4.14}$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}t = g(x), \quad \text{pro s.v. } x \in [a,b], \quad \alpha > 0. \tag{4.15}$$

Podobně jako v předešlé části se budeme zabývat převážně levou Riemann-Liouvilleovou derivací D_{a+}^{α}. Vyřešíme proto pouze rovnici (4.14).

Ještě než přistoupíme k samotnému řešení, bude výhodné zavést některé značení. Symbolem $\lfloor x \rfloor$ značíme dolní celou část a $\{x\}$ desetinou část čísla x, takže je

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}.$$

Horní celou část x značíme $\lceil x \rceil$.

Při řešení budeme postupovat ryze formálně, oprávněnost úprav budeme diskutovat později. Řešení bychom chtěli vyjádřit jako funkci proměnné x. Zaměňme proto nejprve proměnnou t za s a pak x za t:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}s = f(t), \quad \text{pro s.v. } t \in [a,b].$$

Vynásobením obou stran $\Gamma(\alpha)(x-t)^{-\{\alpha\}}$ a integrováním od a do x obdržíme

$$\int_a^x\int_a^t \frac{\varphi(s)}{(x-t)^{\{\alpha\}}(t-s)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\{\alpha\}}}\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b].$$

V integrálu na levé straně změníme pořadí integrace a podle Důsledku 2.2 máme

$$\int_a^x \varphi(s)\int_s^x \frac{1}{(x-t)^{\{\alpha\}}(t-s)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\{\alpha\}}}\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b].$$

Vnitřní integrál na levé straně se dá upravit následovně. Nejprve provedeme substituci $t = s + \tau(x-s)$ a poté použijeme Definici 3.4 Beta funkce a Větu 3.4

pro vztah mezi Gama a Beta funkcí:

$$\begin{aligned}\int_s^x (x-t)^{-\{\alpha\}} (t-s)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t &= (x-s)^{\lfloor\alpha\rfloor} \int_0^1 (1-\tau)^{-\{\alpha\}} \tau^{\alpha-1}\,\mathrm{d}\tau \\ = (x-s)^{\lfloor\alpha\rfloor} B(1-\{\alpha\},\alpha) &= (x-s)^{\lfloor\alpha\rfloor} \frac{\Gamma(1-\{\alpha\})\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\lfloor\alpha\rfloor+1)} \\ &= (x-s)^{\lceil\alpha\rceil-1} \frac{\Gamma(1-\{\alpha\})\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\lceil\alpha\rceil)}.\end{aligned}$$

Po dosazení a vydělení obou stran $\Gamma(\alpha)$ je

$$\frac{1}{\Gamma(\lceil\alpha\rceil)} \int_a^x (x-s)^{\lceil\alpha\rceil-1} \varphi(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-a)^{\{\alpha\}}}\,\mathrm{d}t, \quad x\in[a,b]. \tag{4.16}$$

Protože $\Gamma(\lceil\alpha\rceil) = (\lceil\alpha\rceil - 1)\,!$, je levá strana (4.16) podle Věty 2.10 $\lceil\alpha\rceil$-násobný integrál. Po $\lceil\alpha\rceil$-násobném zderivování obou stran podle proměnné x tak dostáváme

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\lceil\alpha\rceil} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-a)^{\{\alpha\}}}\,\mathrm{d}t, \quad \text{s.v. } x\in[a,b]\,.$$

Výše uvedené úpravy můžeme zapsat pomocí operátoru I^{α}_{a+}. Rovnici (4.14) přepíšeme na

$$\left(I^{\alpha}_{a+}\varphi\right)(x) = f(x) \quad \text{pro s.v. } x\in[a,b]. \tag{4.17}$$

Tuto zintegrujeme $(1-\{\alpha\})$-krát a díky aditivitě Riemann-Liouvilleova integrálu vhledem k řádu (Věta 4.3) máme

$$\left(I^{\lceil\alpha\rceil}_{a+}\varphi\right)(x) = \left(I^{\alpha+1-\{\alpha\}}_{a+}\varphi\right)(x) = \left(I^{1-\{\alpha\}}_{a+} f\right)(x) \quad \text{pro s.v. } x[a,b]. \tag{4.18}$$

Po $\lceil\alpha\rceil$-násobném zderivování obou stran obdržíme stejný výsledek

$$\varphi(x) = \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\lceil\alpha\rceil} I^{1-\{\alpha\}}_{a+} f\right)(x) \quad \text{pro s.v. } x[a,b]. \tag{4.19}$$

Nyní zformulujeme větu uvádějící nutné a postačující podmínky řešitelnosti rovnice (4.17) v $L^1[a,b]$ a o jednoznačnosti řešení v této třídě funkcí. Je možné, že existují i jiná řešení z obecnějších tříd funkci, ale těmi se zde z důvodu jednoduchosti teorie nebudeme zaobírat.

Věta 4.9. *Funkce $\varphi \in L^1[a,b]$ řešící rovnici (4.17) pro $\alpha > 0$ existuje právě tehdy, když jsou splněny zároveň tyto dvě podmínky:*

1. $I^{1-\{\alpha\}}_{a+} f \in AC^{\lceil\alpha\rceil}[a,b]$,
2. $\left(I^{1-\{\alpha\}}_{a+} f\right)^{(k)}(a) = 0, \quad k\in\{0,\dots,\lfloor\alpha\rfloor\}$.

Toto řešení je ve třídě $L^1[a,b]$ jednoznačné.

Důkaz. Převzatý z [7] Nejprve předpokládejme, že rovnice (4.17) má řešení $\varphi \in L^1[a,b]$. To znamená, že funkce f je Riemann-Liouvilleovým integrálem funkce φ a tedy, podle Věty 4.2, je sama prvkem $L^1[a,b]$. Podle téže věty můžeme celou rovnici $(1-\{\alpha\})$-krát zintegrovat, čímž dospíváme k (4.18). Z Věty 2.7 o charakterizaci prostoru $AC^n[a,b]$ pak vyplývají obě dvě podmínky a to, že $\varphi = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\lceil\alpha\rceil} I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f$ s.v. v $[a,b]$. Řešení je tedy v prostoru $L^1[a,b]$ jednoznačné.

Na druhou stranu předpokládejme, že $I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f$ splňuje obě dvě podmínky. Z toho, že $I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f \in AC^{\lceil\alpha\rceil}[a,b]$, a Věty 4.2 vyplývá, že funkce φ definovaná vztahem (4.19) existuje s.v. v $[a,b]$ a je prvkem $L^1[a,b]$. Ukážeme, že taková funkce opravdu řeší (4.17). Dosaďme ji proto do levé strany rovnice (4.17) a výsledek označme $h(x)$, tedy

$$\left(I_{a+}^{\alpha} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\lceil\alpha\rceil} I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f\right)(x) = h(x). \tag{4.20}$$

K dokončení důkazu je třeba ukázat, že $h(x) = f(x)$ pro s.v. $x \in [a,b]$. Rovnice (4.20) je vzhledem k $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\lceil\alpha\rceil} I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f$ stejného typu jako (4.17), a $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\lceil\alpha\rceil} I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f$ je jejím řešením. Z první části důkazu plyne, že toto řešení je dáno vzorcem (4.19), takže platí

$$\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\lceil\alpha\rceil} I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f\right)(x) = \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\lceil\alpha\rceil} I_{a+}^{1-\{\alpha\}} h\right)(x) \quad \text{pro s.v. } x \in [a,b].$$

Obě funkce $I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f$ i $I_{a+}^{1-\{\alpha\}} h$ patří do třídy $AC^{\lceil\alpha\rceil}[a,b]$. První, protože to o ní předpokládáme, druhá, protože rovnice (4.20) je řešitelná. Z Věty 2.7 tak vyplývá, že

$$\begin{aligned}\left(I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f\right)(x) - \left(I_{a+}^{1-\{\alpha\}} h\right)(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor\alpha\rfloor} \frac{\left(I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f\right)^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\lfloor\alpha\rfloor} \frac{\left(I_{a+}^{1-\{\alpha\}} h\right)^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k .\end{aligned} \tag{4.21}$$

Ale $\left(I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f\right)^{(k)}(a) = \left(I_{a+}^{1-\{\alpha\}} h\right)^{(k)}(a) = 0$, pro $k = 0, \ldots, \lfloor\alpha\rfloor$, což opět plyne z našich předpokladů a toho, že rovnice (4.20) je řešitelná. Ze (4.21) tak dostáváme $\left(I_{a+}^{1-\{\alpha\}}(f-h)\right)(x) = 0$ pro s.v. $x \in [a,b]$, což je též rovnice typu (4.17) s nulovým řešením. Z jednoznačnosti řešení tak vyplývá $f(x) - h(x) = 0$ pro s.v. $x \in [a,b]$, čímž je důkaz dokončen. □

Kdybychom místo rovnice (4.14) uvažovali rovnici (4.15), našli bychom stejným postupem řešení tvaru

$$\varphi(x) = \left((-1)^{\lceil\alpha\rceil} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\lceil\alpha\rceil} I_{b-}^{1-\{\alpha\}} f\right)(x) \quad \text{pro s.v. } x[a,b].$$

Znaménko minus u derivace je přítomno, protože při výpočtu řešení se derivuje integrál podle *dolní* meze. Platí též analogie Věty 4.9, kterou získáme přepsáním $I_{a+}^{1-\{\alpha\}}$ na $I_{b-}^{1-\{\alpha\}}$. Proto definujeme levou a pravou Riemann-Liouvilleovu derivaci takto.

Definice 4.3 (Riemann-Liouvilleova neceločíselná derivace)**.** *Nechť* $-\infty < a < b < +\infty$*,* $\alpha > 0$ *a mějme funkci* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$*. Výraz*

$$\left(D^{\alpha}_{a+} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\lceil \alpha \rceil} \int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\{\alpha\}}} \,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b] \tag{4.22}$$

a

$$\left(D^{\alpha}_{b-} f\right)(x) = \frac{(-1)^{\lceil \alpha \rceil}}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\lceil \alpha \rceil} \int\limits_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\{\alpha\}}} \,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b], \tag{4.23}$$

nazýváme levou*, resp.* pravou Riemann-Liouvilleovou neceločíselnou derivací funkce f řádu α*.*

Poznámka. Buď $\alpha \in \mathbb{N}$. Exisuje-li $D^{\alpha}_{a+} f$, existuje i $f^{(\alpha)}$ a jsou shodné. Podobně pro $D^{\alpha}_{b-} f$, která je shodná s $(-1)^{\alpha} f^{(\alpha)}$.

Pokud však $\alpha \notin \mathbb{N}$, obsahují D^{α}_{a+} i D^{α}_{b-} Riemann-Liouvilleův integrál, takže nezávisí pouze na lokálním chování funkce f. Narozdíl od klasické derivace.

Příklad. Vyšetřeme, jak je to s Riemann-Liouvilleovou derivací řádu $\alpha \neq 1, 2, \ldots$ funkce $(x-a)^{\beta}$, $\beta > -1$. Víme, že

$$I^{1-\{\alpha\}}_{a+} (x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(2-\{\alpha\}+\beta)} (x-a)^{1-\{\alpha\}+\beta} .$$

Je-li $\beta = \alpha - k$, kde $k = 1, \ldots, \lceil \alpha \rceil$, je

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a+} (x-a)^{\alpha-k} &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\lceil \alpha \rceil} \frac{\Gamma(1+\alpha-k)}{\Gamma(2-\{\alpha\}+\alpha-k)} (x-a)^{1-\{\alpha\}+\alpha-k} \\ &= \frac{\Gamma(\{\alpha\}+\lceil \alpha \rceil-k)}{\Gamma(1+\lceil \alpha \rceil-k)} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\lceil \alpha \rceil} (x-a)^{\lceil \alpha \rceil-k} \equiv 0. \end{aligned}$$

Funkce $(x-a)^{\alpha-k}$, $k = 1, \ldots, \lceil \alpha \rceil$, tak pro operátor D^{α}_{a+} hrají podobnou roli, jako funkce $(x-a)^{n-k}$ $k = 1, \ldots, n$, pro $n \in \mathbb{N}$, v případě klasické derivace n-tého řádu. Leží v jádru operátoru D^{α}_{a+}. Pro jiné hodnoty β je

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a+} (x-a)^{\beta} &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\lceil \alpha \rceil} \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(2-\{\alpha\}+\beta)} (x-a)^{1-\{\alpha\}+\beta} \\ &= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha} , \end{aligned}$$

speciálně pro $\beta = 0$ vidíme, že Riemann-Liouvilleova derivace konstanty není 0.

Riemann-Liouvilleovu derivaci jsme definovali tak, aby byla zleva inverzní k Riemann-Liouvilleovu integrálu, to jest, aby platilo $D^{\alpha}_{a+} I^{\alpha}_{a+} \varphi = \varphi$ pro každou funkci $\varphi \in L^1[a,b]$. Nabízí se otázka, jestli platí i opačný vztah, t.j. $I^{\alpha}_{a+} D^{\alpha}_{a+} f = f$. Aby uvedený vztah měl vůbec smysl, je třeba, aby funkce $I^{1-\{\alpha\}}_{a+} f$ měla s.v. derivaci, která je třídy $L^1[a,b]$. Avšak vzhledem ke znalostem z teorie celočíselných derivací (Sekce 2.3) nemůžeme předpokládat, že by tato podmínka mohla být postačující. Zaveďme nejdříve dvě definice.

Definice 4.4. *Pro* $\alpha > 0$ *značí* $I_{a+}^{\alpha}(L^p)$, $p \geq 1$, *prostor všech funkcí* f, *pro které existuje funkce* $\varphi \in L^p[a,b]$ *taková, že*

$$f = I_{a+}^{\alpha}\varphi \quad s.v.\ v\ [a,b].$$

Poznámka. Charakterizaci prostoru $I_{a+}^{\alpha}(L^1)$ udává Věta 4.9.

Definice 4.5. *Buď* $\alpha > 0$. *O funkci* $f \in L^1[a,b]$ *řekneme, že má integrovatelnou neceločíselnou derivaci* $D_{a+}^{\alpha}f$, *jestliže* $I_{a+}^{1-\{\alpha\}}f \in AC^{\lceil\alpha\rceil}[a,b]$.

Poznámka. Funkce, které mají integrovatelnou derivaci D_{a+}^{α}, ale nepatří do $I_{a+}^{\alpha}(L^1)$, jsou například $(x-a)^{\alpha-k}$, $k = 1, \ldots, \lceil\alpha\rceil$.

Jak ukazuje následující věta, pro funkce z prostoru $I_{a+}^{\alpha}(L^1)$ jsou Riemann-Liouvilleova derivace a integrace navzájem inverzní operace. Funkce mající integrovatelnou neceločíselnou derivaci jsou pak analogií funkcí z prostoru $AC^n[a,b]$, viz Věta 2.7. Místo polynomu se zde ale vyskytuje lineární kombinace funkcí $(x-a)^{\alpha-k}$.

Věta 4.10. *Nechť* $\alpha > 0$. *Pak rovnost*

$$D_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\alpha}\varphi = \varphi, \quad s.v.\ v\ [a,b] \tag{4.24}$$

platí pro každou funkci $\varphi \in L^1[a,b]$, *zatímco*

$$I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f = f, \quad s.v.\ v\ [a,b] \tag{4.25}$$

platí pro $f \in I_{a+}^{\alpha}(L^1)$. *Pokud má* f *pouze integrovatelnou derivaci* $D_{a+}^{\alpha}f$ *ve smyslu Definice 4.5, je*

$$\left(I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{\lfloor\alpha\rfloor}\frac{f_{1-\{\alpha\}}^{(k)}(a)}{\Gamma(\{\alpha\}+k)}(x-a)^{\{\alpha\}+k-1}, \quad s.v.\ v\ [a,b], \tag{4.26}$$

kde

$$f_{1-\{\alpha\}} = I_{a+}^{1-\{\alpha\}}f.$$

Důkaz. Převzatý z [7]. Levou stranu rovnosti (4.24) nejdříve přepíšeme podle definice a potom použijeme Větu 4.3 o aditivitě Riemann-Liouvilleova integrálu vzhledem k řádu, čímž dostaneme

$$D_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\alpha}\varphi = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\lceil\alpha\rceil} I_{a+}^{1-\{\alpha\}}I_{a+}^{\alpha}\varphi = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\lceil\alpha\rceil} I_{a+}^{\lceil\alpha\rceil}\varphi.$$

Z Věty 2.7 pak plyne platnost (4.24).

Rovnost (4.25) plyne ihned z (4.24) po substituci $f = I_{a+}^{\alpha}\varphi$.

