Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ondřej Semela

Optimální řešení a CLM množiny

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Petr Lachout, CSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2014

Na tomto místě bych chtěl poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce doc. RNDr. Petru Lachoutovi, CSc. za cenné rady a připomínky a za čas, který mi věnoval při konzultacích. Děkuji také své rodině a přátelům za podporu a slova povzbuzení nejen při psaní této práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Optimální řešení a CLM množiny

Autor: Ondřej Semela

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Petr Lachout, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Předložená práce spadá do oblasti teorie optimalizačních úloh. V její první části jsou definovány pojmy jako epi-konvergence, zdola a shora polospojitá funkce, epi-spojitost nebo CLM množina. Z důvodu snazšího porozumění jsou k definicím nejdůležitějších pojmů doplněny ilustrativní příklady a pozorování o jejich vlastnostech. Navazující část se potom zabývá hledáním (lokálního) minima náhodné nebo deterministické funkce. S využitím poznatků z první části jsou formulovány předpoklady, při jejichž splnění lze toto hledání přenést na posloupnost náhodných funkcí splňující určité požadavky.

Klíčová slova: Optimální řešení, epi-konvergence, CLM množiny

Title: Optimal solutions and CLM sets

Author: Ondřej Semela

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Petr Lachout, CSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis falls within the theory of optimization problems. In the first part, terms such as epi-convergence, lower and upper semicontinuous function, epi-continuity and CLM set are defined. For a better understanding, the definitions of the key terms are accompanied with illustrative examples and observations of their basic properties. The following part deals with searching of (local) minimizers of random or deterministic function. Using the knowledge from the first part it is showed that under a set of assumptions it is possible to transfer this search to a sequence of random functions of specific requirements.

Keywords: Optimal solutions, epi-convergence, CLM sets

Obsah

Úvod

Koncept CLM množina (z anglického „complete local minimizing set“) byl poprvé publikován v článku Robinson (1987). Jedná se o zobecnění metody představené v článku Robinson (1982), Theorem 3.1.
Tento pojem se ukázal být užitečný při řešení jistých optimalizačních úloh, a proto byl následně rozpracován v pracích několika dalších autorů, např. Infanger (2010), Klatte a Kummer (2002) nebo Woodruff (1997). Hlavním zdrojem informací při psaní této bakalářské práce se stal článek Robinson (1996).

Práce je rozdělena do tří kapitol. V první kapitole se seznámíme s pojmy epi-konvergence a zdola a shora polospojitá funkce a uvedeme dva klíčové předpoklady, na něž budeme odkazovat ve většině později formulovaných vět. Po úvodních definicích se ve druhé kapitole seznámíme s pojmem CLM množina a některými jeho základními vlastnostmi. V závěru této kapitoly ukážeme využití tohoto pojmu při tzv. přesné minimalizaci.
V závěrečné kapitole se zaměříme na situace, ve kterých neznáme přesné řešení optimalizační úlohy, ale pouze přibližné, a předvedeme využití CLM množin při této tzv. přibližné minimalizaci.

Kapitola 1

Příprava

1.1 Úvodní poznámky

Nechť v této a následujících kapitolách $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ označuje pravděpodobnostní prostor. Uvažujme náhodný proces $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ a náhodnou veličinu X_∞, které jsou definovány na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Dále předpokládejme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ náhodné veličiny X_n a X_∞ závisí na parametru $\theta \in \mathbb{R}^k$ a jejich hodnoty leží v rozšířené reálné přímce, tj. kromě reálných hodnot mohou nabývat i hodnoty ∞ a $-\infty$. Rozšířenou reálnou přímku budeme označovat $\mathbb{R}^*$.

Naším cílem je pro určité $\omega \in \Omega$ nalézt bod, příp. body, ve kterých funkce $X_\infty(\omega,\cdot)$ nabývá minimální hodnoty. Je zřejmé, že obecně takový bod nemusí vůbec existovat. Může se také stát, že tento bod bude záviset na zvoleném ω, a tedy pro různé ω dostáváme různé body, v nichž funkce $X_\infty(\omega,\cdot)$ nabývá minima. Proto se často pracuje pouze s funkcemi nezávislými na $\omega \in \Omega$, tj. s deterministickými funkcemi.
Ukážeme, že při splnění určitých předpokladů můžeme problém hledání (lokálního) minima $X_\infty(\omega,\cdot)$ pro určité $\omega \in \Omega$ převést na jednodušší problém: hledání (lokálního) minima $X_n(\omega,\cdot)$ pro dostatečně velké n a pro dané $\omega \in \Omega$. Věty, jež formulujeme v této kapitole, budou spolu s hlavními myšlenkami jejich důkazů převzaty z článku Robinson (1996).

1.2 Epi-konvergence

V našich předpokladech budeme často pracovat se speciálním typem konvergence, tzv. epi-konvergencí. Uveďme si tedy její definici.

Definice 1.1 (Epi-konvergence)**.** Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ $f_n : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^*$ a $f_\infty : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^*$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje v epi-konvergenci k f_∞ (píšeme $f_n \xrightarrow{e} f_\infty$), jestliže $\forall\ \theta \in \mathbb{R}^k$ platí:

(i) $\forall$ posloupnost $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathbb{R}^k$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta$, je

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(\theta_n) \geq f_\infty(\theta), \tag{1.1}$$

(ii) $\exists$ posloupnost $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathbb{R}^k, \lim_{n\to\infty}\theta_n = \theta$ taková, že

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(\theta_n) \leq f_\infty(\theta). \tag{1.2}$$

Poznámka 1.2. Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ $f_n : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^*$ a $f_\infty : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že $f_n \xrightarrow{e} f_\infty$ a nechť $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ splňuje (1.2). Potom tato posloupnost musí splňovat i (1.1), a tedy pro ni platí $\lim_{n\to\infty} f_n(\theta_n) = f_\infty(\theta)$. Bod (1.2) je tedy možné nahradit předpokladem:

(ii)* $\exists$ posloupnost $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathbb{R}^k, \lim_{n\to\infty}\theta_n = \theta$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\theta_n) = f_\infty(\theta).$$

Příklad 1.3. Uvažujme posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, která je zadaná předpisem $f_n(x) := x^n$, kde $x \in [0,1)$ a $n \in \mathbb{N}$. Buď $x \in [0,1)$ libovolné. Povšimněme si, že

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0.$$

Nyní ukážeme, že $f_n \xrightarrow{e} 0$. Ověřme platnost definice 1.1.

1. Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bodů z $[0,1)$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, zřejmě platí $\liminf_{n\to\infty} f_n(x_n) \geq 0$.

2. Definujme posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bodů z $[0,1)$ předpisem $x_n := |x - 1/2n|$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ a

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x_n) = \limsup_{n\to\infty} |x - \frac{1}{2n}|^n = \limsup_{n\to\infty} \exp\{n \log|x - \frac{1}{2n}|\} = 0.$$

Tím je tedy dokázáno, že posloupnost $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje bodově a v epi-konvergenci k 0.

Obecně ovšem epi-konvergence neimplikuje bodovou konvergenci ke stejné limitě. Může se dokonce stát, že posloupnost funkcí, která konverguje v epi-konvergenci, bodově vůbec nekonverguje. To nám ilustruje následující příklad, publikovaný v článku Kall (1986).

Příklad 1.4. Uvažujme posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=2}^{\infty}$ definovanou předpisem

$$f_{2k}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & \text{jestliže } x \in \mathbb{Q}, \\ \\ 1 - \dfrac{1}{k}, & \text{jestliže } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

$$f_{2k+1}(x) = 1 - f_{2k}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{k}, & \text{jestliže } x \in \mathbb{Q}, \\ \\ \dfrac{1}{k}, & \text{jestliže } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

kde $k = 1, 2, \cdots$ Ukážeme, že $f_n \xrightarrow{e} 0$. Buď $x \in \mathbb{R}$ libovolné a ověřme platnost definice 1.1.

1. Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ bodů z $\mathbb{R}$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, zřejmě platí $\liminf_{n\to\infty} f_n(x_n) \geq 0$.

2. Definujme posloupnost $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ bodů z $\mathbb{R}$, kde

$$x_{2k} \in \mathbb{Q} \text{ takové, že } |x_{2k} - x| < \frac{1}{k},$$
$$x_{2k+1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ takové, že } |x_{2k+1} - x| < \frac{1}{k},$$

pro $k = 1, 2, \cdots$ Potom zřejmě $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ a

$$f_{2k}(x_{2k}) = \frac{1}{k} = f_{2k+1}(x_{2k+1}),$$

a tedy

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x_n) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n/2} = \limsup_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0.$$

Ovšem posloupnost $\{f_n\}_{n=2}^{\infty}$ nekonverguje bodově, neboť uvažujeme-li podposloupnosti $\{f_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ a $\{f_{2k+1}\}_{k\in\mathbb{N}}$, potom

$$\lim_{k\to\infty} f_{2k}(x) =: g(x) = \begin{cases} 0, & \text{jestliže } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{jestliže } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$
$$\lim_{k\to\infty} f_{2k+1}(x) =: h(x) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{jestliže } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

a vidíme, že $\forall\, x \in \mathbb{R}\ g(x) \neq h(x)$.

Další příklady a poznatky ohledně epi-konvergence lze nalézt např. v knize Attouch (1984) nebo Rockafellar a Wets (2004).

1.3 Předpoklad I, Předpoklad II

V této sekci definujeme dva důležité předpoklady, jež budeme později v 2. a 3. kapitole často používat. Nejdříve ovšem potřebujeme zavést několik pojmů.

Definice 1.5 (Vlastní funkce)**.** Nechť $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^*$. Budeme říkat, že funkce f je vlastní, jestliže pro každé $x \in \mathbb{R}^k$ je $f(x) > -\infty$ a funkce f není identicky rovna hodnotě ∞.

Definice 1.6 (Zdola a shora polospojitá funkce)**.** Nechť $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^*$.

(i) Řekneme, že funkce f je zdola polospojitá v bodě $x \in \mathbb{R}^k$, jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bodů z $\mathbb{R}^k$ splňující $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ platí

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x). \tag{1.3}$$

(ii) Řekneme, že funkce f je shora polospojitá v bodě $x \in \mathbb{R}^k$, jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bodů z $\mathbb{R}^k$ splňující $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ platí

$$\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(x). \tag{1.4}$$

(iii) Řekneme, že funkce f je zdola polospojitá, resp. shora polospojitá, jestliže je zdola polospojitá, resp. shora polospojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}^k$.

Poznámka 1.7. Předpokládejme, že $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^*$ je zdola a zároveň shora polospojitá funkce v nějakém bodě $x \in \mathbb{R}^k$. Potom pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bodů z $\mathbb{R}^k$ splňující $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ platí

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x), \tag{1.5}$$

což plyne z (1.3), (1.4) a faktu, že $\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \le \limsup_{n\to\infty} f(x_n)$. Funkce f je proto spojitá v daném bodě x.
Naopak každá funkce $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^*$, která je spojitá v nějakém bodě $x \in \mathbb{R}^k$, je v tomto bodě zároveň shora i zdola polospojitá, neboť z rovnosti (1.5) ihned plynou nerovnosti (1.3) a (1.4).

Příklad 1.8. Ukažme si některé zdola polospojité funkce.

(i) Dle poznámky 1.7 každá spojitá funkce z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^*$ je zdola polospojitá.

(ii) Zřejmě funkce horní celá část je zdola polospojitá funkce.

(iii) Je-li $M \subset \mathbb{R}$, potom charakteristickou funkcí množiny M rozumíme

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } x \in M, \\ 0, & \text{jestliže } x \notin M. \end{cases}$$

Uvažujme tedy otevřený reálný interval (0,1). Potom charakteristická funkce $\chi_{(0,1)}$ je taktéž zdola polospojitá funkce. Ověřme platnost definice 1.6. Nechť $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je libovolná posloupnost bodů z $\mathbb{R}$ splňující $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

1. Jestliže $x \in (0,1)$, potom $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \ge n_0\ x_n \in (0,1)$, a tedy

$$\chi_{(0,1)}(x) = 1 = \inf_{n\ge n_0} \chi_{(0,1)}(x_n).$$

2. Jestliže $x \notin (0,1)$, potom $\forall\, y \in \mathbb{R}\ \chi_{(0,1)}(y) \ge \chi_{(0,1)}(x) = 0$, a tedy

$$\liminf_{n\to\infty} \chi_{(0,1)}(x_n) \ge \chi_{(0,1)}(x).$$

Příklad 1.9. Nyní si ukážeme některé shora polospojité funkce.

(i) Dle poznámky 1.7 každá spojitá funkce z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^*$ je shora polospojitá.

(ii) Zřejmě funkce dolní celá část je shora polospojitá funkce.

(iii) Uvažujme uzavřený reálný interval [0,1]. Potom charakteristická funkce $\chi_{[0,1]}$ je také shora polospojitá funkce. Ověříme platnost definice 1.6. Nechť $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je libovolná posloupnost bodů z $\mathbb{R}$ splňující $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

1. Jestliže $x \in [0,1]$, potom $\forall\, y \in \mathbb{R}\ \chi_{[0,1]}(x) = 1 \ge \chi_{[0,1]}(y)$, a tedy

$$\chi_{[0,1]}(x) \ge \limsup_{n\to\infty} \chi_{[0,1]}(x_n).$$

2. Jestliže $x \notin [0,1]$, potom $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0\ x_n \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$, a tedy

$$\chi_{[0,1]}(x) = 0 = \sup_{n \geq n_0} \chi_{[0,1]}(x_n).$$

V následujícím příkladě si ukážeme funkci, která v jistém bodě není ani zdola ani shora polospojitá.

Příklad 1.10. Definujme funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{jestliže } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \\ 0, & \text{jestliže } x = 0. \end{cases}$$

Uvažujme posloupnost $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bodů z $\mathbb{R}$ definovanou předpisem $x_n := 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ a

$$f(x) = 0 < \infty = \lim_{n \to \infty} f(x_n). \tag{1.6}$$

Nyní uvažujme posloupnost $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bodů z $\mathbb{R}$ definovanou předpisem $y_n := -1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\lim_{n \to \infty} y_n = 0$ a

$$f(x) = 0 > -\infty = \lim_{n \to \infty} f(y_n). \tag{1.7}$$

Z (1.6) a (1.7) tedy plyne, že funkce f není v bodě 0 ani zdola ani shora polospojitá.

Platí následující důležitá vlastnost zdola polospojitých funkcí, kterou později použijeme v některých důkazech.

Lemma 1.11. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^k$ je kompaktní množina a $f : M \to (-\infty, \infty]$ zdola polospojitá funkce. Potom f nabývá na M svého minima.*

Důkaz. Rockafellar a Wets (2004), 1.10 Corollary (lower bounds).

❑

Následující lemma dává do souvislosti pojmy epi-konvergence a zdola polospojitá funkce.

Lemma 1.12. *Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ $f_n : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^*$ a $f_\infty : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že $f_n \xrightarrow{e} f_\infty$. Potom f_∞ je zdola polospojitá funkce.*

Důkaz. Attouch (1984), Theorem 2.1.

❑

Další vlastnosti zdola a shora polospojitých funkcí lze nalézt např. v knize Rockafellar a Wets (2004).

Definice 1.13 (Předpoklad I)**.** Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, resp. X_∞ je náhodný proces, resp. náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ a předpokládejme, že náhodné veličiny $X_n, n \in \mathbb{N}$, a X_∞ jsou závislé na parametru $\theta \in \mathbb{R}^k$. Budeme říkat, že Předpoklad I je splněn, jestliže $\exists\ A \in \mathcal{A}$, $\mathsf{P}(A) = 0\ \forall\ \omega \notin A$ platí současně následující podmínky:

(i) $\forall\ n \in \mathbb{N}$ je $X_n(\omega,\cdot)$ zdola polospojitá a vlastní funkce,

(ii) $X_n(\omega,\cdot) \xrightarrow{e} X_\infty(\omega,\cdot)$.

