Oponentský posudek na diplomovou práci

Zuzana Kasarová: Geometrie projektivních struktur.

V posledních 15 letech se velmi rychle rozvíjí teorie zobecněných Cartanových prostorů. Hlavní myšlenka jde zpět k Erlangenskému programu Felixe Kleina, který klasifikuje geometrie pomocí tzv. hlavní grupy a její isotropní podgrupy, zachovávající zvolený bod. Plochým modelem Cartanovy geometrie je tedy homogenní prostor M=G/P. Na tomto plochém modelu je přirozeně dána konexe pomocí Maurer-Cartanovy formy ω.

Cartananův zobecněný prostor je ,křivá' verze tohoto plochého modelu. Takováto geometrie typu (G,P) je zadána pomocí hlavního fibrovaného prostoru nad varietou M (dimenze M se rovná rozdílu dimenzí G a H) a tzv. Cartanovy konexe, což je forma ω na s hodnotami v Lieově algebře g groupy G, která má vlastnosti obdobné vlastnostem Maurer-Cartanovy formy.

Zvláštní pozornost je v posledních letech věnována zejména jisté třídě Cartanových zobecněných geometrií, které jsou známy pod názvem parabolické geometrie. Jsou to zobecněné Cartanovy geometrie typu (G,P), kde G je (polo-)jednoduchá Lieova grupa a P její parabolická podgrupa. Mezi základní příklady parabolických geometrií patří případy, kdy plochý model je Hermiteovský symetrický prostor. Tyto případy obsahují několik základních geometrických struktur (projektivní strukturu, konformní strukturu, nebo novější kvaternionickou strukturu na varietě). Předložená diplomová práce zpracovává přehledným způsobem základní informace o jedné z těchto struktur (projektivní geometrie) a studuje invariantní diferenciální operátory na varietách se zadanou projektivní strukturou.

Podobně jako je tomu v ostatních základních příkladech, projektivní struktura je klasická geometrická struktura, která se studuje již po staletí. Existuje tedy klasická definice projektivní struktury na varietě, která je zadána pomocí třídy ekvivalentních konexí bez torze. Modernější definice užívá při definici projektivní struktury fibrovaný prostor reperů na dané varietě, jeho druhé jetové prodloužení a konexe na tomto fibrovaném prostoru, která splňuje podmínku normality. Tato definice je již blízká k definici, která je používána pro projektivní geometrie v rámci jednotného schématu parabolických geometrií.

Práce se skládá ze 4 kapitol. První kapitola je přípravná a obsahuje definice a základní vlastnosti fibrovaných prostorů a konexí, resp. Cartanových konexí. V druhé kapitole jsou popsán obě klasické definice projektivní struktury a ukázána jejich ekvivalence. Schéma parabolických geometrií je popsáno ve třetí kapitole. Je zde uvedena definice regulárních normálních parabolických geometrií, popsána existence a jednoznačnost normální Cartanovy konexe, zaveden pojem Weylovy struktury a fibrovaného prostoru měřítek a popsány příklady traktorových fibrovaných prostorů. Je zde také ukázáno, že definice projektivní geometrie v rámci regulárních normálních parabolických geometrií je ekvivalentní klasické definici.

Poslední kapitola je věnována invariantním diferenciálním operátorům na varietách se zadanou projektivní strukturou. Nejdříve je rozebrán homogenní případ, pak i obecný (křivý) případ. Je zde popsána struktura tzv. BGG posloupností (resp. komplexů), které popisují úplně třídu standardních regulárních invariantních diferenciálních operátorů. Na závěr je sestrojena třída diferenciálních operátorů, které nezávisí na volbě projektivní konexe. Tyto operátory nejsou invarianty projektivní struktury (a nespadají do třídy standardních regulárních operátorů, popsaných předtím). Pro jejich konstrukci je nutná dodatečná volba (např. volba metriky na varietě M, nebo volba vhodného tenzorového pole na M).

Práce je napsána pěkně, přehledně, srozumitelně a přesně. Je dobře logicky uspořádána. Zpracovává širokou třídu pojmů a různých přístupů k definici projektivní struktury. Pro zpracování diplomové práce bylo třeba naučit se a dobře pochopit řadu netriviálních pojmů, od klasických až po zcela moderní. Práce přináší pěkné zpracování dané tématiky, i některé nové výsledky. Práce je napsána velmi pečlivě, téměř v ní nejsou překlepy či nepřesné formulace (dva přepisy uvádím níže, jde však o nepodstatné maličkosti). Navrhuji proto uznat předloženou práci jako práci diplomovou a doporučuji ji hodnotit známkou výborně.

V Praze, 28.5.2006

prof. Vladimír Souček, DrSc.

Dodatek.

1) Na str. 24, řádek 11 se konstatuje, že každá subalgebra gi je_podalgebra g. Zde vypadla podmínka i je větší nebo rovno nule.
2) Vztah (2.5) (jeho pravá strana) na straně 15 není přesně formulován.