Důkaz poslední rovnosti je velmi podobný důkazu Věty 4.9. Má-li f integrovatelnou derivaci $D_{a+}^{\alpha}f$, je podle definice $I_{a+}^{1-\{\alpha\}}f \in AC^{\lceil\alpha\rceil}[a,b]$ a z Věty 2.7 tak máme

$$I_{a+}^{1-\{\alpha\}}f = I_{a+}^{\lceil\alpha\rceil}\varphi + \sum_{k=0}^{\lfloor\alpha\rfloor}\frac{f_{1-\{\alpha\}}^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \tag{4.27}$$

kde

$$D^{\alpha}_{a+}f = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{\lceil\alpha\rceil} I^{1-\{\alpha\}}_{a+}f = \varphi \in L^1\left[a,b\right]. \tag{4.28}$$

Díky Větě 4.3 o aditivitě Riemann-Liouvilleova integrálu vzhledem k řádu můžeme rovnost (4.27) upravit na

$$I^{1-\{\alpha\}}_{a+}f = I^{1-\{\alpha\}}_{a+}I^{\alpha}_{a+}\varphi + I^{1-\{\alpha\}}_{a+}\left(\sum_{k=0}^{\lfloor\alpha\rfloor}\frac{f^{(k)}_{1-\{\alpha\}}(a)}{\Gamma(\{\alpha\}+k)}\left(x-a\right)^{\{\alpha\}+k-1}\right),$$

z čehož vyplývá

$$I^{1-\{\alpha\}}_{a+}\left(f - I^{\alpha}_{a+}\varphi - \sum_{k=0}^{\lfloor\alpha\rfloor}\frac{f^{(k)}_{1-\{\alpha\}}(a)}{\Gamma(\{\alpha\}+k)}\left(x-a\right)^{\{\alpha\}+k-1}\right) = 0.$$

Z jednoznačnosti řešení (Věta 4.9) této integrální rovnice a (4.28) plyne, že

$$I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}f = f - \sum_{k=0}^{\lfloor\alpha\rfloor}\frac{f^{(k)}_{1-\{\alpha\}}(a)}{\Gamma(\{\alpha\}+k)}\left(x-a\right)^{\{\alpha\}+k-1}, \quad \text{s.v. v } [a,b].$$

□

Jednoduchým důsledkem rovnosti (4.24) jsou tyto dvě věty.

Věta 4.11. *Buď $\alpha > 0$ a $\beta > 0$ a nechť $f \in I^{\alpha+\beta}_{a+}(L^1)$. Potom*

$$D^{\alpha}_{a+}D^{\beta}_{a+}f = D^{\alpha+\beta}_{a+}f \quad \text{s.v. v } [a,b]. \tag{4.29}$$

Důkaz. Rozepsáním podle definice prostoru $I^{\alpha}_{a+}(L^1)$ a použitím Vět 4.10 a 4.3 ihned dostáváme

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a+}D^{\beta}_{a+}f &= D^{\alpha}_{a+}D^{\beta}_{a+}I^{\alpha+\beta}_{a+}\varphi = D^{\alpha}_{a+}D^{\beta}_{a+}I^{\beta}_{a+}I^{\alpha}_{a+}\varphi \\ &= \varphi = D^{\alpha+\beta}_{a+}I^{\alpha+\beta}_{a+}\varphi = D^{\alpha+\beta}_{a+}f \quad \text{s.v. v } [a,b]. \end{aligned}$$

□

Poznámka. Zdůrazněme, že Riemann-Liouvilleova derivace obecně není aditivní vzhledem k řádu, jak ukazuje příklad v [6, str. 30]. Podrobnější věta o tom, kdy platí vztah (4.29), je obsažena např. v [7].

Druhá věta se týká neceločíselné derivace per partes, ve které se vyskytuje i pravá Riemann-Liouvilleova derivace, kterou jsme se podrobněji nezabývali. Avšak definice a věty, které jsme uvedli pro levou derivaci, se snadno přeformulují pro pravou derivaci.

Věta 4.12. *Buď $0 < \alpha < 1$ a nechť $f \in I^{\alpha}_{b-}(L^p)$, $g \in I^{\alpha}_{a+}(L^q)$, kde $1/p + 1/q \leq 1 + \alpha$. Potom je*

$$\int_a^b f(x)\left(D^{\alpha}_{a+}g\right)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(D^{\alpha}_{b-}f\right)(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.30}$$

Důkaz. Píšeme-li funkce $f = I^{\alpha}_{b-}\varphi$ a $g = I^{\alpha}_{a+}\psi$, máme podle Věty 4.10

$$\int\limits_a^b f(x)\left(D^{\alpha}_{a+}g\right)(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \left(I^{\alpha}_{b-}\varphi\right)(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

a

$$\int\limits_a^b \left(D^{\alpha}_{b-}f\right)(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \varphi(x)\left(I^{\alpha}_{a+}\psi\right)(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podle poznámky pod Lemmatem 4.8 o neceločíselné integraci per partes, jsou za daných předpokladů integrály na pravých stranách stejné. Tím je důkaz dokončen. ☐

Poznámka. Jednodušší podmínka pro platnost vztahu (4.30) je, že funkce f i g jsou spojité na intervalu $[a, b]$, $D^{\alpha}_{b-}f$ a $D^{\alpha}_{a+}g$ existují všude v intervalu $[a, b]$ a jsou na něm spojité, [7, str. 46].

Nakonec zformulujeme větu, která umožňuje rozhodnout o tom, jestli existuje $D^{\alpha}_{a+}f$ nebo zda je dokonce $f \in I^{\alpha}_{a+}(L^1)$, na základě vlastností samotné funkce f. Kvůli lepší přehlednosti značení budeme pro klasickou derivaci funkce f řádu $\lceil\alpha\rceil$ používat symbol $f^{\lceil\alpha\rceil}$, místo $f^{(\lceil\alpha\rceil)}$.

Věta 4.13. *Buď $\alpha > 0$ a nechť $f \in AC^{\lceil\alpha\rceil}[a, b]$. Potom $D^{\alpha}_{a+}f$ existuje s.v. v $[a, b]$ a je*

$$\left(D^{\alpha}_{a+}f\right)(x) = \left(I^{1-\{\alpha\}}_{a+}f^{\lceil\alpha\rceil}\right)(x) + \sum_{k=0}^{\lfloor\alpha\rfloor}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} \qquad \textit{s.v. v } [a, b].$$

Je-li navíc $\alpha < 1$ nebo $f^{(k)}(a) = 0$, pro $k = 0, \ldots, \lfloor\alpha\rfloor - 1$, je $f \in I^{\alpha}_{a+}(L^1)$.

Důkaz. Použijeme opět Větu 2.7 pro vyjádření funkce f, takže je

$$I^{1-\{\alpha\}}_{a+}f = I^{1-\{\alpha\}}_{a+}\left(I^{\lceil\alpha\rceil}_{a+}f^{\lceil\alpha\rceil} + \sum_{k=0}^{\lfloor\alpha\rfloor}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right). \tag{4.31}$$

Riemann-Liouvilleův integrál ze sumy spočteme a použijeme ještě Věty 4.3 na záměnu pořadí integrace, čímž dostáváme

$$I^{1-\{\alpha\}}_{a+}f = I^{\lceil\alpha\rceil}_{a+}I^{1-\{\alpha\}}_{a+}f^{\lceil\alpha\rceil} + \sum_{k=0}^{\lfloor\alpha\rfloor}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(2-\{\alpha\}+k)}(x-a)^{1-\{\alpha\}+k}.$$

Po $\lceil\alpha\rceil$-násobném zderivování dospíváme k výsledku

$$D^{\alpha}_{a+}f = I^{1-\{\alpha\}}_{a+}f^{\lceil\alpha\rceil} + \sum_{k=0}^{\lfloor\alpha\rfloor}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}(x-a)^{k-\alpha} \qquad \text{s.v. v } [a, b].$$

Speciálně, jsou-li derivace funkce f v bodě a rovny nule až do řádu $\lfloor\alpha\rfloor - 1$, plyne z předchozího, že

$$\begin{aligned}
I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f &= I_{a+}^{\lceil\alpha\rceil} I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f^{\lceil\alpha\rceil} + \frac{f^{\lfloor\alpha\rfloor}(a)}{\Gamma(2-\{\alpha\}+\lfloor\alpha\rfloor)} (x-a)^{1-\{\alpha\}+\lfloor\alpha\rfloor} \\
&= I_{a+}^{\lceil\alpha\rceil} I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f^{\lceil\alpha\rceil} + I_{a+}^{\lceil\alpha\rceil} \frac{f^{\lfloor\alpha\rfloor}(a)}{\Gamma(1-\{\alpha\})} (x-a)^{-\{\alpha\}} \\
&= I_{a+}^{\lceil\alpha\rceil} \left(I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f^{\lceil\alpha\rceil} + \frac{f^{\lfloor\alpha\rfloor}(a)}{\Gamma(1-\{\alpha\})} (x-a)^{-\{\alpha\}} \right).
\end{aligned}$$

Funkce $\frac{f^{\lfloor\alpha\rfloor}(a)}{\Gamma(1-\{\alpha\})} (x-a)^{-\{\alpha\}}$ patří do $L^1[a,b]$, neboť $\{\alpha\} < 1$ a z Věty 4.2 plyne, že i $I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f^{\lceil\alpha\rceil} \in L^1[a,b]$. Podle Věty 2.7 tak je $I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f \in AC^{\lceil\alpha\rceil}[a,b]$ a

$$\left(I_{a+}^{1-\{\alpha\}} f \right)^{(k)} \equiv 0 \quad \text{pro } k = 0, \ldots, \lfloor\alpha\rfloor,$$

což je právě tehdy, když $f \in I_{a+}^{\alpha}(L^1)$. □

4.3 Caputova derivace

Při definování Riemann-Liouvilleovy derivace jsme byli motivovaní vztahy mezi klasickou derivací a integrací a z pohledu matematické teorie se tento postup může jevit přirozeným. Avšak z hlediska praktického není Riemann-Liouvilleova derivace vhodným nástrojem. Její používání v diferenciálních rovnicích má řadu nevýhod [6, str. 49], např. volba počátečních a okrajových podmínek. Proto se často používá Caputova derivace, která vznikne z Riemann-Liouvilleový jakousi formální úpravou. Tato úprava má několik podstatných důsledků, díky nimž je použití Caputovy derivace v diferenciálních rovnicích přímočařejší. Kromě těchto praktických motivů existují i „čistě matematické“ důvody, proč upřednostňovat Caputovu derivaci před Riemann-Liouvilleovou ([10] a [17]), které zde ale nebudeme rozebírat. Caputova derivace je definována následovně.

Definice 4.6 (Caputova derivace). *Buď $-\infty < a < b < +\infty$ a $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$. Pro funkci $f{:}[a,b] \to \mathbb{R}$ definujeme* Caputovu derivaci řádu α *vztahem*

$$\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha} f \right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})} \int_a^x \frac{f^{\lceil\alpha\rceil}(t)}{(x-t)^{\{\alpha\}}} \, \mathrm{d}t. \tag{4.32}$$

Pro $\alpha \in \mathbb{N}$ definujeme

$${}^{C}D_{a+}^{\alpha} f = f^{(\alpha)}.$$

Připomeňme, že symbolem $f^{\lceil\alpha\rceil}$ značíme klasickou derivaci funkce f řádu $\lceil\alpha\rceil$.

Z formálního hlediska se Caputova derivace liší od Riemann-Liouvilleovy pouhou záměnou operátorů $I_{a+}^{1-\{\alpha\}}$ a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Tato záměna má však podstatné důsledky, jak naznačuje tento příklad.

Příklad. Spočtěme Caputovu derivaci řádu $\alpha > 0$ funkce $(x-a)^{\beta}$. Se znalostí Riemann-Liouvilleova integrálu této funkce je ihned vidět výsledek

$${}^{C}D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\beta} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \beta = 0, 1, \ldots, \lfloor\alpha\rfloor \\ \dfrac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha} & \text{pro } \beta > \lfloor\alpha\rfloor. \end{cases}$$

Pro $\beta < \lfloor\alpha\rfloor$ a $\beta \notin \mathbb{N}$ není Caputova derivace definovaná. Pro srovnání Riemann-Liouvilleova derivace vychází následovně

$$D^{\alpha}_{a+}\left(x-a\right)^{\beta} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \beta = \alpha - \lceil\alpha\rceil, \ldots, \alpha - 1 \\ \dfrac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)}\left(x-a\right)^{\beta-\alpha} & \text{jinak, ale } \beta > -1. \end{cases}$$

Pro $\beta \leq -1$ není Riemann-Liouvilleova derivace definovaná.

Jak je vidět, jádra i definiční obory obou operátorů se liší. Přesto mezi oběma operátory existuje jednoduchý vztah. Věta 4.14 tento vztah popisuje a navíc obsahuje postačující podmínku pro existenci Caputovy derivace.

Věta 4.14. *Buď $\alpha > 0$ a nechť $f \in AC^{\lceil\alpha\rceil}[a,b]$. Pak Riemann-Liouvilleova a Caputova derivace existují s.v. v $[a,b]$ a platí mezi nimi tyto dva vztahy*

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}f\right)(x) = \left(D^{\alpha}_{a+}f\right)(x) - \sum_{k=0}^{\lfloor\alpha\rfloor} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}\left(x-a\right)^{k-\alpha}, \tag{4.33}$$

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}f\right)(x) = D^{\alpha}_{a+}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{\lfloor\alpha\rfloor} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\left(x-a\right)^{k}\right). \tag{4.34}$$

Důkaz. Vztah (4.33) plyne ihned z Věty 4.13. Označíme-li

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{\lfloor\alpha\rfloor} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)}\left(x-a\right)^{k-\alpha},$$

je zřejmě $g \in AC^{\lceil\alpha\rceil}[a,b]$ a $g^{(k)}(a) = 0$ pro $k = 0, \ldots, \lfloor\alpha\rfloor$. Rovnost (4.34) tak plyne z (4.33). □

Poznámka. Vraťme se ještě k definici Caputovy derivace. Chceme-li spočíst derivaci řádu α nějaké funkce f, potřebujeme znát i derivaci vyššího řádu $f^{\lceil\alpha\rceil}$, která navíc musí být integrovatelná. Kdežto kdybychom za definici vzali vztah (4.34), stačilo by pouze, aby $f \in C^{\lfloor\alpha\rfloor}[a,b]$. Opravdu, někteří autoři takto postupovali. Obsáhlejší komentář lze nalézt např. v [6, str. 50-51].

Na závěr alespoň stručně popišme v úvodu zmíněné výhody Caputovy derivace. Při jejím použití v diferenciálních rovnicích, se za počáteční a okrajové podmínky volí celočíselné derivace hledané funkce. To jsou známé a dobře měřitelné fyzikální veličiny. Na druhou stranu u diferenciálních rovnic s Riemann-Liouvilleovou derivací, se předepisují neceločíselné derivace hledané funkce, jejichž fyzikální či geometrická interpretace a tedy i změřitelnost není známa [21]. Podrobněji je pak tento problém popsán v [6]. Základy teorie neceločíselných diferenciálních rovnic lze najít např. v [7] a [6].

4.4 Grünwald-Letnikovova derivace

Poslední definice, kterou se podrobněji zabýváme je Grünwald-Letnikovova. Narozdíl od Riemann-Liouvilleova přístupu, který vychází nejprve z neceločíselné integrace, je Grünwald-Letnikovova derivace definovaná pomocí neceločíselných diferenčních podílů. V této práci ji využijeme ke konstrukci jednoduchého algoritmu na numerickou aproximaci Riemann-Liouvilleovy derivace. Kromě stručné motivace tak uvádíme pouze větu o shodě těchto definic.

Derivace funkce f v bodě x je definovaná jako limita

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Derivace vyšších řádů jsou pak definovány induktivně

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x-h)}{h}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pro nás důležité bude vyjádření derivace pomocí zpětných diferencí. Zpětná diference funkce f v bodě x s krokem h je rovna sumě

$$\left(\Delta_h^n f\right)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x-kh).$$

Je známo [12, str. 612], že pokud existuje n-tá derivace funkce f v bodě x a je konečná, je rovna limitě

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\Delta_h^n f\right)(x)}{h^n} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x-kh)}{h^n}.$$

Abychom mohli definovat derivaci libovolného řádu, stačí dát výrazu $\left(\Delta_h^n f\right)(x)$ smysl i pro $n \in \mathbb{R}$. Zpětná diference řádu $\alpha > 0$ se definuje takto [7, str. 371]

$$\left(\Delta_h^\alpha f\right)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh), \quad \alpha > 0. \tag{4.35}$$

Možné opodstatnění této definice lze najít v její Fourierově transformaci [7, str. 373].