Definice 1.14 (Předpoklad II)**.** Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, resp. X_∞ je náhodný proces, resp. náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ a předpokládejme, že náhodné veličiny $X_n, n \in \mathbb{N}$, a X_∞ jsou závislé na parametru $\theta \in \mathbb{R}^k$. Budeme říkat, že Předpoklad II je splněn, jestliže $\exists\ A \in \mathcal{A}$, $\mathsf{P}(A) = 0\ \forall\ \omega \notin A$ platí současně následující podmínky:

(i) $X_\infty(\omega,\cdot)$ je vlastní funkce,

(ii) množina $M = \{\theta \in \mathbb{R}^k : X_\infty(\omega,\theta) = \min_{\theta_0 \in \mathbb{R}^k} X_\infty(\omega,\theta_0)\}$ je neprázdná a kompaktní.

V následující větě představíme sadu postačujících podmínek pro platnost Předpokladu I. Nejdříve si ale připomeňme definice stejnoměrné konvergence posloupnosti funkcí a stejnoměrně spojitého zobrazení a také formulujme pomocné lemma, které následně použijeme v důkazu věty.

Definice 1.15 (Stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí)**.** Nechť (X,ρ) je metrický prostor a M nějaká neprázdná množina. Pro $n \in \mathbb{N}$ nechť f_n, f jsou zobrazení definovaná na M s hodnotami v (X,ρ).
Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje stejnoměrně k funkci f na množině M (a píšeme $f_n \rightrightarrows f$ na M), jestliže platí:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ x \in M\ \forall\ n \geq n_0 : \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Definice 1.16 (Stejnoměrně spojité zobrazení)**.** Nechť $(X,\rho), (Y,\sigma)$ jsou metrické prostory a $f : X \to Y$. Řekneme, že zobrazení f je stejnoměrně spojité, jestliže

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x, y \in X, \rho(x,y) < \delta \text{ platí } \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Lemma 1.17. *Nechť pro $n \in \mathbb{N}$ $f_n : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Předpokládejme, že funkce f je spojitá a posloupnost $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje stejnoměrně k f na každé kompaktní množině $D \subset \mathbb{R}^k$.*
Potom pro každé $\theta \in \mathbb{R}^k$ a každou posloupnost $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathbb{R}^k$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta$, platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\theta_n) = f(\theta). \tag{1.8}$$

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$. Nechť θ je libovolný bod z $\mathbb{R}^k$ a $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ buď libovolná posloupnost bodů z $\mathbb{R}^k$ splňující $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta$. Označme $K := \max_{n\in\mathbb{N}} |\theta - \theta_n|$ a definujme množinu D předpisem

$$D := \{x \in \mathbb{R}^k : |\theta - x| \leq K\}.$$

Potom D je kompaktní množina obsahující bod θ a posloupnost $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Z předpokladu věty víme, že funkce f je spojitá na D, a proto platí, že f je stejnoměrně spojitá, tj.

$$\exists\, \delta > 0\ \forall\, x, y \in D, |x-y| < \delta \text{ platí } |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.9}$$

Jelikož $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta$, potom

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_1 :\ |\theta_n - \theta| < \delta. \tag{1.10}$$

Dále, jelikož $f_n \rightrightarrows f$ na D a $\theta_j \in D\ \forall\, j \in \mathbb{N}$, víme, že

$$\exists\, n_2 \in \mathbb{N}\ \forall\, \theta_j, j \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_2 :\ |f_n(\theta_j) - f(\theta_j)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.11}$$

Definujme $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Potom $\forall\, n \geq n_0$ z (1.9), (1.10) a (1.11) plyne

$$\begin{aligned} |f(\theta) - f_n(\theta_n)| &\leq |f(\theta) - f(\theta_n)| + |f(\theta_n) - f_n(\theta_n)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

θ a $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ byly voleny libovolně, proto $\forall\, \theta \in \mathbb{R}^k$ a každou posloupnost $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathbb{R}^k$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta$, platí (1.8).

❑

Věta 1.18. *Nechť D je neprázdná, uzavřená podmnožina $\mathbb{R}^k$, $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ náhodný proces definovaný na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ a předpokládejme, že náhodné veličiny $Y_n, n \in \mathbb{N}$, jsou závislé na parametru $\theta \in D$. Dále předpokládejme, že $\forall\, \omega \in \Omega$ a $\forall\, n \in \mathbb{N}$ funkce $Y_n(\omega,\cdot)$ nabývá pouze reálných hodnot na D a že $\exists\, A \in \mathcal{A}$, $\mathsf{P}(A) = 0\ \forall\, \omega \notin A$ platí následující podmínky:*

(i) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ je $Y_n(\omega,\cdot)$ zdola polospojitá a vlastní funkce,

(ii) posloupnost $\{Y_n(\omega,\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině množiny D k $Y_\infty(\omega,\cdot)$, kde Y_∞ je náhodná veličina definovaná na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, která je závislá na parametru $\theta \in D$, a $Y_\infty(\omega,\cdot)$ je spojitá funkce definovaná na D nabývající pouze reálných hodnot.

Pro $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definujme funkci

$$X_n(\omega,\cdot) = \begin{cases} Y_n(\omega,\cdot) & \text{na } D, \\ \infty & \text{na } \mathbb{R}^k \setminus D. \end{cases} \tag{1.12}$$

Potom $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ a X_∞ splňují Předpoklad I.

Důkaz. Vezměme libovolné $\omega \notin A, n_0 \in \mathbb{N}$ a $\theta_0 \in \mathbb{R}^k$.

1. Jelikož množina D je neprázdná a funkce $Y_{n_0}(\omega,\cdot)$ nabývá pouze reálných hodnot, z (1.12) dle definice 1.5 plyne, že $X_{n_0}(\omega,\cdot)$ je vlastní funkce.

2. Nyní ukážeme, že $X_{n_0}(\omega,\cdot)$ je zdola polospojitá funkce.
   Buď $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ libovolná posloupnost bodů z $\mathbb{R}^k$ taková, že $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta_0$.

i. Jestliže $\theta_0 \in \mathbb{R}^k \setminus D$, potom dle (1.12) $X_{n_0}(\omega,\theta_0) = \infty$ a $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ $\forall\, n \geq n_1$ $\theta_n \in \mathbb{R}^k \setminus D$, tj.

$$\inf_{n \geq n_1} X_{n_0}(\omega,\theta_n) = \infty = X_{n_0}(\omega,\theta_0). \tag{1.13}$$

ii. Jestliže $\theta_0 \in D$, potom $X_{n_0}(\omega,\theta_0) = Y_{n_0}(\omega,\theta_0) \in \mathbb{R}$ a nastává právě jedna z následujících možností:

Buď $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$ $\forall\, n \geq n_2$ $\theta_n \in \mathbb{R}^k \setminus D$, a tedy

$$\inf_{n \geq n_2} X_{n_0}(\omega,\theta_n) = \infty > X_{n_0}(\omega,\theta_0), \tag{1.14}$$

nebo $\exists\, n_3 \in \mathbb{N}$ $\forall\, n \geq n_3$ $\theta_n \in D$, tj.

$$\inf_{n \geq n_3} X_{n_0}(\omega,\theta_n) = \inf_{n \geq n_3} Y_{n_0}(\omega,\theta_n) \geq Y_{n_0}(\omega,\theta_0) = X_{n_0}(\omega,\theta_0), \tag{1.15}$$

kde daná nerovnost vyplývá z předpokladu věty, že funkce $Y_{n_0}(\omega,\cdot)$ je zdola polospojitá.

Z (1.13), (1.14) a (1.15) potom dle definice 1.6 plyne, že funkce $X_{n_0}(\omega,\cdot)$ je zdola polospojitá.

3. V 1. a 2. bodě jsme tedy ukázali, že podmínka (i) z definice 1.13 platí.

4. Zbývá dokázat, že $X_n(\omega,\cdot) \xrightarrow{e} X_\infty(\omega,\cdot)$.

i. Jestliže $\theta_0 \in \mathbb{R}^k \setminus D$, potom $X_\infty(\omega,\theta_0) = \infty$ a pro každou posloupnost $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bodů z $\mathbb{R}^k$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta_0$, existuje $n_4 \in \mathbb{N}$ $\forall\, n \geq n_4$ $\theta_n \in \mathbb{R}^k \setminus D$. Dle (1.12) tedy $\forall\, n \geq n_4$

$$X_n(\omega,\theta_n) = \infty = X_\infty(\omega,\theta_0). \tag{1.16}$$

ii. Jestliže $\theta_0 \in D$, potom $X_n(\omega,\theta_0) = Y_n(\omega,\theta_0)$ $\forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Definujeme-li posloupnost $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ předpisem $\theta_n := \theta_0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, potom

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega,\theta_0) = X_\infty(\omega,\theta_0). \tag{1.17}$$

Nyní buď $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ libovolná posloupnost bodů z $\mathbb{R}^k$ taková, že $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta_0$. Jestliže existuje $n_5 \in \mathbb{N}$ $\forall\, n \geq n_5$ $\theta_n \in \mathbb{R}^k \setminus D$, potom

$$\inf_{n \geq n_5} X_n(\omega,\theta_n) = \infty > X_\infty(\omega,\theta_0),$$

neboť $X_\infty(\omega,\cdot)$ nabývá na D pouze reálných hodnot. Proto můžeme předpokládat, že od jistého n_5 pro všechna $n \geq n_5$ body θ_n leží v D. Je-li $m < n_5$ a bod $\theta_m \in \mathbb{R}^k \setminus D$, potom jej můžeme z dané posloupnosti vynechat, neboť pro něj platí, že $X_m(\omega,\theta_m) = \infty$, a tedy jeho vynechání nijak neovlivní hodnotu $\liminf_{n\to\infty} X_n(\omega,\theta_n)$.
Ukázali jsme, že bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že všechny členy zvolené posloupnosti $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou prvky množiny D. Označme K kompaktní podmnožinu D obsahující body posloupnosti $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ potom $X_n(\omega,\theta_n) = Y_n(\omega,\theta_n)$. Z předpokladu (ii)

pak plyne, že posloupnost $\{X_n(\omega,\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje stejnoměrně ke spojité funkci $X_\infty(\omega,\cdot)$ na K. Dle lemmatu 1.17 tudíž platí

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega,\theta_n) = X_\infty(\omega,\theta_0). \tag{1.18}$$

Z (1.16), (1.17) a (1.18) potom dle definice 1.1 plyne, že $X_n(\omega,\cdot) \xrightarrow{e} X_\infty(\omega,\cdot)$.

V bodě 4. je dokázáno, že platí také podmínka (ii) z definice 1.13, a tedy i tvrzení věty.

❑

Jak si ukážeme v následujícím příkladě, pokud bychom vynechali požadavek uzavřenosti množiny D ve větě 1.18, mohlo by se stát, že $X_{n_0}(\omega,\cdot)$ nebude zdola polospojitá funkce.

Příklad 1.19. Nechť jsou splněny předpoklady věty 1.18 s výjimkou toho, že D je uzavřená množina. Naopak předpokládejme, že $D := (0,1)$ je otevřená množina. Navíc nechť existuje $B \in \mathcal{A}$, $\mathsf{P}(B) = 0$ $\forall\, \omega \notin B$ je funkce $Y_n(\omega,\cdot)$ shora omezená $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Uvažujme bod 0 a libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$ a $\omega \notin B$. Vidíme, že $0 \in \partial D$, a tedy dle předpisu (1.12) je $X_{n_0}(\omega,0) = \infty$.
Uvažujme posloupnost $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bodů z $\mathbb{R}$ definovanou předpisem $\theta_n = 1/2n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0$ a $\theta_n \in D$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Proto opět dle (1.12) a předpokladu, že funkce $Y_{n_0}(\omega,\cdot)$ nabývá na D pouze reálných hodnot, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ platí, že $X_{n_0}(\omega,\theta_n) = Y_{n_0}(\omega,\theta_n) \in \mathbb{R}$, a tedy

$$X_{n_0}(\omega,0) > \liminf_{n\to\infty} X_{n_0}(\omega,\theta_n). \tag{1.19}$$

Nerovnost (1.19) je tedy v rozporu s nerovností (1.3), tudíž funkce $X_{n_0}(\omega,\cdot)$ není zdola polospojitá v bodě 0.

Nyní uvedeme definice pojmů, s kterými budeme dále pracovat, a také dvě lemmata, které posléze využijeme v důkazu věty 1.26, jejímž zobecněním je věta 1.18.

Definice 1.20 (Spojitost zobrazení vzhledem k množině)**.** Nechť $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^*$ a $M \subset \mathbb{R}^k$.

(i) Řekneme, že zobrazení f je spojité v bodě $a \in M$ vzhledem k množině M, jestliže platí

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} f(x) = f(a).$$

(ii) Řekneme, že zobrazení f je spojité vzhledem k množině M, jestliže je spojité v každém bodě $a \in M$ vzhledem k množině M.

Definice 1.21 (Relativní vnitřek a relativně otevřená množina)**.** Nechť $M \subset \mathbb{R}^k$ je neprázdná konvexní množina a označme $B := \{x \in \mathbb{R}^k : |x| \leq 1\}$.
Relativním vnitřkem množiny M, který značíme $\operatorname{rint}(M)$, rozumíme vnitřek této množiny vzhledem k $\operatorname{Aff}(M)$, tj. vzhledem k nejmenšímu lineálu (afinnímu podprostoru), který obsahuje množinu M. Tedy

$$\operatorname{rint}(M) = \{x \in \operatorname{Aff}(M) : \exists\, \varepsilon > 0, (x + \varepsilon B) \cap \operatorname{Aff}(M) \subset M\}.$$

Řekneme, že M je relativně otevřená, jestliže $M = \operatorname{rint}(M)$.

Definice 1.22 (Doména funkce)**.** Nechť $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^*$. Potom doménou funkce f rozumíme množinu

$$\mathrm{Dom}\,(f) = \{x \in \mathbb{R}^k : f(x) < \infty\}.$$

Lemma 1.23. *Nechť $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^*$ je konvexní funkce. Potom f je spojitá vzhledem ke každé konvexní množině $M \subset \mathrm{Dom}\,(f)$, která je relativně otevřená.*

Důkaz. Rockafellar (1997), Theorem 10.1.

❑

Ukážeme, že pokud bychom vynechali požadavek relativní otevřenosti množiny M, tvrzení lemmatu 1.23 by potom neplatilo.

Příklad 1.24. Definujme funkci f předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{jestliže } x \in (0{,}1], \\ 1, & \text{jestliže } x = 0. \end{cases}$$

Potom $\mathrm{Dom}\,(f) = [0{,}1]$ a vezmeme-li $M := [0, 1/2)$, vidíme, že $M \subset \mathrm{Dom}\,(f)$ je konvexní množina. Ovšem zřejmě funkce f není spojitá v bodě 0 vzhledem k množině M, a proto f není spojitá vzhledem k M.

Lemma 1.25. *Buď M konvexní, relativně otevřená množina v $\mathbb{R}^k$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ $f_n : M \to \mathbb{R}$ buď konvexní funkce. Nechť existuje $N \subset M$ taková, že $\mathrm{clo}\,(N) \supset M$ a $\forall\, x \in N$ nechť $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existuje a je konečná. Potom $\forall\, x \in M$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existuje a nabývá reálných hodnot.*
Označme $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), x \in M$. Potom f je konvexní funkce, která nabývá pouze reálných hodnot na M. Navíc posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje stejnoměrně k f na každé kompaktní množině $K \subset M$.