Definujeme-li $\binom{n}{k} = 0$, pro $k > n$, $k, n \in \mathbb{N}$, shoduje se pro $\alpha \in \mathbb{N}$ tato nová definice se starou. Nevýhodou však je, že pro $\alpha \notin \mathbb{N}$ je potřeba znát hodnoty funkce f mimo interval $[a, b]$. Obvykle se tento problém řeší tak, že funkci f položíme mimo interval $[a, b]$ identicky rovnou 0. Navíc se tak suma (4.35) stane konečnou. Proto definujeme levou a pravou Grünwald-Letnikovovu derivaci následovně.

Definice 4.7. *Pro $\alpha > 0$ a funkci f:$[a, b] \to \mathbb{R}$ definujeme* levou *a* pravou Grünwald-Letnikovovu derivaci *popořadě*

$$\left({}^{GL}D_{a+}^\alpha f\right)(x) = \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{x-a}{h} \right\rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x-jh) \tag{4.36}$$

a

$$\left({}^{GL}D_{b-}^\alpha f\right)(x) = \lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{a-x}{h} \right\rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x+jh). \tag{4.37}$$

Poznámka. Limitu ve výrazech (4.36) a (4.37) můžeme uvažovat pro všechna x, s.v. x nebo ve smyslu nějaké normy funkcí.

Grünwald-Letnikovova derivace se nazývá levá a pravá ze stejných důvodů jako Riemann-Liouvilleova. A protože jsme se zabývali převážně levými derivacemi (i Caputovu derivaci jsme definovali pomocí levé Riemann-Liouvilleovy), týká se následující věta pouze levých derivací.

Věta 4.15. *Nechť $0 < \alpha < 1$ a $f \in I^{\alpha}_{a+}(L^1)$. Pak Grünwald-Letnikovova derivace funkce f existuje ve smyslu L^1-konvergence a je ${}^{GL}D^{\alpha}_{a+}f = D^{\alpha}_{a+}f$ s.v. v $[a,b]$. Navíc, je-li $f \in C^{\lceil\alpha\rceil}[a,b]$, platí tato rovnost všude v $(a,b]$.*

Důkaz. První část tvrzení je důsledkem vět obsažených v [7], konkrétně Věty 2.6 na str. 48, Důsledku Věty 13.1 na str. 228 a Věty 20.6 na str. 386. Druhá část je dokázána v [6, str. 43]. $\square$

Protože pro $\alpha < 1$ patří absolutně spojitá funkce do $I^{\alpha}_{a+}(L^1)$ (Věta 4.9), dostáváme, že pro absolutně spojité funkce se obě definice shodují.

Věta o ekvivalenci této definice s Riemann-Liouvilleovou není ideální. Nevýhodou je rozsah řádu derivace $\alpha \in (0,1)$ a konvergence pouze v L^1-normě. V literatuře se nám však žádnou lepší formulaci nepodařilo nalézt, dokonce ani toto zde uvedené znění jsme nikde nenalezli explicitně zformulované. Kniha [7] se zabývá spíše Grünwald-Letnikovovou derivací definovanou na celé reálné ose.

Kapitola 5

Riemann-Liouvilleovy integrály a derivace některých funkcí

V této kapitole spočteme Riemann-Liouvilleovy integrály a derivace funkcí $(x-a)^\beta$ pro $\beta > -1$, $e^{\lambda x}$ s $\lambda > 0$, $\sin(\omega x)$ a $\cos(\omega x)$ pro $\omega > 0$ na omezeném intervalu $[a,b]$. Tedy jako dolní mez budeme brát bod a. Pro jednoduchost omezíme řád integrace i derivace na interval $(0,1)$. V poslední části spočteme Riemann-Liouvilleovu derivaci řádu $\alpha \in (0,1)$ speciálních funkcí (anglicky nazývaných např. *hat function* nebo *tent function*) používaných v metodě konečných prvků.

5.1 Riemann-Liouvilleovy integrály

Začneme počítáním Riemann-Liouvilleových integrálů, protože jejich znalost uplatníme při počítání derivací.

Mocninná funkce

Riemann-Liouvilleův integrál funkce $(x-a)^\beta$ pro $\beta > -1$ jsme spočetli už dříve v Sekci 4.1. Proto rovnou uvádíme výsledek

$$I_{a+}^{\alpha}\,(x-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\alpha+\beta)}\,(x-a)^{\alpha+\beta}\,.$$

Exponenciální funkce

Podle definice je

$$I_{a+}^{\alpha} e^{\lambda x} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{e^{\lambda t}}{(x-t)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}t.$$

Použitím substituce $t = x - \frac{s}{\lambda}$ přejde tento integrál na tvar

$$I_{a+}^{\alpha} e^{\lambda x} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\lambda(x-a)}^{0} e^{\lambda x - s} \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\alpha-1} \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \mathrm{d}s = \frac{e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)\lambda^{\alpha}} \int\limits_0^{\lambda(x-a)} e^{-s} s^{\alpha-1}\,\mathrm{d}s.$$

Protože je $\lambda > 0$, je tento integrál hodnota dolní neúplné Gama funkce (Definice 3.2) v bodě $\lambda(x-a)$, takže máme

$$I_{a+}^{\alpha} e^{\lambda x} = \frac{e^{\lambda x}}{\Gamma(\alpha)\lambda^{\alpha}} \gamma(\alpha, \lambda(x-a))$$

Funkce sinus a cosinus

Poslední ze základních funkcí, které budeme počítat, jsou $\sin(\omega x)$ a $\cos(\omega x)$ s $\omega > 0$. Pro $\omega < 0$ se využije lichosti respektive sudosti funkcí k převedení na předchozí případ. Kromě obecného situace $\alpha \in (0,1)$ počítáme zvlášť případ $\alpha = \frac{1}{2}$, pro který lze výsledek zapsat v jiném tvaru. Ten bude vhodnější pro numerické výpočty potřebné v Sekci 6.3. Podrobné postupy předvedeme jen u funkce $\sin(\omega x)$, protože pro funkci $\cos(\omega x)$ se vše počítá podobně. Je

$$I_{a+}^{\alpha} \sin(\omega x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{x} \frac{\sin(\omega t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \, \mathrm{d}t.$$

Stejně jako u exponenciály použijeme substituci $t = x - \frac{s}{\omega}$, čímž dostáváme

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} \sin(\omega x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\omega(x-a)}^{0} \sin(\omega x - s) \left(\frac{s}{\omega}\right)^{\alpha-1} \left(-\frac{1}{\omega}\right) \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\omega^{\alpha}} \int_{0}^{\omega(x-a)} s^{\alpha-1} \sin(\omega x - s) \, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Dále využijeme součtový vzorec $\sin(\omega x - s) = \cos(s)\sin(\omega x) - \cos(\omega x)\sin(s)$, takže je

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} \sin(\omega x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\omega^{\alpha}} \Bigg(&\sin(\omega x) \int_{0}^{\omega(x-a)} s^{\alpha-1} \cos(s) \, \mathrm{d}s \\ &- \cos(\omega x) \int_{0}^{\omega(x-a)} s^{\alpha-1} \sin(s) \, \mathrm{d}s \Bigg) \end{aligned}$$

Použijeme-li značení zavedené v Definici 3.5 Böhmerových integrálů, dospíváme k výsledku

$$\begin{aligned} &I_{a+}^{\alpha} \sin(\omega x) \\ &\quad = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\omega^{\alpha}} \Big(\sin(\omega x) \operatorname{bc}(\alpha, \omega(x-a)) - \cos(\omega x) \operatorname{bs}(\alpha, \omega(x-a)) \Big). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Riemann-Liouvilleův integrál funkce $\cos(\omega x)$ se dá spočítat podobným postupem, jen bychom použili součtový vzorec pro $\cos(\alpha + \beta)$. Uvádíme proto rovnou výsledek

$$\begin{aligned} &I_{a+}^{\alpha} \cos(\omega x) \\ &\quad = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\omega^{\alpha}} \Big(\cos(\omega x) \operatorname{bc}(\alpha, \omega(x-a)) + \sin(\omega x) \operatorname{bs}(\alpha, \omega(x-a)) \Big) \end{aligned} \tag{5.2}$$

Vztahy (5.1) a (5.2) můžeme pro $\alpha = \frac{1}{2}$ upravit na tvar obsahující známější Fresnelovy integrály (Definice 3.6). Použitím substituce $u = s^{\frac{1}{2}}$ ve vzorci (5.1) dostáváme

$$I_{a+}^{\frac{1}{2}} \sin(\omega x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\sqrt{\omega}} \left(\sin(\omega x) \int_0^{\sqrt{\omega(x-a)}} u^{-1} \cos\big(u^2\big)\, 2u \,\mathrm{d}u \right.$$
$$\left. - \cos(\omega x) \int_0^{\sqrt{\omega(x-a)}} u^{-1} \sin\big(u^2\big)\, 2u \,\mathrm{d}s \right).$$

Využitím rovnosti (3.1) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ a dalšími úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\frac{1}{2}} \sin(\omega x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi\omega}} \left(\sin(\omega x) \int_0^{\sqrt{\omega(x-a)}} \cos(u^2)\,\mathrm{d}u - \cos(\omega x) \int_0^{\sqrt{\omega(x-a)}} \sin(u^2)\,\mathrm{d}s \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi\omega}} \left(\sin(\omega x)\, \mathrm{FC}\Big(\sqrt{\omega\,(x-a)}\Big) - \cos(\omega x)\, \mathrm{FS}\Big(\sqrt{\omega\,(x-a)}\Big) \right), \end{aligned} \tag{5.3}$$

kde FC a FS je Fresnelův cosinus, respektive sinus. Podobně pro funkci $\cos(\omega x)$ je

$$I_{a+}^{\frac{1}{2}} \cos(\omega x) = \frac{2}{\sqrt{\pi\omega}} \left(\cos(\omega x)\, \mathrm{FC}\Big(\sqrt{\omega\,(x-a)}\Big) + \sin(\omega x)\, \mathrm{FS}\Big(\sqrt{\omega\,(x-a)}\Big) \right). \tag{5.4}$$

5.2 Riemann-Liouvilleovy derivace

Výsledky získané v Sekci 5.1 teď využijeme pomocí Věty 4.13 k výpočtu Riemann-Liouvilleových derivací. Navíc u funkcí $e^{\lambda x}$, $\sin(\omega x)$ a $\cos(\omega x)$ ukážeme jak je výsledek ovlivněn limitním přechodem dolní meze $a \to -\infty$.

Mocninná funkce

V Sekci 4.2 jsme ukázali, že pro $\alpha \in (0,1)$ je

$$D_{a+}^{\alpha} (x-a)^{\beta} = \begin{cases} 0 & \text{pro } \beta = \alpha - 1 \\ \dfrac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Exponenciální funkce

Protože $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$, můžeme podle Věty 4.13 psát

$$\begin{aligned} D_{a+}^{\alpha} e^{\lambda x} &= \frac{e^{\lambda a}}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha} + I_{a+}^{1-\alpha} \lambda e^{\lambda x} \\ &= \frac{e^{\lambda a}}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha} + \frac{\lambda^{\alpha} e^{\lambda x}}{\Gamma(1-\alpha)} \gamma(1-\alpha, \lambda(x-a)). \end{aligned}$$

Zvolme nějaké pevné x a uvažme $a \to -\infty$. Protože je z definice $\gamma\,(1-\alpha,\,+\infty) = \Gamma(1-\alpha)$, dostáváme podle základních vět o limitě součtu a součinu a věty o limitě složené funkce, že

$$D^{\alpha}_{-\infty} e^{\lambda x} = \lambda^{\alpha} e^{\lambda x}.$$

Srovnej s klasickým případem pro $n \in \mathbb{N}$, kde

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n} e^{\lambda x} = \lambda^{n} e^{\lambda x}.$$

Funkce sinus a cosinus

První derivace funkce $\sin(\omega x)$ je rovna $\omega\cos(\omega x)$, takže podle Věty 4.13 je

$$D^{\alpha}_{a+}\sin(\omega x) = \frac{\sin(\omega a)}{\Gamma(1-\alpha)}\,(x-a)^{-\alpha} + I^{1-\alpha}_{a+}\omega\cos(\omega x).$$

Dosazením za $I^{1-\alpha}_{a+}\omega\cos(\omega x)$ dospíváme k výsledku

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a+}\sin(\omega x) = {} & \frac{\sin(\omega a)}{\Gamma(1-\alpha)}\,(x-a)^{-\alpha} \\ & + \frac{\omega^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(\cos(\omega x)\,\mathrm{bc}(1-\alpha,\omega(x-a)) + \sin(\omega x)\,\mathrm{bs}(1-\alpha,\omega(x-a))\Big). \end{aligned}$$

Pro funkci $\cos(\omega x)$ by se stejným postupem spočetlo, že

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a+}\cos(\omega x) = {} & \frac{\sin(\omega a)}{\Gamma(1-\alpha)}\,(x-a)^{-\alpha} \\ & + \frac{\omega^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(\cos(\omega x)\,\mathrm{bs}(1-\alpha,\omega(x-a)) - \sin(\omega x)\,\mathrm{bc}(1-\alpha,\omega(x-a))\Big). \end{aligned}$$

Uvažme pro libovolné pevné x $a \to -\infty$. Pomocí elementárních limitních úvah a Lemmatu 3.5 o hodnotě Böhmerových integrálů snadno spočteme, že

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{-\infty}\sin(\omega x) &= \frac{\omega^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(\cos(\omega x)\Gamma(1-\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\frac{\pi}{2}\right) \\ &\qquad + \sin(\omega x)\Gamma(1-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\frac{\pi}{2}\right)\Big) \\ &= \omega^{\alpha}\Big(\cos(\omega x)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\frac{\pi}{2}\right) \\ &\qquad + \sin(\omega x)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\frac{\pi}{2}\right)\Big). \end{aligned}$$

Protože je

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right), \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right), \\ \cos(\omega x)\sin\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) + \sin(\omega x)\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(\omega x + \alpha\frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

dospíváme k výsledku

$$D^{\alpha}_{-\infty} \sin(\omega x) = \omega^{\alpha} \sin\left(\omega x + \alpha\frac{\pi}{2}\right).$$

To spíše odpovídá celočíselnému případu, kde pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n} \sin(\omega x) = \omega^{n} \sin\left(\omega x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Pro $\alpha = \frac{1}{2}$ můžeme Riemann-Liouvilleovy derivace obou funkcí zapsat opět pomocí Fresnelových integrálů. Stačí dosadit ze vzorců (5.3) a (5.4), takže

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}}_{a+} \sin(\omega x) = {} & \frac{\sin(\omega a)}{\sqrt{\pi\,(x-a)}} \\ & + 2\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\Bigg(\cos(\omega x)\,\mathrm{FC}\Big(\sqrt{\omega\,(x-a)}\Big) + \sin(\omega x)\,\mathrm{FS}\Big(\sqrt{\omega\,(x-a)}\Big)\Bigg), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^{\frac{1}{2}}_{a+} \cos(\omega x) = {} & \frac{\cos(\omega a)}{\sqrt{\pi\,(x-a)}} \\ & + 2\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\Bigg(\cos(\omega x)\,\mathrm{FS}\Big(\sqrt{\omega\,(x-a)}\Big) - \sin(\omega x)\,\mathrm{FC}\Big(\sqrt{\omega\,(x-a)}\Big)\Bigg). \end{aligned}$$

5.3 Příprava na metodu konečných prvků

Pro řešení obyčejných nebo parciálních diferenciálních rovnic s neceločíselnými derivacemi se často používá metoda konečných diferencí. Další často používanou metodou je metoda konečných prvků, kterou bychom se chtěli výhledově zabývat. To málo, co je v této práci možné k metodě konečných prvků vypracovat, je spočtení Riemann-Liouvilleových derivací bázových funkcí (angl. *hat function* či *tent function*), které nyní popíšeme.

Uvažujme omezený, uzavřený interval $[a, b]$ s libovolným pevným dělením $a = x_0, x_1, \ldots, x_N = b$, kde $N \in \mathbb{N}$. Pro toto dělení definujeme bázové funkce $f_i(x)$, $i = 0, \ldots, N$ tímto způsobem

$$f_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & \text{pro } x \in [x_0, x_1], \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases} \tag{5.5}$$

$$f_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{pro } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{pro } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{jinak}, \end{cases} \qquad i \in \{1, \ldots, N-1\}, \tag{5.6}$$

$$f_N(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}} & \text{pro } x \in [x_{N-1}, x_N], \\ 0 & \text{jinak}. \end{cases} \tag{5.7}$$

Bázové funkce jsou po částech afinní a platí, že $f_i(x_j) = \delta_{ij}$. Libovolnou funkci $g(x)$ definovanou na intervalu $[a, b]$ tak interpolujeme lineární kombinací

$$g(x) \approx \sum_{i=0}^{N} g(x_i) f_i(x).$$

Pro interval $[0, 1]$ s rovnoměrným dělením o pěti uzlech jsou na Grafech 5.1, 5.2 a 5.3 znázorněny bázové funkce $f_0(x)$, $f_2(x)$, $f_4(x)$ a jejich derivace řádu $\alpha = \frac{1}{2}$.

Nyní přistupme k počítání derivací. Funkce f_i, $i = 0, \ldots, N$, jsou po částech absolutně spojité, takže podle Věty 2.8 jsou absolutně spojité na celém intervalu $[x_0, x_N]$. Můžeme proto psát pro $i = 0, \ldots, N$

$$\left(D^{\alpha}_{x_0+} f_i\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{f_i(x_0)}{(x-x_0)^{\alpha}} + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{f_i'(t)}{(x-t)^{\alpha}} \,\mathrm{d}t \right). \tag{5.8}$$

Stále uvažujeme $\alpha \in (0, 1)$. Početní postup je sice zdlouhavý, ale není nijak složitý a je u všech bázových funkcí stejný. Proto podrobněji komentujeme pouze prvních pár výpočtů.

Jako první budeme počítat derivaci funkce $f_0(x)$. Výpočet rozdělíme do více částí podle definice funkce $f_0(x)$.

1. $x_0 \leq x \leq x_1$

$$\left(D^{\alpha}_{x_0+} f_0\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{1}{(x-x_0)^{\alpha}} + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{-1}{(x_1-x_0)(x-t)^{\alpha}} \,\mathrm{d}t \right).$$

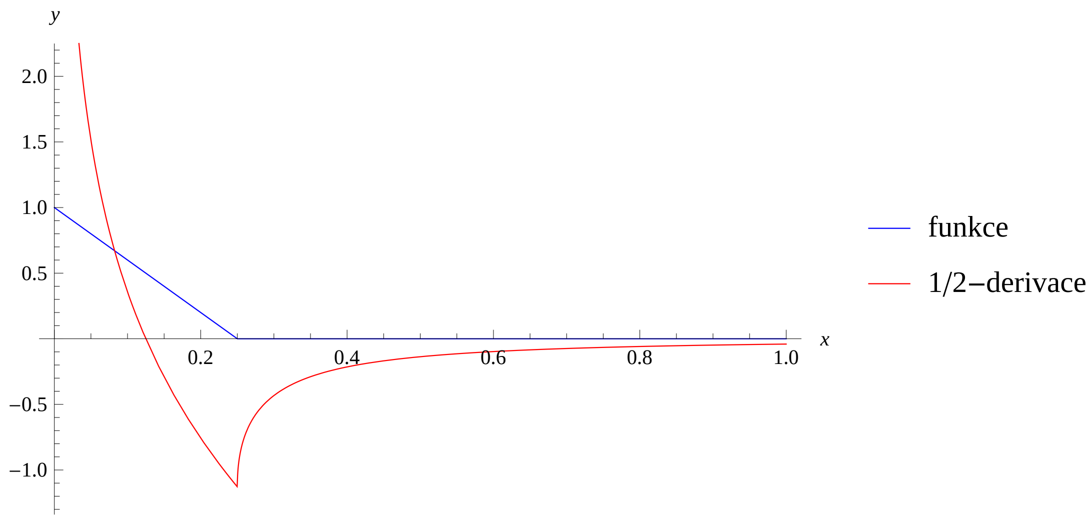
   Integrál spočteme pomocí primitivní funkce a dalšími aritmetickými úpravami dospíváme k výsledku.

$$\begin{aligned} \left(D^{\alpha}_{x_0+} f_0\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left((x-x_0)^{-\alpha} + \frac{1}{(x_1-x_0)} \left[\frac{1}{1-\alpha} (x-t)^{1-\alpha} \right]_{t=x_0}^{t=x} \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (x-x_0)^{-\alpha} - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)(x_1-x_0)} (x-x_0)^{1-\alpha}, \end{aligned}$$

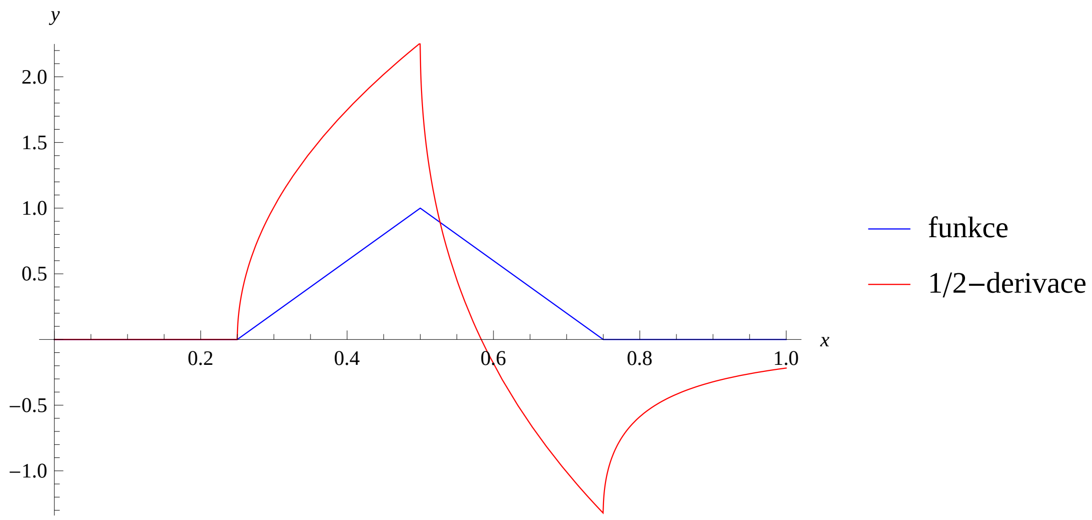
2. $x_1 \leq x \leq x_N$

   Nyní je situace o něco komplikovanější, protože i derivace $f_i'(t)$ je definovaná po částech. Rozdělíme proto integrační obor integrálu z (5.8) na interval $[x_0, x_1]$, kde je $f_i'(t) \equiv -1$, a interval $[x_1, x]$, kde je $f_i'(t) \equiv 0$.

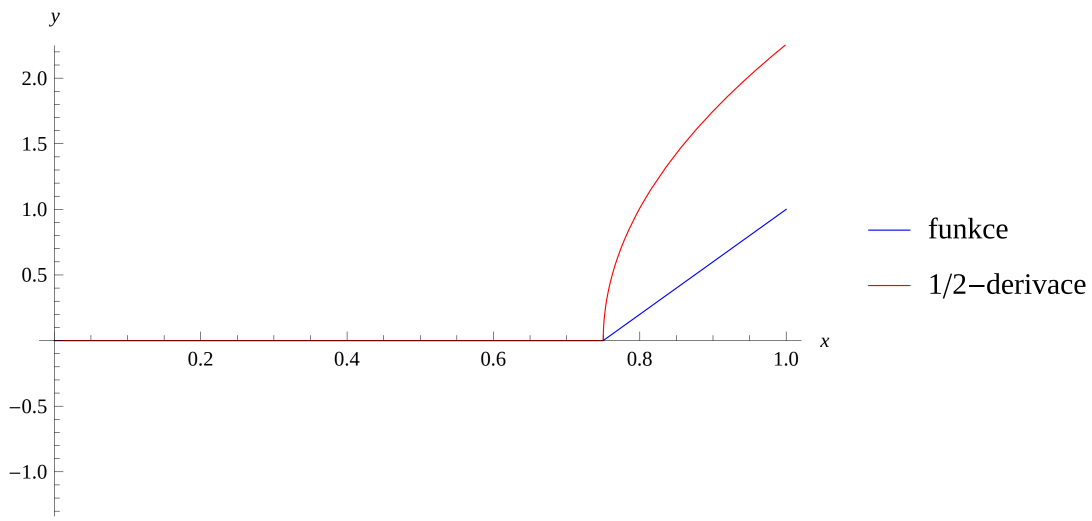
$$\begin{aligned} \left(D^{\alpha}_{x_0+} f_0\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{1}{(x-x_0)^{\alpha}} + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{-1}{(x_1-x_0)(x-t)^{\alpha}} \,\mathrm{d}t \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{1}{(x-x_0)^{\alpha}} + \frac{1}{x_1-x_0} \left[\frac{1}{1-\alpha} (x-t)^{1-\alpha} \right]_{t=x_0}^{t=x_1} \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (x-x_0)^{-\alpha} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)(x_1-x_0)} \left((x-x_1)^{1-\alpha} - (x-x_0)^{1-\alpha} \right). \end{aligned}$$



Graf 5.1: Bázová funkce $f_0(x)$ a její půltá derivace.



Graf 5.2: Bázová funkce $f_2(x)$ a její půltá derivace.



Graf 5.3: Bázová funkce $f_4(x)$ a její půltá derivace.

Dále spočteme stejným postupem derivaci funkcí $f_i(x)$ pro $i = 1, \ldots, N-1$

1. $x_0 \le x \le x_{i-1}$
$$\left(D^{\alpha}_{x_0+} f_i\right)(x) = 0,$$

2. $x_{i-1} \le x \le x_i$

$$\begin{aligned}
\left(D^{\alpha}_{x_0+} f_i\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{x_{i-1}}^{x} \frac{1}{(x_i - x_{i-1})(x-t)^{\alpha}}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(x_i - x_{i-1})} \left[\frac{-1}{1-\alpha}(x-t)^{1-\alpha}\right]_{t=x_{i-1}}^{t=x} \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)(x_i - x_{i-1})} (x - x_{i-1})^{1-\alpha},
\end{aligned}$$

3. $x_i \le x \le x_{i+1}$

$$\begin{aligned}
\left(D^{\alpha}_{x_0+} f_i\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{(x_i - x_{i-1})(x-t)^{\alpha}}\, \mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{x_i}^{x} \frac{-1}{(x_{i+1} - x_i)(x-t)^{\alpha}}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(x_i - x_{i-1})} \left[\frac{-1}{1-\alpha}(x-t)^{1-\alpha}\right]_{t=x_{i-1}}^{t=x_i} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(x_{i+1} - x_i)} \left[\frac{1}{1-\alpha}(x-t)^{1-\alpha}\right]_{t=x_i}^{t=x} \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)(x_i - x_{i-1})} \left((x - x_{i-1})^{1-\alpha} - (x - x_i)^{1-\alpha}\right) \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)(x_{i+1} - x_i)} (x - x_i)^{1-\alpha} \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)(x_i - x_{i-1})} (x - x_{i-1})^{1-\alpha} \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\frac{1}{(x_i - x_{i-1})} + \frac{1}{(x_{i+1} - x_i)}\right)(x - x_i)^{1-\alpha} \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)(x_i - x_{i-1})} (x - x_{i-1})^{1-\alpha} \\
&\quad - \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{\Gamma(2-\alpha)(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} (x - x_i)^{1-\alpha},
\end{aligned}$$

4. $x_{i+1} \le x \le x_N$

$$\begin{aligned}
\left(D^{\alpha}_{x_0+} f_i\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{(x_i - x_{i-1})\,(x-t)^{\alpha}}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-1}{(x_{i+1} - x_i)\,(x-t)^{\alpha}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\,(x_i - x_{i-1})} \left[\frac{-1}{1-\alpha}\,(x-t)^{1-\alpha}\right]_{t=x_{i-1}}^{t=x_i} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\,(x_{i+1} - x_i)} \left[\frac{1}{1-\alpha}\,(x-t)^{1-\alpha}\right]_{t=x_i}^{t=x_{i+1}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,(x_i - x_{i-1})} \left((x - x_{i-1})^{1-\alpha} - (x - x_i)^{1-\alpha} \right) \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,(x_{i+1} - x_i)} \left((x - x_i)^{1-\alpha} - (x - x_{i+1})^{1-\alpha} \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,(x_i - x_{i-1})}\,(x - x_{i-1})^{1-\alpha} \\
&\quad - \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{\Gamma(2-\alpha)\,(x_i - x_{i-1})\,(x_{i+1} - x_i)}\,(x - x_i)^{1-\alpha} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,(x_{i+1} - x_i)}\,(x - x_{i+1})^{1-\alpha},
\end{aligned}$$

Derivace poslední bázové funkce $f_N(x)$ jsme už v podstatě spočetli v bodech 1. a 2. u funkcí $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, N-1$. Pro pořádek ji ale uvádíme zvlášť.

1. $x_0 \le x \le x_{N-1}$

$$\left(D^{\alpha}_{x_0+} f_N\right)(x) = 0,$$

2. $x_{N-1} \le x \le x_N$

$$\left(D^{\alpha}_{x_0+} f_N\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,(x_N - x_{N-1})}\,(x - x_{N-1})^{1-\alpha}\,.$$

Výhoda metody konečných prvků v případě klasické derivace je, že bázové funkce a jejich první derivace mají stejný omezený nosič. Avšak Riemann-Liouvilleovy derivace bázových funkcí mají zprava neomezené nosiče, a lze tak očekávat větší složitost metody. Někdy se počítá i pravá derivace společně s levou, tedy $\left(D^{\alpha}_{x_0+} + D^{\alpha}_{x_N-}\right) f$. Nosič této oboustranné derivace je pak celý interval $[x_0, x_N]$. Příčinou je nelokálnost neceločíselné derivace, která zvyšuje složitost algoritmů obecně, [23, str. 2].

Kapitola 6

Numerické aproximace Riemann-Liouvilleovy derivace

V poslední kapitole uvedeme dva algoritmy na výpočet levých neceločíselných derivací. První odvodíme z Grünwald-Letnikovovy definice a bude vhodný pro libovolný řád α. Ke konstrukci druhého algoritmu vyjdeme z Riemann-Liouvilleovy definice a jeho použitelnost bude omezena na řád $\alpha \in (0,1)$. Oba dva algoritmy jsou navrženy pro dolní mez $a = 0$. Omezení na řád a dolní mez jsme takto zvolili, protože podle [20, str. 115] mají největší využití Riemann-Liouvilleovy derivace řádu $\alpha = \frac{1}{2}$ s dolní mezí $a = 0$. Pro aproximaci Caputovy derivace žádný algoritmus neodvozujeme, ale v Sekci 6.2 je naznačen možný postup, jak takový algoritmus sestavit. Nakonec oba algoritmy otestujeme na vybraných funkcích.

Po celou dobu se v našich úvahách omezíme na funkce z třídy $C^1[a,b]$, protože pro ně nám Věta 4.15 zaručuje jak existenci, tak vzájemnou ekvivalenci Riemann--Liouvilleovy a Grünwald-Letnikovovy definice v intervalu $(a,b]$. Budeme proto používat jednotné značení D^α_{0+}.

Oba algoritmy jsou uvedené v [20, str. 136], kde lze navíc nalézt asymptotické odhady chyby.

6.1 Algoritmy založené na Grünwald-Letnikovově definici

Ve vzorci (4.36) z definice Grünwald-Letnikovovy derivace zapíšeme kombinační čísla pomocí Gama funkce podle Věty (3.3)

$$\begin{aligned} D^\alpha_{0+} f &= \lim_{h \to 0_+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{x}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x - jh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \lim_{h \to 0_+} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{x}{h} \rfloor} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)} f(x - jh). \end{aligned}$$

Jednoduchou aproximaci získáme tak, že nahradíme limitu malým kladným h. Budeme volit $h = \frac{x}{N}$, kde $N \in \mathbb{N}$, takže pro větší N máme lepší aproximaci.

$$D^\alpha_{0+} f \approx \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \left(\frac{N}{x}\right)^\alpha \sum_{j=0}^{N} \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)} f\left(x - j\frac{x}{N}\right). \tag{6.1}$$

Hodnota N značí počet uzlů rovnoměrného dělení intervalu $[0, x]$. K výpočtu derivace používáme hodnoty funkce f právě v těchto uzlech.

Dále využijeme rekurenci Gama funkce (Věta 3.1), podle níž je

$$\frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(j+1)} = \frac{j-1-q}{j} \cdot \frac{\Gamma(j-1-\alpha)}{\Gamma(j)}.$$

Postupným vytýkaním pak můžeme vzorec (6.1) upravit na tvar podobný Hornerovu schématu pro polynomy

$$D^{\alpha}_{0+}f \approx \left(\frac{N}{x}\right)^{\alpha} \Bigg(\bigg(\Big(\dots \Bigg(\bigg(\Big(f_N \frac{N-\alpha-1}{N} + f_{N-1}\Big) \frac{N-\alpha-2}{N-1} + f_{N-2}\bigg) \frac{N-\alpha-3}{N-2} + f_{N-3}\Bigg) \dots \Big) \frac{1-\alpha}{2} + f_1\bigg) \frac{-\alpha}{1} + f_0\Bigg),$$

kde

$$f_j = f\Big(x - j\frac{x}{N}\Big).$$

Výhoda tohoto schématu je, že se v něm explicitně nevyskytuje Gama funkce ($\Gamma(-\alpha)$ se pokrátilo) a že se snadno programuje (viz Program 6.1).