Důkaz. Rockafellar (1997), Theorem 10.8.

❑

Věta 1.26. *Nechť D je neprázdná, konvexní a relativně otevřená množina v $\mathbb{R}^k$. $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$, resp. Y_∞ buď náhodný proces, resp. náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ a předpokládejme, že náhodné veličiny $Y_n, n \in \mathbb{N}$, a Y_∞ jsou závislé na parametru $\theta \in D$. Dále předpokládejme, že $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, A \in \mathcal{A}, \mathsf{P}(A) = 0\ \forall\, \omega \notin A$ je funkce $Y_n(\omega,\cdot)$ konvexní a nabývá pouze reálných hodnot na D. Nechť existuje spočetná a hustá množina $M \subset D$ taková, že $\forall\, \theta \in M\ \exists\, B \in \mathcal{A}, \mathsf{P}(B) = 0\ \forall\, \omega \notin B$ $\lim_{n\to\infty} Y_n(\omega,\theta) = Y_\infty(\omega,\theta)$, kde $Y_\infty(\omega,\theta)$ je reálné číslo.*
Potom $\exists\, C \in \mathcal{A}, \mathsf{P}(C) = 0\ \forall\, \omega \notin C$ platí:

(i) $\forall\, \theta \in D$ existuje $\lim_{n\to\infty} Y_n(\omega,\theta)$, označme její hodnotu $Y_\infty(\omega,\theta)$,

(ii) $Y_\infty(\omega,\cdot)$ je spojitá, konvexní funkce nabývající pouze reálných hodnot na D,

(iii) je-li $K \subset D$ neprázdná, uzavřená množina a definujeme-li $\forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$$X_n(\omega,\cdot) = \begin{cases} Y_n(\omega,\cdot), & \textit{jestliže } \theta \in K, \\ \infty, & \textit{jestliže } \theta \notin K, \end{cases}$$

potom $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ a X_∞ splňují Předpoklad I.

Důkaz. Definujme $\forall\ i \in \mathbb{N}$ množinu

$$A_i := \{\omega \in \Omega : Y_i(\omega,\cdot) \text{ není konvexní nebo nenabývá na } D \text{ reálných hodnot}\}.$$

Potom platí, že $\mathsf{P}(A_i) = 0\ \forall\ i \in \mathbb{N}$. Množina M je spočetná, její prvky proto můžeme označit jako $\theta_1, \theta_2, \ldots$ Dále $\forall\ j \in \mathbb{N}$ definujme množinu

$$B_j := \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega,\theta_j) \text{ neexistuje nebo není konečná}\}.$$

Potom $\mathsf{P}(B_j) = 0\ \forall\ j \in \mathbb{N}$. Definujme množinu $C := \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cup B_i)$. Potom $\mathsf{P}(C) = 0$, neboť

$$\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cup B_i)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i \cup B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(B_i) = 0.$$

Ukážeme, že tvrzení platí $\forall\ \omega \notin C$. Buď $\omega \notin C$ libovolné. Budeme postupovat ve dvou krocích:

1. Nejdříve ukážeme platnost bodů (i) a (ii).
   Platí, že $\forall\ n \in \mathbb{N}$ je funkce $Y_n(\omega,\cdot)$ konvexní, nabývající pouze reálných hodnot na D. Z lemmatu 1.23 tedy vyplývá, že $Y_n(\omega,\cdot)$ je spojitá na D, neboť $D \subset \mathrm{Dom}(Y_n(\omega,\cdot))$ a je to konvexní množina, která je relativně otevřená v $\mathbb{R}^k$.
   Dále platí, že $\lim_{n\to\infty} Y_n(\omega,\theta_j) = Y_\infty(\omega,\theta_j)\ \forall\ \theta_j \in M$, kde $Y_\infty(\omega,\theta_j) \in \mathbb{R}$. Potom z lemmatu 1.25 plyne, že $\forall\ \theta \in D\ \lim_{n\to\infty} Y_n(\omega,\theta) = Y_\infty(\omega,\theta)$, kde $Y_\infty(\omega,\cdot)$ je konvexní a nabývá pouze reálných hodnot na D, a proto musí být i spojitá na D. Navíc platí, že posloupnost $\{Y_n(\omega,\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje stejnoměrně k $Y_\infty(\omega,\cdot)$ na každé kompaktní podmnožině D.

2. Platnost bodu (iii) ukážeme ověřením předpokladů věty 1.18.
   Předpokládáme, že $K \subset D$ je neprázdná, uzavřená množina. Ukázali jsme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $Y_n(\omega,\cdot)$ spojitá na D. Dle poznámky 1.7 je zde i zdola polospojitá. Dále víme, že tato funkce nabývá na D pouze reálných hodnot, tudíž je to vlastní funkce. Je tedy splněn předpoklad (i) věty 1.18.
   Také bylo ukázáno, že posloupnost $\{Y_n(\omega,\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině množiny D k $Y_\infty(\omega,\cdot)$, což je spojitá funkce definovaná na D nabývající pouze reálných hodnot. Jsou tedy splněny předpoklady věty 1.18 a z ní již plyne i bod (iii).

❑

Kapitola 2

Přesná minimalizace

2.1 Úvodní poznámky

V této a následující kapitole budeme využívat kompaktifikaci P množiny $I = \{1, 2, \ldots\}$. Tímto pojmem rozumíme $P = I \cup \{\infty\}$ s topologií sestávající z diskrétní topologie na I a báze okolí bodu ∞ dané množinami $V_n := \{n, n+1, \ldots\} \cup \{\infty\}$ pro $n = 1, 2, \ldots$

Pomocné věty a lemmata formulované v této kapitole jsou spolu s hlavními kroky jejich důkazů převzaty z článku Robinson (1987). Zbývající věty této kapitoly jsou převzaty z článku Robinson (1996).

Definujme ještě jeden pojem, který budeme ve zbytku práce také často používat.

Definice 2.1 (Multifunkce)**.** Nechť X a Y jsou topologické prostory. Jestliže F přiřazuje každému $x \in X$ množinu $F(x) \subset Y$, potom F nazýváme multifunkcí z X do Y.

V níže uvedené definici zavedeme značení, které budeme používat v této a následující kapitole.

Definice 2.2. Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, resp. X_∞ je náhodný proces, resp. náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ a předpokládejme, že náhodné veličiny $X_n, n \in \mathbb{N}$, a X_∞ jsou závislé na parametru $\theta \in \mathbb{R}^k$. Potom pro $n \in P$ a $\omega \in \Omega$ definujme

$$\mu_n(\omega) := \inf_{\theta \in \mathbb{R}^k} X_n(\omega,\theta),$$
$$M_n(\omega) := \{\theta \in \mathbb{R}^k : X_n(\omega,\theta) = \mu_n(\omega)\}.$$

Je-li navíc G neprázdná, omezená a otevřená množina v $\mathbb{R}^k$, potom definujeme

$$\widehat{\mu}_n(\omega) := \inf_{\theta \in \mathrm{clo}(G)} X_n(\omega,\theta),$$
$$\widehat{M}_n(\omega) := \{\theta \in \mathrm{clo}\,(G) : X_n(\omega,\theta) = \widehat{\mu}_n(\omega)\}.$$

Poznámka 2.3. Povšimněme si, že:

(i) na $M_n(\omega)$, resp. na $\widehat{M}_n(\omega)$ můžeme nahlížet jednak jako na multifunkci z $\Omega \times P$ do $\mathbb{R}^k$, resp. do $\mathrm{clo}\,(G)$, tj. jako na předpis, který každému elementárnímu jevu $\omega \in \Omega$ a každému $n \in P$ přiřazuje alespoň jednu hodnotu z $\mathbb{R}^k$, resp. z $\mathrm{clo}\,(G)$, jednak jako na množinu obsahující body, ve kterých funkce $X_n(\omega,\cdot)$ pro dané n a ω nabývá globálního, resp. lokálního minima.

(ii) pokud pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a $\omega \in \Omega$ $\mu_n(\omega) = \infty$, potom $M_n(\omega) = \mathbb{R}^k$ a $X_n(\omega,\cdot) = \infty$. Proto jedním z požadavků na funkce $X_n(\omega,\cdot)$ je, aby tyto funkce byly vlastní.

Následující věta nám udává vlastnosti μ_n a M_n, pokud platí Předpoklad I formulovaný v definici 1.13.

Věta 2.4. *Nechť je splněn Předpoklad I. Potom* $\forall\ \omega \notin A$ *platí:*

(i) $\mu_\infty(\omega) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu_n(\omega)$,

(ii) jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ $\theta_n \in M_n(\omega)$ *a* $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta$, *potom* $\theta \in M_\infty(\omega)$ *a* $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\omega) = \mu_\infty(\omega)$.

Důkaz. Díky Předpokladu I víme, že $\exists\ A \in \mathcal{A}$, $\mathsf{P}(A) = 0$ $\forall\ \omega \notin A$ platí $X_n(\omega,\cdot) \xrightarrow{e} X_\infty(\omega,\cdot)$ a $\forall\ n \in \mathbb{N}$ je $X_n(\omega,\cdot)$ zdola polospojitá a vlastní.

Buď $\omega \notin A$ libovolné. Důkaz provedeme ve dvou krocích:

1. Nejdříve ukážeme platnost bodu (i).
   Vezměme libovolné $\theta \in \mathbb{R}^k$. Potom dle definice 1.1 existuje posloupnost $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathbb{R}^k, \lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta$ taková, že $\limsup_{n\to\infty} X_n(\omega,\theta_n) \leq X_\infty(\omega,\theta)$.
   Jelikož zřejmě platí $X_n(\omega,\theta_n) \geq \inf_{\theta\in\mathbb{R}^k} X_n(\omega,\theta) = \mu_n(\omega)$, dostáváme, že
   $$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(\omega) \leq \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega,\theta_n) \leq X_\infty(\omega,\theta).$$
   Jelikož bod θ byl volen libovolně, platí rovněž
   $$\limsup_{n\to\infty} \mu_n(\omega) \leq \inf_{\theta\in\mathbb{R}^k} X_\infty(\omega,\theta) = \mu_\infty(\omega).$$

2. Nyní ukážeme platnost bodu (ii).
   Dle definice 1.1 víme, že je-li $x \in \mathbb{R}^k$, potom pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathbb{R}^k$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, platí
   $$\liminf_{n\to\infty} X_n(\omega,x_n) \geq X_\infty(\omega,x).$$
   Uvažme tedy posloupnost $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta$. Jelikož $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $\theta_n \in M_n(\omega)$, potom $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $\mu_n(\omega) = X_n(\omega,\theta_n)$ a s využitím již dokázané části (i) dostáváme, že
   $$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \mu_n(\omega) &= \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega,\theta_n) \leq \mu_\infty(\omega) \leq X_\infty(\omega,\theta)\\ &\leq \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega,\theta_n) = \liminf_{n\to\infty} \mu_n(\omega).\end{aligned}$$
   Všude tedy platí rovnosti:
   $$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega,\theta_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(\omega) = \mu_\infty(\omega) = X_\infty(\omega,\theta).$$

❑

2.2 Epi-spojitost a Berge-usc

V této sekci se především seznámíme s pojmy epi-spojitost a Berge-usc a ukážeme si některé jejich vlastnosti, jichž poté využijeme v následující sekci.

Definice 2.5 (Báze okolí bodu)**.** Nechť $(X, \mathcal{G}(X))$ je topologický prostor, $x \in X$ a definujme

$$\mathcal{G}_x := \{G \in \mathcal{G}(X) : x \in G\}.$$

Uvažujme $\mathcal{N}(x) \subset \mathcal{P}(x)$, tj. systém okolí bodu x, s vlastnostmi:

(i) $\forall\, \mathcal{U} \in \mathcal{N}(x)$ je $x \in \mathcal{U}$,

(ii) $\forall\, G \in \mathcal{G}_x$ existuje $\mathcal{V} \in \mathcal{N}(x)$ takové, že $G \supset \mathcal{V}$,

(iii) $\forall\, \mathcal{U} \in \mathcal{N}(x)$ existuje $Q \in \mathcal{G}_x$ takové, že $Q \subset \mathcal{U}$.

Potom $\mathcal{N}(x)$ se nazývá báze okolí bodu x.

Definice 2.6 (Epi-spojitost)**.** Nechť Y a Z jsou topologické prostory a $f : Y \times Z \to \mathbb{R}^*$.

(i) Řekneme, že funkce f je epi-shora polospojitá (píšeme epi-usc) v bodě $z_0 \in Z$ pro $y \to y_0 \in Y$, jestliže

$$\sup_{\mathcal{U} \in \mathcal{N}(z_0)} \limsup_{y \to y_0} \inf_{z \in \mathcal{U}} f(y,z) \leq f(y_0,z_0).$$

(ii) Řekneme, že funkce f je epi-zdola polospojitá (píšeme epi-lsc) v bodě $z_0 \in Z$ pro $y \to y_0 \in Y$, jestliže

$$\sup_{\mathcal{U} \in \mathcal{N}(z_0)} \liminf_{y \to y_0} \inf_{z \in \mathcal{U}} f(y,z) \geq f(y_0,z_0).$$

(iii) Řekneme, že funkce f je epi-spojitá v bodě $z_0 \in Z$ pro $y \to y_0 \in Y$, jestliže je epi-usc a zároveň epi-lsc v bodě $z_0 \in Z$ pro $y \to y_0 \in Y$.

Lemma 2.7. *Nechť P je kompaktifikace množiny I a $f : P \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že $\forall\, n \in P$ je funkce $f(n,\cdot)$ zdola polospojitá na $\mathbb{R}^k$ a pokud označíme $f_n(\cdot) := f(n,\cdot)$, že $f_n \xrightarrow{e} f_\infty$.*
Potom f je zdola polospojitá na $P \times \mathbb{R}^k$ a epi-usc v každém bodě $x_0 \in \mathbb{R}^k$ pro $n \to \infty$.

Důkaz. Budeme postupovat ve dvou krocích:

1. Nejdříve ukážeme, že funkce f je zdola polospojitá.
   Nechť $\{(j_n,x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ je libovolná posloupnost bodů z $P \times \mathbb{R}^k$ a nechť $\lim_{n\to\infty}(j_n,x_n) = (j_0,x_0)$, kde $(j_0,x_0) \in P \times \mathbb{R}^k$.

   i. Jestliže $j_0 \neq \infty$, potom $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_1\ j_n = j_0$ a z předpokladu, že $\forall\, p \in P$ je funkce $f(p,\cdot)$ zdola polospojitá na $\mathbb{R}^k$ plyne, že $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$ $\forall\, n \geq n_2\ \inf_{n \geq n_2} f(p,x_n) \geq f(p,x_0)$. Nechť $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Potom

$$\inf_{n \geq n_0} f(j_n,x_n) = \inf_{n \geq n_0} f(j_0,x_n) \geq f(j_0,x_0). \tag{2.1}$$

ii. Jestliže $j_0 = \infty$, potom využijeme předpokladu, že $f_n \xrightarrow{e} f_\infty$, tj. dle definice 1.1 platí

$$\liminf_{n\to\infty} f(j_n,x_n) = \liminf_{n\to\infty} f_{j_n}(x_n) \geq f_\infty(x_0) = f(\infty,x_0). \tag{2.2}$$

Z nerovností (2.1), (2.2) a definice 1.6 tedy plyne, že funkce f je zdola polospojitá.