Program 6.1 Algoritmus na výpočet neceločíselné derivace odvozený z Grünwald-Letnikovovy definice. Implementován v jazyce *C++*.

```
/*
 * f - ukazatel na funkci, jejíž derivace se počítá
 * q - řád počítané derivace
 * x - bod, ve kterém se počítá derivace
 * N - počet uzlů
 */
double derivaceGL(double (*f)(double), double q, double x, int N)
{
    // Krok ekvidistantního dělení
    double h = x/N;
    // Konečná suma z GL definice
    double suma = (*f)(0);

    // Sčítání sumy přes "Hornerovo schéma"
    for (int j = N-1;j >=0 ;j--)
    {
        suma = ( suma*(j-q)/(j+1) + (*f)(x-j*h) );
    }

    // Přenásobení a vrácení výsledku
    return pow(h,-q)*suma;
}
```

6.2 Algoritmy založené na Riemann-Liouvilleově definici

Náš druhý algoritmus odvodíme z Věty 4.13, podle které je pro $\alpha \in (0,1)$

$$\left(D^{\alpha}_{0+}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(0)}{x^{\alpha}} + \int\limits_0^x \frac{f'(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha}}\,\mathrm{d}\tau\right).$$

Integrál ještě upravíme substitucí $t = x - \tau$ na vhodnější tvar

$$\left(D^{\alpha}_{0+}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(0)}{x^{\alpha}} + \int\limits_0^x \frac{f'(x-t)}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t\right). \tag{6.2}$$

Jediným numerickým problémem je spočtení tohoto integrálu. Za tímto účelem uvažme rovnoměrné dělení intervalu $[0,x]$, s dělícími uzly $x_j = jh$. Integrál pak můžeme psát jako sumu integrálů přes dílčí intervaly

$$\int\limits_0^x \frac{f'(x-t)}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{N-1} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{f'(x-t)}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t.$$

Na každém intervalu $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, N-1$, odhadneme derivaci $f'(x-t)$ konstantou vzhledem k t

$$f'(x-t) \approx \frac{f(x-x_{j-1}) - f(x-x_j)}{x_j - x_{j-1}}. \tag{6.3}$$

Po tomto odhadu můžeme každý z dílčích integrálů snadno analyticky spočítat

$$\begin{aligned}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{f'(x-t)}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t &\approx \frac{f(x-x_{j-1}) - f(x-x_j)}{x_j - x_{j-1}} \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(x-x_{j-1}) - f(x-x_j)}{x_j - x_{j-1}} \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{t=x_j}^{t=x_{j+1}} \\ &= \frac{f(x-x_{j-1}) - f(x-x_j)}{x_j - x_{j-1}} \cdot \frac{x_j^{1-\alpha} - x_{j-1}^{1-\alpha}}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Dosadíme-li $x_j = jh$ a $x = Nh$, spolu s dalšími úpravami dostáváme

$$\begin{aligned}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{f'(x-t)}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t &\approx \frac{f((N-j+1)\,h) - f((N-j)\,h)}{h} \cdot \frac{(jh)^{1-\alpha} - ((j-1)\,h)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ &= \frac{h^{-\alpha}}{1-\alpha}\big(f((N-j+1)\,h) - f((N-j)\,h)\big)\left(j^{1-\alpha} - (j-1)^{1-\alpha}\right).\end{aligned}$$

Po dosazení tohoto všeho do (6.2) máme

$$\begin{aligned}\left(D^{\alpha}_{0+}f\right)(x) \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\bigg(&\frac{f(0)}{x^{\alpha}} \\ &+ \frac{h^{-\alpha}}{1-\alpha}\sum_{j=0}^{N-1}\big(f((N-j+1)\,h) - f((N-j)\,h)\big)\left(j^{1-\alpha} - (j-1)^{1-\alpha}\right)\bigg).\end{aligned}$$

Vytknutím $\left(h^{-\alpha}\right)/(1-\alpha) = \left(x^{-\alpha}N^{\alpha}\right)/(1-\alpha)$ dospíváme ke konečné podobě

$$\begin{aligned}\left(D^{\alpha}_{0+}f\right)(x) \approx \frac{x^{-\alpha}N^{\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\Bigg(&\frac{f(0)\,(1-\alpha)}{N^{\alpha}}\\ &+\sum_{j=0}^{N-1}\big(f((N-j+1)\,h)-f((N-j)\,h)\big)\left(j^{1-\alpha}-(j-1)^{1-\alpha}\right)\Bigg).\end{aligned}$$

Programová implementace tohoto algoritmu je v Programu 6.2.

Program 6.2 Algoritmus na výpočet neceločíselné derivace odvozený z Riemann-Liouvilleovy definice. Implementován v jazyce *C++*.

```
/*
 * f - ukazatel na funkci, jejíž derivace se počítá
 * q - řád počítané derivace
 * x - bod, ve kterém se počítá derivace
 * N - počet uzlů
 */
double derivaceRL(double (*f)(double), double q, double x, int N)
{
    // Počítaná derivace
    double suma = 0;
    // Krok ekvidistantního dělení
    double h = x/N;

    // Sečtení sumy odpovídající
    // Riemann-Liouvilleovu integrálu derivace
    for (int j = 0;j < N;j++)
    {
        suma += ( (*f)( (N-j)*h ) - (*f)( (N-j-1)*h ))
                *(pow(j+1,1-q) - pow(j,1-q) );
    }

    // Přičtení "konstanty"
    suma += (*f)(0)*(1-q) / pow(N,q);

    // Přenásobení
    return suma*pow(N/x,q)/gamma(2-q);
}
```

Lepší aproximace bychom mohli dosáhnout např. zlepšením odhadu derivace $f'(t)$. Místo odhadu (6.3) po částech konstantní funkcí můžeme použít po částech afinní funkci. Hodnotu derivace $f'(t)$ v koncových bodech intervalu $[x_j, x_{j+1}]$, pro $j = 1, \ldots, N-2$, nahradíme centrální diferencí, v uzlech x_0 a x_N jednostrannou diferencí. Další výpočet je pak podobný, ale mnohem pracnější.

Ještě jiná možnost výpočtu je Gaussovou kvadraturou získanou pomocí ortogonálních polynomů s váhou $t^{-\alpha}$ na intervalu $[0, 1]$. Použitím substituce $t = \tau x$

ve vzorci (6.2) zobrazíme interval $[0,x]$ na interval $[0,1]$ a je tak

$$\begin{aligned}\left(D^{\alpha}_{0+}f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(0)}{x^{\alpha}} + \int\limits_0^x \frac{f'(x-t)}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{f(0)}{x^{\alpha}} + x^{1-\alpha}\int\limits_0^1 \frac{f'(x\,(1-\tau))}{\tau^{\alpha}}\,\mathrm{d}\tau\right)\\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\,x^{\alpha}}\left(f(0) + x\int\limits_0^1 \frac{f'(x\,(1-\tau))}{\tau^{\alpha}}\,\mathrm{d}\tau\right).\end{aligned}$$

Bylo by však potřeba znát hodnotu derivace $f'(x\,(1-\tau_i))$, kde τ_i je kořen ortogonálního polynomu.

6.3 Prezentace numerických výsledků

Algoritmus odvozený z Grünwald-Letnikovovy definice budeme nazývat GL algoritmem, podobně druhý RL algoritmem. Oba algoritmy nyní otestujeme na těchto základních funkcích

$$\begin{aligned}
&f(x) = 1, && D^{\frac{1}{2}}_{0+}1 = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}, \quad x \in [0,1],\\
&f(x) = x, && D^{\frac{1}{2}}_{0+}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}, \quad x \in [0,1],\\
&f(x) = e^x, && D^{\frac{1}{2}}_{0+}e^x = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} + \frac{e^x}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{1}{2},x\right), \quad x \in [0,1],\\
&f(x) = \cos(x), && D^{\frac{1}{2}}_{0+}\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\cos(x)\,\mathrm{FS}\left(\sqrt{x}\right) - \sin(x)\,\mathrm{FC}\left(\sqrt{x}\right)\right),\\
& && x \in [0,4\pi].
\end{aligned}$$

Interval $[0,1]$ byl u prvních tří funkcí zvolen pro svoji jednoduchost. Jak uvidíme později, chování funkcí je na tomto intervalu dobře patrné. Přestože je funkce $\cos(x)$ 2π-periodická, o její půlté derivaci toto neplatí. Proto byl u funkce $\cos(x)$ zvolen interval o délce dvojnásobku periody, aby bylo vidět, jak moc je půltá derivace „aperiodická“.

Poslední funkce, jejíž derivaci budeme aproximovat, je

$$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2^{\frac{6}{12}}x) + \frac{1}{2}\sin(2^{\frac{15}{12}}x) + \frac{1}{2}\sin(2^{\frac{21}{12}}x) + \sin(4x), \quad x \in [0,4\pi]. \tag{6.4}$$

Jedná se o souzvuk tónů v temperovaném ladění.[1] Navíc má taková funkce složitější průběh, než všechny předešlé. Očekáváme proto, že k dosažení dobré aproximace bude potřeba větší počet uzlů, než třeba pro funkci $\cos(x)$. Přesná hodnota

[1]Motivací pro tuto na první pohled zvláštní volbu je hudební teorie. Na základním tónu o frekvenci $1/2\pi$ je posazen zlověstný tritón, na něm leží nervózní velká sexta, nad kterou opět visí tritón. To vše je završeno dramatickou malou tercií, která tvoří se základním tónem dvě čisté oktávy. Dohromady tak všechny tóny tvoří celek plný napětí.

půlté derivace je

$$
\begin{aligned}
D^{\frac{1}{2}}_{0+}&\left(\sin(x)+\frac{1}{2}\sin(2^{\frac{6}{12}}x)+\frac{1}{2}\sin(2^{\frac{15}{12}}x)+\frac{1}{2}\sin(2^{\frac{21}{12}}x)+\sin(4x)\right)\\
&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\big(\cos(x)\,\mathrm{FC}\big(\sqrt{x}\big)+\sin(x)\,\mathrm{FS}\big(\sqrt{x}\big)\big)\\
&\quad+\frac{2^{\frac{6}{24}}}{\sqrt{\pi}}\Big(\cos(2^{\frac{6}{12}}x)\,\mathrm{FC}\Big(2^{\frac{6}{24}}\sqrt{x}\Big)+\sin(2^{\frac{6}{12}}x)\,\mathrm{FS}\Big(2^{\frac{6}{24}}\sqrt{x}\Big)\Big)\\
&\quad+\frac{2^{\frac{15}{24}}}{\sqrt{\pi}}\Big(\cos(2^{\frac{15}{12}}x)\,\mathrm{FC}\Big(2^{\frac{15}{24}}\sqrt{x}\Big)+\sin(2^{\frac{15}{12}}x)\,\mathrm{FS}\Big(2^{\frac{15}{24}}\sqrt{x}\Big)\Big)\\
&\quad+\frac{2^{\frac{21}{24}}}{\sqrt{\pi}}\Big(\cos(2^{\frac{21}{12}}x)\,\mathrm{FC}\Big(2^{\frac{21}{24}}\sqrt{x}\Big)+\sin(2^{\frac{21}{12}}x)\,\mathrm{FS}\Big(2^{\frac{21}{24}}\sqrt{x}\Big)\Big)\\
&\quad+\frac{4}{\sqrt{\pi}}\big(\cos(4x)\,\mathrm{FC}\big(2\sqrt{x}\big)+\sin(4x)\,\mathrm{FS}\big(2\sqrt{x}\big)\big)
\end{aligned}
$$

.

Bude nás zajímat, s jakou přesností je algoritmus schopen aproximovat derivaci řádu $\alpha = \frac{1}{2}$ dané funkce $f(x)$ na daném intervalu I jako celek.

Za tímto účelem rozdělíme interval $I = [a, b]$ na 100 stejných dílků. Uzly tohoto dělení označme x_j, $j = 0, \ldots, 100$. V každém vnitřním uzlu intervalu I spočteme každým algoritmem neceločíselnou derivaci funkce f. Tento výpočet provedeme pro $N = 10, 20, 40, 80, 160$. Hodnota N je parametr algoritmu (viz Program 6.1 a 6.2) a pro větší hodnoty lze očekávat přesnější výsledek.

Pro každé N spočteme uzlovou funkci $e_N(x_j)$, $j = 1, \ldots, 99$, která značí absolutní chybu algoritmu při výpočtu derivace v bodě x_j. Konkrétně

$$e_N(x_j) = \left({}^{A}D^{\frac{1}{2}}_{0} f\right)(x_j) - \left(D^{\frac{1}{2}}_{0+} f\right)(x_j), \quad j = 1, \ldots, N,$$

kde ${}^{A}D^{\frac{1}{2}}_{0}$ je aproximace spočtená algoritmem. Celkovou chybu E_N daného algoritmu pak definujeme jako diskrétní L^2-normu této uzlové funkce, tedy

$$E_N = \sqrt{\frac{b-a}{100}\sum_{j=1}^{99} e_N^2(x_j)}.$$

Kromě celkové chyby budeme u obou algoritmů počítat tzv. *experimentální řád konvergence* definovaný jako

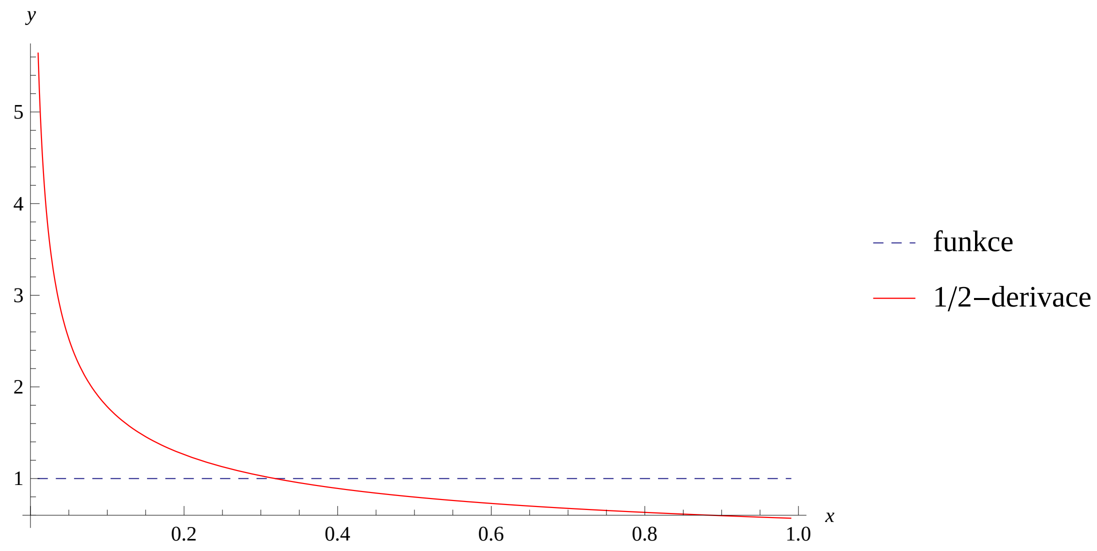
$$\alpha_l = \log_2\left(\frac{E_{N_{l+1}}}{E_{N_l}}\right), \quad l = 0, \ldots, 3, \tag{6.5}$$

kde $N_l = 10 \cdot 2^l$ značí použité hodnoty $N = 10, 20, 40, 80, 160$.

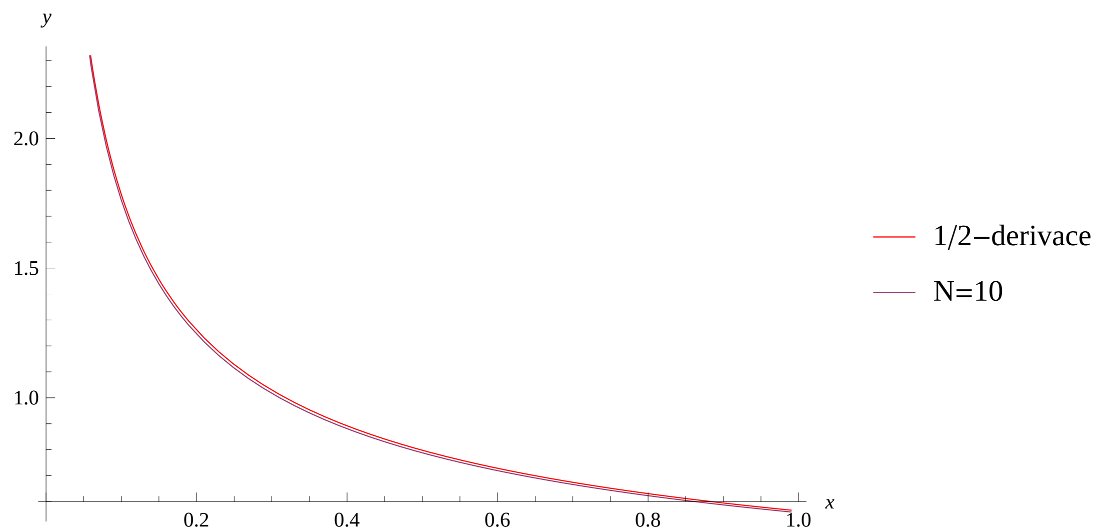
Spočtené aproximace a jejich absolutní chyby e_N známé v uzlech x_j, $j = 0, \ldots, 100$, jsme před zanesením do grafů po částech afinně interpolovali.

Konstantní funkce $f(x) = 1$

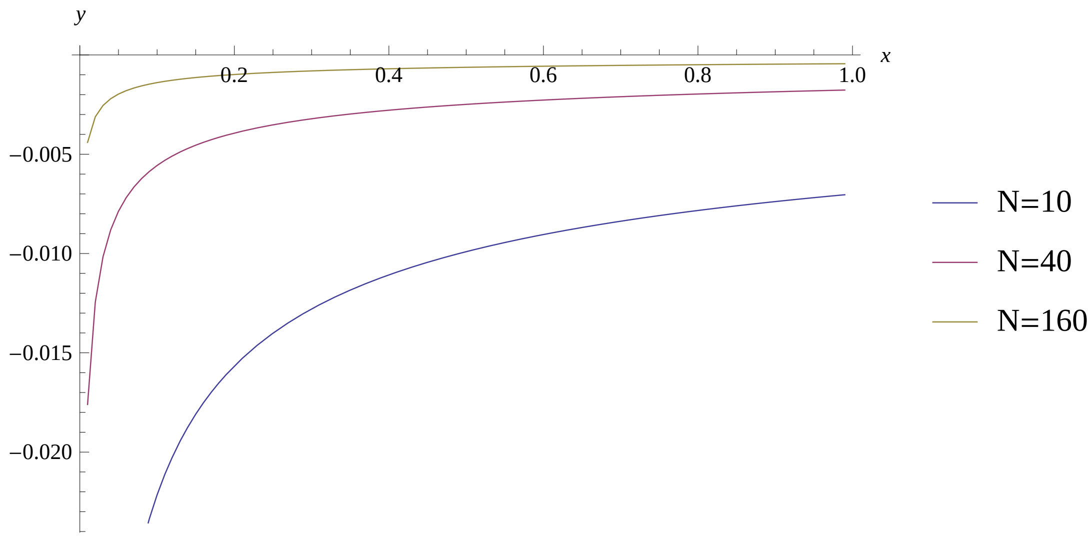
Průběh funkce a její derivace je znázorněn na Grafu 6.1. Aproximace spočtená GL algoritmem je spolu s přesným řešením vynesena na Grafu 6.2. Kvůli přehlednosti jsme uvedli aproximaci pouze pro $N = 10$ a i ta s přesnou derivací téměř splývá. Průběh chyby GL algoritmu pro vybrané hodnoty N je na Grafu 6.3. Výsledek RL algoritmu ani jeho chybu graficky neznázorňujeme, protože ze své konstrukce je RL algoritmus přesný pro všechny funkce s konstantní derivací. V Tabulce 6.1 jsou uvedeny absolutní chyby a experimentální řády konvergence obou algoritmů pro všechny hodnoty N_l. Kvůli zachování formy prezentovaných výsledků jsme uvedli experimentální řád konvergence i pro RL algoritmus, i když ten v tomhle případě nemá smysl. Jak už bylo řečeno, RL algoritmus počítá derivaci konstantní funkce na strojové přesnosti pro libovolné N, a proto experimentální řád konvergence (6.5) je numericky nulový.



Graf 6.1: Funkce $f(x) = 1$ a její půltá derivace.



Graf 6.2: Půltá derivace funkce $f(x) = 1$ a její aproximace spočtená GL algoritmem pro různé hodnoty N.



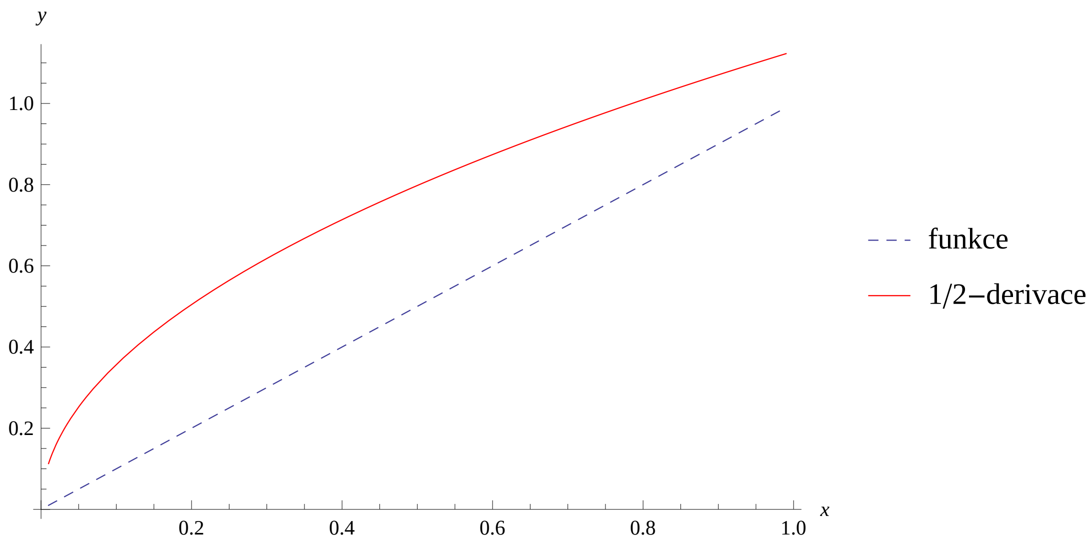
Graf 6.3: Průběh chyby GL algoritmu při počítání půlté derivace funkce $f(x) = 1$ pro různé hodnoty N.

l	(GL)E_{N_l}	(GL)α_l	(RL)E_{N_l}	(RL)α_l
0	1.59404E-02	—	1.75578E-14	—
1	7.99758E-03	0.995	1.75591E-14	0.000
2	4.00535E-03	0.998	1.75578E-14	0.000
3	2.00428E-03	0.999	1.75591E-14	0.000
4	1.00254E-03	0.999	1.75578E-14	0.000

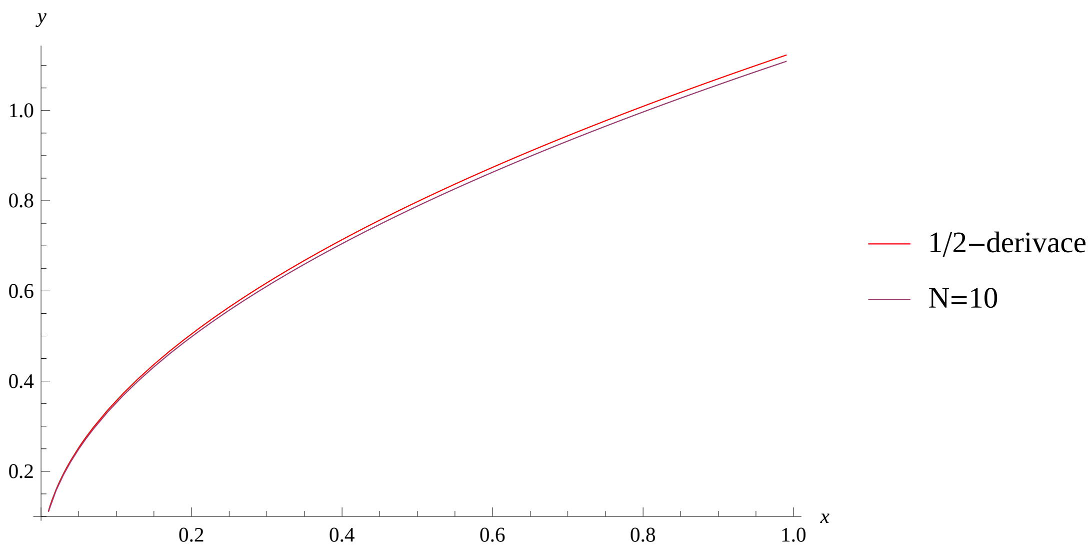
Tabulka 6.1: Absolutní chyba a experimentální řád konvergence GL a RL algoritmu při počítání derivace funkce $f(x) = 1$.

Funkce x

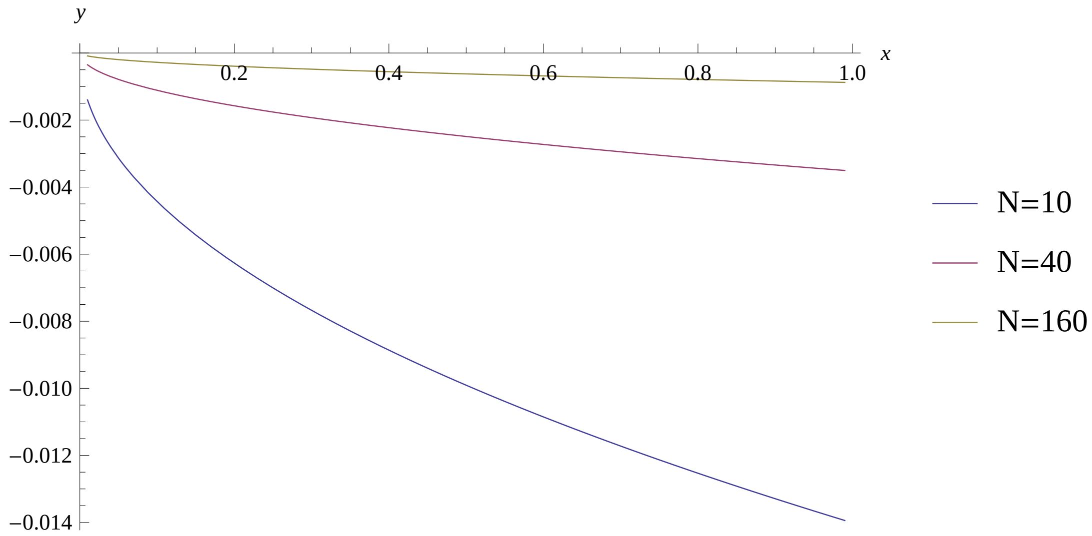
Ze stejného důvodu jako u funkce $f(x) = 1$ neuvádíme graf aproximace spočtené RL algoritmem ani její chyby. Funkci a její derivaci znázorňuje Graf 6.4. Porovnání GL aproximace s přesným řešením je na Grafu 6.5 (opět jen pro $N = 10$) a její chyba na Grafu 6.6. V Tabulce 6.2 jsou zapsány absolutní chyby a řády konvergence obou algoritmů. Stejně jako v případě konstantní funkce nemá experimentální řád konvergence spočtený pro RL algoritmus smysl.



Graf 6.4: Funkce $f(x) = x$ a její půltá derivace.



Graf 6.5: Půltá derivace funkce $f(x) = x$ a její aproximace spočtená GL algoritmem pro různé hodnoty N.



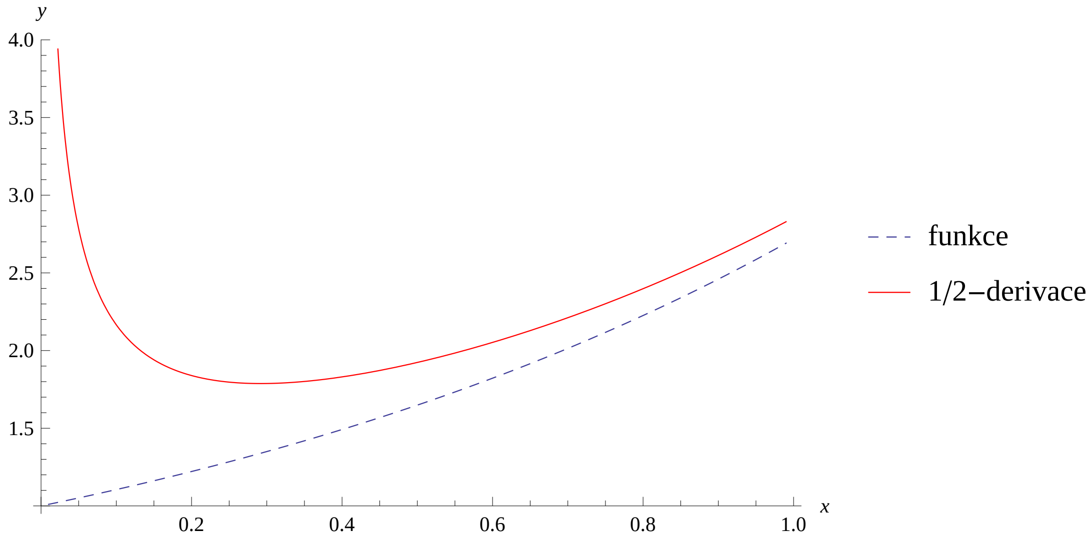
Graf 6.6: Průběh chyby GL algoritmu při počítání půlté derivace funkce $f(x) = x$ pro různé hodnoty N.

l	(GL)E_{N_l}	(GL)α_l	(RL)E_{N_l}	(RL)α_l
0	9.85773E-03	—	1.36097E-14	—
1	4.94580E-03	0.995	1.36093E-14	0.000
2	2.47695E-03	0.998	1.36134E-14	0.000
3	1.23947E-03	0.999	1.36118E-14	0.000
4	6.19980E-04	0.999	1.36175E-14	0.000

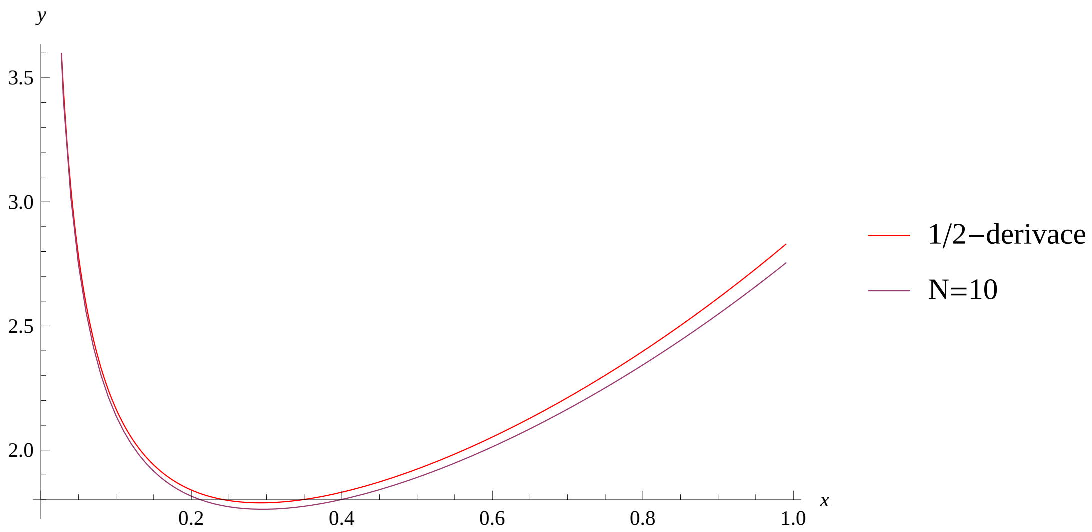
Tabulka 6.2: Absolutní chyba a experimentální řád konvergence GL a RL algoritmu při počítání derivace funkce $f(x) = x$.