2. Nyní ukážeme, že funkce f je epi-usc v každém bodě $x_0 \in \mathbb{R}^k$ pro $n \to \infty$. Buď $x_0 \in \mathbb{R}^k$ libovolné. Z definice 1.1 plyne, že $\exists$ posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathbb{R}^k, \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ taková, že

$$\limsup_{n\to\infty} f(n,x_n) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x_n) \leq f_\infty(x_0) = f(\infty,x_0). \tag{2.3}$$

Buď $\mathcal{U} \in \mathcal{N}(x_0)$ libovolné. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq n_0\ x_n \in \mathcal{U}$, a proto

$$f(n,x_n) = f_n(x_n) \geq \inf_{x\in\mathcal{U}} f_n(x) = \inf_{x\in\mathcal{U}} f(n,x). \tag{2.4}$$

Dohromady z nerovností (2.3) a (2.4) plyne

$$f(\infty,x_0) \geq \limsup_{n\to\infty} f(n,x_n) \geq \limsup_{n\to\infty} \inf_{x\in\mathcal{U}} f(n,x).$$

Jelikož okolí $\mathcal{U}$ bylo voleno libovolně, dostáváme

$$\sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{N}(x_0)} \limsup_{n\to\infty} \inf_{x\in\mathcal{U}} f(n,x) \leq f(\infty,x_0).$$

Bod x_0 byl taktéž volen libovolně, a tedy funkce f je epi-usc v každém bodě $x_0 \in \mathbb{R}^k$ pro $n \to \infty$.

❑

Definice 2.8 (Berge-usc)**.** Nechť X, Y jsou topologické prostory a F je multifunkce z X do Y. Řekneme, že multifunkce F je Berge-usc v bodě $x_0 \in X$, jestliže ke každé otevřené množině $M \subset Y$ takové, že $F(x_0) \subset M$, existuje $\mathcal{U}$ okolí bodu x_0 takové, že $\forall\ x \in \mathcal{U}$ platí $F(x) \subset M$.

Poznámka 2.9. Pokud bychom v definici 2.8 za F zvolili funkci z $\mathbb{R}^k$ do $\mathbb{R}^*$, potom F je Berge-usc v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^k$ právě tehdy, když F je spojitá v bodě x_0.

Definice 2.10 (Uzavřená multifunkce)**.** Nechť X, Y jsou topologické prostory a F je multifunkce z X do Y. Řekneme, že multifunkce F je uzavřená v bodě $x_0 \in X$, jestliže $F(x_0) = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathcal{N}(x_0)} \operatorname{clo}(F(\mathcal{U}))$, kde $F(\mathcal{U}) = \bigcup_{x\in\mathcal{U}} F(x)$.

V následujících dvou větách si ukážeme závěry, které jsou spojeny s pojmy epi-lsc a epi-usc. V těchto větách bude X označovat topologický prostor a P kompaktifikaci množiny I. Dále $\forall\ p \in P$ a libovolnou funkci $f : P \times X \to \mathbb{R}^*$ definujeme

$$\widetilde{\mu}(p) := \inf_{x\in X} f(p,x).$$

Zřejmě $\widetilde{\mu}$ je potom funkce s hodnotami v rozšířené reálné přímce. Současně definujme multifunkci $\widetilde{M}$ z P do X předpisem

$$\widetilde{M}(p) := \{x \in X : f(p,x) = \widetilde{\mu}(p)\}.$$

Povšimněme si, že na multifunkci $\widetilde{M}$ můžeme také nahlížet jako na množinu bodů, ve kterých funkce $f(p,\cdot)$ nabývá globálního minima.

Ještě než přistoupíme k formulacím a důkazům zmíněných dvou vět, uveďme si nejdříve dvě pomocná lemmata. To první se týká funkce $\widetilde{\mu}$ a pojmu epi-usc.

Lemma 2.11. *Nechť funkce f je epi-usc v bodě $x_0 \in X$ pro $p \to p_0 \in P$. Potom platí, že*

$$f(p_0,x_0) \geq \limsup_{p \to p_0} \widetilde{\mu}(p).$$

Důkaz. Plyne přímo z definice 2.6, neboť

$$f(p_0,x_0) \geq \sup_{\mathcal{U} \in \mathcal{N}(x_0)} \limsup_{p \to p_0} \inf_{x \in \mathcal{U}} f(p,x) \geq \limsup_{p \to p_0} \widetilde{\mu}(p).$$

❑

V následujícím lemmatu se seznámíme s pojmem úrovňová množina a jejími vlastnostmi.

Lemma 2.12. *Nechť $g : P \times X \to \mathbb{R}^*$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že $\inf_{(p,x) \in P \times X} g(p,x) \leq \alpha$. Pro $p \in P$ definujme úrovňovou množinu*

$$\Lambda_\alpha^g(p) := \{x \in X : g(p,x) \leq \alpha\}.$$

Potom Λ_α^g je multifunkce z P do X, která je uzavřená v bodě $p_0 \in P$, jestliže $\forall\ x \in \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{N}(p_0)} clo\,(\Lambda_\alpha^g(\mathcal{U}))$, kde $\Lambda_\alpha^g(\mathcal{U}) = \bigcup_{p \in \mathcal{U}} \Lambda_\alpha^g(p)$, je funkce g zdola polospojitá v (p_0,x).

Důkaz. Zřejmě platí, že Λ_α^g je multifunkce z P do X.
Vezměme libovolné $x_0 \in \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{N}(p_0)} \mathrm{clo}\,(\Lambda_\alpha^g(\mathcal{U}))$. Potom $\forall\ \mathcal{U} \in \mathcal{N}(p_0)$, resp. $\forall\ \mathcal{V} \in \mathcal{N}(x_0)$ existuje $p \in \mathcal{U}$, resp. $x \in \mathcal{V}$ takové, že $g(p,x) \leq \alpha$. Víme, že funkce g je zdola polospojitá v bodě (p_0,x_0) a tedy dohromady s předchozím dostáváme, že

$$\alpha \geq \liminf_{(p,x) \to (p_0,x_0)} g(p,x) \geq g(p_0,x_0),$$

tudíž $x_0 \in \Lambda_\alpha^g(p_0)$, a tedy $\Lambda_\alpha^g(p_0) \supset \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{N}(p_0)} \mathrm{clo}\,(\Lambda_\alpha^g(\mathcal{U}))$.

Dále si povšimněme, že vždy platí $\Lambda_\alpha^g(p_0) \subset \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{N}(p_0)} \mathrm{clo}\,(\Lambda_\alpha^g(\mathcal{U}))$.
Proto $\Lambda_\alpha^g(p_0) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{N}(p_0)} \mathrm{clo}\,(\Lambda_\alpha^g(\mathcal{U}))$, což dle definice 2.10 znamená, že multifunkce Λ_α^g je uzavřená v bodě $p_0 \in P$.

❑

Nyní již přikročme k samotným větám.

Věta 2.13. *Nechť $f : P \times X \to (-\infty, \infty]$. Předpokládejme, že existuje $p_0 \in P$ takové, že funkce $f(p_0,\cdot)$ je vlastní. Dále předpokládejme, že pro každé $x \in X$ je funkce f epi-lsc v bodě x pro $p \to p_0 \in P$ a že existuje $x_0 \in \widetilde{M}(p_0)$ takové, že f je epi-usc v x_0 pro $p \to p_0 \in P$. Potom:*

(i) $\widetilde{\mu}$ je shora polospojitá v p_0,

(ii) hodnota $\widetilde{\mu}(p_0)$ je reálné číslo,

(iii) existuje $\mathcal{U}$ okolí bodu p_0 takové, že funkce $f(p,\cdot)$ je vlastní pro každé $p \in \mathcal{U}$,

(iv) multifunkce $\widetilde{M}$ je uzavřená v bodě p_0.

Důkaz. Je uveden v článku Robinson (1987), Proposition 3.2; zde ukážeme jen platnost důkazu pro případ, kdy $X = \mathbb{R}^k$.

1. Nejdříve ukážeme, že platí bod (i).
Z předpokladu existence $x_0 \in \widetilde{M}(p_0)$ splňujícího, že f je epi-usc v x_0 pro $p \to p_0 \in P$, a lemmatu 2.11 vyplývá, že
$$\widetilde{\mu}(p_0) = f(p_0,x_0) \geq \limsup_{p \to p_0} \widetilde{\mu}(p),$$
což dle definice 1.6 znamená, že $\widetilde{\mu}$ je shora polospojitá v p_0.

2. K důkazu bodu (ii) je pouze třeba si uvědomit, že předpokládáme, že existuje $p_0 \in P$ takové, že funkce $f(p_0,\cdot)$ je vlastní, tj. $\forall\, x \in X$ je $f(x) > -\infty$ a f není identicky rovna hodnotě ∞, a dále že $x_0 \in \widetilde{M}(p_0)$.

3. Nyní ukážeme, že platí bod (iii).
Z již dokázaných bodů (i) a (ii) plyne, že
$$\infty > \widetilde{\mu}(p_0) \geq \limsup_{p \to p_0} \widetilde{\mu}(p),$$
tj. $\exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{N}(p_0)$ takové, že $\forall\, p \in \mathcal{U}$ je $\widetilde{\mu}(p) < \infty$ a tedy $f(p,\cdot)$ není identicky rovno hodnotě ∞. Navíc z předpokladu věty je $f(p,x) > -\infty$ $\forall\, p \in P$ a $\forall\, x \in X$.

4. Nyní ukážeme platnost bodu (iv).
Definujme funkci
$$g(p,x) := f(p,x) - \widetilde{\mu}(p) \qquad \forall\, x \in X\ \forall\, p \in \mathcal{U},$$
kde $\mathcal{U}$ je okolí bodu p_0 z bodu (iii). Tato funkce je dobře definována, neboť $\forall\, p \in \mathcal{U}$ je funkce $f(p,\cdot)$ vlastní a $\widetilde{\mu}(p) < \infty$. Ukážeme, že $\forall\, x_0 \in X$ je funkce g zdola polospojitá v (p_0,x_0).
Buď $x_0 \in X$ libovolné. Z předpokladu věty víme, že funkce f je epi-lsc v x_0 pro $p \to p_0 \in P$, tj. platí
$$\begin{aligned} \sup_{\mathcal{U} \in \mathcal{N}(x_0)} \liminf_{p \to p_0} \inf_{x \in \mathcal{U}} f(p,x) &= \sup_{\mathcal{U} \in \mathcal{N}(x_0)} \sup_{\mathcal{V} \in \mathcal{N}(p_0)} \inf_{p \in \mathcal{V}} \inf_{x \in \mathcal{U}} f(p,x) \\ &= \liminf_{(p,x) \to (p_0,x_0)} f(p,x) \\ &\geq f(p_0,x_0). \end{aligned}$$

Dále dle bodu (i) víme, že $\widetilde{\mu}$ je shora polospojitá v p_0, tj. pro každou posloupnost $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bodů z P splňující $\lim_{n\to\infty} p_n = p_0$ platí

$$\limsup_{n\to\infty} \widetilde{\mu}(p_n) \leq \widetilde{\mu}(p_0).$$

Buď tedy $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ libovolná posloupnost bodů z P splňující $\lim_{n\to\infty} p_n = p_0$ a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ libovolná posloupnost bodů z X splňující $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Potom

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} g(p_n,x_n) &= \liminf_{n\to\infty} (f(p_n,x_n) - \widetilde{\mu}(p_n)) \\
&= \liminf_{n\to\infty} f(p_n,x_n) - \limsup_{n\to\infty} \widetilde{\mu}(p_n) \\
&\geq f(p_0,x_0) - \widetilde{\mu}(p_0) = g(p_0,x_0).
\end{aligned}$$

Tím jsme ukázali, že funkce g je zdola polospojitá v (p_0,x_0).
Definujeme-li pro $p \in P$ úrovňovou množinu $\Lambda_0^g(p) := \{x \in X : g(p,x) \leq 0\}$, platí dle lemmatu 2.12, že multifunkce Λ_0^g je uzavřená v bodě p_0. Nyní si jen stačí uvědomit, že $\forall\ p \in P$ je $\Lambda_0^g(p) = \widetilde{M}(p)$.

❑

Věta 2.14. *Nechť $f : P \times X \to \mathbb{R}^*, p_0 \in P$ a $K \subset X$ buď kompaktní množina. Předpokládejme, že existuje okolí $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{N}(p_0)$ takové, že $\Lambda^f_{\widetilde{\mu}(p_0)}(\mathcal{U}_0) \subset K$ a dále, že $\forall\ x \in K$ je f epi-lsc v bodě x pro $p \to p_0$.*
Potom $\widetilde{\mu}$ je zdola polospojitá v bodě p_0.

Důkaz. Jestliže $\widetilde{\mu}(p_0) = -\infty$, potom je zřejmě splněna definice 1.6 a tvrzení věty platí. Bez újmy na obecnosti proto můžeme předpokládat, že $\widetilde{\mu}(p_0) > -\infty$. Víme, že platí

$$\Lambda^f_{\widetilde{\mu}(p_0)}(\mathcal{U}_0) = \{x \in X : f(p,x) \leq \widetilde{\mu}(p_0), p \in \mathcal{U}_0\}. \tag{2.5}$$

Dále víme, že $\forall\ x_0 \in K$ je f epi-lsc v bodě x_0 pro $p \to p_0$, tj.

$$\sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{N}(x_0)} \liminf_{p\to p_0} \inf_{x\in\mathcal{U}} f(p,x) \geq f(p_0,x_0). \tag{2.6}$$

Vezměme libovolné $x_0 \in K$. Potom z existence okolí $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{N}(p_0)$ takového, že $\Lambda^f_{\widetilde{\mu}(p_0)}(\mathcal{U}_0) \subset K$, a z (2.5) víme, že $f(p_0,x_0) \geq \widetilde{\mu}(p_0)$. Z nerovnosti (2.6) plyne, že existují $\mathcal{V}_{x_0} \in \mathcal{N}(x_0)$ a $\mathcal{U}_{x_0} \in \mathcal{N}(p_0)$ takové, že $\forall\ (p,x) \in \mathcal{U}_{x_0} \times \mathcal{V}_{x_0}$ platí

$$f(p,x) \geq f(p_0,x_0) \geq \widetilde{\mu}(p_0). \tag{2.7}$$

Jelikož K je kompaktní, lze z každého jejího pokrytí otevřenými množinami vybrat pokrytí konečné, tzn. $\exists\ x_1,\ldots,x_n \in K$ a $\forall\ i = 1,\ldots,n$ existují $\mathcal{V}_i$ okolí bodu x_i a $\mathcal{U}_i$ okolí bodu p_0, splňující (2.7), takové, že $K \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{V}_i$.

Definujme $\mathcal{U} := \mathcal{U}_0 \cap [\bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i]$ a vezměme libovolné $p \in \mathcal{U}$ a $x \in X$.
Předpokládejme, že $x \notin K$. Potom $p \in \mathcal{U}_0, x \notin \Lambda^f_{\widetilde{\mu}(p_0)}(\mathcal{U}_0)$, a tudíž $f(p,x) > \widetilde{\mu}(p_0)$. Jestliže naopak $x \in K$, potom $\exists\ i \in \{1,\ldots,n\}$ takové, že $x \in \mathcal{V}_i$ a $p \in \mathcal{U}_i$, takže platí (2.7). Jelikož x jsme volili libovolně, pro $p \in \mathcal{U}$ je

$$\inf_{x\in X} f(p,x) = \widetilde{\mu}(p) \geq \widetilde{\mu}(p_0).$$

Buď $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ libovolná posloupnost bodů z P splňující $\lim_{n\to\infty} p_n = p_0$. Potom $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq n_0\ p_n \in \mathcal{U}$ a tedy $\inf_{n\geq n_0} \widetilde{\mu}(p_n) \geq \widetilde{\mu}(p_0)$, což dle definice 1.6 znamená, že funkce $\widetilde{\mu}$ je zdola polospojitá v bodě p_0.

❑

2.3 CLM množiny

V této sekci budeme hledat a zkoumat předpoklady, při jejichž splnění bude skoro jistě pro dostatečně velké $n \in \mathbb{N}$ množina, jež obsahuje body, ve kterých funkce $X_n(\omega,\cdot)$ nabývá (lokálního) minima, neprázdná a každý její bod bude dostatečně blízko příslušnému bodu množiny M_∞, tj. bodu, který minimalizuje $X_\infty(\omega,\cdot)$. Vrcholem této sekce bude věta 2.20, která je zesílením věty 2.4.

Definice 2.15 (CLM množina)**.** Nechť X je topologický prostor a $f : X \to \mathbb{R}^*$. Neprázdná množina $M \subset X$ se nazývá CLM množina pro funkci f vzhledem k otevřené množině $G \supset M$, jestliže M je množinou všech bodů, ve kterých má funkce f na $\operatorname{clo}(G)$ minimum.

Příklad 2.16. Ukažme si některé množiny splňující definici 2.15.

(i) Uvažujme funkci $f(x) = x^2$. Potom množina $M_1 := \{0\}$ je CLM množina pro funkci f vzhledem ke každé otevřené množině $G \subset \mathbb{R}$, která obsahuje bod 0.

(ii) Nyní uvažujme funkci $g(x) = \sin(x)$. Potom množina $M_2 := \{-\pi/2, 3\pi/2\}$ je CLM množina pro funkci g vzhledem ke každé otevřené množině

$$(-\varepsilon - \frac{\pi}{2}, \varepsilon + \frac{3}{2}\pi) \subset G \subset (-\frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi),$$

kde $\varepsilon \in (0, 2\pi)$.

Poznámka 2.17. Z definice 2.15 plyne, že:

(i) množina M obsahuje body, ve kterých funkce f nabývá lokálního minima.

(ii) funkce f musí v každém bodě množiny M nabývat stejné hodnoty. Tato hodnota musí být ostře menší, než je hodnota funkce f v libovolném bodě množiny $\operatorname{clo}(G) \setminus M$.

(iii) množina bodů, v nichž funkce f nabývá globálního minima, je vždy CLM množina. Stačí totiž volit $G = X$.

Následující dvě věty pojednávají o vlastnostech CLM množin a jejich závěry využijeme v důkazu věty 2.20.
V těchto větách nechť X je topologický prostor, $G \subset X$ otevřená množina a P kompaktifikace množiny I. Potom pro $p \in P$ a funkci $f : P \times X \to \mathbb{R}^*$ definujme funkci s hodnotami v rozšířené reálné přímce

$$\widetilde{\mu}_{\operatorname{clo}(G)}(p) := \inf_{x\in\operatorname{clo}(G)} f(p,x).$$

Dále definujeme multifunkci $\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}$ z P do $\mathrm{clo}\,(G)$ předpisem

$$\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(p) := \{x \in \mathrm{clo}\,(G) : f(p,x) = \widetilde{\mu}_{\mathrm{clo}(G)}(p)\}.$$

Povšimněme si, že na multifunkci $\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}$ můžeme také nahlížet jako na množinu, jež obsahuje body, ve kterých funkce $f(p,\cdot)$ nabývá lokálního minima.

Věta 2.18. *Nechť $f : P \times X \to (-\infty, \infty], p_0 \in P$ a $G \subset X$ je otevřená množina taková, že $G \cap Dom\,(f) \neq \emptyset$. Předpokládejme, že $\widetilde{M}_{clo(G)}(p_0)$ je CLM množina pro funkci $f(p_0,\cdot)$ vzhledem k množině G. Dále předpokládejme, že funkce f je epi-usc v nějakém bodě $x_0 \in \widetilde{M}_{clo(G)}(p_0)$ pro $p \to p_0$ a epi-lsc v každém bodě $x \in clo\,(G)$ pro $p \to p_0$. Potom:*

(i) funkce $\widetilde{\mu}_{clo(G)}$ je shora polospojitá v bodě p_0,

(ii) hodnota $\widetilde{\mu}_{clo(G)}(p_0)$ je reálné číslo,

(iii) multifunkce $\widetilde{M}_{clo(G)}$ je uzavřená v bodě p_0,

(iv) $\exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{N}(p_0)$ takové, že $\forall\, p \in \mathcal{U}$ je restrikce funkce $f(p,\cdot)$ na $clo\,(G)$ vlastní funkce.

Důkaz. Definujme $\forall\, p \in P$ a $\forall\, x \in X$ funkci

$$g(p,x) := f(p,x) + \Psi_{P\times\mathrm{clo}(G)}(p,x), \tag{2.8}$$

kde

$$\Psi_{P\times\mathrm{clo}(G)}(p,x) := \begin{cases} 0, & \text{jestliže } (p,x) \in P \times \mathrm{clo}\,(G), \\ \infty, & \text{jestliže } (p,x) \notin P \times \mathrm{clo}\,(G). \end{cases} \tag{2.9}$$

Tato funkce je dobře definována, neboť ani funkce f, ani funkce $\Psi_{P\times\mathrm{clo}(G)}$ nenabývají hodnoty $-\infty$. Proto platí $g : P \times X \to (-\infty, \infty]$. Povšimněme si, že funkce $g(p_0,\cdot)$ je vlastní funkce na $G \cap \mathrm{Dom}\,(f(p_0,\cdot))$ a epi-usc v bodě $x_0 \in \widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(p_0)$ pro $p \to p_0$, jelikož $g(p,x) = f(p,x)$ pro $(p,x) \in P \times \mathrm{clo}\,(G)$ a funkce f je epi-usc v $x_0 \in \widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(p_0)$ pro $p \to p_0$.

Protože $\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(p_0)$ je CLM množina pro funkci $f(p_0,\cdot)$ vzhledem k množině G, $g(p,x) = \infty$ pro $(p,x) \in P \times (X \setminus \mathrm{clo}\,(G))$ a $x_0 \in \widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(p_0)$, potom platí, že funkce $g(p_0,\cdot)$ nabývá v bodě x_0 globálního minima, takže

$$\widetilde{\mu}_{\mathrm{clo}(G)}(p_0) = \inf_{x\in\mathrm{clo}(G)} f(p_0, x) = \min_{x\in X} g(p_0, x) = g(p_0, x_0).$$

Z lemmatu 2.11 proto plyne, že

$$g(p_0, x_0) = \widetilde{\mu}_{\mathrm{clo}(G)}(p_0) \geq \limsup_{p\to p_0} \widetilde{\mu}_{\mathrm{clo}(G)}(p).$$

Proto existuje $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{N}(p_0)$ takové, že $\forall\, p \in \mathcal{U}_0$ je

$$\infty > g(p_0, x_0) = \widetilde{\mu}_{\mathrm{clo}(G)}(p_0) \geq \widetilde{\mu}_{\mathrm{clo}(G)}(p).$$

Odtud můžeme nahlédnout, že $\forall\ p \in \mathcal{U}_0$ je $\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(p)$ množina bodů, ve kterých $g(p,\cdot)$ nabývá globálního minima.

Dále jelikož funkce f je epi-lsc v každém bodě $x \in \mathrm{clo}\,(G)$ pro $p \to p_0$ a funkce $\Psi_{P\times \mathrm{clo}(G)}$ je zřejmě epi-lsc v každém bodě $x \in X$ pro $p \to p_0$, také funkce g je epi-lsc v každém bodě $x \in X$ pro $p \to p_0$.
Vezmeme-li restrikci funkce g na $\mathcal{U}_0 \times X$ a použijeme-li větu 2.13, dostáváme, že funkce $\widetilde{\mu}_{\mathrm{clo}(G)}$ je shora polospojitá v bodě p_0, hodnota $\widetilde{\mu}_{\mathrm{clo}(G)}(p_0)$ je reálné číslo, multifunkce $\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}$ je uzavřená v bodě p_0 a existuje $\mathcal{U} \in \mathcal{N}(p_0)$ takové, že funkce $g(p,\cdot)$ je vlastní pro každé $p \in \mathcal{U}$. To ovšem znamená, že $\forall\ p \in \mathcal{U}$ restrikce funkce $f(p,\cdot)$ na $\mathrm{clo}\,(G)$ je vlastní funkce, neboť $\forall\ (p,x) \in \mathcal{U} \times \mathrm{clo}\,(G)$ je $\Psi_{P\times \mathrm{clo}(G)}(p,x) = 0$ a tedy $f(p,x) = g(p,x)$.

❑

Věta 2.19. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 2.18 a nechť navíc clo (G) je kompaktní množina a funkce f je zdola polospojitá na $P \times$ clo (G). Potom:*

(i) hodnota $\widetilde{\mu}_{clo(G)}(p_0)$ je reálné číslo,

(ii) funkce $\widetilde{\mu}_{clo(G)}$ je spojitá v bodě p_0,

(iii) multifunkce $\widetilde{M}_{clo(G)}$ je uzavřená a Berge-usc v bodě p_0,

(iv) $\exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{N}(p_0)$ takové, že $\forall\ p \in \mathcal{U}$ je restrikce funkce $f(p,\cdot)$ na clo (G) vlastní funkce a $\widetilde{M}_{clo(G)}(p)$ je neprázdná, kompaktní CLM množina pro funkci $f(p,\cdot)$ vzhledem ke G.

Důkaz. Díky větě 2.18 víme, že hodnota $\widetilde{\mu}_{\mathrm{clo}(G)}(p_0)$ je reálné číslo, funkce $\widetilde{\mu}_{\mathrm{clo}(G)}$ je shora polospojitá v bodě p_0, multifunkce $\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}$ je uzavřená v bodě p_0 a existuje $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{N}(p_0)$ takové, že $\forall\ p \in \mathcal{U}_0$ je restrikce funkce $f(p,\cdot)$ na $\mathrm{clo}\,(G)$ vlastní funkce. Zbývá už jen dokázat, že funkce $\widetilde{\mu}_{\mathrm{clo}(G)}$ je spojitá v bodě p_0, multifunkce $\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}$ je Berge-usc v bodě p_0 a že $\exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{N}(p_0)$ takové, že $\forall\ p \in \mathcal{U}$ je restrikce funkce $f(p,\cdot)$ na $\mathrm{clo}\,(G)$ vlastní funkce a $\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(p)$ je neprázdná, kompaktní CLM množina pro funkci $f(p,\cdot)$ vzhledem ke G. Zbytek důkazu tedy provedeme ve třech krocích.

1. Nejdříve ukážeme, že platí bod (ii).
   Podle poznámky 1.7 stačí dokázat, že funkce $\widetilde{\mu}_{\mathrm{clo}(G)}$ je zdola polospojitá v bodě p_0. Stejně jako v důkazu věty 2.18 definujme $\forall\ p \in P$ a $\forall\ x \in X$ funkci $g(p,x)$, resp. $\Psi_{P\times \mathrm{clo}(G)}(p,x)$ předpisem (2.8), resp. (2.9). Povšimněme si, že platí
   $$\Lambda^g_{\widetilde{\mu}_{\mathrm{clo}(G)}(p_0)}(P) = \{x \in X : g(p,x) \leq \widetilde{\mu}_{\mathrm{clo}(G)}(p_0), p \in P\} \subset \mathrm{clo}\,(G).$$
   V důkazu věty 2.18 jsme také ukázali, že funkce g je epi-lsc v každém bodě $x \in X$ pro $p \to p_0$ a $\widetilde{\mu}_{\mathrm{clo}(G)}(p_0) = \min_{x\in X} g(p_0,x)$. Z věty 2.14 proto vyplývá, že funkce $\widetilde{\mu}_{\mathrm{clo}(G)}$ je zdola polospojitá v bodě p_0.

2. Nyní ukážeme, že $\forall\ p \in P$ je $\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(p)$ neprázdná, kompaktní množina. Jelikož funkce f je zdola polospojitá na $P \times \mathrm{clo}\,(G)$, triviálně platí, že

$\forall\, p \in P$ je funkce $f(p,\cdot)$ zdola polospojitá na kompaktní množině $\mathrm{clo}\,(G)$. Odtud dle lemmatu 1.11 plyne, že $f(p,\cdot)$ nabývá na $\mathrm{clo}\,(G)$ svého minima. Množina $\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(p)$ je proto tvaru

$$\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(p) = \{x \in \mathrm{clo}\,(G) : f(p,x) = \min_{y \in \mathrm{clo}(G)} f(p,y)\},$$

což je neprázdná, uzavřená podmnožina kompaktní množiny a tedy neprázdná, kompaktní množina.

3. Buď $M \subset X$ libovolná otevřená množina taková, že $\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(p_0) \subset M$. Ukážeme, že $\exists\, \mathcal{U} \in \mathcal{N}(p_0), \mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0$ takové, že $\mathrm{clo}\,(\widetilde{M}_{clo(G)}(\mathcal{U})) \subset M$. Tím bude dle definice 2.8 dokázáno, že multifunkce $\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}$ je Berge-usc v bodě p_0 a že $\forall\, p \in \mathcal{U}$ je restrikce funkce $f(p,\cdot)$ na $\mathrm{clo}\,(G)$ vlastní funkce a $\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(p)$ je CLM množina pro funkci $f(p,\cdot)$ vzhledem ke G (bude stačit zvolit $M = G$). Definujme množinu $N := M \cap G$ a dále $\forall\, \mathcal{V} \in \mathcal{N}(p_0)$ nechť

$$T_{\mathcal{V}} := \mathrm{clo}\,(\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(\mathcal{V})) \cap \partial N,$$

kde $\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(\mathcal{V}) = \bigcup_{p \in \mathcal{V}} \widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(p)$.
Zřejmě $N \subset M$. Protože $N \subset G$ a $\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(p_0) \subset M$, je $\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(p_0)$ CLM množinou pro funkci $f(p_0,\cdot)$ také vzhledem k N. Bylo ukázáno, že multifunkce $\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}$ je uzavřená v bodě p_0, tzn. $\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(p_0) = \bigcap_{\mathcal{V} \in \mathcal{N}(p_0)} \mathrm{clo}\,(\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(\mathcal{V}))$. Proto dostáváme, že

$$\bigcap_{\mathcal{V} \in \mathcal{N}(p_0)} T_{\mathcal{V}} = \bigcap_{\mathcal{V} \in \mathcal{N}(p_0)} (\mathrm{clo}\,(\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(\mathcal{V})) \cap \partial N) = \widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(p_0) \cap \partial N = \emptyset.$$

Poslední rovnost platí, neboť $\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(p_0)$ je CLM množina pro funkci $f(p,\cdot)$ vzhledem k N a použijeme poznámku 2.17, bod (ii).
Proto $\exists\, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n \in \mathcal{N}(p_0)$ takové, že $\bigcap_{i=1}^n T_{\mathcal{U}_i} = \emptyset$. Definujeme-li $\mathcal{U} := \mathcal{U}_0 \cap (\bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_n)$, potom $\emptyset = T_{\mathcal{U}} = \mathrm{clo}\,(\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(\mathcal{U})) \cap \partial N$, a proto $\mathrm{clo}\,(\widetilde{M}_{\mathrm{clo}(G)}(\mathcal{U})) \subset N \subset M$.