Funkce e^x

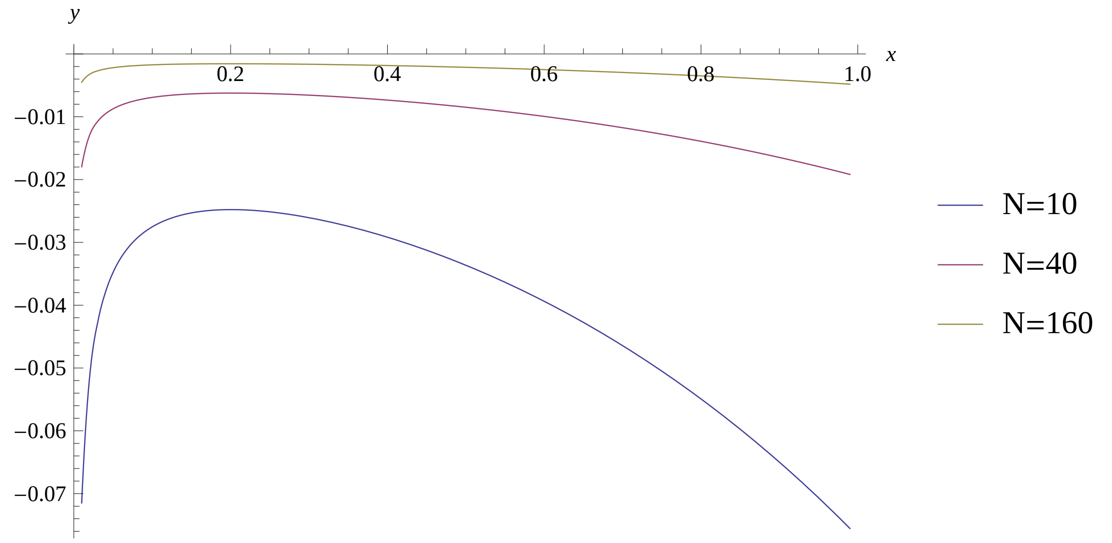
U exponenciální funkce jsou už grafy pro oba algoritmy. Na Grafu 6.7 je funkce spolu s derivací. GL aproximace je na Grafu 6.8 a její chyba na Grafu 6.9. Graf aproximace spočtené RL algoritmem jsme vynechali, protože už pro hodnotu $N = 10$ se téměř kryje s přesným řešením, ale průběh její chyby je znázorněn na Grafu 6.10. Pomocí Tabulky 6.3, která uvádí chybu a experimentální řád konvergence, lze oba algoritmy dobře porovnat.



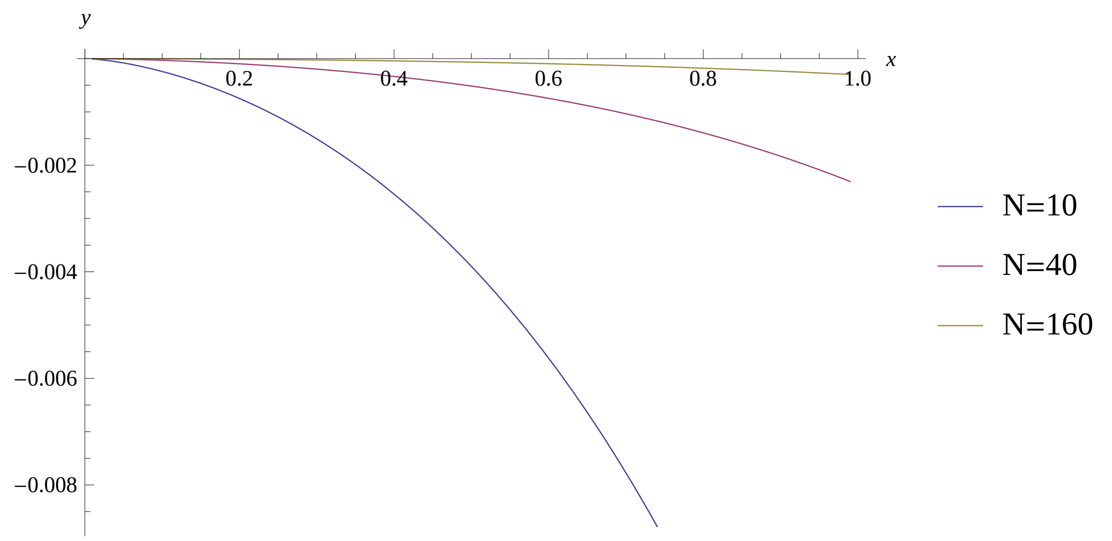
Graf 6.7: Funkce $f(x) = e^x$ a její půltá derivace.



Graf 6.8: Půltá derivace funkce $f(x) = e^x$ a její aproximace spočtená GL algoritmem pro různé hodnoty N.



Graf 6.9: Průběh chyby GL algoritmu při počítání půlté derivace funkce $f(x) = e^x$ pro různé hodnoty N.



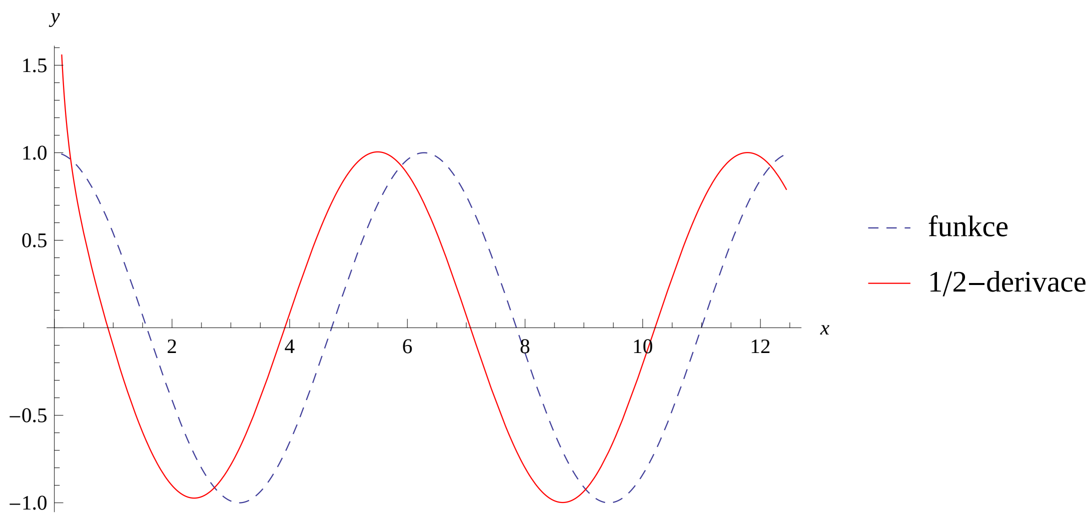
Graf 6.10: Průběh chyby RL algoritmu při počítání půlté derivace funkce $f(x) = e^x$ pro různé hodnoty N.

l	(GL)E_{N_l}	(GL)α_l	(RL)E_{N_l}	(RL)α_l
0	4.32385E-02	—	7.33332E-03	—
1	2.17811E-02	0.989	2.70193E-03	1.44
2	1.09309E-02	0.995	9.81628E-04	1.46
3	5.47552E-03	0.997	3.53464E-04	1.47
4	2.74028E-03	0.999	1.26537E-04	1.48

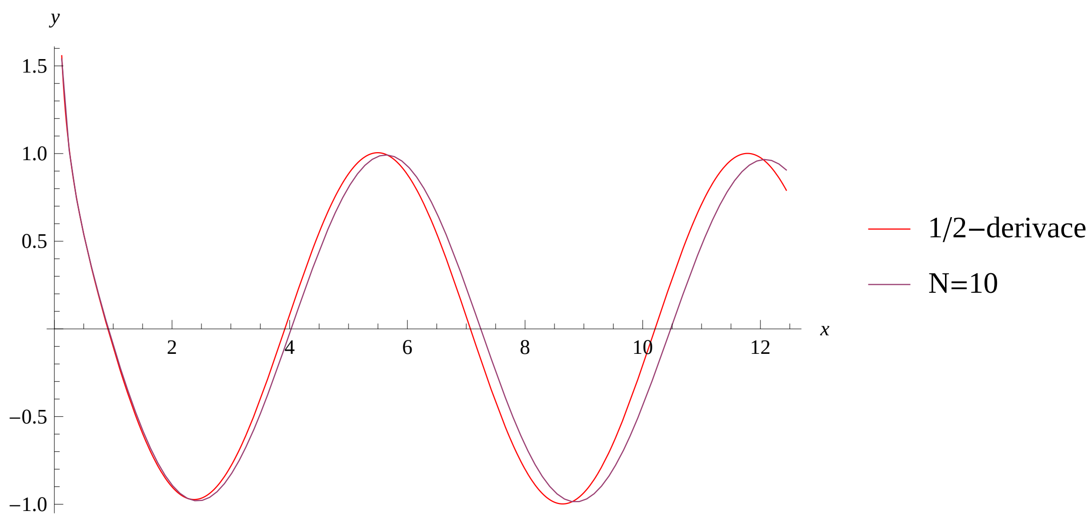
Tabulka 6.3: Absolutní chyba a experimentální řád konvergence GL a RL algoritmu při počítání derivace funkce $f(x) = e^x$.

Funkce $\cos(x)$

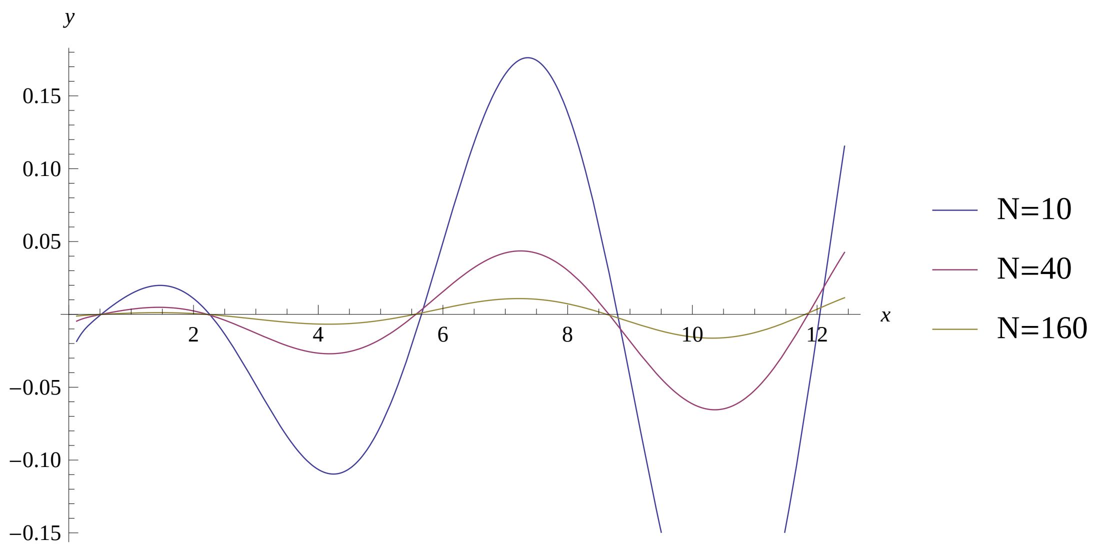
Na Grafu 6.11 je zanesen průběh funkce $\cos(x)$ a její půlté derivace. Na Grafu 6.12 je znázorněna aproximace spočtená GL algoritmem a na Grafu 6.13 vidíme průběh její chyby. Aproximace získaná RL algoritmem je na Grafu 6.14 a její chyba je vidět na Grafu 6.15. V Tabulce 6.4 jsou opět zaznamenány chyby a experimentální řády konvergence obou algoritmů.



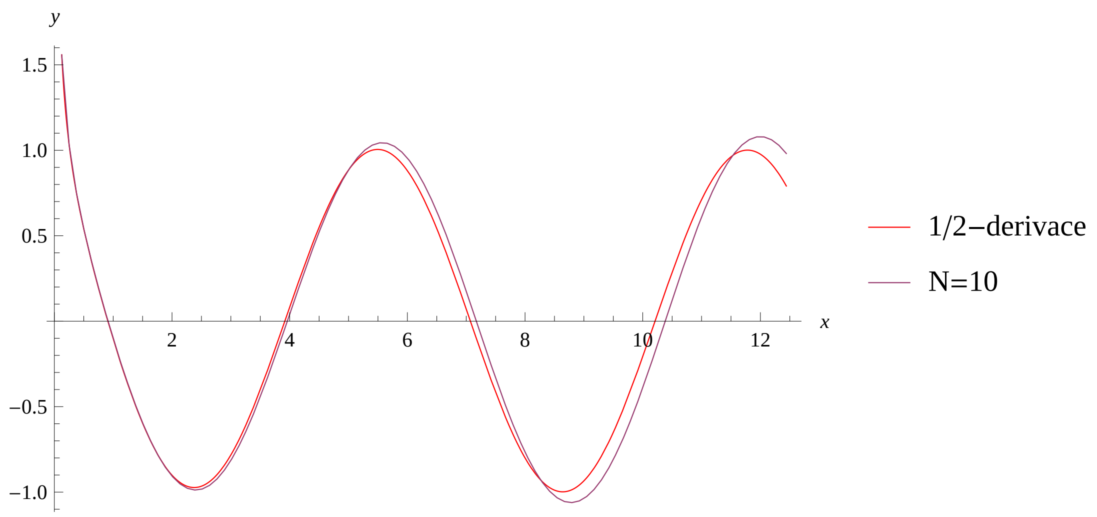
Graf 6.11: Funkce $f(x) = \cos(x)$ a její půltá derivace.



Graf 6.12: Půltá derivace funkce $f(x) = \cos(x)$ a její aproximace spočtená GL algoritmem pro různé hodnoty N.



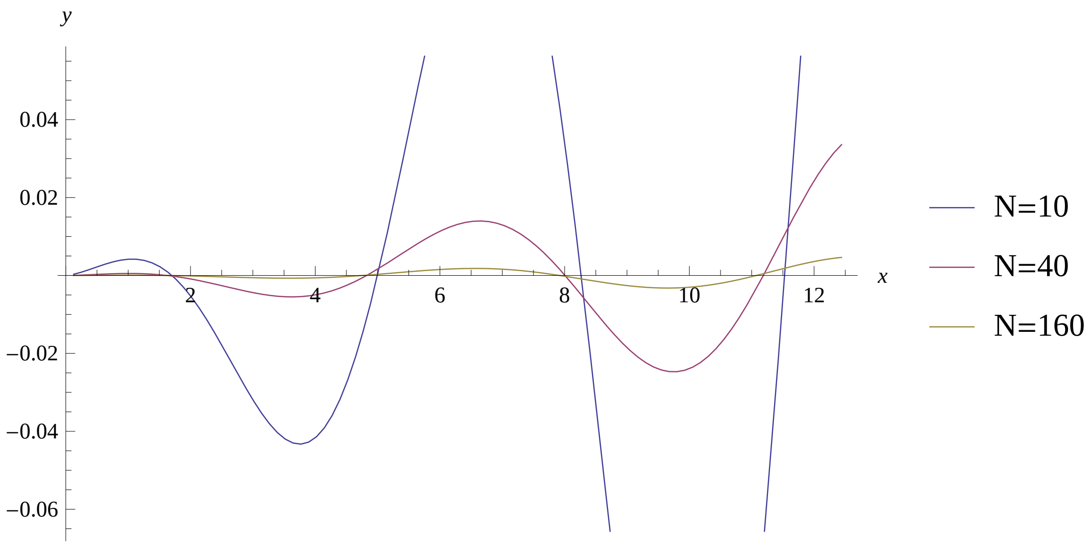
Graf 6.13: Průběh chyby GL algoritmu při počítání půlté derivace funkce $f(x) = \cos(x)$ pro různé hodnoty N.



Graf 6.14: Půltá derivace funkce $f(x) = \cos(x)$ a její aproximace spočtená RL algoritmem pro různé hodnoty N.

l	(GL)E_{N_l}	(GL)α_l	(RL)E_{N_l}	(RL)α_l
0	4.27108E-01	—	2.97987E-01	—
1	2.13298E-01	1.00	1.16078E-01	1.36
2	1.06589E-01	1.00	4.38986E-02	1.40
3	5.32816E-02	1.00	1.62582E-02	1.43
4	2.66378E-02	1.00	5.93654E-03	1.45

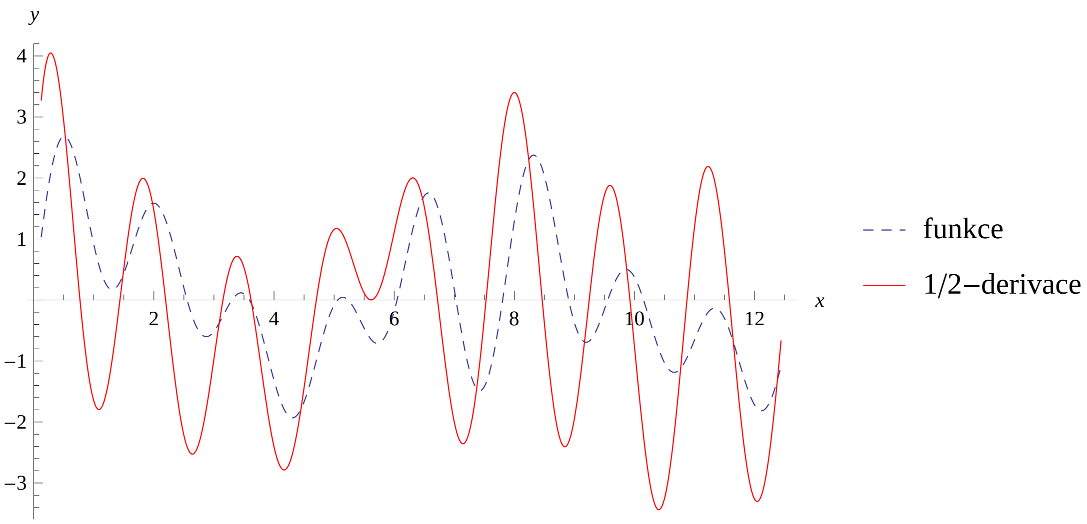
Tabulka 6.4: Absolutní chyba a experimentální řád konvergence GL a RL algoritmu při počítání derivace funkce $f(x) = \cos(x)$.