❑

Značení. Uvažujeme-li metrický prostor $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$, kde $\|\cdot\|$ značí eukleidovskou normu na $\mathbb{R}^k$, a množiny $S, T \subset \mathbb{R}^k$, potom symbolem $e(S,T)$ rozumíme

$$e(S,T) = \sup_{s \in S} d(s,T),$$

kde $d(s,T) = \inf_{t \in T} \|s - t\|$ je vzdálenost bodu s od množiny T.

Věta 2.20. *Nechť je splněn Předpoklad I a dále nechť G je neprázdná, omezená a otevřená množina v $\mathbb{R}^k$. Potom $\exists\, A \in \mathcal{A}$, $\mathsf{P}(A) = 0\ \forall\, \omega \notin A$ platí:*
Je-li $\widehat{M}_\infty(\omega)$ CLM množina pro funkci $X_\infty(\omega,\cdot)$ vzhledem k množině G, potom

(i) $\lim_{n\to\infty} \widehat{\mu}_n(\omega) = \widehat{\mu}_\infty(\omega)$ *a hodnota $\widehat{\mu}_\infty(\omega)$ je reálné číslo,*

(ii) *multifunkce* $\widehat{M}_n(\omega)$ *je uzavřená a Berge-usc v* ∞ *a* $\widehat{M}_\infty(\omega)$ *je neprázdná, kompaktní množina,*

(iii) $\exists\ n_\omega \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq n_\omega$ *je* $\widehat{M}_n(\omega)$ *neprázdná, kompaktní CLM množina pro funkci* $X_n(\omega,\cdot)$ *vzhledem ke* G*,*

(iv) $\lim_{n\to\infty} e(\widehat{M}_n(\omega), \widehat{M}_\infty(\omega)) = 0.$

Důkaz. Definujme množiny A_1 a A_2 předpisem

$$A_1 := \{\omega \in \Omega : X_n(\omega,\cdot) \text{ není zdola polospojitá nebo vlastní funkce}, n \in \mathbb{N}\},$$
$$A_2 := \{\omega \in \Omega : X_n(\omega,\cdot) \overset{e}{\not\to} X_\infty(\omega,\cdot)\}.$$

Definujeme-li $A := A_1 \cup A_2$, potom $\mathsf{P}(A) = 0$.

Ukážeme, že tvrzení věty platí $\forall\ \omega \notin A$. Buď tedy $\omega \notin A$ libovolné. Jelikož $X_n(\omega,\cdot) \xrightarrow{e} X_\infty(\omega,\cdot)$, z lemmatu 1.12 plyne, že $X_\infty(\omega,\cdot)$ je zdola polospojitá funkce na $\mathbb{R}^k$, tedy speciálně i na kompaktní množině $\mathrm{clo}\,(G)$. Odtud dle lemmatu 1.11 plyne, že $X_\infty(\omega,\cdot)$ nabývá na $\mathrm{clo}\,(G)$ svého minima. Množina $\widehat{M}_\infty(\omega)$ je proto tvaru

$$\widehat{M}_\infty(\omega) = \{\theta \in \mathrm{clo}\,(G) : X_\infty(\omega,\theta) = \min_{\theta_0 \in \mathrm{clo}(G)} X_\infty(\omega,\theta_0)\},$$

což je neprázdná, uzavřená podmnožina kompaktní množiny a tedy neprázdná, kompaktní množina.
Protože $\forall\ n \in P$ je funkce $X_n(\omega,\cdot)$ zdola polospojitá a $X_n(\omega,\cdot) \xrightarrow{e} X_\infty(\omega,\cdot)$, z lemmatu 2.7 plyne, že funkce X definovaná na $P \times \mathbb{R}^k$, pro kterou jsme zavedli značení $X(n,\omega,\theta) = X_n(\omega,\theta)$, je zdola polospojitá na $P \times \mathbb{R}^k$ a epi-usc v každém bodě $\theta_0 \in \mathbb{R}^k$ pro $n \to \infty$, tedy speciálně i v každém bodě $\theta_0 \in \widehat{M}_\infty(\omega)$ pro $n \to \infty$. Dále platí, že $G \cap \mathrm{Dom}\,(X_\infty(\omega,\cdot)) \neq \emptyset$. Z věty 2.19 proto vyplývá, že hodnota $\widehat{\mu}_\infty(\omega)$ je reálné číslo, funkce $\widehat{\mu}_n(\omega)$ je spojitá v bodě ∞, tj. $\lim_{n\to\infty} \widehat{\mu}_n(\omega) = \widehat{\mu}_\infty(\omega)$, multifunkce $\widehat{M}_n(\omega)$ je uzavřená a Berge-usc v ∞ a také $\exists\ n_\omega \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq n_\omega$ je $\widehat{M}_n(\omega)$ neprázdná, kompaktní CLM množina pro funkci $X_n(\omega,\cdot)$ vzhledem ke G.

Zbývá dokázat platnost bodu (iv). Buď $\varepsilon > 0$. Definujme množinu

$$U_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| < \varepsilon\}.$$

Protože $\widehat{M}_\infty(\omega)$ je kompaktní podmnožina otevřené množiny G, pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$ je otevřená množina $\widehat{M}_\infty(\omega) + U_\varepsilon \subset G$. Ukázali jsme, že multifunkce $\widehat{M}_n(\omega)$ je Berge-usc v ∞. Odtud dle definice 2.8 plyne, že $\exists\ n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq n_\varepsilon$ je $\widehat{M}_n(\omega) \subset \widehat{M}_\infty(\omega) + U_\varepsilon$. Definujme $n_0 := \max\{n_\omega, n_\varepsilon\}$. Potom $\forall\ n \geq n_0$ je $\widehat{M}_n(\omega)$ neprázdná, kompaktní podmnožina množiny $\widehat{M}_\infty(\omega) + U_\varepsilon$ čili

$$0 \leq e(\widehat{M}_n(\omega), \widehat{M}_\infty(\omega)) < \varepsilon,$$

čímž je dokázán i bod (iv).

❑

V následující větě si ukážeme, že předpoklad o existenci CLM množiny pro funkci $X_\infty(\omega,\cdot)$ z věty 2.20 můžeme nahradit požadavkem platnosti Předpokladu II, tj. definice 1.14.

Věta 2.21. *Nechť je splněn Předpoklad II. Potom* $\exists\ A \in \mathcal{A}$, $\mathsf{P}(A) = 0\ \forall\ \omega \notin A$ $M_\infty(\omega)$ *je CLM množina pro funkci* $X_\infty(\omega,\cdot)$ *vzhledem k nějaké neprázdné, omezené a otevřené množině* G_ω.

Důkaz. Buď $A \in \mathcal{A}$ takové, že $\forall\ \omega \notin A$ platí bod (i) a (ii) z definice 1.14. Potom $\mathsf{P}(A) = 0$. Buď $\omega \notin A$ libovolné. Potom $M_\infty(\omega)$, množina obsahující body, v nichž funkce $X_\infty(\omega,\cdot)$ nabývá globálního minima, je neprázdná a kompaktní a existuje otevřená a omezená množina $G_\omega \subset \mathbb{R}^k$ taková, že $M_\infty(\omega) \subset G_\omega$. Potom zřejmě $M_\infty(\omega)$ je také CLM množina pro funkci $X_\infty(\omega,\cdot)$ vzhledem ke G_ω.

❑

Následující věta je anologií věty 2.20 pro případ, kdy X_∞ je deterministická funkce, tzn. funkce nezávislá na $\omega \in \Omega$. Její důkaz je potom analogický důkazu věty 2.20.

Věta 2.22. *Nechť je splněn Předpoklad I, ovšem nechť* X_∞ *nezávisí na* $\omega \in \Omega$. *Dále* G *buď neprázdná, omezená a otevřená množina v* $\mathbb{R}^k$. *Definujme*

$$\widehat{\mu}_\infty := \inf_{\theta \in clo(G)} X_\infty(\theta),$$
$$\widehat{M}_\infty := \{\theta \in clo(G) : X_\infty(\theta) = \widehat{\mu}_\infty\}.$$

Jestliže $\widehat{M}_\infty$ *je CLM množina pro* X_∞ *vzhledem k množině* G, *potom hodnota* $\widehat{\mu}_\infty$ *je reálné číslo a* $\widehat{M}_\infty$ *je kompaktní množina.*
Navíc $\exists\ A \in \mathcal{A}$, $\mathsf{P}(A) = 0\ \forall\ \omega \notin A$ *platí:*

(i) $\lim_{n\to\infty} \widehat{\mu}_n(\omega) = \widehat{\mu}_\infty$,

(ii) multifunkce $\widehat{M}_n(\omega)$ *je uzavřená a Berge-usc v* ∞,

(iii) $\exists\ n_\omega \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq n_\omega$ *je* $\widehat{M}_n(\omega)$ *neprázdná, kompaktní CLM množina pro funkci* $X_n(\omega,\cdot)$ *vzhledem ke* G,

(iv) $\lim_{n\to\infty} e(\widehat{M}_n(\omega), \widehat{M}_\infty) = 0$.

Definice 2.23 (Souvislá množina)**.** Nechť (X,ρ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je souvislá, jestliže není sjednocením dvou neprázdných oddělených množin, tj. množin $A \subset X$ a $B \subset X$, pro něž platí

$$\operatorname{clo}(A) \cap B = \emptyset = A \cap \operatorname{clo}(B).$$

Lemma 2.24. *Nechť* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^*$ *je vlastní funkce. Předpokládejme, že* M *je neprázdná CLM množina pro funkci* f *vzhledem k nějaké otevřené množině* $G \subset \mathbb{R}^k$. *Symbolem* μ *označme hodnotu, kterou* f *nabývá na* M.
Je-li úrovňová množina $\Lambda_\mu^f := \{x \in \mathbb{R}^k : f(x) \leq \mu\}$ *souvislá, potom* M *je také CLM množina pro funkci* f *vzhledem k* $\mathbb{R}^k$.
Speciálně M *potom obsahuje body, v nichž funkce* f *nabývá globálního minima.*

Důkaz. Stačí ukázat, že $\Lambda_\mu^f = M$.
Díky definici 2.15 víme, že $M \subset G$ a z poznámky 2.17 potom plyne, že f nabývá na $\operatorname{clo}(G) \setminus M$ ostře větší hodnoty než μ. Proto $\emptyset = \Lambda_\mu^f \cap (\operatorname{clo}(G) \setminus M) = (\Lambda_\mu^f \setminus M) \cap \operatorname{clo}(G)$ a jelikož $M \subset G$, potom také platí $(\Lambda_\mu^f \setminus M) \cap \operatorname{clo}(M) = \emptyset$. Dále si povšimněme, že $\operatorname{clo}(\Lambda_\mu^f \setminus M) \cap G = \emptyset$, a tedy také $\operatorname{clo}(\Lambda_\mu^f \setminus M) \cap M = \emptyset$. Tím jsme ukázali, že množiny M a $\Lambda_\mu^f \setminus M$ jsou oddělené. Protože Λ_μ^f je souvislá množina, M je neprázdná a $(\Lambda_\mu^f \setminus M) \cup M = \Lambda_\mu^f$, z definice 2.23 plyne, že nutně $(\Lambda_\mu^f \setminus M) = \emptyset$. Tudíž $\Lambda_\mu^f = M$.

❑

Věta 2.25. *Nechť je splněn Předpoklad I a Předpoklad II a dále nechť* $\forall\ n \in \mathbb{N}$ *a pro skoro všechna* $\omega \in \Omega$ *jsou úrovňové množiny funkce* $X_n(\omega,\cdot)$ *souvislé. Potom* $\exists\ A \in \mathcal{A}$, $\mathsf{P}(A) = 0\ \forall\ \omega \notin A$:

(i) $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\omega) = \mu_\infty(\omega)$ *a hodnota* $\mu_\infty(\omega)$ *je reálné číslo,*

(ii) multifunkce $M_n(\omega)$ *je uzavřená a Berge-usc v* ∞ *a* $M_\infty(\omega)$ *je neprázdná, kompaktní množina,*

(iii) $\exists\ n_\omega \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq n_\omega$ *je* $M_n(\omega)$ *neprázdná, kompaktní CLM množina pro funkci* $X_n(\omega,\cdot)$ *vzhledem k nějaké neprázdné, omezené a otevřené množině* $G \subset \mathbb{R}^k$,

(iv) $\lim_{n\to\infty} e(M_n(\omega), M_\infty(\omega)) = 0$.

Důkaz. Definujme množinu B předpisem

> $B := \{\omega \in \Omega :\ X_\infty(\omega,\cdot)$ není vlastní funkce nebo množina $M_\infty(\omega)$ obsahující body, ve kterých funkce $X_\infty(\omega,\cdot)$ nabývá minimální hodnoty, není neprázdná nebo kompaktní$\}$.

Potom dle definice 1.14 $\mathsf{P}(B) = 0$. Dále definujme množinu C předpisem

$$C := \{\omega \in \Omega :\ \text{úrovňové množiny funkce } X_n(\omega,\cdot), n \in \mathbb{N},\ \text{nejsou souvislé}\}.$$

Z předpokladu věty potom plyne $\mathsf{P}(C) = 0$.

Definujme množinu $A := B \cup C$. Potom $\mathsf{P}(A) = 0$. Ukážeme, že tvrzení věty platí $\forall\ \omega \notin A$. Buď $\omega \notin A$ libovolné. Dle věty 2.21 víme, že existuje neprázdná, omezená a otevřená množina $G_\omega \subset \mathbb{R}^k$ taková, že $M_\infty(\omega) \subset G_\omega$. Všimněme si, že potom platí $\widehat{M}_\infty(\omega) = M_\infty(\omega)$ a tedy i $\widehat{\mu}_\infty(\omega) = \mu_\infty(\omega)$. Jsou také splněny předpoklady věty 2.20, z níž plyne, že $\exists\ n_\omega \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq n_\omega$ je $\widehat{M}_n(\omega)$ neprázdná, kompaktní CLM množina pro funkci $X_n(\omega,\cdot)$ vzhledem ke G_ω.
Konečně z lemmatu 2.24 plyne, že $\forall\ n \geq n_\omega\ \widehat{M}_n(\omega) = M_n(\omega)$, a tedy také $\widehat{\mu}_n(\omega) = \mu_n(\omega)$, a tvrzení věty potom vyplývá z věty 2.20.

❑

Kapitola 3

Přibližná minimalizace

Ve většině praktických úloh je nalezené řešení optimalizační úlohy nikoliv přesné, nýbrž pouze přibližné. V této kapitole se proto zaměříme na body, jejichž funkční hodnota se od minimální hodnoty liší nejvýše o libovolně malé kladné ε. Věty, jež za tímto účelem zformulujeme, budou spolu s hlavními kroky jejich důkazů převzaty z článku Robinson (1996).
Nejříve definujme předpoklad, který budeme často v této kapitole využívat. Tento předpoklad je modifikací Předpokladu II z definice 1.14.

Definice 3.1 (Předpoklad III)**.** Buď $\varepsilon \geq 0$. Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, resp. X_∞ je náhodný proces, resp. náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ a předpokládejme, že náhodné veličiny $X_n, n \in \mathbb{N}$, a X_∞ jsou závislé na parametru $\theta \in \mathbb{R}^k$. Řekneme, že je splněn Předpoklad III pro ε, jestliže $\exists\ A \in \mathcal{A}$, $\mathsf{P}(A) = 0\ \forall\ \omega \notin A$ platí současně následující podmínky:

(i) funkce $X_\infty(\omega,\cdot)$ je zdola polospojitá a vlastní,

(ii) úrovňová množina $\Lambda(\omega, \varepsilon) := \{\theta \in \mathbb{R}^k : X_\infty(\omega,\theta) \leq \mu_\infty(\omega) + \varepsilon\}$ je neprázdná a kompaktní.

Poznámka 3.2. Povšimněme si, že:

(i) požadavek neprázdnosti úrovňové množiny $\Lambda(\omega, \varepsilon)$ nám zaručuje, že $\mu_\infty(\omega) \neq -\infty$,

(ii) platí-li Předpoklad III pro nějaké $\varepsilon_0 > 0$, potom Předpoklad III platí také $\forall\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ a pro toto ε také zřejmě

$$\Lambda(\omega, \varepsilon) \subset \Lambda(\omega, \varepsilon_0), \tag{3.1}$$

(iii) zvolíme-li $\varepsilon = 0$, potom Předpoklad III pro 0 je ekvivalentní Předpokladu II. Speciálně $\Lambda(\omega, 0) = M_\infty(\omega)$ je neprázdná a kompaktní množina.

Definice 3.3. Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$, resp. X_∞ je náhodný proces, resp. náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ a předpokládejme, že náhodné veličiny $X_n, n \in \mathbb{N}$, a X_∞ jsou závislé na parametru $\theta \in \mathbb{R}^k$. Potom pro $n \in P$, $\omega \in \Omega$ a $\varepsilon > 0$ definujme

$$M_n^\varepsilon(\omega) := \{\theta \in \mathbb{R}^k : X_n(\omega,\theta) \leq \mu_n(\omega) + \varepsilon\}. \tag{3.2}$$

Je-li navíc $G \subset \mathbb{R}^k$ otevřená a omezená množina obsahující $\Lambda(\omega, \varepsilon)$, potom definujeme

$$\widehat{M_n^\varepsilon}(\omega) := \{\theta \in \operatorname{clo}(G) : X_n(\omega,\theta) \leq \widehat{\mu}_n(\omega) + \varepsilon\}. \tag{3.3}$$

Poznámka 3.4. Všimněme si, že z definice 3.1 a definice 3.3 plyne

$$\Lambda(\omega, \varepsilon) = M_{\infty}^{\varepsilon}(\omega). \tag{3.4}$$

Poznámka 3.5. Je-li v předpisech (3.2) a (3.3) nabyto minima, potom $M_n^{\varepsilon}(\omega)$, resp. $\widehat{M_n^{\varepsilon}}(\omega)$ je množinou bodů z $\mathbb{R}^k$, resp. z clo (G), jejichž funkční hodnota se od hodnoty globálního minima, resp. jistého lokálního minima funkce $X_n(\omega, \cdot)$ liší nejvýše o ε.

Věta 3.6. *Buď $\varepsilon_0 > 0$ a nechť je splněn Předpoklad I a Předpoklad III pro ε_0. Je-li $G \subset \mathbb{R}^k$ nějaká otevřená a omezená množina obsahující $\Lambda(\omega, \varepsilon)$ a definujeme-li $\forall\, n \in P$ a $\forall\, \omega \in \Omega$ funkci*

$$\widehat{X}_n^{\varepsilon}(\omega,\theta) := \begin{cases} max\{X_n(\omega,\theta), \widehat{\mu}_n(\omega) + \varepsilon\}, & jestliže\ \theta \in clo\,(G), \\ \infty, & jestliže\ \theta \notin clo\,(G), \end{cases} \tag{3.5}$$

potom $\exists\, A \in \mathcal{A}$, $\mathsf{P}(A) = 0\ \forall\, \omega \notin A$ a $\forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ platí:

(i) $\lim_{n\to\infty} \widehat{\mu}_n(\omega) = \widehat{\mu}_{\infty}(\omega)$,

(ii) multifunkce $\widehat{M_n^{\varepsilon}}(\omega)$ je uzavřená a Berge-usc v ∞ a množina $\widehat{M_{\infty}^{\varepsilon}}(\omega)$ je kompaktní,

(iii) $\exists\ n_{\omega} \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq n_{\omega}$ je $\widehat{M_n^{\varepsilon}}(\omega)$ neprázdná, kompaktní CLM množina pro funkci $\widehat{X}_n^{\varepsilon}(\omega,\cdot)$ vzhledem ke G,

(iv) $\lim_{n\to\infty} e(\widehat{M_n^{\varepsilon}}(\omega), M_{\infty}^{\varepsilon}(\omega)) = 0.$

Důkaz. Buď $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ libovolné. Definujme množiny A_1, A_2 a A_3 předpisem

$$A_1 := \{\omega \in \Omega : X_n(\omega,\cdot) \text{ není zdola polospojitá nebo vlastní funkce}, n \in P\},$$
$$A_2 := \{\omega \in \Omega : X_n(\omega, \cdot) \overset{e}{\nrightarrow} X_{\infty}(\omega, \cdot)\},$$
$$A_3 := \{\omega \in \Omega : \Lambda(\omega, \varepsilon) \text{ není neprázdná nebo kompaktní}\}.$$

Potom z Předpokladu I, poznámky 3.2 a Předpokladu III pro ε plyne, že $\mathsf{P}(A_i) = 0,\ i = 1, 2, 3$. Definujme množinu $A := \bigcup_{i=1}^{3} A_i$. Potom $\mathsf{P}(A) = 0$ a ukážeme, že tvrzení věty platí $\forall\, \omega \notin A$. Buď $\omega \notin A$ libovolné.

1. Platnost bodu (i) se dokáže analogicky jako v důkazu věty 2.20.

2. Pro každé $n \in P$ definujme funkci

$$Y_n(\omega,\theta) := \begin{cases} X_n(\omega,\theta), & \text{jestliže } \theta \in \text{clo}\,(G), \\ \infty, & \text{jestliže } \theta \notin \text{clo}\,(G). \end{cases} \tag{3.6}$$

Předpis (3.5) potom díky (3.6) můžeme přepsat na tvar

$$\widehat{X}_n^{\varepsilon}(\omega,\theta) := \begin{cases} \max\{Y_n(\omega,\theta), \widehat{\mu}_n(\omega) + \varepsilon\}, & \text{jestliže } \theta \in \text{clo}\,(G), \\ \infty, & \text{jestliže } \theta \notin \text{clo}\,(G), \end{cases}$$

kde $n \in P$. Dále platí, že $M_\infty(\omega)$ je CLM množina pro funkci $X_\infty(\omega,\theta)$ vzhledem ke každé otevřené množině, která ji obsahuje, tedy speciálně i vzhledem ke G. Jelikož $\Lambda(\omega,\varepsilon) \subset G$, platí, že $\widehat{\mu}_\infty(\omega) = \mu_\infty(\omega)$, a proto $\widehat{M}_\infty(\omega) = M_\infty(\omega)$, $\widehat{M}^\varepsilon_\infty(\omega) = M^\varepsilon_\infty(\omega) = \Lambda(\omega,\varepsilon)$ a $G \cap \mathrm{Dom}\,(X_\infty(\omega,\cdot)) \neq \emptyset$. Na $\widehat{M}^\varepsilon_n(\omega)$ můžeme potom nahlížet buď jako na CLM množinu funkce $\widehat{X}^\varepsilon_n(\omega,\cdot)$ vzhledem k $\mathbb{R}^k$, tj. jako na množinu bodů, ve kterých funkce $\widehat{X}^\varepsilon_n(\omega,\cdot)$ nabývá globálního minima, nebo jako na množinu bodů, jejichž funkční hodnota se od hodnoty globálního minima funkce $Y_n(\omega,\cdot)$ liší nejvýše o ε, kde $n \in P$, přičemž $\widehat{M}^\varepsilon_\infty(\omega) = \Lambda(\omega,\varepsilon)$. Povšimněme si, že platí (3.1). Jelikož funkce $X_\infty(\omega,\cdot)$ je zdola polospojitá na kompaktní množině $\mathrm{clo}\,(G)$, nabývá zde proto svého minima. Proto

$$\widehat{M}^\varepsilon_\infty(\omega) = \{\theta \in \mathrm{clo}\,(G) : X_\infty(\omega,\theta) \leq \min_{\theta_0 \in \mathrm{clo}(G)} X_\infty(\omega,\theta_0) \ + \ \varepsilon\},$$

což je neprázdná, uzavřená podmnožina kompaktní množiny a tedy neprázdná, kompaktní množina.

3. Označme $\widehat{X}^\varepsilon(n,\omega,\theta) := \widehat{X}^\varepsilon_n(\omega,\theta)$, kde $n \in P$ a $\theta \in \mathbb{R}^k$, a ukažme, že funkce $\widehat{X}^\varepsilon(\cdot,\omega,\cdot)$ je zdola polospojitá na $P \times \mathrm{clo}\,(G)$.
Nechť $n_0 \in P$ a $\theta_0 \in \mathrm{clo}\,(G)$ jsou libovolné. Buď $\{(n_i,\theta_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ libovolná posloupnost bodů z $P \times \mathrm{clo}\,(G)$ taková, že $\lim_{i\to\infty}(n_i,\theta_i) = (n_0,\theta_0)$.

   i. Předpokládejme, že $n_0 < \infty$. Potom $\exists\ i_1 \in \mathbb{N}\ \forall\ i \geq i_1\ n_i = n_0$. Jelikož $\forall\ n \in P$ je na $\mathrm{clo}\,(G)$ funkce $Y_n(\omega,\cdot) = X_n(\omega,\cdot)$ a je zde také zdola polospojitá, platí, že $\exists\ i_2 \in \mathbb{N}\ \forall\ i \geq i_2\ \inf_{i\geq i_2} Y_n(\omega,\theta_i) \geq Y_n(\omega,\theta_0)$. Nechť $i_0 := \max\{i_1, i_2\}$. Potom

$$\begin{aligned}\inf_{i\geq i_0} \widehat{X}^\varepsilon(n_i,\omega,\theta_i) = \inf_{i\geq i_0} \widehat{X}^\varepsilon_{n_i}(\omega,\theta_i) &= \inf_{i\geq i_0} \max\{Y_{n_i}(\omega,\theta_i), \widehat{\mu}_{n_i}(\omega) \ + \ \varepsilon\}\\ &\geq \max\{\inf_{i\geq i_0} Y_{n_i}(\omega,\theta_i), \inf_{i\geq i_0} \widehat{\mu}_{n_i}(\omega) \ + \ \varepsilon\}\\ &\geq \max\{\inf_{i\geq i_0} Y_{n_0}(\omega,\theta_i), \widehat{\mu}_{n_0}(\omega) \ + \ \varepsilon\}\\ &\geq \max\{Y_{n_0}(\omega,\theta_0), \widehat{\mu}_{n_0}(\omega) \ + \ \varepsilon\}\\ &\geq \widehat{X}^\varepsilon_{n_0}(\omega,\theta_0) = \widehat{X}^\varepsilon(n_0,\omega,\theta_0).\end{aligned}$$

   Z těchto nerovností mj. vyplývá, že označíme-li $Y(n,\omega,\theta) := Y_n(\omega,\theta)$, kde $n \in P$ a $\theta \in \mathrm{clo}\,(G)$, potom funkce $Y(\cdot,\omega,\cdot)$ je zdola polospojitá na $P \times \mathrm{clo}\,(G)$.

   ii. Nyní předpokládejme, že $n_0 = \infty$. Potom z již dokázaného bodu (i) a faktu, že funkce $Y(\cdot,\omega,\cdot)$ je zdola polospojitá na $P \times \mathrm{clo}\,(G)$

$$\begin{aligned}\widehat{X}^\varepsilon(\infty,\omega,\theta_0) &= \widehat{X}^\varepsilon_\infty(\omega,\theta_0) = \max\{Y_\infty(\omega,\theta_0), \widehat{\mu}_\infty(\omega) \ + \ \varepsilon\}\\ &\leq \max\{Y(\infty,\omega,\theta_0), \widehat{\mu}_\infty(\omega) \ + \ \varepsilon\}\\ &\leq \max\{\liminf_{n\to\infty} Y(n,\omega,\theta_n), \lim_{n\to\infty} \widehat{\mu}_n(\omega) \ + \ \varepsilon\}\\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \max\{Y(n,\omega,\theta_n), \widehat{\mu}_n(\omega) \ + \ \varepsilon\}\\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \max\{Y_n(\omega,\theta_n), \widehat{\mu}_n(\omega) \ + \ \varepsilon\}\\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \widehat{X}^\varepsilon_n(\omega,\theta_n) = \liminf_{n\to\infty} \widehat{X}^\varepsilon(n,\omega,\theta_n).\end{aligned}$$

Tím je dle definice 1.6 dokázáno, že funkce $\widehat{X}^{\varepsilon}(\cdot,\omega,\cdot)$ je zdola polospojitá na $P \times \mathrm{clo}\,(G)$.

4. Nyní ukážeme, že funkce $\widehat{X}^{\varepsilon}(\cdot,\omega,\cdot)$ je epi-usc v každém bodě $\theta_0 \in \widehat{M}^{\varepsilon}_{\infty}(\omega)$ pro $n \to \infty$.
   Nechť $\theta_0 \in \widehat{M}^{\varepsilon}_{\infty}(\omega)$ je libovolné. Víme, že $X_n(\omega,\cdot) \xrightarrow{e} X_{\infty}(\omega,\cdot)$, proto dle poznámky 1.2 $\exists$ posloupnost $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v $\mathbb{R}^k$, $\lim_{n\to\infty}\theta_n = \theta_0$ taková, že
   $$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega,\theta_n) = X_{\infty}(\omega,\theta_0).$$
   Jelikož $\theta_0 \in \widehat{M}^{\varepsilon}_{\infty}(\omega) \subset G$, potom $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq n_0\ \theta_n \in G$. Tudíž $Y_n(\omega,\theta_n) = X_n(\omega,\theta_n)$. Potom
   $$\begin{aligned}\widehat{X}^{\varepsilon}(\infty,\omega,\theta_0) &= \widehat{X}^{\varepsilon}_{\infty}(\omega,\theta_0) = \max\{Y_{\infty}(\omega,\theta_0), \widehat{\mu}_{\infty}(\omega) + \varepsilon\} \\ &= \max\{\lim_{n\to\infty} Y_n(\omega,\theta_n), \lim_{n\to\infty}\widehat{\mu}_n(\omega) + \varepsilon\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\max\{Y_n(\omega,\theta_n), \widehat{\mu}_n(\omega) + \varepsilon\} \\ &= \lim_{n\to\infty}\widehat{X}^{\varepsilon}_n(\omega,\theta_n) = \lim_{n\to\infty}\widehat{X}^{\varepsilon}(n,\omega,\theta_n).\end{aligned}$$

5. Ukázali jsme, že jsou splněny předpoklady věty 2.19 pro funkci $\widehat{X}^{\varepsilon}(n,\omega,\theta) = \widehat{X}^{\varepsilon}_n(\omega,\theta)$. Tím jsou tedy dokázány body (ii) a (iii).

6. Bod (iv) se dokáže analogicky jako v důkazu věty 2.20, přičemž si stačí uvědomit, že v 2. bodě jsme ukázali, že $\widehat{M}^{\varepsilon}_{\infty}(\omega) = M^{\varepsilon}_{\infty}(\omega)$.

❑

Podobně jako ve větě 2.22 si ukážeme, jaké závěry plynou z předpokladu, že X_{∞} je deterministická funkce. Pro tento případ budeme ovšem muset drobně modifikovat definici 3.1.