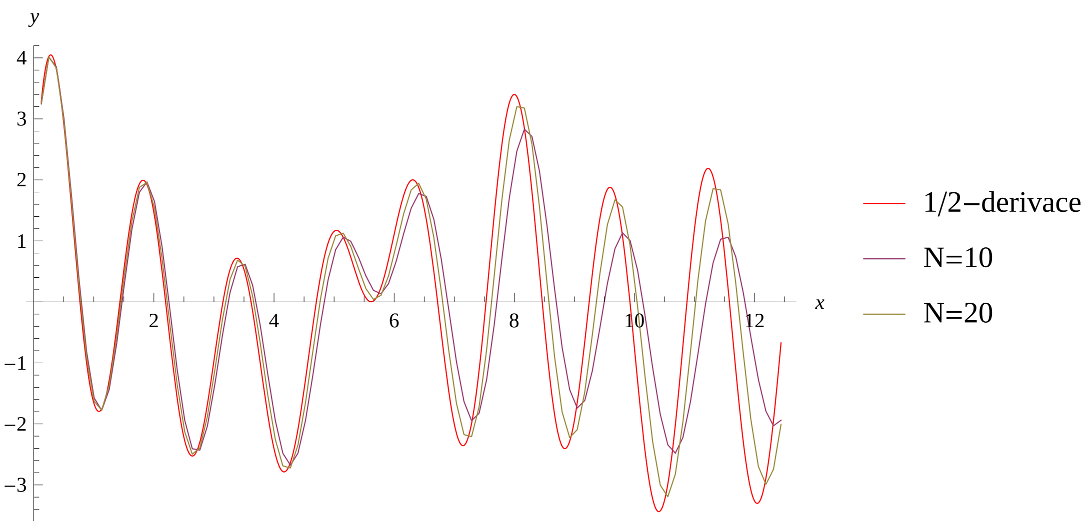
Graf 6.15: Průběh chyby RL algoritmu při počítání půlté derivace funkce $f(x) = \cos(x)$ pro různé hodnoty N.

Funkce *akord*

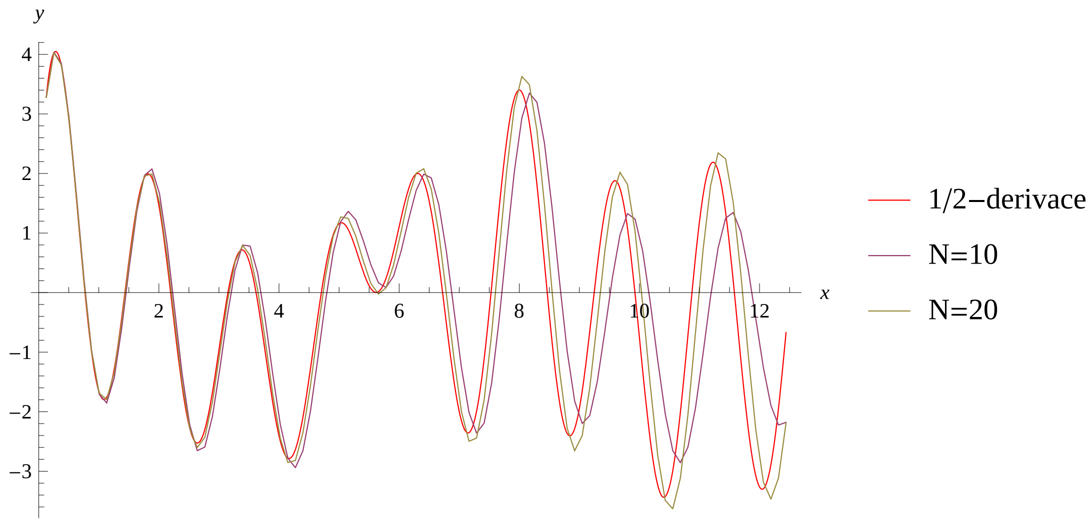
Takto jsme pojmenovali funkci definovanou vzorcem (6.4). Ač to nebylo záměrem, jsou funkce seřazeny podle toho, jak přesně oba algoritmy počítají jejich derivace. Není překvapením, že spočítané derivace funkce *akord* jsou přesné nejméně. Na Grafu 6.16 je znázorněn její průběh spolu s její derivací. Aproximace spočtené pomocí GL a RL algoritmů lze vidět na Grafech 6.17 a 6.18. Průběh chyby GL algoritmu je na Grafu 6.19 a RL algoritmu na Grafu 6.20. Tabulka 6.5 opět porovnává oba algoritmy.



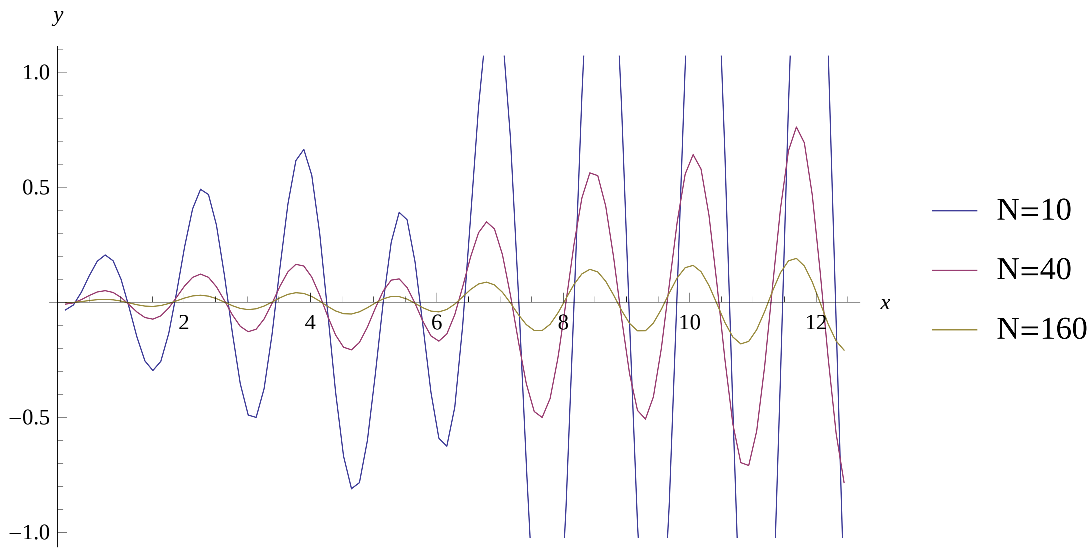
Graf 6.16: Funkce *akord* a její půltá derivace.



Graf 6.17: Půltá derivace funkce *akord* a její aproximace spočtená GL algoritmem pro různé hodnoty N.



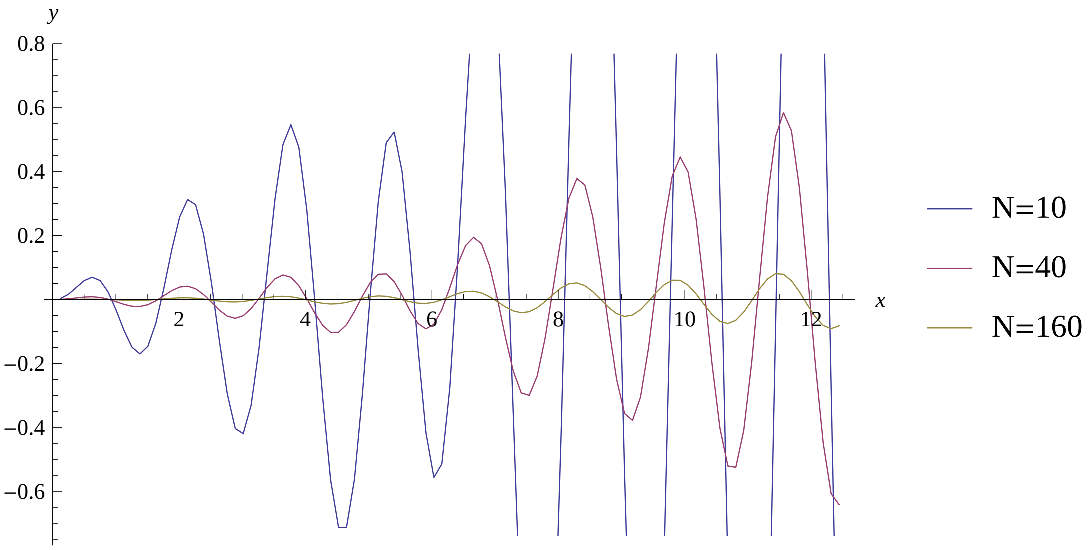
Graf 6.18: Půltá derivace funkce *akord* a její aproximace spočtená RL algoritmem pro různé hodnoty N.



Graf 6.19: Průběh chyby GL algoritmu při počítání půlté derivace funkce *akord* pro různé hodnoty N.

l	(GL)E_{N_l}	(GL)α_l	(RL)E_{N_l}	(RL)α_l
0	4.32385E+00	—	3.92423E+00	—
1	2.17811E+00	0.824	1.97159E+00	0.993
2	1.09309E+00	0.946	8.09180E-01	1.28
3	5.47552E-01	0.981	3.09542E-01	1.39
4	2.74028E-01	0.993	1.15123E-01	1.43

Tabulka 6.5: Absolutní chyba a experimentální řád konvergence GL a RL algoritmu při počítání derivace funkce *akord*.



Graf 6.20: Průběh chyby RL algoritmu při počítání půlté derivace funkce *akord* pro různé hodnoty N.

Shrnutí numerických výsledků

Z obou algoritmů byl RL přesnější. Experimentální řád konvergence se u GL algoritmu pohyboval okolo hodnoty 1.0 a u RL algoritmu okolo hodnoty 1.5, což souhlasí s asymptotickými odhady chyby uvedenými v [20] pro oba algoritmy.

Způsob, jakým byly oba algoritmy použity pro spočtení sítě aproximující derivaci funkce na zadaném intervalu, by mohl být jiný. Místo stejného N pro všechny uzly x_j, $j = 1, \ldots, 99$, by bylo lepší počítat se stejným krokem h dělení intervalu $[x_0, x_j]$. Takhle bylo v uzlech s nízkým j hodnota h zbytečně malá naopak pro body x_j s vysokým j byla velikost h příliš velká. Nevýhodou by naopak byla složitější volba tohoto kroku.

Šel by zvolit i jiný způsob počítání experimentálního řádu konvergence. Místo počítání diskrétní L^2-normy chyby síťové aproximace, by se spočítal lokální řád konvergence v každém uzlu x_j a potom by se přes všechny uzly udělal průměr.

Závěr

Práce se zabývala zavedením derivace a integrace neceločíselného řádu, jejich teoretickými vztahy a problematikou numerické aproximace neceločíselné derivace.

V první části jsme uvedli potřebné definice a věty. Složité nebo dobře známé věty jsme uvedli bez důkazu s patřičným odkazem na literaturu, ty zbylé jsme dokázali, jen v pár případech jsme důkaz z časových důvodů pouze naznačili.

V druhé části jsme vybudovali základy Riemann-Liouvilleova integrálu a derivace. Snažili jsme se, aby bylo jasné, proč postupujeme právě tímto způsobem. Je však jasné, že s větší znalostí matematické teorie lze popisovat hlubší souvislosti. Všechny věty, které jsme považovali za základní, jsme uvedli s důkazem. Většina důkazů je přejata z literatury, obzvláště z [7] a dále z [6]. Pro zajímavost či úplnost jsme uvedli některé hlubší věty, které jsme nedokazovali, nebo jsme odkázali na literaturu, kde je daná problematika řešena podrobněji.

Caputovou ani Grünwald-Letnikovovou derivací jsme se už tak podrobně nezabývali. U Caputovy derivace jsme uvedli její výhody oproti Riemann-Liouvilleově při použití v obyčejných diferenciálních rovnicích. Poukázali jsme na jejich rozdílnost a dokázali větu formulující jejich vzájemný vztah. Pro Grünwald-Letnikovovu derivaci jsme uvedli jednu z možných formulací věty o ekvivalenci.

V poslední části jsme po vzoru [20] odvodili dva algoritmy na aproximaci Riemann-Liouvilleovy potažmo Grünwald-Letnikovovy derivace. Algoritmy testujeme na řadě funkcí a počítáme jejich experimentální řád konvergence.

Je několik směrů, ve kterých bychom chtěli v této práci pokračovat. Např. teorií neceločíselné derivace a integrace na celé reálné ose nebo zobecněním pro funkce více proměnných. Dále bychom se chtěli zabývat diferenciálními rovnicemi neceločíselného řádu, ať už obyčejnými nebo parciálními, jejich aplikacemi ve fyzice a numerickými metodami používanými k jejich řešení, např. analogií metody konečných prvků.

Literatura

[1] Petr Bednařík. Pokročilé metody nelineární dynamiky a jejich aplikace. Master's thesis, České vysoké učení technické v Praze, 2007.

[2] A. D. Benson. *The Fractional Advection-Dispersion Equation: Development and Application.* PhD thesis, University of Nevada, 1998.

[3] A. D. Benson, M. M. Meerschaert, and Wheatcraft W. S. The fractional-order govering equation of lévy motion. *Water Resources Research*, 36(6):1413–1423, June 2000.

[4] A. D. Benson, R. Meerschaert, M. M. Schumer, , and Wheatcraft W. S. Eulerian derivation of the fractional advection-dispersion equation. *Journal of Contaminant Hydrology*, 48:69–88, 2001.

[5] D. I. Cartwright and J. R. McMullen. A note on the fractional calculus. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 21:79–80, 1978.

[6] K. Diethelm. *The Analysis of Fractional Differential Equations, An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type.* Springer, 2004.

[7] A. A. Gilbas, O. I. Marichev, and S. G. Samko. *Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications.* Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

[8] R. Gorenflo and F. Mainardi. Random Walk Models for Space-Fractional Diffusion Processes. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 1:167–191, 1998.

[9] R. Hilfer, editor. *Applications of Fractional Calculus in Physics.* World Scientific, Singapore, 2000.

[10] N. Jacob and A. M. Kraegeloh. The Caputo fractional derivative, Feller semigroups, and the fractional power of the first order derivative. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 5:395–410, 2002.

[11] V. Jarník. *Diferenciální počet (I).* Vydání 6. nezměněné. Academia, Praha, 1974.

[12] V. Jarník. *Diferenciální počet (II).* Vydání 3. doplněné. Academia, Praha, 1976.

[13] V. Jarník. *Integrální počet (I).* Vydání 6. nezměněné. Academia, Praha, 1984.

[14] V. Jarník. *Integrální počet (II).* Třetí vydání. Academia, Praha, 1984.

[15] T. Kisela. Fractional differential equations and their applications. Master's thesis, Vysoké učení technické v Brně, 2008.

[16] R. Klages et al. (eds.). *Anomalous Transport: Foundations and Applications.* Wiley-VCH, Weinheim, 2008.

[17] A. M. Kraegeloh. *Feller semigroups generated by fractional derivative and pseudo-differential operators.* PhD thesis, Universität Erlangen, 2001.

[18] F. Mainardi. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity: An Introduction to Mathematical Models.* Imperial College Press, 2010.

[19] J. Myland, K. Oldham, and J. Spainer. *An atlas of functions.* Second edition. Springer, 2009.

[20] K. Oldham and J. Spanier. *The Fractional Calculus.* Dover Publications, Inc., Mineols, New York, 2006.

[21] I. Podlubny. Geometric and phyfical interpretation of fractional integration and fractional diffrentiation. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 5:367–386, 2008.

[22] W. Rudin. *Analýza v reálném a komplexním oboru.* Druhé přepracované vydání. Academia, Praha, 2003.

[23] M. Weilbeer. *Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and their Analytical Background.* PhD thesis, Technische Universität Braunschweig, 2005.