Definice 3.7 (Předpoklad IV)**.** Buď $\varepsilon \geq 0$. Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ je náhodný proces definovaný na $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ a předpokládejme, že náhodné veličiny $X_n, n \in \mathbb{N}$, jsou závislé na parametru $\theta \in \mathbb{R}^k$. Dále nechť $X_{\infty} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^*$ je funkce nezávislá na $\omega \in \Omega$. Označme $\mu_{\infty} := \inf_{\theta\in\mathbb{R}^k} X_{\infty}(\theta)$ a pro neprázdnou, omezenou a otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^k$ definujme

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_{\infty} &:= \inf_{\theta\in\mathrm{clo}(G)} X_{\infty}(\theta), \\ \widehat{M}_{\infty} &:= \{\theta \in \mathrm{clo}\,(G) : X_{\infty}(\theta) \leq \widehat{\mu}_{\infty} + \varepsilon\}.\end{aligned}$$

Řekneme, že je splněn Předpoklad IV pro ε, jestliže platí současně následující podmínky:

(i) funkce X_{∞} je zdola polospojitá a vlastní,

(ii) úrovňová množina $\Lambda(\varepsilon) := \{\theta \in \mathbb{R}^k : X_{\infty}(\theta) \leq \mu_{\infty} + \varepsilon\}$ je neprázdná a kompaktní.

Věta 3.8. *Buď $\varepsilon_0 > 0$ a nechť je splněn Předpoklad I a Předpoklad IV pro ε_0. Dále nechť $G \supset \Lambda(\varepsilon_0)$ je otevřená, omezená množina v $\mathbb{R}^k$ a $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, \omega \in \Omega$ a $\forall\, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ definujme $\widehat{X}_n^\varepsilon(\omega,\theta)$ předpisem* (3.5) *a*

$$\widehat{X}_\infty^\varepsilon(\theta) := \begin{cases} max\{X_\infty(\theta), \widehat{\mu}_\infty + \varepsilon\}, & \text{jestliže } \theta \in clo(G), \\ \infty, & \text{jestliže } \theta \notin clo(G). \end{cases}$$

Potom $\exists\, A \in \mathcal{A}$, $\mathsf{P}(A) = 0\ \forall\, \omega \notin A$ a $\forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ platí:

(i) $\lim_{n\to\infty} \widehat{\mu}_n(\omega) = \widehat{\mu}_\infty$,

(ii) multifunkce $\widehat{M}_n(\omega)$ je uzavřená a Berge-usc v ∞,

(iii) $\exists\, n_\omega \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_\omega$ je $\widehat{M}_n(\omega)$ neprázdná, kompaktní CLM množina pro funkci $X_n(\omega,\cdot)$ vzhledem ke G,

(iv) $\lim_{n\to\infty} e(\widehat{M}_n(\omega), \widehat{M}_\infty) = 0$.

Důkaz. Jedná se o analogii důkazu věty 3.6. ❑

Věta 3.9. *Buď $\varepsilon_0 > 0$. Nechť je splněn Předpoklad I a Předpoklad III pro ε_0. Dále předpokládejme, že $\forall\, n \in P$ a pro skoro všechna $\omega \in \Omega$ jsou úrovňové množiny funkce $X_n(\omega,\cdot)$ souvislé. Potom $\exists\, A \in \mathcal{A}$, $\mathsf{P}(A) = 0\ \forall\, \omega \notin A$ a $\forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ platí: Definujeme-li $\forall\, n \in P$ a $\forall\, \omega \in \Omega$*

$$X_n^\varepsilon(\omega,\theta) := max\{X_n(\omega,\theta), \widehat{\mu}_n(\omega)\ +\ \varepsilon\},$$

kde $\theta \in \mathbb{R}^k$, potom

(i) $\lim_{n\to\infty} \mu_n(\omega) = \mu_\infty(\omega)$,

(ii) multifunkce $M_n^\varepsilon(\omega)$ je uzavřená a Berge-usc v ∞ a množina $M_\infty^\varepsilon(\omega)$ je kompaktní,

(iii) $\exists\, n_\omega \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_\omega$ je $M_n^\varepsilon(\omega)$ neprázdná, kompaktní CLM množina pro funkci $X_n^\varepsilon(\omega,\cdot)$ vzhledem ke každé omezené a otevřené množině $G_\omega \supset M_n^\varepsilon(\omega)$,

(iv) $\lim_{n\to\infty} e(M_n^\varepsilon(\omega), M_\infty^\varepsilon(\omega)) = 0$.

Důkaz. Buď $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ libovolné. Definujme množiny A_1, A_2 a A_3 předpisem

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\omega \in \Omega : X_\infty(\omega,\cdot) \text{ není zdola polospojitá nebo vlastní funkce}\}, \\ A_2 &:= \{\omega \in \Omega : \Lambda(\omega,\varepsilon) \text{ není neprázdná nebo kompaktní}\}, \\ A_3 &:= \{\omega \in \Omega : \text{úrovňové množiny funkce } X_n(\omega,\cdot), n \in P, \text{nejsou souvislé}\}. \end{aligned}$$

Potom z předpokladu věty, poznámky 3.2 a Předpokladu III pro ε plyne, že $\mathsf{P}(A_i) = 0,\ i = 1,2,3$. Definujme množinu $A := \bigcup_{i=1}^3 A_i$. Potom $\mathsf{P}(A) = 0$ a ukážeme, že tvrzení věty platí $\forall\, \omega \notin A$. Buď $\omega \notin A$ libovolné. Dále nechť $G \subset \mathbb{R}^k$ je libovolná otevřená a omezená množina obsahující $\Lambda(\omega,\varepsilon)$.

Předpisem (3.5) definujme $\forall\, n \in P$ a $\forall\, \omega \notin A$ $\widehat{X}_n^\varepsilon(\omega,\theta), \theta \in \mathbb{R}^k$.

Potom z věty 3.6 plyne, že $\exists\, n_\omega \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_\omega$ je $\widehat{M}_n^\varepsilon(\omega)$ neprázdná, kompaktní CLM množina pro funkci $\widehat{X}_n^\varepsilon(\omega,\cdot)$ vzhledem ke G. Protože $\forall\, n \geq n_\omega$ je $\widehat{M}_n^\varepsilon(\omega)$ množinou bodů z clo$\,(G)$, jejichž funkční hodnota se od hodnoty minima funkce $X_n(\omega,\cdot)$ na clo$\,(G)$ liší nejvýše o ε, platí, že na clo$\,(G)$ je $\widehat{M}_n(\omega) \subset \widehat{M}_n^\varepsilon(\omega)$. Z lemmatu 2.24 proto plyne, že $\forall\, n \geq n_\omega$ $\widehat{M}_n(\omega) = M_n(\omega)$, a tedy i $\widehat{\mu}_n(\omega) = \mu_n(\omega)$. Jelikož pro $\theta \in$ clo$\,(G)$ $X_n^\varepsilon(\omega,\theta) = \widehat{X}_n^\varepsilon(\omega,\theta)$, $\widehat{M}_n^\varepsilon(\omega)$ je CLM množina pro funkci $X_n^\varepsilon(\omega,\cdot)$ vzhledem ke G.
Povšimněme si, že úrovňové množiny funkce $X_n^\varepsilon(\omega,\cdot)$ jsou souvislé, neboť tyto úrovňové množiny mohou být buď shodné jako úrovňové množiny funkce $X_n(\omega,\cdot)$, o kterých víme, že jsou souvislé, nebo jsou to prázdné množiny, které jsou triviálně souvislé. Opětovnou aplikací lemmatu 2.24 tedy víme, že $\forall\, n \geq n_\omega$ $\widehat{M}_n^\varepsilon(\omega) = M_n^\varepsilon(\omega)$ a tvrzení věty potom vyplývá z věty 3.6.

❑

Věta 3.10. *Buď $\varepsilon_0 > 0$. Nechť je splněn Předpoklad I a Předpoklad III pro ε_0. Předpokládejme, že $\delta > 0$ je libovolné. Potom $\exists\, A \in \mathcal{A}$, $\mathsf{P}(A) = 0$ $\forall\, \omega \notin A$ existují $\varepsilon > 0$ a $n_\omega \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall\, n \geq n_\omega$ a pro každou otevřenou a omezenou množinu $G \subset \mathbb{R}^k$ obsahující $\Lambda(\omega, \varepsilon_0)$ platí:*

(i) $\widehat{M}_n^\varepsilon(\omega) \neq \emptyset$,

(ii) $e(\widehat{M}_n^\varepsilon(\omega), M_\infty(\omega)) \leq \delta$.

Důkaz. Definujme množiny A_1, A_2 a A_3 předpisem

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \{\omega \in \Omega : X_n(\omega,\cdot) \text{ není zdola polospojitá nebo vlastní funkce}, n \in P\},\\
A_2 &:= \{\omega \in \Omega : X_n(\omega,\cdot) \stackrel{e}{\not\to} X_\infty(\omega,\cdot)\},\\
A_3 &:= \{\omega \in \Omega : \Lambda(\omega,\varepsilon_0) \text{ není neprázdná nebo kompaktní}\}.
\end{aligned}$$

Potom z Předpokladu I a Předpokladu III pro ε_0 plyne, že $\mathsf{P}(A_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Definujme množinu $A := \bigcup_{i=1}^3 A_i$. Potom $\mathsf{P}(A) = 0$ a ukážeme, že tvrzení věty platí $\forall\, \omega \notin A$. Buď $\omega \notin A$ libovolné. Budeme postupovat ve čtyřech krocích.

1. Nejdříve si uvědomme, že z poznámky 3.2 plyne, že $M_\infty(\omega)$ je neprázdná a kompaktní množina. Nechť $G \subset \mathbb{R}^k$ je libovolná otevřená množina obsahující $\Lambda(\omega, \varepsilon_0)$. Dle poznámky 3.4 a poznámky 3.2 potom víme, že $\forall\, \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$
$$G \supset \Lambda(\omega,\varepsilon_0) \supset \Lambda(\omega,\varepsilon) = M_\infty^\varepsilon(\omega),$$
a proto také $\widehat{M}_\infty^\varepsilon(\omega) = M_\infty^\varepsilon(\omega)$.

2. Nyní ukážeme, že $\exists\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ takové, že
$$e(M_\infty^\varepsilon(\omega), M_\infty(\omega)) \leq \frac{\delta}{2}. \tag{3.7}$$
Postupujme sporem:

Budeme tedy předpokládat, že $\forall\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]\ e(M^{\varepsilon}_{\infty}(\omega), M_{\infty}(\omega)) > \dfrac{\delta}{2}$. Potom existují posloupnost kladných čísel $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ splňující

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \tag{3.8}$$

a posloupnost $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taková, že $\theta_n \in M^{\varepsilon_n}_{\infty}(\omega)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, tj.

$$X_{\infty}(\omega, \theta_n) \leq \mu_{\infty}(\omega)\ +\ \varepsilon_n, \tag{3.9}$$

přičemž $d(\theta_n, M_{\infty}(\omega)) > \dfrac{\delta}{2}$. Z Předpokladu III pro ε_0 plyne, že $\exists\ \theta_{\infty} \in \mathbb{R}^k$ takové, že $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta_{\infty}$. Potom

$$d(\theta_{\infty}, M_{\infty}(\omega)) \geq \frac{\delta}{2}. \tag{3.10}$$

Víme, že funkce $X_{\infty}(\omega,\cdot)$ je zdola polospojitá, tj. platí

$$\liminf_{n\to\infty} X_{\infty}(\omega, \theta_n) \geq X_{\infty}(\omega, \theta_{\infty}). \tag{3.11}$$

Potom z (3.8), (3.9) a (3.11) plyne $X_{\infty}(\omega, \theta_{\infty}) \leq \mu_{\infty}(\omega)$, a tedy $\theta_{\infty} \in M_{\infty}(\omega)$. To je ovšem spor s (3.10).

3. Z věty 3.6 potom vyplývá, že $\exists\ n_{\omega} \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq n_{\omega}$ je $\widehat{M^{\varepsilon}_n}(\omega) \neq \emptyset$, tj. platí bod (i), a také

$$e(\widehat{M^{\varepsilon}_n}(\omega), M^{\varepsilon}_{\infty}(\omega)) \leq \frac{\delta}{2}. \tag{3.12}$$

4. Z nerovností (3.7), (3.12) a trojúhelníkové nerovnosti potom plyne

$$\begin{aligned} e(\widehat{M^{\varepsilon}_n}(\omega), M_{\infty}(\omega)) &\leq e(\widehat{M^{\varepsilon}_n}(\omega), M^{\varepsilon}_{\infty}(\omega)) + e(M^{\varepsilon}_{\infty}(\omega), M_{\infty}(\omega)) \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \end{aligned}$$

a tím je dokázána i platnost bodu (ii).

❑

Věta 3.11. *Buďte $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$. Nechť je splněn Předpoklad I a Předpoklad III pro ε. Potom $\exists\ A \in \mathcal{A}$, $\mathsf{P}(A) = 0\ \forall\ \omega \notin A$ existuje $n_{\omega} \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall\ n \geq n_{\omega}$ a pro každou otevřenou a omezenou množinu $G \subset \mathbb{R}^k$ obsahující $\Lambda(\omega, \varepsilon)$ platí:*

(i) $\widehat{M^{\varepsilon}_n}(\omega) \neq \emptyset$,

(ii) $e(\widehat{M^{\varepsilon}_n}(\omega), M^{\varepsilon}_{\infty}(\omega)) \leq \delta$.

Důkaz. Jedná se o analogii důkazu věty 3.10.

❑

Závěr

V předložené práci jsme se pokusili přiblížit čtenáři některé základní pojmy teorie optimalizačních úloh. Spolu s definicí příslušného pojmu jsme se také snažili uvést i nějaký příklad ilustrující daný pojem a tím přispět k jeho snazšímu pochopení.
Většina vět formulovaných v této práci je spolu s hlavními myšlenkami důkazů převzata z článku Robinson (1996), některé pomocné věty jsou převzaty ze staršího článku Robinson (1987). Samotné důkazy jsou ovšem rozpracovány podrobněji, než tomu bylo ve zdrojových pracech.

Jednou z možností dalšího směřování práce by mohla být snaha pokusit se všechny věty formulovat pro obecné topologické prostory, případně zapracovat numerickou studii, ve které bychom ukázali aplikaci vyložené teorie na konkrétních datech používaných v praxi.

Seznam použité literatury

ATTOUCH, H. (1984). *Variational Convergence for Functions and Operators.* Pitman, Boston.

INFANGER, G., editor (2010). *Stochastic Programming: The State of the Art In Honor of George B. Dantzig.* Springer, New York.

KALL, P. (1986). Approximation to optimization problems: An elementary review. *Math. Oper. Res.*, **11**(1), 9–18.

KLATTE, D. a KUMMER, B. (2002). *Nonsmooth Equations in Optimization: Regularity, Calculus, Methods and Applications.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

LACHOUT, P. Konvexita v konečné dimenzi. [online]. URL `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~lachout/Vyuka/Optima1/111016-Konvexita-skripta.pdf`. [cit. červenec 2014].

ROBINSON, S. M. (1982). Generalized equations and their solutions, Part II: Applications to mathematical programming. *Mathematical Programming Study*, **19**, 200–221.

ROBINSON, S. M. (1987). Local epi-continuity and local optimization. *Math. Programming*, **37**, 208–222.

ROBINSON, S. M. (1996). Analysis of Sample-Path Optimization. *Math. Oper. Res.*, **21**(3), 513–528.

ROCKAFELLAR, R. T. (1997). *Convex Analysis.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

ROCKAFELLAR, R. T. a WETS, R. J.-B. (2004). *Variational Analysis.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

WOODRUFF, D. L., editor (1997). *Advances in Computational and Stochastic Optimization, Logic Programming, and Heuristic Search: Interfaces in Computer Science and Operations Research.* Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts.