Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DISERTAČNÍ PRÁCE

Dana Trkovská

Historický vývoj geometrických transformací

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí disertační práce:	doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecné otázky matematiky a informatiky

Praha 2014

Ráda bych na tomto místě poděkovala svému školiteli, doc. RNDr. Jindřichu Bečvářovi, CSc., za odborné vedení zejména v prvních letech doktorského studia, jeho profesionální rady, věcné připomínky a přátelské diskuse o geometrii, z nichž vyplynula řada námětů využitelných v pozdější práci.

Na výsledné podobě disertační práce má velké zásluhy doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D., jejíž odborné rady, vycházející z cenných zkušeností, vedly za neustálého povzbuzování ke kritickému přepracování jednotlivých kapitol. Její zájem o uvedenou problematiku mi kromě nových podnětů dodal tolik potřebnou energii k dokončení celé práce.

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 11. května 2014 *Dana Trkovská*

Název práce: Historický vývoj geometrických transformací

Autor: RNDr. Dana Trkovská

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí disertační práce: doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.,
Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Disertační práce pojednává o historii geometrických transformací od nejstarších dob až do počátku 20. století. Na základě primárních zdrojů dokumentuje první výskyt a následný vývoj jednotlivých geometrických transformací. Zaměřuje se zejména na následující typy transformací: shodnost, podobnost, pohyby, osová afinita, stejnolehlost, kruhová inverze, promítání, stereografická projekce, afinní transformace, projektivní transformace a Cremonovy transformace. Práce přibližuje vybrané významné okamžiky v historii geometrie, kdy se v souvislosti s transformacemi objevily nové myšlenky. Na pozadí světového vývoje sleduje rovněž reakce a vliv na studovanou problematiku v českých zemích. Na několika místech jsou stručně komentovány vybrané partie českých učebnic geometrie, v nichž se poprvé projevil nový přístup k některým tématům.

Klíčová slova: geometrická transformace, historie geometrie, barycentrický počet, Erlangenský program, axiomatika geometrie

Title: Historical Development of Geometric Transformations

Author: RNDr. Dana Trkovská

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.,
Department of Mathematics Education

Abstract: The thesis deals with the history of geometric transformations from ages up to the beginning of the 20th century. On the basis of original sources it refers to the first appearance and subsequent advancement of particular geometric transformations. It focuses especially on the following types of transformations: isometry, similarity, geometric motions, axial affinity, central dilatation, circular inversion, projection, stereographic projection, affine transformations, projective transformations and Cremona transformations. The thesis gives further details about those significant moments from the history of geometry when in the connection with transformations some new ideas arose. On the background of the world's development it follows reflections and the influence on investigated mathematical problems in Czech countries as well. In this context selected parts of Czech textbooks on geometry following for the first time a new approach to some themes are commented in more detail.

Keywords: geometric transformation, history of geometry, barycentric calculus, Erlanger Programm, axiomatization of geometry

Obsah

Úvod

Tato disertační práce vznikla v letech 2006 až 2014 v rámci doktorského studia na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Pojednává o historickém vývoji geometrických transformací.

Historie geometrických transformací je velmi bohatá. Sahá patrně až do doby před 2 500 lety, kdy lze v dochovaných materiálech vystopovat jejich první náznaky. Jednotlivé typy transformací byly často objevovány v souvislosti s řešením různých praktických úloh a byly využívány nejen v geometrii, ale ve velké míře i v dalších oborech lidské činnosti. Příkladem je užití perspektivy v malířství, promítání ve stavitelství nebo konstrukce map pomocí stereografické projekce.

Geometrické transformace byly zpočátku chápány pouze jako vztah mezi rovinnými nebo prostorovými útvary. Teprve kolem 18. století se v souvislosti s transformacemi začal uvažovat i vlastní proces zobrazování a geometrické transformace se staly předmětem studia celé řady významných matematiků. V té době začaly být postupně sepisovány souhrnnější práce věnované jednotlivým typům transformací, a tím byly položeny základy obecné teorie, k nimž tehdy přispěla řada matematiků.

Velký zájem o tuto problematiku v 18. a 19. století souvisel s tehdejším obecným trendem v matematice, jímž byla jednak snaha o systematizaci dosavadních poznatků, jednak touha po zobecňování již dosažených výsledků (do vyšších dimenzí, pro složitější objekty apod.). Tento jev se nevyhnul ani geometrii, v níž se od lineárních transformací rychle přešlo k transformacím vyšších stupňů, od bodových transformací k transformacím spojitým nebo nejednoznačným, kdy jednomu bodu mohou být přiřazeny dva nebo dokonce nekonečně mnoho bodů.

Prudký rozvoj matematiky vnesl do geometrie další podněty k systematickému zkoumání, zejména křivky a plochy, jejichž studium položilo základy nových odvětví geometrie, např. geometrie algebraické, projektivní a diferenciální. Proces specializace a tříštění geometrie byl završen objevem neeukleidovské geometrie. Nové geometrické metody do jisté míry pozměnily a obohatily naše chápání geometrického prostoru a nastartovaly proces geometrizace, jenž zásadním způsobem ovlivnil nejen matematiku, ale i moderní fyziku a naše vnímání jejich vzájemného vztahu.

V 19. století se začala zkoumat možnost klasifikace všech známých typů transformací, a tím i jednotlivých geometrií. První zásadní krok v tomto směru učinil August Ferdinand Möbius v *Barycentrickém počtu*. Pouze nedostatek formálního, algebraického aparátu mu neumožnil uskutečnit zamýšlené pojetí klasifikace různých geometrií. K němu dospěl až Felix Klein v *Erlangenském programu*. Využil nejnovější poznatky teorie grup a teorie invariantů a aplikoval je na geometrii. Pracoval s grupami transformací, které zachovávaly geometrické vlastnosti útvarů a umožňovaly zformulovat jednotnou definici různých typů geometrií. Na základě uspořádání grup geometrických transformací poté dospěl i k uspořádání odpovídajících geometrií.

Koncem 19. a na počátku 20. století se pozornost matematiků soustředila na zkoumání logických základů a vlastní struktury matematiky jako vědního oboru. V geometrii se od názorných důkazů využívajících syntetickou geometrii přešlo k formálnímu systému axiomů, z nichž bylo možno všechna tvrzení elementární geometrie logicky odvodit.

* * *

Disertační práce se kromě úvodu a krátkého závěrečného zamyšlení skládá z šesti kapitol. V závěru práce je uveden seznam použité literatury.

První kapitola připomíná vybrané významné okamžiky z historie geometrie, kdy se v souvislosti s transformacemi poprvé objevily některé nové myšlenky. Pozornost se soustředila na následující typy transformací: *shodnost*, *podobnost*, *pohyby*, *osová afinita*, *stejnolehlost*, *kruhová inverze*, *promítání*, *stereografická projekce*, *afinní* a *projektivní transformace*. Výčet pravděpodobně není úplný, neboť se některé informace nedochovaly, nebo se velmi obtížně dohledávají. Navíc není snadné, a někdy ani není možné, přesně označit okamžik objevu a autora nové myšlenky. Vývoj některých pojmů obsáhl několik staletí, měnila se terminologie a symbolika, postupně se objevovaly nové a hlubší souvislosti.

Druhá kapitola pojednává o *Barycentrickém počtu* (1827). August Ferdinand Möbius (1790–1868) v něm poprvé představil tzv. barycentrické (homogenní) souřadnice, které umožnily nový přístup ke geometrickým transformacím. S jejich pomocí lze do transformace zahrnout i nekonečně vzdálené body v projektivní rovině a uvažovat imaginární prvky. V Barycentrickém počtu je rovněž poprvé obsažena algebraická charakteristika geometrických příbuzností.

Třetí kapitola rozebírá jako příklad složitějších geometrických transformací *Cremonovy* (*biracionální*) *transformace*. Jejich objev v letech 1863 až 1865 souvisel se studiem algebraických křivek a byl motivován přirozeným požadavkem složitější křivky nejprve vhodně transformovat s cílem zjednodušit jejich popis. Cremonovy transformace se brzy z pomocného nástroje proměnily v samostatný objekt matematického zkoumání a podnítily rozvoj nové ucelené oblasti algebraické geometrie. Tato problematika našla odezvu i v českých zemích, zejména v pracích Emila Weyra (1848–1894) a Bohumila Bydžovského (1880–1969).

Čtvrtá kapitola se věnuje *Erlangenskému programu* (1872), jenž představuje významný mezník ve vývoji geometrie 19. století, neboť na dlouhou dobu zásadně ovlivnil zaměření a další rozvoj matematiky. Felix Klein (1849–1925) v něm charakterizoval každou geometrii pomocí grupy geometrických transformací, které zachovávají základní vlastnosti dané geometrie. Tento přístup mu navíc umožnil jednotlivé geometrie logicky uspořádat. S ohledem na zařazení nových myšlenek do dobového i odborného kontextu je v rámci této kapitoly podán stručný přehled vývoje teorie grup a historie geometrie až do vzniku Erlangenského programu.

Pátá kapitola popisuje Kleinovy snahy o reformu matematického vzdělávání, které vyvrcholily *Meranským programem* (1905). Jedním z jeho požadavků na obsahové změny učiva bylo začlenění grup geometrických transformací do středoškolské výuky. Toto evropské reformní hnutí mělo dopad i na situaci v českých zemích. Byly zde sepsány nové učebnice, které měly reflektovat doporučené obsahové i metodické požadavky na výuku. V rámci páté kapitoly jsou podrobně rozebrány učebnice Bohumila Bydžovského a Jana Vojtěcha (1879–1953), které podstatným způsobem na více než tři desetiletí ovlivnily výuku matematiky na českých středních školách. Naše hlavní pozornost se přirozeně zaměřila na geometrické transformace.

Šestá kapitola přibližuje *axiomatické základy geometrie*. První myšlenky moderního přístupu k základům geometrie zformuloval Moritz Pasch (1843–1930) a poté systematicky rozvinul David Hilbert (1862–1943). Ve svém stěžejním díle *Grundlagen der Geometrie* (1899) představil první úplný systém axiomů eukleidovské geometrie, včetně axiomů shodnosti, z nichž bylo možno všechna tvrzení formálně odvodit. V dalším článku navíc poprvé obecně definoval pohyb v geometrii jako vzájemně jednoznačnou spojitou transformaci roviny. Hilbertův axiomatický systém oprávněně přitahoval pozornost světových i českých matematiků ještě v polovině 20. století.

V závěru disertační práce je uveden seznam použité literatury. Sestává nejen z obecných přehledových knih a článků o historii geometrie a dalších tematicky zaměřených prací, ale především z původních prací a jejich překladů. Při sepisování předložené práce byly využity originály volně dostupné v digitalizované podobě na internetu a dále zejména materiály z následujících institucí: Knihovna Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, Knihovna Matematického ústavu Akademie věd České republiky v Praze, Národní knihovna v Praze, Národní technická knihovna v Praze, Státní technická knihovna v Praze, Městská knihovna v Praze, Hauptbibliothek und Fachbibliothek für Mathematik der Technischen Universität in Wien a Universitätsbibliothek in Wien.

1. Historický přehled geometrických transformací

První náznaky pojmu *geometrická transformace* lze nalézt ve starém Řecku před více než dvěma tisíci lety. Zpočátku se jednalo pouze o vztah mezi dvěma rovinnými, případně prostorovými objekty, který umožnil jednoduché řešení některých geometrických problémů. S postupným rozvojem geometrie byla transformacím věnována stále větší pozornost, získané poznatky byly dále prohlubovány a zobecňovány, byly zaváděny stále složitější typy transformací. Jejich aplikace v dalších oborech lidské činnosti jsou všestranné, příkladem je využití perspektivy v malířství nebo stereografické projekce při konstrukci map. V dnešní době se transformace využívají k řešení řady netriviálních problémů z různých oblastí matematiky, včetně např. neeukleidovské geometrie.

V dalším textu se pokusíme nastínit postupný vývoj chápání jednotlivých typů geometrických transformací od nejstarších dob až do 19. století. U každé transformace popíšeme základní myšlenku, poukážeme na její pravděpodobně první výskyt a uvedeme osobnosti, které s daným typem transformace pracovaly a pojem transformace dále rozvíjely.

1.1 Shodnost a podobnost

Nejstarším příkladem geometrické transformace je shodnost. Staří Řekové považovali dva objekty za shodné, pokud existoval pohyb, reálný nebo myšlenkový, který jeden objekt přemístil na druhý tak, že se kryly. Nevýhodou tohoto přístupu byla skutečnost, že pohyb byl vždy chápán pouze v souvislosti s jednotlivým objektem, s nímž byl pevně svázán. Skládání pohybů dvou různých objektů nebylo možno uvažovat, a tudíž se Řekové nemohli ani vzdáleně přiblížit k pojmu grupa.[1] Další překážkou mohlo být tehdejší chápání roviny jako omezené části plochy.

Geometrické pohyby se v předeukleidovské geometrii poměrně hojně využívaly. Svědčí o tom např. skutečnost, že matematik a fyzik Proklos (410–485) ve svých komentářích k Eukleidovým *Základům* poukázal na fakt, že řecký filozof a matematik Eudémos (asi 350–290 př. n. l.) ve svém díle *Dějiny geometrie* připsal Thalétovi z Milétu (7.–6. stol. př. n. l.) důkazy následujících tvrzení:

- Kruh je svým průměrem rozdělen na dvě shodné části.
- Úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku jsou shodné.
- Vrcholové úhly jsou shodné.
- Dva trojúhelníky, které se shodují v jedné straně a dvou úhlech, jsou shodné.

[1] Významným krokem, který později vedl k využití teorie grup v geometrii, byla myšlenka rozšíření pohybu svázaného s jedním objektem na pohyb celé roviny. Tento nový pohled již dával skládání různých pohybů smysl. Autorem této, z pohledu geometrických transformací revoluční myšlenky byl August Ferdinand Möbius (1790–1868). O jeho příspěvku k teorii geometrických transformací je podrobně pojednáno v kapitole 2 této disertační práce.

Thalétovy důkazy přitom nemohly být založeny na žádných axiomech ani pomocných větách, neboť v jeho době ještě nebyl vybudován ani axiomatický systém, ani systém základních vět. Výše uvedená tvrzení se týkají shodnosti objektů (půlkruhů, úhlů, trojúhelníků) a Thalés je patrně dokázal na základě představ o ztotožnění uvažovaných objektů pomocí „shodných zobrazení“, i když je tento pojem v jeho době ještě předčasný.

Thalés rovněž vypočítal výšku pyramidy tím, že změřil délku jejího stínu a délku stínu svislé tyče známé délky a využil jednoduchý poměr založený na podobnosti trojúhelníků.[2] Podle [Kol] navrhl navíc způsob, jak určit vzdálenost lodě od břehu. Z věže nebo ze skály na břehu se pomocí jednoduchého přístroje změřil úhel mezi svislým směrem a paprskem zaměřeným k lodi. Výška pozorovatelny nad hladinou moře byla přitom známá. Situace se ve zmenšeném měřítku sestrojila a naměřená vzdálenost se vynásobila příslušným koeficientem. Řešení tak bylo opět založeno na podobnosti trojúhelníků a úměrnosti stran ležících proti shodným úhlům.

V dnešním smyslu *shodné* objekty Thalés nazýval *podobné*. Označení *shodné* pro objekty stejného tvaru a velikosti zavedli patrně Pýthagorejci (6.–4. stol. př. n. l.), kteří věřili, že takové objekty jsou tvořeny shodným počtem bodů. Termín *podobné* objekty později získal moderní, obecnější význam. Eukleidés a jeho žáci *shodné* objekty nazývali *podobné a stejné*.[3]

Eukleidés z Alexandrie (asi 325–265 př. n. l.) uvedl v I. knize *Základů* (řecky *Stoicheia*, latinsky *Elementa*) následující tři věty o shodnosti trojúhelníků a v dalším textu se na ně odkazuje. Jedná se o klasické věty školské matematiky, dnes krátce označované jako *sus*, *sss* a *usu*.

> *Když mají dva trojúhelníky dvě strany (střídavě) s dvěma stranami stejné a úhly stejnými stranami sevřené mají stejné, budou i základnu základně míti rovnou a trojúhelník s trojúhelníkem bude stejný i ostatní úhly s ostatními úhly, proti nimž leží stejné strany, (střídavě) budou stejné.* ([Eu], kniha I, věta IV, str. 4)

> *Když mají dva trojúhelníky dvě a dvě strany střídavě stejné a mají též základnu základně rovnou, budou též úhly stejnými přímkami sevřené míti stejné.* ([Eu], kniha I, věta VIII, str. 6)

> *Když mají dva trojúhelníky dva úhly dvěma úhlům jednotlivě rovné a jednu stranu jedné straně rovnou buď při stejných úhlech nebo proti jednomu ze stejných úhlů, budou míti též ostatní strany rovné ostatním stranám i zbývající úhel úhlu zbývajícímu.*
> ([Eu], kniha I, věta XXVI, str. 14)

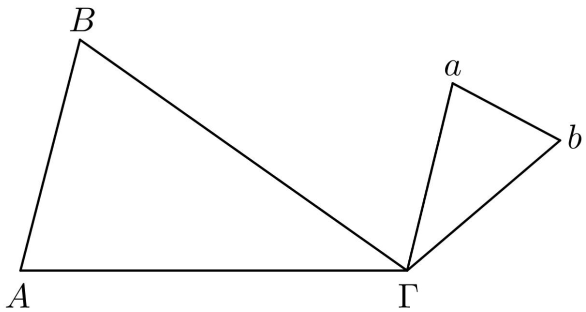
[2] Místo tyče možná využil své vlastní postavy; viz [Kol], str. 83.

[3] *Stejné pak i podobné (shodné) jsou útvary tělesové omezené rovinami podobnými, stejnými počtem i velikostí.* Viz [Eu], kniha XI, definice 10, str. 238.

Shodnost a podobnost byly během dalšího vývoje často využívány k důkazům, že dvě úsečky jsou shodné, nebo že jeden geometrický útvar je „násobkem“ jiného geometrického útvaru. S postupným rozvojem dalších typů zobrazení se na shodnost a podobnost začalo stále více pohlížet pouze jako na speciální případy obecnějších zobrazení.

Z modernějších prací věnovaných podobnosti uveďme alespoň krátký článek *O středu podobnosti* (De centro similitudinis),[4] jehož autorem je Leonhard Euler (1707–1783). Ukázal v něm, že pro libovolné dva podobné útvary v rovině existuje tzv. střed podobnosti – bod Γ takový, že pokud a, b a A, B jsou dvě dvojice odpovídajících si bodů, potom trojúhelníky Γab a ΓAB jsou podobné. Prakticky tím dokázal, že každá vlastní podobnost má právě jeden samodružný bod.

> *Si habeantur (Fig. 1) duae figurae similes in eodem plano descriptae, quarum maioris quodpiam latus sit AB, minoris vero latus respondens ab, semper dabitur in eodem plano certum punctum Γ, quod ad utramque figuram similiter referatur, ita ut figurae ΓAB et Γab sint inter se similes, hocque punctum Γ appelletur centrum similitudinis binarum figurarum similium propositarum, quod ergo quomodo quovis casu inveniri queat, hic investigemus.*



Obr. 1: Střed podobnosti v Eulerově článku (viz str. 154)

1.2 Pohyby v geometrii

První představy o *pohybu* v geometrii, tj. v našem pojetí *transformace*, využívali Pýthagorejci poměrně často. Např. přímku chápali jako stopu pohybujícího se bodu, rovinu jako stopu pohybující se přímky.

Archýtás z Tarentu (asi 428–365 př. n. l.), člen pýthagorejské školy, využil pohyb při řešení klasické řecké úlohy zdvojení krychle (tzv. Délský problém).[5]

[4] Viz Nova acta academiae scientiarum imperialis Petropolitanae 9(1791), 154–165. L. Euler předložil svůj článek petrohradské akademii věd již v říjnu roku 1777.

[5] Úloha zdvojení krychle spočívá v nalezení délky hrany krychle, jejíž objem je roven dvojnásobku objemu zadané krychle. Vyžaduje řešení geometrickou konstrukcí pouze pomocí kružítka a pravítka. O legendě, která je s touto úlohou spjata, včetně důkazu její neřešitelnosti viz Bečvář J., Fuchs E. (ed.), *Historie matematiky I*, edice Dějiny matematiky, svazek 1, Jednota českých matematiků a fyziků, Brno, 1994, 71–97.

Označme a délku hrany zadané krychle. Archýtás uvažoval (v dnešní symbolice a ve vhodně zvolené soustavě souřadnic) tři rotační plochy: válcovou plochu určenou kružnicí $x^2 + y^2 = 2ax$, kuželovou plochu $x^2 + y^2 + z^2 = 4x^2$ a axoid (hranici anuloidu) $x^2 + y^2 + z^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2}$, který vznikl *rotací* kružnice $x^2 + z^2 = 2ax$ kolem souřadné osy z. Všechny tři uvedené plochy se protnou v bodě P, jehož souřadnice $[x, y, z]$ splňují rovnosti

$$\frac{2a}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}.$$

Vzdálenost bodu P od počátku zvolené soustavy souřadnic představuje hledanou délku hrany zdvojené krychle.

Eukleidés ve svých *Základech* definoval kružnici, aniž by využil pohyb. Jeho definice koule, kužele a válce jsou však již kinematické, pohyb v sobě zahrnují. Koule vznikne rotací půlkruhu kolem jeho průměru, kužel vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem jedné jeho odvěsny a válec vznikne rotací obdélníku kolem jedné jeho strany.

> *Kruh jest útvar rovinný, objímaný jednou čarou (jež se nazývá obvodem), k níž od jednoho bodu vnitř útvaru vedené přímky všecky sobě rovny jsou.* ([Eu], kniha I, definice 15, str. 1)

> *Koule jest útvar omezený tím, že se kolem pevného průměru polokruhu polokruh otočí, až se opět vrátí na totéž místo, odkud se počal otáčeti.* ([Eu], kniha XI, definice 14, str. 238)

> *Kužel jest útvar omezený tím, že se trojúhelník pravoúhlý otočí kolem pevné jedné ze stran pravý úhel svírajících, až se opět vrátí na totéž místo, odkud se počal otáčeti.* ([Eu], kniha XI, definice 18, str. 238)

> *Válec jest útvar omezený tím, že se rovnoběžník pravoúhlý otočí kolem pevné jedné ze stran rovnoběžníku pravý úhel svírajících, až se opět vrátí na totéž místo, odkud se počal otáčeti.* ([Eu], kniha XI, definice 21, str. 238)

Uvedený způsob definování základních rotačních těles patrně odráží starší tradici, později ustoupil do pozadí. Řecký matematik a astronom Theodosius (asi 160–90 př. n. l.) ve svém díle *Sphaerica* definoval kouli (kulovou plochu, tj. sféru) staticky, podobně jako Eukleidés definoval kružnici.[6]

Na druhou stranu, např. slavný filozof Aristotelés ze Stageiry (384–322 př. n. l.) byl proti využití pohybu v geometrii, geometrické objekty považoval za nehybné.[7] Zastával názor, že rovina je obecnější (abstraktnější) než těleso, protože postrádá

[6] Viz Kunitzsch P., Lorch R., *Theodosius: Sphaerica*, Arabic and Medieval Latin translations, Boethius: Texte und Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften, svazek 62, Franz Steiner Verlag, Stuttgart, 2010, 431 stran; definice sféry viz kniha 1, definice 1.

[7] Podle Aristotela matematika nepracuje s reálnými, ale abstraktními objekty, není proto přípustné užívat v matematice pohyb.

jeden jeho rozměr, přímka je obecnější než rovina, protože postrádá její šířku, a bod je obecnější než přímka, protože postrádá její délku. Tedy přímka nemůže být složena z bodů, rovina z přímek a těleso z rovin. Slovy Aristotela: nic, co je spojitého, nelze složit z jednotlivostí. Proto tedy nelze přímku získat pohybem bodu, rovinu pohybem přímky a těleso pohybem roviny.[8]

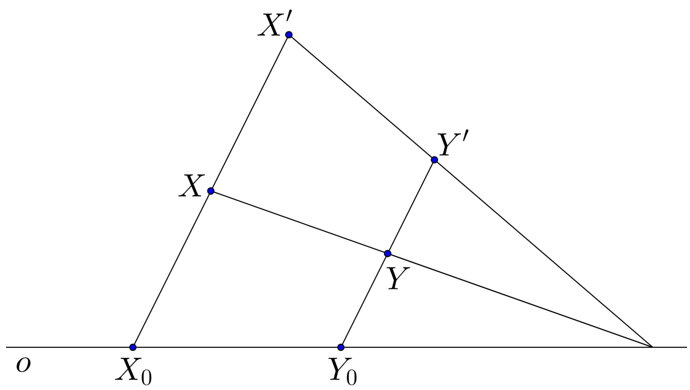
Arabští matematici Thābit ibn Qurra (830–901) a Abū Alī ibn al-Haytham (asi 965–1039) tento Aristotelův přístup kritizovali a pohyby v geometrii hojně využívali. Naopak Omar Khayyam (1048–1131) Aristotelovy názory sdílel a ve svých komentářích k Eukleidovým *Základům* kritizoval přístup ibn al-Haythama. Namítal, že není žádných pochyb, že přímka může existovat pouze v rovině, je její částí, a nemůže jí tedy předcházet, nemůže se bez ní pohybovat. Stejně tak přímka nemůže vzniknout pohybem bodu, protože přímka svou podstatou, svou existencí bodu předchází.

Další matematici blízkého a středního východu i západní Evropy ve svých geometrických pracích pohyby využívali pravidelně a systematicky, a to jak při řešení geometrických problémů, tak při důkazech některých tvrzení.[9]

Prvními doloženými geometrickými transformacemi, které jsou složitější než jednoduché pohyby, jsou osová afinita a stejnolehlost (homothetie).

1.3 Osová afinita

Osová afinita je určena osou afinity o a dvojicí odpovídajících si bodů (viz obr. 2). Jedná se o zobrazení, které úsečku zobrazí opět na úsečku, přičemž přímky, v nichž obě úsečky leží, se protínají na ose afinity. Spojnice odpovídajících si bodů jsou navzájem rovnoběžné, určují tzv. směr afinity. Charakteristika afinity k je definována jako poměr vzdáleností obrazu bodu a jeho vzoru od průsečíku jejich spojnice s osou afinity, tj. $k = \frac{|X'X_0|}{|XX_0|}$ (viz obr. 2). Body ležící na ose afinity jsou samodružné. Osová afinita zachovává rovnoběžnost.



Obr. 2: Osová afinita s osou afinity o a charakteristikou $k = 2$

[8] Viz *Aristoteles' Werke*, Erster Band: Acht Bücher Physik, Griechisch und Deutsch und mit sacherklärenden Anmerkungen herausgegeben von Carl Prantl, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1854, 528 stran.

[9] Viz Luther I. O., *The geometric transformations in the medieval Near and Middle East*, Istoriko-matematičeskie issledovanija 36(1995), 40–60 (Russian).

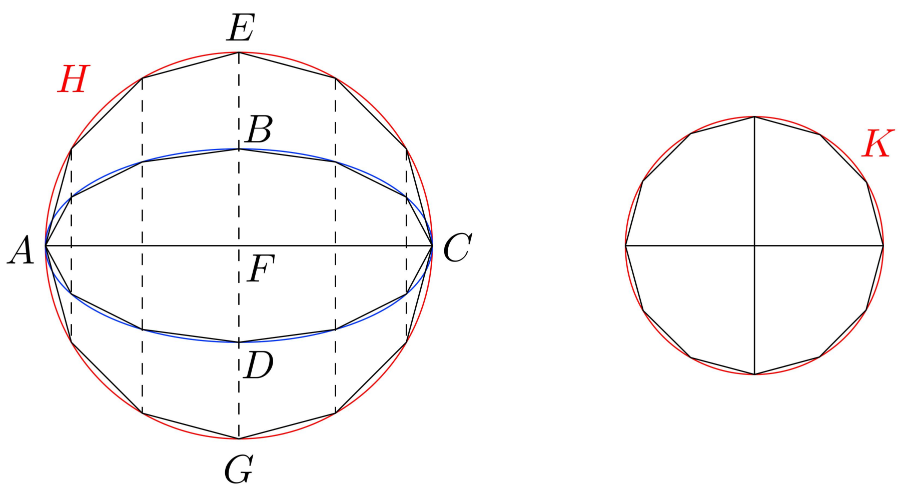
Osová afinita se poprvé objevila v pojednání *O kónoidech a sféroidech* (Peri kōnoeideōn kai sphairoeideōn), jehož autorem je Archimédés ze Syrákús (287–212 př. n. l.), jeden z největších přírodovědců starověku.[10] Věta 4 tohoto pojednání říká, že poměr obsahu libovolné elipsy a obsahu kruhu sestrojeného nad její hlavní osou je stejný jako poměr délek vedlejší a hlavní osy (viz citace na obr. 3).[11]

δ′.

Πᾶν χωρίον τὸ περιεχόμενον ὑπὸ ὀξυγωνίου κωνου τομᾶς ποτὶ τὸν κύκλον τὸν ἔχοντα διάμετρον ἴσαν τᾷ μείζονι διαμέτρῳ τᾶς τοῦ ὀξυγωνίου κώνου τομᾶς τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἁ ἐλάσσων διάμετρος αὐτᾶς ποτὶ τὰν μείζω, τὰν τοῦ κύκλου διάμετρον.

Obr. 3: Archimédés – *O kónoidech a sféroidech*, věta 4

Nechť je dána elipsa (viz obr. 4). Nad její hlavní osou uvažujme kruh H, jeho obsah označme S_H. Sestrojme další kruh K tak, aby pro jeho obsah S_K platilo $S_K : S_H = |BD| : |EG|$. Potom obsah kruhu K je roven obsahu dané elipsy. Archimédovo zdůvodnění je následující (důkaz je veden sporem).



Obr. 4: Archimédův důkaz využívající osovou afinitu

[10] Archimédés své pojednání uvedl dopisem Dositheovi, v němž shrnul své nové výsledky a podal definice ploch, jimiž se v dalším textu zabýval. Pravoúhlým kónoidem rozuměl v dnešní terminologii rotační paraboloid, tupoúhlý kónoid je Archimédovo označení pro dvoudílný rotační hyperboloid. Termín sféroid Archimédés užíval pro rotační elipsoid.

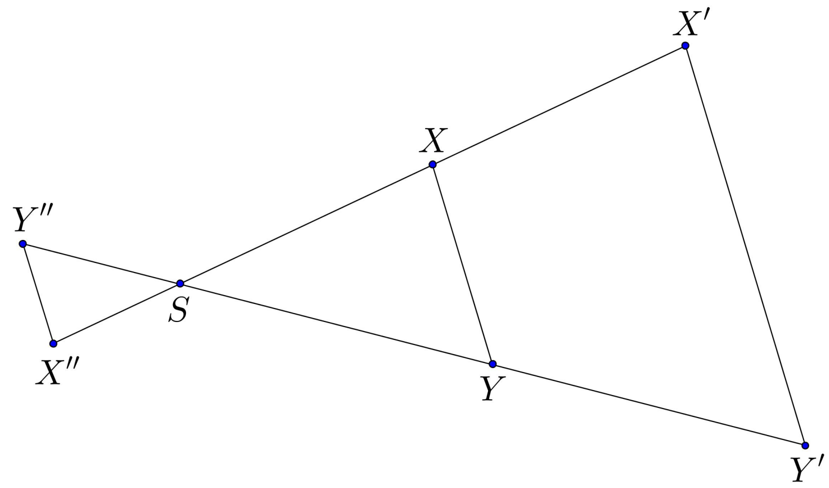
[11] *Každá plocha ohraničená řezem ostroúhlého kužele má ku kruhu majícímu průměr rovný většímu průměru řezu ostroúhlého kužele tentýž poměr, jako její menší průměr ku většímu,* [*neboli*] *ku průměru kruhu.* Citace viz Heiberg J. L. (ed.), *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. I, B. G. Teubner, Leipzig, 1910, str. 306.

Kdyby byl obsah kruhu K větší než obsah dané elipsy, pak Archimédés do kruhu K vepíše n-úhelník, kde n je sudé číslo, jehož obsah je také větší než obsah dané elipsy, do kruhu H vepíše jemu podobný n-úhelník, spojí úsečkami dvojice jeho vrcholů, které jsou souměrně sdruženy podle hlavní osy elipsy, označí jejich průsečíky s elipsou a ukáže, že z těchto bodů vzniklý mnohoúhelník je k vepsanému mnohoúhelníku v poměru $|BD| : |EG|$; vepsaný mnohoúhelník je přitom ve stejném poměru k mnohoúhelníku vepsanému kruhu K. Tedy mnohoúhelník vepsaný uvažované elipse má stejný obsah jako mnohoúhelník vepsaný kruhu K, což je spor s předpokladem, že mnohoúhelník vepsaný kruhu K má obsah větší než elipsa. Předpoklad, že obsah kruhu K je menší než obsah elipsy, se vyvrátí zcela analogicky.

Archimédés v důkazu využil pravoúhlou osovou afinitu určenou osou AC, jejíž charakteristika je rovna poměru délek hlavní a vedlejší osy elipsy. Ukázal, že poměr obsahů ploch vepsaných n-úhelníků je roven poměru obsahů ploch geometrických útvarů, které získáme z těchto n-úhelníků pro n jdoucí do nekonečna. Dále odvodil, že obsah elipsy mající poloosy délek a a b je roven πab a poloměr kruhu K je roven $\sqrt{ab}$ (geometrickému průměru délek obou poloos).

1.4 Stejnolehlost

Stejnolehlost (homothetie, centrální dilatace) je určena středem stejnolehlosti S a tzv. koeficientem stejnolehlosti $\kappa \neq 0$. Jedná se o podobné zobrazení, které úsečku zobrazí na úsečku s ní rovnoběžnou, přičemž střed stejnolehlosti, bod a jeho obraz jsou kolineární. Absolutní hodnota koeficientu stejnolehlosti určuje poměr podobnosti, jeho znaménko určuje umístění obrazu vzhledem ke středu stejnolehlosti (viz obr. 5).

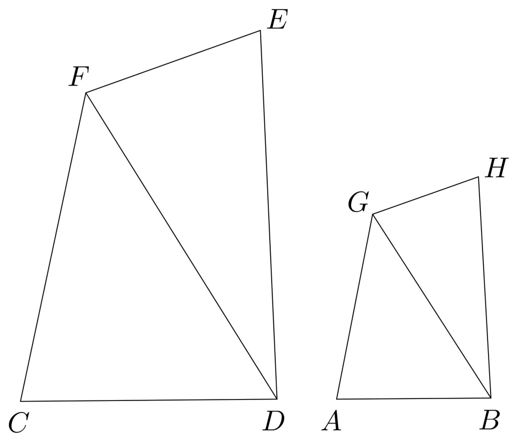


Obr. 5: Stejnolehlosti se středem S a koeficienty $\kappa_1 = 2$ a $\kappa_2 = -\frac{1}{2}$

První výskyt stejnolehlosti lze nalézt již v Eukleidových *Základech*, kde je mimo jiné uvedena následující „úloha“:

> *Na dané přímce narýsuj útvar přímkový danému útvaru přímkovému podobný a podobně položený (stejnolehlý).*
>
> ([Eu], kniha VI, věta XVIII, str. 93)

Z Eukleidova řešení (viz obr. 6) je však zřejmé, že je zde stejnolehlost jako zobrazení obsažena pouze implicitně. Eukleidés prakticky vyšetřoval pouze vztah mezi dvěma podobnými útvary, přičemž využíval podobné trojúhelníky.



Obr. 6: Eukleidovo řešení úlohy ([Eu], str. 93)

Stejnolehlost dále zmínil řecký geometr Apollónios z Pergy (262–190 př. n. l.) v pojednání *Rovinná místa* (Peri topoi epiphanoi, De locis planis),[12] o němž se dochoval záznam díky práci *Synagōgē mathēmatikē*, jejímž autorem je řecký matematik Pappos z Alexandrie (asi 290–350). Apollónios základní vlastnosti stejnolehlosti pravděpodobně znal, podrobnější informace se však nedochovaly.[13]

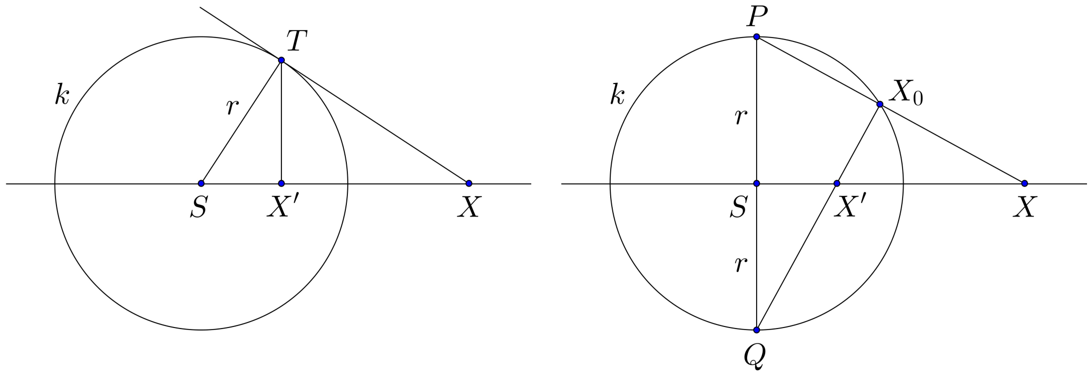
1.5 Kruhová inverze

Apollónios ve výše uvedené práci *Rovinná místa* rovněž poprvé uvažoval *kruhovou inverzi*. Jedná se o zobrazení, které je určeno středem S a tzv. koeficientem inverze $\kappa \neq 0$. Střed inverze, bod a jeho obraz jsou kolineární, přičemž součin vzdáleností obrazu a vzoru od středu inverze je roven absolutní hodnotě koeficientu inverze; platí tedy $|SX| \cdot |SX'| = |\kappa|$. Znaménko koeficientu inverze určuje umístění obrazu vzhledem ke středu inverze. Obraz středu inverze se klade do nevlastního bodu, tj. do nekonečna.

[12] Pojednání sestávalo ze dvou knih, autor v nich provedl klasifikaci geometrických míst, speciální pozornost přitom věnoval „rovinným místům“, tj. přímkám a kružnicím.

[13] Fragmenty z Apollóniova pojednání *Rovinná místa* viz Heiberg J. L. (ed.), *Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis*, vol. II, B. G. Teubner, Leipzig, 1893, 115–117.

Kruhová inverze je involutorním zobrazením.[14] Zobrazuje zobecněné kružnice (přímky nebo kružnice) opět na zobecněné kružnice. Dva základní způsoby konstrukce obrazu X' bodu X v kruhové inverzi se středem S a koeficientem inverze $\kappa = r^2$ jsou uvedeny na obr. 7.[15] Kružnice k se středem S a poloměrem r je množinou všech samodružných bodů v dané kruhové inverzi. Z involutornosti zobrazení plyne, že bod X je naopak obrazem bodu X' v zadané kruhové inverzi.



Obr. 7: Konstrukce obrazu bodu v kruhové inverzi

Umístíme-li soustavu souřadnic s počátkem O do středu S dané kružnice a označíme-li $X = [x, y]$ a $X' = [x', y']$, získáme analytické vyjádření kruhové inverze ve tvaru

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2}\,,$$

$$y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}\,.$$

Apollónios znal základní vlastnosti kruhové inverze. Ve svém osmisvazkovém díle *Pojednání o kuželosečkách* (Kōnika)[16] se již věnoval obecně inverzím na všech (regulárních) kuželosečkách, tedy nejen na kružnici, ale rovněž na elipse, hyperbole a parabole.[17] Kruhová inverze byla po řadu následujících století matematiky opomíjena a nepříliš využívána.

[14] Říkáme, že zobrazení f je *involutorní* (*involutivní*), jestliže složeno samo se sebou dává identitu, tj. $f \circ f =$ identita. Involutorní zobrazení je tedy samo k sobě inverzní.

[15] Popis obou konstrukcí včetně důkazu jejich správnosti viz Kubát V., Trkovská D., *Analytická geometrie v afinních a eukleidovských prostorech*, Matfyzpress, Praha, 2011, 318–319.

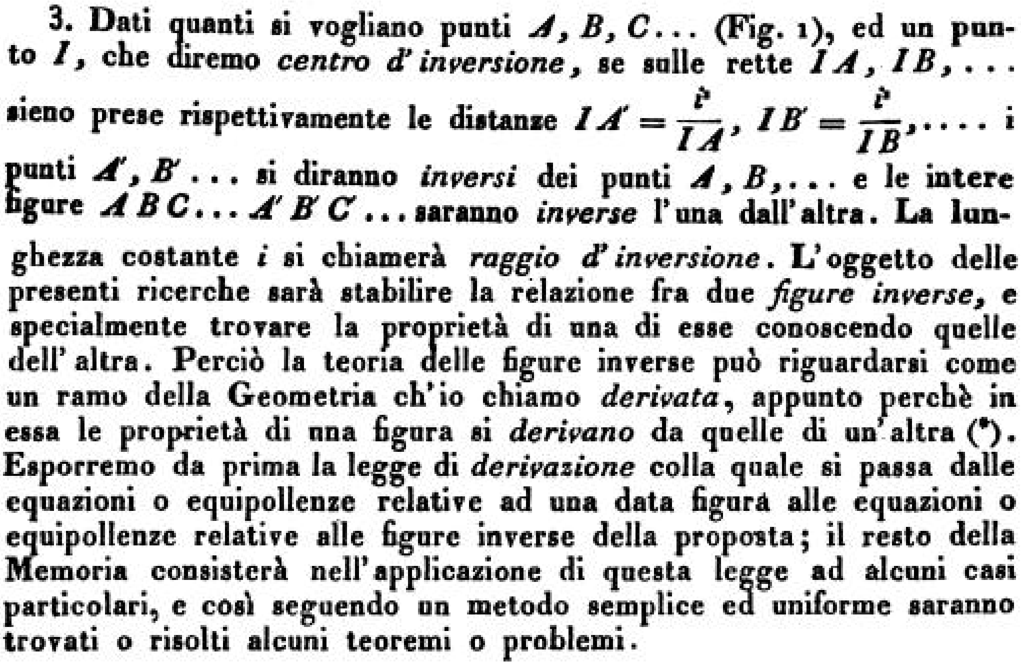
[16] Originální řecký text včetně latinského překladu viz Heiberg J. L. (ed.), *Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis*, vol. I, II, B. G. Teubner, Leipzig, 1891, 1893. První tři knihy včetně jejich překladu jsou otištěny v prvním svazku (str. 1–451), čtvrtá kniha a její překlad jsou uveřejněny ve druhém svazku (str. 1–97). Pátá, šestá a sedmá kniha se dochovaly pouze v arabském překladu, osmá kniha je ztracena.

[17] Názvy elipsa, hyperbola a parabola zavedl právě Apollónios. Do té doby se pro ně používaly termíny sečna ostroúhlého, tupoúhlého, pravoúhlého kužele.

Kruhové inverzi se patrně po Apollóniovi jako první blíže věnoval až švýcarský geometr Jacob Steiner (1796–1863). Je mu přisuzován objev inverze v plné obecnosti (1824). Sám v této souvislosti hovořil o „Wiedergeburt und Auferstehung“ (znovuzrození a vzkříšení). Jeho statě věnované *inverzní geometrii* však nebyly publikovány, našly se až v jeho pozůstalosti.[18]

Belgický matematik Adolphe Quetelet (1796–1874) odvodil roku 1827 výše uvedené analytické vyjádření kruhové inverze.[19]

Giusto Bellavitis (1803–1880) sepsal roku 1836 patrně první systematickou studii o kruhové inverzi nazvanou *Teorie inverzních útvarů a její využití v elementární geometrii* (Teoria delle figure inverse, e loro uso nella geometria elementare).[20] Zformuloval v ní definici inverze (viz citace na obr. 8) a vyložil její základní vlastnosti (konformnost, zachování cirkularity – zobecněné kružnice se zobrazí na zobecněné kružnice). Později pojem inverze zobecnil do trojrozměrného prostoru.



3. Dati quanti si vogliano punti $A, B, C\ldots$ **(Fig. 1), ed un punto** I**, che diremo** ***centro d'inversione*****, se sulle rette** $IA, IB, \ldots$ **sieno prese rispettivamente le distanze** $IA' = \frac{i^2}{IA}$, $IB' = \frac{i^2}{IB}, \ldots$ **i punti** $A', B'\ldots$ **si diranno** ***inversi*** **dei punti** $A, B, \ldots$ **e le intere figure** $ABC\ldots A'B'C'\ldots$ **saranno** ***inverse*** **l'una dall'altra. La lunghezza costante** i **si chiamerà** ***raggio d'inversione*****. L'oggetto delle presenti ricerche sarà stabilire la relazione fra due** ***figure inverse*****, e specialmente trovare la proprietà di una di esse conoscendo quelle dell'altra. Perciò la teoria delle figure inverse può riguardarsi come un ramo della Geometria ch'io chiamo** ***derivata*****, appunto perchè in essa le proprietà di una figura si** ***derivano*** **da quelle di un'altra (*). Esporremo da prima la legge di** ***derivazione*** **colla quale si passa dalle equazioni o equipollenze relative ad una data figura alle equazioni o equipollenze relative alle figure inverse della proposta; il resto della Memoria consisterà nell'applicazione di questa legge ad alcuni casi particolari, e così seguendo un metodo semplice ed uniforme saranno trovati o risolti alcuni teoremi o problemi.**

Obr. 8: G. Bellavitis – *Teoria delle figure inverse, e loro uso nella geometria elementare*; úryvek ze str. 126–127

[18] Steinerovu vědeckou pozůstalost uloženou v knihovně přírodovědné společnosti v Bernu objevil asi třicet let po jeho smrti Johann Heinrich Graf (1852–1918). Kromě dopisů a vědeckých článků obsahovala i nepublikované rukopisy, jež J. H. Graf předal profesoru Friedrichu Bützbergerovi, aby je kriticky zhodnotil a případně publikoval. Podle něj se Steinerovo explicitní vyjádření principu kruhové inverze datuje k 8. únoru 1824. Později bylo otištěno v práci Bützberger F., *Über Bizentrische Polygone, Steinersche Kreis- und Kugelreihen und die Erfindung der Inversion*, B. G. Teubner, Leipzig, 1913, 50–55. Recenze této práce viz Emch A., *The discovery of inversion*, Bulletin of the American Mathematical Society 20(1914), 412–415. O objevu kruhové inverze více viz Patterson B. C., *The origins of the geometric principle of inversion*, Isis 19(1933), 154–180.

[19] Viz Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres de Bruxelles 4(1827), str. 112.

[20] Viz Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto 6(1836), 126–141. Z názvu tohoto díla pochází dnešní termín *kruhová inverze*.

Během dalších let kruhovou inverzi znovu objevilo několik matematiků. Např. William Thomson (lord Kelvin, 1824–1907) v letech 1845 až 1847 v rámci studia elektrostatiky hovořil o *transformaci s reciprokými průvodiči* (v originále *transformation by reciprocal radii*) a své fyzikální úvahy rozšířil na geometrický prostor. Uvedený termín od W. Thomsona převzal Joseph Liouville (1809–1882) a modifikoval jej na *transformace reciprokými poloměry* (v originále *transformation par rayons vecteurs réciproques*).[21] Dokázal, že se jedná o jedinou nelineární transformaci v prostoru, která je konformní (zachovává úhly mezi dvěma křivkami).

Studium kruhové inverze završil August Ferdinand Möbius (1790–1868). V práci *Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung*[22] z roku 1855 provedl významné zobecnění inverze. Čistě geometrickými prostředky položil základy obecné bodové transformace roviny, která kružnice zobrazuje opět na kružnice (tzv. *kruhové transformace*). Přijal následující předpoklady: zobrazení je bijekcí, obrazem čtveřice bodů ležících na kružnici jedné roviny je čtveřice bodů incidentních s kružnicí druhé roviny (kružnicemi nazýval i přímky, tj. uvažoval tzv. zobecněné kružnice), je zachována spojitost (dvěma nekonečně blízkým bodům jedné roviny odpovídají dva nekonečně blízké body druhé roviny).

Po vyloučení lineárních zobrazení dospěl k závěru, že v každé z rovin existuje právě jeden bod, který se v eukleidovském prostoru nemůže zobrazit do žádného bodu druhé roviny (centrální bod, střed), a ke každé z uvažovaných rovin je třeba přidat po jednom bodu, který bude obrazem, resp. vzorem centrálního bodu roviny vzorů, resp. obrazů (odtud *Möbiova rovina*). Jedním z jeho výsledků je tzv. *Möbiův faktorizační teorém*:

> *Každou vzájemně jednoznačnou transformaci eukleidovské roviny, která zobecněné kružnice zobrazuje opět na zobecněné kružnice, lze složit z kruhových inverzí a osových souměrností.*

Poznamenejme, že kruhové transformace patří mezi konformní zobrazení. Analyticky je lze popsat jako lineární lomené transformace komplexní roviny.

Na Möbiovy výsledky dále navázali Carl Friedrich Gauss (1777–1855), který odvodil analytické vyjádření kruhových transformací v komplexní rovině, a Arthur Cayley (1821–1895), jenž ukázal, že každá kruhová transformace je složením kruhové inverze v Möbiově rovině a libovolného pohybu.[23]

Teorie kruhových transformací byla brzy zobecněna do třídimenzionálního prostoru. Zásadní krok v tomto směru představoval Liouvilleův teorém, který byl publikován v jednom z dodatků pátého vydání Mongeovy knihy *Application de l'analyse à la géométrie*.[24] J. Liouville zde dokázal, že konformní zobrazení třídimenzionálního prostoru jsou generována sférickými inverzemi, a představují tedy zobecnění kruhových transformací roviny.

---

[21] Viz Journal de mathématiques pures et appliquées 12(1847), str. 276.

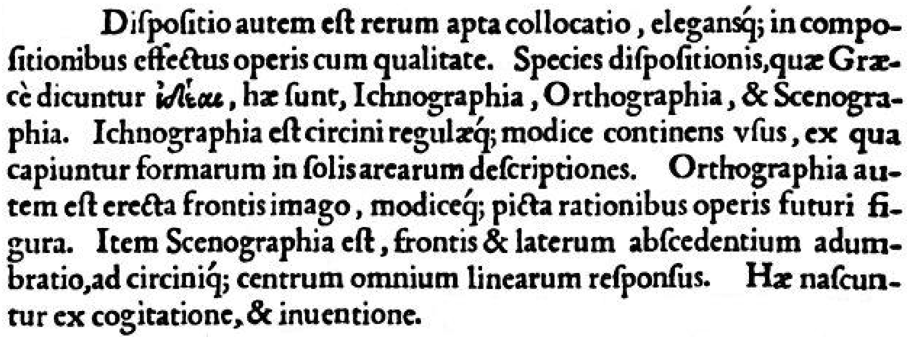
[22] Viz Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Classe 2(1855), S. Hirzel, Leipzig, 529–595.

[23] Viz Cayley A., *Note on the „Circular Relation" of Prof. Möbius*, The quarterly journal of pure and applied mathematics 2(1858), str. 162.

[24] Viz Monge G., Liouville J., *Application de l'analyse à la géométrie*, Bachelier, Paris, 1850; Note VI. *Extension au cas des trois dimensions de la question du tracé géographique*, 609–616.

1.6 Promítání

Promítání (projekce) se podle dochovaných záznamů hojně využívalo ve starém Řecku a Římě. Známý římský stavitel a architekt Marcus Vitruvius Pollio (1. stol. př. n. l.) ve svém obsáhlém díle *Deset knih o architektuře* (De architectura libri decem)[25] popsal tři projekce využívané tehdejšími staviteli. Podle jeho slov se jednalo o *ichnografii*, *orthografii* a *scénografii* (viz citace na obr. 9).


Diſpoſitio autem eſt rerum apta collocatio, elegansq́; in compo-
ſitionibus effectus operis cum qualitate. Species diſpoſitionis, quæ Græ-
cè dicuntur ἰδέαι, hæ ſunt, Ichnographia, Orthographia, & Scenogra-
phia. Ichnographia eſt circini regulæq́; modice continens vſus, ex qua
capiuntur formarum in ſolis arearum deſcriptiones. Orthographia au-
tem eſt erecta frontis imago, modiceq́; picta rationibus operis futuri fi-
gura. Item Scenographia eſt, frontis & laterum abſcedentium adum-
bratio, ad circiniq́; centrum omnium linearum reſponſus. Hæ naſcun-
tur ex cogitatione, & inuentione.

Obr. 9: M. Vitruvius Pollio – *De architectura libri decem*;
úryvek z vydání z roku 1552, kniha I, kapitola II, str. 12

Cílem ichnografie (*ichnos* = stopa, *grapho* = psaní) bylo vytvoření obrazového modelu (projektu, plánu) prostorové situace pomocí pravítka a kružítka, v dnešní terminologii se jedná o konstrukci *horizontální projekce*. Orthografie (*orthos* = = kolmý) představovala zakreslení nárysu, v dnešní terminologii jde o konstrukci *frontální projekce*. Scénografie (*skēnē* = scéna) zahrnovala *perspektivu*. Lze se domnívat, že tyto tři projekce byly známy již Řekům několik století před naším letopočtem (viz [Ro], str. 117).

Pappos z Alexandrie v VII. knize *Synagōgē mathēmatikē* vyložil geometrické vlastnosti středového promítání a perspektivy. Odkazoval se na Eukleidovo ztracené dílo *Porismata*,[26] které se tomuto tématu snad také věnovalo. Pappos uvedl i větu, jíž lze v dnešní terminologii vyjádřit takto (viz obr. 10):

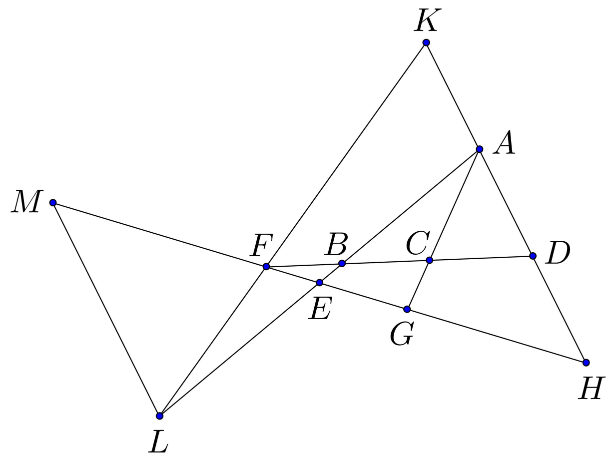
> *Jsou-li dány tři různé přímky AB, AC a AD, které protínají dvě další přímky FB a FE, potom platí následující rovnost* $\frac{|FB|\cdot|DC|}{|FD|\cdot|BC|} = \frac{|FE|\cdot|HG|}{|FH|\cdot|GE|}$, *neboli* $\frac{|FB|}{|FD|} : \frac{|CB|}{|CD|} = \frac{|FE|}{|FH|} : \frac{|GE|}{|HG|}$.

Protože body F, E, G, H získáme z bodů F, B, C, D projekcí z bodu A, je výše uvedená Pappova rovnost speciálním případem obecné vlastnosti každé projekce, podle níž se při projekci zachovává dvojpoměr čtyř kolineárních bodů[27].

[25] Je k dispozici český překlad; viz Marcus Vitruvius Polio, *Deset knih o architektuře*, z latinského originálu přeložil Alois Otoupalík, Svoboda, Praha, 1979, 430 stran.

[26] Spis *Porismata* tvořily tři knihy, úryvkovitě se jejich obsah zachoval v pracích, jež sepsal Pappos. *Porisma tuto jest úkol, jímž se žádá, by se na základech daných vyhledala veličina určitých vlastností. V základech porisma značí poučku, jež z důkazu poučky jiné vysvítá jasně sama sebou* (*důsledek*). Citace viz [Eu], první strana nestránkovaného Úvodu.

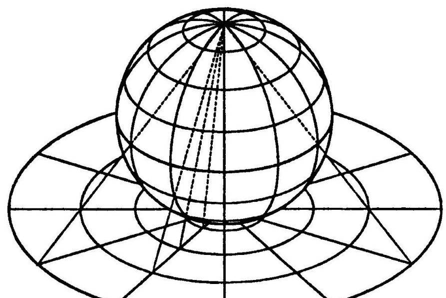
[27] Nechť A, B, C, D jsou čtyři kolineární body (předpokládáme $A \neq D$), pro něž platí $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD} = l \cdot \overrightarrow{BD}$, kde k, $l \in \mathbb{R}$ (díky předpokladu je $l \neq 0$). Dvojpoměrem bodů A, B, C, D (v tomto pořadí) nazveme číslo $(A, B, C, D) = \frac{k}{l}$.



Obr. 10: Zachování dvojpoměru čtyř kolineárních bodů při projekci

1.7 Stereografická projekce

Příkladem jedné z nejvýznamnějších projekcí, jež byla využívána již ve starověku, je *stereografická projekce*. Jedná se o průmět sféry z jednoho jejího bodu (pólu) do tečné roviny vedené diametrálně protilehlým bodem, nebo do roviny s ní rovnoběžné (viz obr. 11). Kružnice procházející pólem se zobrazí do přímek, ostatní kružnice se zobrazí opět do kružnic. Stereografická projekce je konformním zobrazením (zachovává úhly mezi dvěma křivkami).



Obr. 11: Stereografická projekce

Základy stereografické projekce položil patrně Hipparchos (190–120 př. n. l.).[28] První písemné zmínky však o ní nacházíme až u Vitruvia v díle *Deset knih*

[28] Hipparchos byl jeden z největších antických astronomů, který sestavil první velký katalog hvězd, jenž obsahoval přesné polohy více než 800 stálic. Zdůrazňoval nutnost přesných pozorování a význam matematických výpočtů. Vymyslel nové přístroje pro měření výšky hvězd, stanovil sklon zemské osy k ekliptice, určil délku slunečního roku s chybou jen 6 minut. Astronomické poznatky aplikoval v geografii, zavedl pojmy zeměpisná délka a šířka, jež určoval na základě pozorování zatmění Měsíce. Chtěl prověřit heliocentrický model vesmíru. Vyšel ze správné úvahy, že pokud Země obíhá kolem Slunce, pak se musí v průběhu roku měnit vzájemná poloha hvězd na nočním nebi. Příslušná měření skutečně provedl, ale změny ve vzájemné poloze hvězd nezaznamenal. Proto heliocentrický model vesmíru zavrhl.

o architektuře a v Ptolemaiově pojednání *Zobrazení sféry do roviny* (Aplōsis epiphaneias sphairas, Planisphaerium)[29]. Klaudios Ptolemaios (asi 85–165)[30] popsal průmět nebeské sféry (její severní polokoule) na rovinu rovníku, přičemž za střed projekce vzal jižní pól. Naznačil, že průmětem libovolné kružnice je opět kružnice, kromě největších kružnic procházejících pólem, jež se promítnou jako přímky. Obecný důkaz tohoto tvrzení však nepodal, spokojil se s důkazem pouze pro několik speciálních případů. Nepoukázal ani na skutečnost, že stereografická projekce zachovává velikosti úhlů. Dále sepsal spis *O projekci* (Peri analēmmatos, Analemma),[31] v němž se zabýval ortogonální projekcí nebeské sféry do horizontální roviny, kterou využíval k řešení různých problémů sférické astronomie.

Astroláb

Vitruvius i Ptolemaios se věnovali astronomickým pozorováním nebeské sféry, k jejímu proměřování využívali starověké přístroje *arachné*[32] a *astroláb* (astrolabon organon)[33]. Konstrukce astrolábu je založena na stereografické projekci nebeské sféry z nebeského pólu (viz obr. 12). Arabskými učenci byla stereografická projekce nazývána *tasṭīḥ al-asṭurlāb*. Termín stereografická projekce (*stereon* = = těleso) zavedl až François D'Aguillon (1566–1617) v díle *Šest knih o optice* (Opticorum libri sex) z roku 1613. Jak Vitruvius, tak Ptolemaios ve svých pracích využívali základní vlastnosti stereografické projekce, avšak bez důkazů.

První souhrnnější pojednání o stereografické projekci včetně důkazů základních vlastností uvedl až Aḥmad al-Farghānī (9. stol.) v práci *Kniha o konstrukci astrolábu* (Kitāb ṣan'at al-asṭurlāb). Stereografické projekci věnoval první kapitolu (v anglickém překladu Survey of the geometric propositions from which the form of the astrolabe is deduced)[34] a dokázal v ní mimo jiné, že kružnice procházející pólem se zobrazí do přímek a ostatní kružnice se zobrazí opět do kružnic, přičemž není obecně obrazem středu kružnice střed kružnice získané zobrazením. V dalších kapitolách je pak již popsána konstrukce samotného astrolábu.

[29] Viz Heiberg J. L. (ed.), *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia*, vol. II: Opera astronomica minora, B. G. Teubner, Leipzig, 1907, 225–259.

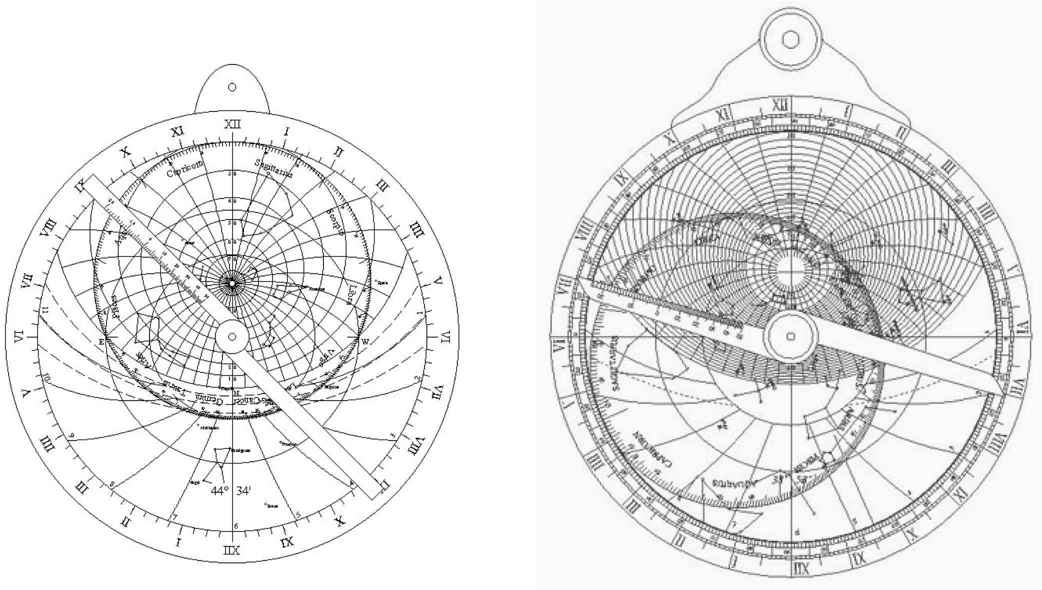
[30] Klaudios Ptolemaios je autorem *Almagestu* (Mathématiké syntaxis, Megalé syntaxis), astronomického spisu, jenž představoval encyklopedii tehdejšího hvězdářského vědění. Byl zastáncem geocentrického systému, Zemi pokládal za střed vesmíru, okolo něhož obíhají Slunce, Měsíc, planety a hvězdy. Jeho popis sluneční soustavy byl považován za správný po celých patnáct století. Z nejjasnějších viditelných hvězd sestavil 48 souhvězdí, jež mu připomínala určité obrazce postav, zvířat nebo věcí. Mnohá z nich se používají v moderní astronomii dodnes.

[31] Viz Heiberg J. L. (ed.), *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia*, vol. II: Opera astronomica minora, B. G. Teubner, Leipzig, 1907, 187–223.

[32] *Arachné* sloužil zejména jako sluneční hodiny, umožňoval však měřit i výšku hvězd nad horizontem. Sestával z polokruhového ciferníku a otáčivého bubínku, na němž byla znázorněna nebeská klenba včetně některých hvězd a zvěrokruh s dvanácti nebeskými znameními.

[33] *Astroláb* v sobě zahrnuje zjednodušenou mapu hvězdné oblohy (nebeské sféry). Obsahuje pevné i pohyblivé části, které umožňují modelovat pohyby nebeských těles, měřit jejich úhlovou výšku nad horizontem, zeměpisné souřadnice i místní čas. Hlavní ciferník je rozdělen na dvanáct dílů podle znamení zvěrokruhu, střed ciferníku představuje nebeský pól.

[34] Viz *Al-Farghānī: On the astrolabe*, Arabic text edited with translation and commentary by Richard Lorch, Boethius: Texte und Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften, svazek 52, Franz Steiner Verlag, Stuttgart, 2005, 447 stran.



Obr. 12: Astroláb

Další astronomové a matematici středověku se pokoušeli využít ke konstrukci astrolábu jiné geometrické transformace. Perský astronom Abū Ḥāmid al-Ṣaghānī (10. stol.) ve svém díle *Kniha o projekci do roviny* (Kitāb fial-tasṭīḥ al-tamm) navrhl nahradit stereografickou projekci sféry do roviny z jejího pólu projekcí z libovolného bodu souřadnicové osy; v ní se kružnice na sféře zobrazí obecně do kuželoseček.

V knize *Přehled možností konstrukce astrolábu* (Isti'āb al-wujūh al-mumkina fīṣan'at al-asṭurlāb), kterou sepsal Abū l-Rayḥān al-Bīrūnī (973–1048), autor nejprve popsal různé způsoby a metody konstrukce tohoto přístroje. V dalším textu navrhl za základ konstrukce tzv. *válcovou projekci*, tj. ortogonální projekci podle osy, která je limitním případem projekce al-Ṣaghānīho, pokud střed projekce klademe do nekonečna. Tato projekce zobrazí kružnice buď na kružnice, nebo na elipsy.

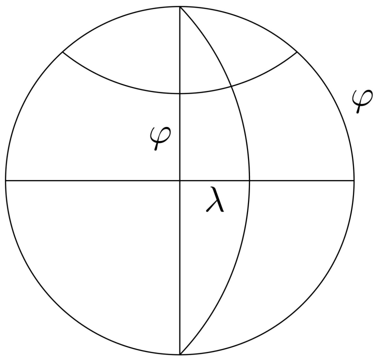
Tvorba map

Stereografická projekce se prakticky využívá k zobrazení povrchu Země do roviny, tj. v kartografii. Vzhledem k tomu, že je konformním zobrazením, jsou takové mapy velmi užitečné např. pro mořeplavce.

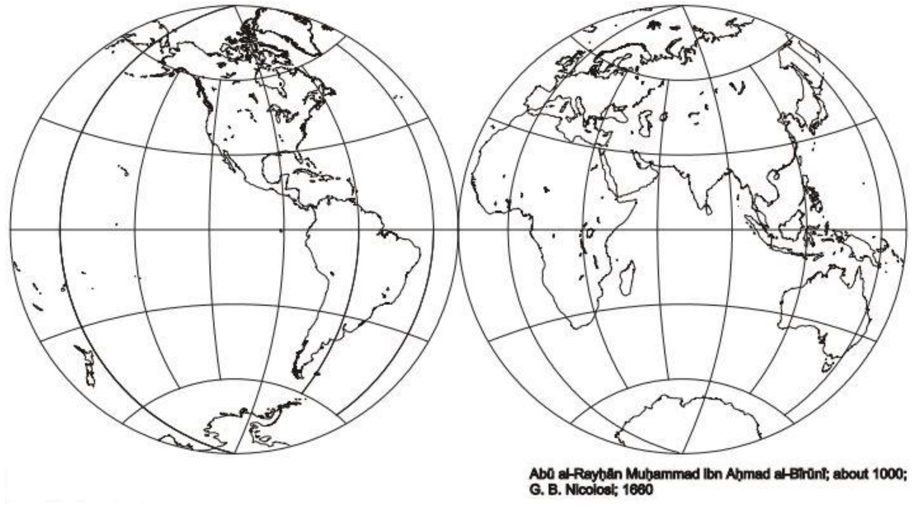
Stereografickou projekci při tvorbě map užíval Abū l-Rayḥān al-Bīrūnī v díle *Pojednání o zobrazení souhvězdí a o zakreslení zemí na mapu* (Risala fi tastih al-suwar wa-tabtih al-kuwar). V něm též popsal další typ projekce sféry do roviny, která je dnes známa jako tzv. *kulová projekce* (globular projection).[35] Polosféra se

[35] Tuto projekci nalezl sám al-Bīrūnī, znovu ji objevili Giovanni Battista Nicolosi (1610–1670) roku 1642 a Aaron Arrowsmith (1750–1823) kolem roku 1804. Ke konstrukci astrolábu ji využil Philippe de La Hire (1640–1717).

zobrazí do kruhu, jehož obvod je rozdělen na 360 stejných dílků a jehož vodorovný a svislý průměr jsou rozděleny na 180 stejných částí. Zakreslení bodu polosféry majícího zeměpisnou délku λ a zeměpisnou šířku φ se provádí následujícím způsobem: od středu kruhu vyneseme λ dílků na vodorovném průměru a sestrojíme kruhový oblouk procházející tímto bodem a koncovými body svislého průměru. Dále vyneseme od středu kruhu φ dílků na svislém průměru a od koncových bodů vodorovného průměru φ dílků na obvodu kruhu a sestrojíme kruhový oblouk procházející všemi třemi uvedenými body. Požadovaný bod reprezentující zvolený bod na sféře získáme jako průsečík obou kruhových oblouků (viz obr. 13).



Obr. 13: Kulová projekce



Obr. 14: Kulová projekce podle al-Bīrūnīho (převzato z internetu[36])

Z pozdějších prací, které se věnovaly využití stereografické projekce při konstrukci map, uveďme alespoň dvě Eulerovy práce nazvané *O reprezentaci sférické plochy v rovině* (De repraesentatione superficiei sphaericae super plano, 1777) a *O geografické projekci sférické plochy* (De projectione geographica superficiei sphaericae, 1777).[37] L. Euler se v nich zabýval otázkou existence a konstrukce

[36] Viz http://www.csiss.org/map-projections/Polyconic/Nicolosi_Globular.pdf.
[37] Viz Acta academiae scientiarum imperialis Petropolitanae 1(1777), 107–132, 133–142.

obecného konformního zobrazení sféry do roviny. Využil stereografickou projekci sféry do roviny, která bodu sféry majícímu zeměpisnou délku t a zeměpisnou šířku v přiřadí bod reprezentovaný komplexním číslem $z = \operatorname{tg} \frac{v}{2} (\cos t + \mathrm{i} \sin t)$. Konformní zobrazení roviny poté definoval pomocí komplexní funkce.

Na jeho dílo navázal Joseph Louis Lagrange (1736–1813), který v článku *O konstrukci zeměpisných map* (Sur la construction des cartes géographiques, 1779)[38] využil konformní zobrazení zadané pomocí analytických funkcí ve tvaru $x + \mathrm{i}\, y = f(u + \mathrm{i}\, t)$, $x - \mathrm{i}\, y = \varphi(u - \mathrm{i}\, t)$. Funkce f a φ přitom volil tak, aby se poledníky a rovnoběžky na sféře zobrazily do předem zvoleného ortogonálního systému rovinných křivek.

Belgický matematik a inženýr Pierre Germinal Dandelin (1794–1847) popsal roku 1827 základní vlastnosti stereografické projekce a využil ji k řešení některých matematických problémů, např. k řešení Apolloniovy úlohy spočívající v sestrojení kružnice, která se dotýká tří pevně zadaných kružnic.[39]

1.8 Afinní transformace

Stejnolehlost a osová afinita jsou speciálními příklady *afinních transformací*, nejobecnějších vzájemně jednoznačných transformací roviny, při nichž se přímky zobrazí opět na přímky. Afinní transformace zachovávají rovnoběžnost přímek. Obecná afinní transformace má analytické vyjádření ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + p, \\ y' &= cx + dy + q, \quad \text{kde } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

Pokud $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \pm 1$, nazýváme příslušné zobrazení *ekviafinní*.

Ekviafinní zobrazení poprvé nalézáme v práci *Kniha o řezech válce a jeho povrchu* (Kitab qutu al-ustuwana wa-basitha), jejímž autorem je Thābit ibn Qurra. Dokázal zde, že obsah elipsy, jejíž poloosy mají délky a a b, je roven obsahu kruhu o poloměru $\sqrt{ab}$, a dále uvedl (včetně důkazu pomocí exhaustivní metody),[40] že ekviafinní transformace zobrazí libovolnou úseč elipsy na úseč kruhu o stejném obsahu.

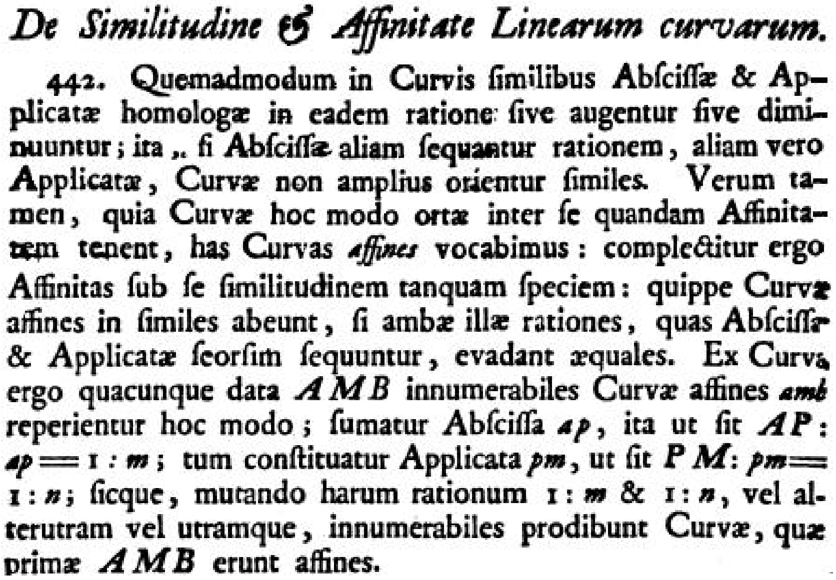
[38] Viz Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin 1779, 161–210.

[39] Viz Dandelin P. G., *Mémoire sur l'emploi des projections stéréographiques en géométrie*, Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres de Bruxelles 4(1827), 11–47.

[40] Exhaustivní (vyčerpávací) metodu (lat. *exhaurire = vyčerpat*) jako první rozpracoval Eudoxos z Knidu (asi 408–355 př. n. l.). Až do objevu limit a integrálního počtu byla užívána k výpočtům obsahů rovinných útvarů a objemů těles. Její podstatou je nekonečné dělení dané veličiny. Je založena na následujícím tvrzení: *Jestliže od dané veličiny odečteme její část větší než její polovina a od zbytku opět jeho část větší než jeho polovina a budeme tak činit stále, zbude nějaká veličina, jež bude menší než libovolná kladná veličina.* Viz Schwabik Š., Šarmanová P., *Malý průvodce historií integrálu*, edice Dějiny matematiky, svazek 6, Prometheus, Praha, 1996; citace ze str. 13.

Obecné afinní transformace se poprvé objevují v práci *Kniha o měření paraboly* (Kitab fi misahat al-qat al mukafi), jejímž autorem je Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit (908–946), vnuk ibn Qurry. Dokázal zde, že afinní transformace zachovává poměr ploch mnohoúhelníků; tento výsledek pomocí exhaustivní metody dále rozšířil i na dvě úseče paraboly.

Systematické vybudování afinní geometrie však učinil až mnohem později L. Euler. Ve druhém svazku své dvoudílné monografie *Introductio in analysin infinitorum*[41] z roku 1748 poprvé zavedl termín „afinní“ (latinsky *affinitas* = = spřízněnost, příbuznost) (viz citace na obr. 15), jímž chtěl poukázat na skutečnost, že ačkoliv geometrický útvar a jeho afinní obraz nejsou přísně vzato podobné, jsou přesto určitým způsobem příbuzné. Afinní transformace popsal analytickými vztahy $x = \frac{X}{m}$, $y = \frac{Y}{n}$ a poznamenal, že tyto transformace kružnici zobrazí obecně na elipsu, hyperbolu zobrazí na hyperbolu a parabolu zobrazí na parabolu.



De Similitudine & Affinitate Linearum curvarum.

442. Quemadmodum in Curvis ſimilibus Abſciſſæ & Applicatæ homologæ in eadem ratione ſive augentur ſive diminuuntur; ita „ ſi Abſciſſæ aliam ſequantur rationem, aliam vero Applicatæ, Curvæ non amplius orientur ſimiles. Verum tamen, quia Curvæ hoc modo ortæ inter ſe quandam Affinitatem tenent, has Curvas *affines* vocabimus: complectitur ergo Affinitas ſub ſe ſimilitudinem tanquam ſpeciem: quippe Curvæ affines in ſimiles abeunt, ſi ambæ illæ rationes, quas Abſciſſæ & Applicatæ ſeorſim ſequuntur, evadant æquales. Ex Curva ergo quacunque data *AMB* innumerabiles Curvæ affines *amb* reperientur hoc modo; ſumatur Abſciſſa *ap*, ita ut ſit *AP*: *ap* = 1 : *m*; tum conſtituatur Applicata *pm*, ut ſit *PM*: *pm* = 1 : *n*; ſicque, mutando harum rationum 1 : *m* & 1 : *n*, vel alterutram vel utramque, innumerabiles prodibunt Curvæ, quæ primæ *AMB* erunt affines.

Obr. 15: L. Euler – *Introductio in analysin infinitorum*; úryvek ze svazku II, kapitoly XVIII, str. 236, 239–240

1.9 Projektivní transformace

Afinní transformace jsou speciálním příkladem obecnějších, tzv. *projektivních transformací*. Obecná projektivní transformace má v afinních souřadnicích analytické vyjádření ve tvaru

$$x' = \frac{ax + by + p}{ex + fy + r},$$
$$y' = \frac{cx + dy + q}{ex + fy + r}.$$

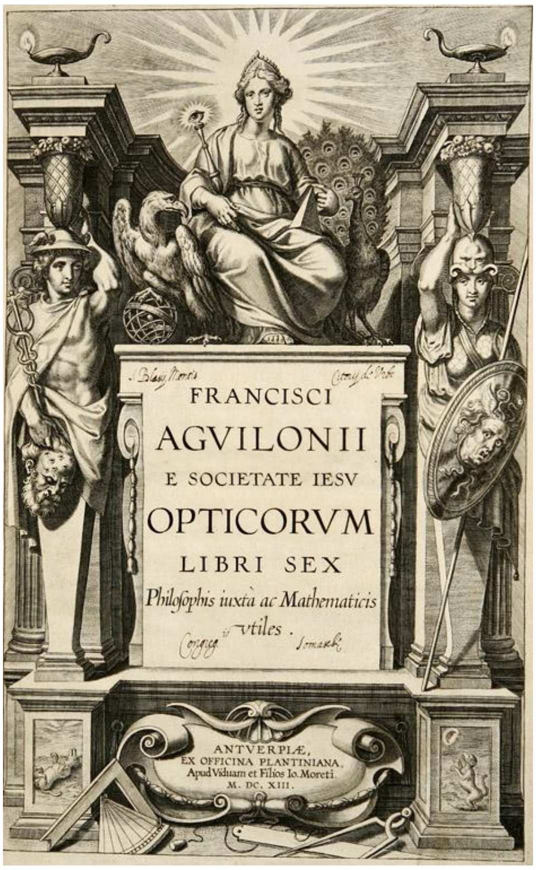
[41] Viz Euler L., *Introductio in analysin infinitorum*, Tomus secundus, apud Marcum-Michaelem Bousquet, Lausannae, 1748, 398 stran.

V klasických homogenních souřadnicích (x_0, x_1, x_2) má její analytické vyjádření tvar

$$
\begin{aligned}
x'_0 &= a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2, \\
x'_1 &= a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\
x'_2 &= a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \quad \text{kde } \det(a_{ij}) \neq 0.
\end{aligned}
$$

Abychom mohli projektivní transformace roviny definovat, je třeba přidat k obvyklé eukleidovské rovině tzv. nevlastní body jakožto průsečíky navzájem rovnoběžných přímek. Tato nutnost souvisí s požadavkem, aby projekce jedné roviny do druhé byla vzájemně jednoznačným zobrazením. Projektivní transformace (kolineace projektivní roviny) zobrazují přímky opět na přímky.

Myšlenku nevlastních bodů poprvé explicitně zmínil astronom a matematik Johannes Kepler (1571–1630) v práci *Astronomiae pars optica* z roku 1604.[42] V kapitole *O kuželosečkách* uvedl, že řezem kužele rovinou může být v závislosti na poloze roviny přímka, kružnice, elipsa, hyperbola nebo parabola a popsal přechod mezi jednotlivými kuželosečkami (přímka přechází přes hyperbolu do paraboly, a ta dále přes elipsu až do kružnice). Dále zde zavedl ohniska kuželosečky jako takové body, že úsečky spojující tyto body s libovolným bodem kuželosečky svírají s tečnou v tomto bodě shodné úhly. V případě paraboly pak druhé ohnisko kladl do nekonečna.



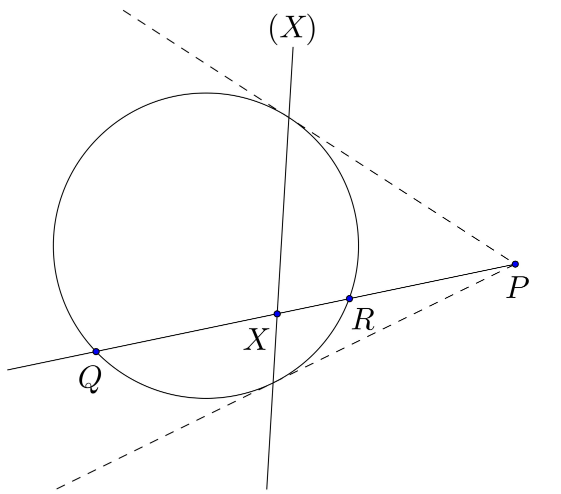
Obr. 16: François D'Aguillon – *Šest knih o optice*

[42] *Ad Vitellionem paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur*, apud Claudium Marnium & haeredes Ioannis Aubrii, Francofurti, 1604, 449 stran. Podtitul *Dodatek k Vitellovi* naznačuje, že J. Kepler touto svou prací navazoval na dílo polského fyzika Vitella (13. stol.).

V roce 1613 vydal belgický matematik, fyzik a architekt François D'Aguillon *Šest knih o optice* (Opticorum libri sex),[43] v nichž se kromě stereografické projekce věnoval rovněž obecné centrální projekci, kterou nazýval *scénografie*. Na obr. 16 je titulní list uvedené práce, jenž tehdy vytvořil vlámský malíř Peter Paul Rubens (1577–1640), který do ní nakreslil rovněž šest dalších tematických ilustrací.

J. Kepler i F. D'Aguillon ve svých dílech navazovali na řadu prací o perspektivě, které byly sepsány během 14. a 15. století.[44]

První souhrnné pojednání o projektivních transformacích sepsal Girard Desargues (1591–1661) pod názvem *Předběžný náčrt pokusu o pochopení jevů při vzájemném styku kužele a roviny* (Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan, Paris, 1639). K obvyklé eukleidovské rovině přidal celou nevlastní přímku a na hyperbolu poté pohlížel jako na uzavřenou křivku, jež nevlastní přímku protíná ve dvou bodech. Asymptoty hyperboly považoval za její tečny v nevlastních bodech. Parabolu chápal jako uzavřenou křivku, jež se nevlastní přímky dotýká.



Obr. 17: G. Desargues – polární transformace

G. Desargues studoval rovněž dvojpoměr čtyř kolineárních bodů, byl si vědom jeho invariantnosti při projektivních transformacích. Pro projektivní transformace, jejichž dvojím složením získáme identitu, zavedl termín *involuce*, jenž se používá dodnes. Jako první zkoumal *polární transformace* vzhledem ke kuželosečkám (viz obr. 17). Ke zvolenému bodu P hledal množinu všech bodů X takových,

[43] Viz D'Aguillon F., *Opticorum libri sex: Philosophis iuxtà ac Mathematicis utiles*, ex officina Plantiniana, apud viduam et filios I. Moreti, Antverpiae, 1613, 684 stran.

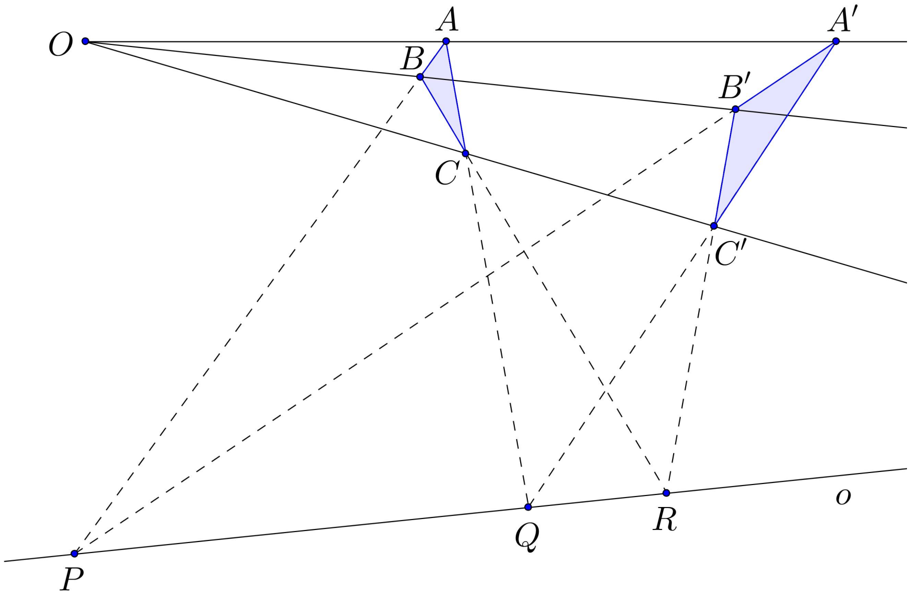
[44] Uveďme alespoň pojednání *O kreslení* (Della pittura, Florencie, 1435), které sepsal Leon Battista Alberti (1404–1472), a spis *O perspektivě v kreslení* (De perspectiva pingendi, Řím, asi 1480), jehož autorem je Piero della Francesca (1416–1492). V souvislosti s využitím perspektivy v malířství bychom měli zmínit také dílo Leonarda da Vinciho (1452–1519) nazvané *Pojednání o kreslení* (Il trattato della pittura) a vydané až po jeho smrti roku 1651 a dvě práce Albrechta Dürrera (1471–1528) nazvané *Návod pro měření kružítkem a pravítkem* (Unterweysung der Messung mit Zirckel und Richtscheyt, 1525) a *O proporcích člověka* (Von menschlicher Proportion, 1528). Oba malíři, L. da Vinci a A. Dürrer, se ve svých pracích věnovali geometrickým otázkám včetně geometrických zobrazení.

že body P a X harmonicky dělí body Q a R, v nichž přímka PX protne danou kuželosečku.[45] Ukázal, že množinou všech hledaných bodů X je přímka; dnes tuto přímku nazýváme *polárou* bodu P vzhledem k dané kuželosečce, bod P nazýváme jejím *pólem*.[46]

Dále dokázal, že polárou vnějšího bodu vzhledem k dané kuželosečce je přímka procházející body dotyku tečen vedených tímto bodem k dané kuželosečce. Pokud uvažovaný bod leží na kuželosečce, je jeho polárou vzhledem k dané kuželosečce tečna procházející tímto bodem. V případě nevlastní přímky ukázal, že jejím pólem vzhledem k elipse nebo hyperbole je střed uvažované kuželosečky. Tyto poznatky prakticky využíval při řešení některých konstrukčních úloh, např. při hledání kuželosečky, která je projektivním obrazem kružnice.

G. Desargues rovněž roku 1639 zformuloval a dokázal tvrzení, které je dnes označováno jako tzv. *Desarguesova věta* (viz obr. 18):[47]

> *Nechť jsou dány dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$, pro které platí, že přímky AA', BB' a CC' se protínají v jediném bodě O. Označme průsečíky přímek AB a $A'B'$, AC a $A'C'$, BC a $B'C'$ po řadě P, Q, R. Potom body P, Q, R jsou kolineární.*



Obr. 18: Desarguesova věta

[45] Říkáme, že body P a X *harmonicky dělí* body Q a R, jestliže dvojpoměr $(Q, R, P, X) = -1$.

[46] Termín *pól* je odvozen z řeckého slova *polos* (osa) a původně značil průsečík sféry s její osou rotace. Názvy *polára bodu* a *pól přímky* vzhledem k dané kuželosečce zavedli nezávisle na sobě francouzští matematici François Joseph Servois (1767–1847) a Joseph Diaz Gergonne (1771–1859).

[47] G. Desargues uvedené tvrzení nikdy nepublikoval. V roce 1648 Desarguesovu větu uveřejnil jeho přítel Abraham Bosse (1602–1676) v knize *Manière universelle de Mr. Desargues, pour pratiquer la perspective par petit-pied, comme le geometral*, De l'imprimerie de Pierre Des-Hayes, Paris, 1648, 342 stran.

Lze ukázat, že ve výše uvedeném případě existuje speciální projektivní transformace – *homologie*,[48] se středem O a osou o určenou body P, Q, R, která trojúhelník ABC zobrazí na trojúhelník $A'B'C'$.

Anglický matematik a fyzik Isaac Newton (1642–1727) projektivní transformace často využíval při řešení složitějších geometrických otázek, neboť podle jeho vlastních slov umožňují transformovat zadané útvary do jednodušších, problém vyřešit a inverzní transformací získat řešení vzhledem k původnímu zadání (viz citace na obr. 19).

Inservit autem hoc lemma solutioni difficiliorum problematum, transmutando figuras propositas in simpliciores. Nam (1) rectæ quævis convergentes transmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo lineam quamvis rectam, quæ per concursum convergentium transit ; idque quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum ; lineæ autem parallelæ sunt, quæ nusquam concurrunt. Postquam autem problema solvitur in figurâ novâ ; si per inversas operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, (2) habebitur solutio quæsita.

Obr. 19: I. Newton – *Philosophiae naturalis principia mathematica*, svazek I, 1687; úryvek z vydání z roku 1833, str. 171–172

Opětovný zájem matematiků o syntetickou projektivní geometrii podnítil koncem 18. století francouzský matematik Gaspard Monge (1746–1818) vydáním díla *Deskriptivní geometrie* (Géométrie descriptive, 1799).[49] Podstatná část práce je věnována Mongeově nové metodě spočívající v zobrazení trojrozměrných útvarů do dvou navzájem kolmých rovin, obsahuje však rovněž řadu tvrzení projektivní geometrie včetně důkazů. V souvislosti s transformacemi se novou myšlenkou jeví zobecnění polárních transformací do trojrozměrného prostoru.

Mongeův žák Lazare Nicolas Carnot (1753–1823) v díle *O korelaci geometrických útvarů* (De la corrélation des figures de géométrie, 1801)[50] uvažoval spojité projektivní transformace, které nazýval *korelace* (viz citace na obr. 20). „Principem korelace“ pak mínil skutečnost, že tyto transformace zachovávají určité vlastnosti geometrických útvarů. Jsou-li dva útvary ve vztahu korelace, lze na vlastnosti jednoho útvaru usuzovat z vlastností druhého útvaru.

---

[48] Termín *homologie* v tomto smyslu poprvé použil právě G. Desargues. Poznamejme, že osová afinita a stejnolehlost jsou speciálními případy homologie; osová afinita je homologie se středem v nevlastním bodě, stejnolehlost je homologie se středem ve středu stejnolehlosti a s osou tvořenou nevlastní přímkou.

[49] Viz Monge G., *Géométrie descriptive. Leçons données aux Écoles Normales, l'an 3 de la Republique*, Baudouin, Paris, 1799, 132 stran.

[50] Viz Carnot L. N., *De la corrélation des figures de géométrie*, Duprat, Paris, 1801, 188 stran.

2. Le mode que je me propose de suivre consiste à rapporter chaque figure dont on recherche les propriétés, à une autre figure dont les propriétés sont connues, et qu'on prend pour terme de comparaison; puis à l'aide de caractéristiques particulières, et de l'arrangement systématique des lettres employées pour désigner les points qui déterminent les diverses parties de ces figures, on exprime les modifications qui les distinguent : c'est ce que j'appelle *établir la corrélation des figures.*

Obr. 20: L. N. Carnot – *De la corrélation des figures de géométrie*; úryvek ze str. 1

Ve své práci z roku 1803 nazvané *Geometrie polohy* (Géométrie de position)[51] definoval L. N. Carnot důležitý invariant projektivních transformací – dvojpoměr čtyř kolineárních bodů. Na rozdíl od svých předchůdců však v definici uvažoval orientované úsečky, jejichž délky proto opatřil znaménky. Ukázal, že znaménko dvojpoměru bodů A, B, C, D (v tomto pořadí) záleží na tom, zda se dvojice bodů A, B a C, D na přímce navzájem oddělují, či nikoliv. Pro takto definovaný dvojpoměr čtyř kolineárních bodů dokázal tvrzení, které mnohem dříve zformuloval Pappos z Alexandrie (viz kapitola 1.6).

Studium projektivních transformací z hlediska syntetické geometrie završil roku 1822 francouzský matematik Jean Victor Poncelet (1788–1867) vydáním obsáhlé práce *Pojednání o projektivních vlastnostech útvarů* (Traité des propriétés projectives des figures).[52] V první kapitole nejprve definoval středové promítání a popsal jeho vlastnosti, které lze odvodit čistě geometrickými prostředky. Zavedl termíny *projektivní útvary* a *projektivní vlastnosti* pro ty vlastnosti geometrických útvarů, které mají společné jak vzor, tak jeho projektivní obraz (viz citace na obr. 21). V dalším textu ukázal, že mezi projektivní útvary patří všechny (regulární) kuželosečky.

5. Une figure dont les parties n'auront entre elles que des dépendances graphiques de la nature de celles qui précèdent, c'est-à-dire des dépendances indestructibles par l'effet de la projection, sera appelée, dans ce qui va suivre, *figure projective.*

Ces dépendances elles-mêmes, et, en général, toutes les relations ou propriétés qui subsistent à la fois dans la figure donnée et dans ses projections, seront appelées également *relations* ou *propriétés projectives.*

Obr. 21: J. V. Poncelet – *Traité des propriétés projectives des figures*; úryvek ze str. 5

[51] Viz Carnot L. N., *Géométrie de position*, Duprat, Paris, 1803, 489 stran.

[52] Viz Poncelet J. V., *Traité des propriétés projectives des figures: ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain*, Bachelier, Paris, 1822, 426 stran.

Podobně jako I. Newton navrhoval i J. V. Poncelet při řešení složitých otázek týkajících se kuželoseček zobrazit tyto křivky nejprve do kružnice, vyřešit odpovídající problém pro kružnici a na řešení aplikovat inverzní zobrazení.

Výše uvedenými výsledky o afinních a projektivních transformacích, k nimž jednotliví matematici dospěli během 17. a 18. století, se nepochybně inspiroval německý matematik August Ferdinand Möbius. Řadu zmíněných prací znal a ve svém díle *Barycentrický počet* (1827) na ně odkazoval. Jeho přístup však představuje z pohledu geometrických transformací kvalitativní změnu, neboť afinní a projektivní transformace poprvé zpracoval analyticky s využitím tzv. barycentrických souřadnic. Do té doby byly transformace přirozeně studovány a popisovány výhradně prostředky syntetické geometrie, což je pochopitelné, neboť teprve začátkem 19. století plně dozrála doba k novému, algebraickému přístupu k transformacím, protože pro něj již byly vytvořeny vhodné podmínky. V geometrii byly zavedeny souřadnice, byly položeny základy analytické i algebraické geometrie, byla k dispozici vhodná symbolika i algebraické metody, základní typy transformací a jejich vlastnosti byly v této době již podrobně popsány. Barycentrickému počtu proto věnujeme následující samostatnou kapitolu.

2. Barycentrický počet

August Ferdinand Möbius byl významným německým matematikem a teoretickým astronomem. Jako jeden z prvních matematiků zavedl do geometrie nový účinný prostředek, homogenní souřadnice, čímž výrazně ovlivnil další rozvoj projektivní geometrie a určil nový směr, kterým se tato disciplína měla ubírat. Spolu s Juliem Plückerem (1801–1868) patřil mezi hlavní představitele algebraické projektivní geometrie.[1] Je považován za jednoho ze zakladatelů topologie.

Životní osudy A. F. Möbia jsou podrobně popsány v několika publikacích.[2] Připomeneme proto jen základní životopisné a bibliografické údaje, které nám umožní zařadit Möbiovy práce a výsledky do dobového i odborného kontextu.

2.1 August Ferdinand Möbius

August Ferdinand Möbius se narodil dne 17. listopadu 1790 ve městě Schulpforta (Sasko-Anhaltsko). Jeho otec Johann Heinrich Möbius byl učitelem tance, zemřel, když byly Augustovi tři roky. August neměl žádné sourozence. Do svých třinácti let byl vzděláván doma, roku 1803 nastoupil na střední školu v Schulpfortě. Roku 1809 ji ukončil a odešel na univerzitu do Lipska. Na přání matky začal studovat práva, brzy však shledal, že ho tento obor neuspokojuje, a proto již po prvním semestru dal přednost studiu matematiky, fyziky a astronomie. Zájem o matematiku totiž projevoval již v dětství. Z univerzitních profesorů ho nejvíce ovlivnil Karl Mollweide (1774–1825), astronom, který se zabýval také matematikou.[3]

Roku 1813 odjel A. F. Möbius na univerzitu do Göttingen, kde po celý rok studoval teoretickou astronomii u Carla Friedricha Gausse, který v té době působil jako ředitel tamní hvězdárny. Poté, opět na rok, odjel na univerzitu do Halle, kde si rozšiřoval vzdělání u Johanna Friedricha Pfaffa (1765–1825), Gaussova učitele a přítele. Zde se kromě astronomie zajímal hlavně o matematiku. Roku 1815 sepsal v Lipsku disertační práci o pozorování stálic nazvanou *De Computandis Occultationibus Fixarum per Planetas* a začal pracovat na své habilitační práci věnované trigonometrickým rovnicím. Obě tyto práce mu přinesly pověst teoretického astronoma. V době, kdy sepisoval habilitační práci, měl být povolán do pruské armády, ale podařilo se mu vojně vyhnout; někteří historikové matematiky dokonce tvrdí, že snaha vyhnout se službě v pruské armádě byla hlavním důvodem psaní habilitační práce. V roce 1816 K. Mollweide z vlastního zájmu přešel na stolici matematiky, a tak A. F. Möbius nastoupil na jeho místo jako mimořádný profesor astronomie a vyšší mechaniky.

[1] Souběžně s algebraickou projektivní geometrií se v první polovině 19. století rozvíjela také syntetická projektivní geometrie, jejímiž hlavními představiteli byli Jacob Steiner a Michel Chasles (1793–1880).

[2] Např. [FFW], [WA], str. 336–344, a [Can], str. 38–43; relevantní informace poskytuje i webová stránka http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Mobius.html.

[3] V letech 1807 až 1809 objevil K. Mollweide trigonometrické vzorce, které jsou po něm pojmenovány.

A. F. Möbiovi se dlouho nedařilo získat místo řádného profesora. Důvodem mohla být skutečnost, že nebyl příliš dobrým přednášejícím, nedařilo se mu zaujmout svými přednáškami platící studenty, a byl proto nucen pořádat některé své přednášky zdarma, aby přilákal alespoň nějaké studenty.

V roce 1816 bylo A. F. Möbiovi nabídnuto místo astronoma v Greifswaldu a o tři roky později místo matematika v Dorpatu[4]. Obě odmítl, částečně proto, že věřil ve vyšší odbornou úroveň univerzity v Lipsku, částečně pro svoji věrnost rodnému Sasku. Roku 1820 se oženil, během dalších let se mu narodila dcera a dva synové. Roku 1825 K. Mollweide zemřel a A. F. Möbius doufal, že by mohl získat uvolněné místo na stolici matematiky, což se však tentokrát nestalo.

Roku 1844 A. F. Möbia navštívil Hermann Günther Grassmann (1809–1877) a požádal ho, aby napsal recenzi na jeho nové dílo *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*,[5] jež obsahovalo mnoho myšlenek a výsledků podobných Möbiovým. A. F. Möbius, který v té době nerozpoznal význam Grassmannova díla, to však odmítl. Nicméně přesvědčil H. G. Grassmanna, aby svou práci zaslal do soutěže, a teprve poté, kdy Grassmannova práce získala cenu, napsal o ní alespoň krátké vyjádření (1847).[6]

Díky své pověsti úspěšného vědeckého pracovníka dostal A. F. Möbius v roce 1844 pozvání na univerzitu v Jeně a patrně v důsledku toho mu univerzita v Lipsku konečně nabídla místo řádného profesora vyšší mechaniky a astronomie, které zastával až do své smrti. Po celou dobu svého působení v Lipsku, tedy více než padesát let, pracoval také jako pozorovatel a později, od roku 1848, jako ředitel lipské hvězdárny (astronomická observatoř Pleissenburg). Podílel se na její přestavbě, kterou v letech 1818 až 1821 dokonce řídil. Předtím však navštívil řadu dalších observatoří v celém Německu, aby získal vlastní představy a potřebné zkušenosti. Zemřel dne 26. září 1868 v Lipsku.

A. F. Möbius byl významným představitelem algebraické geometrie. Je považován za jednoho ze zakladatelů topologie, vědy, která zkoumá matematické vlastnosti prostoru. Jeho zájem o topologii ilustruje např. skutečnost, že se ještě před formulací tzv. *problému čtyř barev* zabýval jeho jednodušší variantou.[7]

---

[4] Jedná se o starší německý název estonského města Tartu, v němž sídlí nejstarší a nejznámější estonská univerzita; byla založena roku 1632 švédským králem Gustavem II. Adolfem.

[5] Viz Grassmann H. G., *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert*, Verlag von Otto Wigand, Leipzig, 1844, 279 stran.

[6] O Grassmannově monografii viz Bečvář J., *Z historie lineární algebry*, edice Dějiny matematiky, svazek 35, Matfyzpress, Praha, 2007, 519 stran; kapitola VIII. Grassmannova lineární algebra, str. 323–363. O propagaci a přijetí Grassmannových výsledků v českých zemích viz Nádeník Z., *Reception of Grassmann's ideas in Bohemia*, in Schubring G. (ed.), *Hermann Günther Grassmann (1809–1877): visionary mathematician, scientist and neohumanist scholar*, Boston Studies in the Philosophy of Science 187(1996), 147–153.

[7] Roku 1840 A. F. Möbius předložil k řešení následující problém: Král měl pět synů. Ve své závěti stanovil, aby bylo po jeho smrti království rozděleno mezi jeho syny na pět oblastí tak, aby každá oblast měla společnou hranici se všemi ostatními oblastmi. Otázka zněla, zda lze královu poslední vůli splnit. Odpověď na tuto otázku je záporná a dnes je poměrně snadné to dokázat.

Svoji nejvýznamnější geometrickou monografii *Der barycentrische Calcul* publikoval A. F. Möbius v roce 1827 (viz dále). Roku 1837 vydal dvoudílnou učebnici *Lehrbuch der Statik*[8] obsahující geometrický pohled na statiku, který mimo jiné vedl ke studiu svazků přímek v prostoru. Ačkoliv jeho nejdůležitější práce spadají do oblasti matematiky, sepsal také významné astronomické práce, v nichž se věnoval mimo jiné nebeské mechanice; těmi nejznámějšími jsou *Die Hauptsätze der Astronomie*[9] a *Die Elemente der Mechanik des Himmels*[10].

Obr. 22: August Ferdinand Möbius

Téměř všechny Möbiovy matematické práce byly publikovány v letech 1828 až 1858 v časopisu *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Jedná se převážně o geometrické studie, většina z nich se zabývá rozvíjením a aplikacemi metody, jejíž základy byly položeny v Barycentrickém počtu.[11] Jeho matematické práce, i když neobsahovaly vždy původní výsledky, vynikaly přehledným, jasným

[8] Viz Möbius A. F., *Lehrbuch der Statik*, Erster Theil, Zweiter Theil, bei Georg Joachim Göschen, Leipzig, 1837, 355 + 313 stran.

[9] Viz Möbius A. F., *Die Hauptsätze der Astronomie: zum Gebrauche bei seinen Vorlesungen für Gebildete zusammengestellt*, bei Georg Joachim Göschen, Leipzig, 1836, 30 stran.

[10] Viz Möbius A. F., *Die Elemente der Mechanik des Himmels, auf neuem Wege ohne Hülfe höherer Rechnungsarten dargestellt*, Weidmann'sche Buchhandlung, Leipzig, 1843, 315 stran.

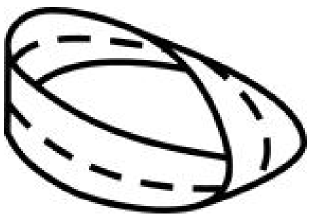
[11] Např. v článku *Barycentrische Lösung der Aufgabe des Herrn Th. Clausen* (Journal für die reine und angewandte Mathematik 5(1830), 102–106) A. F. Möbius s využitím barycentrického počtu řeší následující úlohu: Kružnici je opsán a vepsán trojúhelník tak, že vrcholy opsaného trojúhelníku leží na přímkách, v nichž leží strany vepsaného trojúhelníku. Úkolem je nalézt druhý trojúhelník, je-li jeden z trojúhelníků zadán. Dále např. články *Über eine allge-*

a efektivním výkladem. A. F. Möbius měl velkou představivost a občas postupoval naprosto originálním způsobem. Pracoval pomalu, víceméně izolován od ostatních matematiků, a dokud svoji práci zcela nedokončil, nikde se o ní nezmiňoval. Jeho sebrané spisy vyšly ve čtyřech svazcích v Lipsku v letech 1885 až 1887.[12]

Na závěr zmíníme ještě pár zajímavostí. August Ferdinand nebyl jediným členem rodiny Möbiů, který se stal významným vědcem. Jeho vnuk Paul Julius Möbius (1853–1907), neurolog, se proslavil svými kontroverzními teoriemi o struktuře lidského mozku; podle jednoho jeho závěru se centrum logického myšlení nachází v levém koutu čela (1900). Od něho také víme, že jeho dědeček považoval matematiku za poetickou záležitost. Německý historik matematiky Moritz Cantor (1829–1920) popsal následující Möbiův každodenní zvyk (viz [Can], str. 41): Při odchodu z domu si prý vždy připomněl německou průpovídku „3S und GUT“ složenou z počátečních písmen věcí, které nechtěl v žádném případě zapomenout: Schlüssel (klíč), Schirm (deštník), Sacktuch (kapesník), Geld (peníze), Uhr (hodinky), Taschenbuch (zápisník). Po A. F. Möbiovi je pojmenována postava Johanna Wilhelma Möbia z Dürrenmattova dramatu *Fyzikové*.[13]

2.2 Möbiův list

Möbiovo jméno je dnes v matematice nejčastěji spojováno s tzv. *Möbiovým listem* (proužkem, páskou), což je dvourozměrný útvar, který má pouze jednu stranu, z čehož vyplývají jeho další zajímavé topologické vlastnosti, např. neorientovatelnost. V trojrozměrném prostoru jej lze jednoduše vytvořit tak, že se konce obdélníkového proužku papíru vzájemně otočí o 180° a slepí dohromady (viz obr. 23).



Obr. 23: Möbiův list

meinere Art der Affinität geometrischer Figuren (Journal für die reine und angewandte Mathematik 12(1834), 109–133) nebo *Über die Zusammensetzung gerader Linien und eine daraus entspringende neue Begründungsweise des barycentrischen Calculs* (Journal für die reine und angewandte Mathematik 28(1844), 1–9).

[12] Baltzer R., Klein F., Scheibner W. (eds.), *August Ferdinand Möbius, Gesammelte Werke*, Band I–IV, Verlag von S. Hirzel, Leipzig, 1885, 1886, 1886, 1887, 633 + 708 + 580 + 731 stran.

[13] Švýcarský dramatik Friedrich Dürrenmatt (1921–1990) hru *Fyzikové* (die Physiker) sepsal roku 1962. Jedná se o komedii o dvou dějstvích s detektivní zápletkou. Děj se odehrává v psychiatrickém ústavu, kam se fyzik Möbius, předstírající duševní chorobu, uchýlil z obavy před svým vynálezem, který může zničit svět. V českém překladu hra poprvé vyšla v nakladatelství Dilia v Praze v roce 1963 (přeložil Bohumil Černík, 78 stran), a dále v letech 1972 (přeložil Jiří Stach, 72 stran) a 1989 (přeložil Jiří Stach, 65 stran).

Německý matematik Johann Benedict Listing (1808–1882), který roku 1847 zavedl termín topologie v první práci věnované tomuto tématu,[14] vytvořil Möbiův proužek již roku 1858, dříve než A. F. Möbius. Dospěl k němu v souvislosti se snahou najít komplikovaný objekt, pro který neplatí Eulerova věta pro konvexní mnohostěny.[15] Svůj objev publikoval roku 1862 v práci *Der Census räumlicher Complexe, oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern.*[16] Zdůraznil, že proužek má pouze jednu stěnu, jednu hranu a 4 vrcholy (nebo žádný, pokud nepočítáme spoj).

Tento objekt je však nazván po A. F. Möbiovi, který jej zcela nezávisle na J. B. Listingovi popsal roku 1861 v rukopisu předloženém Pařížské akademii věd jako odpověď na soutěžní téma týkající se nových poznatků z geometrické teorie mnohostěnů.[17] A. F. Möbius zde zkoumal obecné vlastnosti ploch majících pouze jednu stranu. Ačkoliv jeho text obsahoval celou řadu nových, zajímavých myšlenek, porota jej neocenila. Přispěl k tomu zřejmě fakt, že byl napsán špatnou francouzštinou, a patrně proto jeho význam nebyl pochopen. Základní myšlenky svého příspěvku publikoval později v pojednáních *Theorie der elementaren Verwandtschaft*[18] a *Über die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders*[19]. Původní rukopis z roku 1861 byl objeven až po Möbiově smrti.

A. F. Möbius v této souvislosti přišel s pojmem *orientovatelnost*,[20] který mu umožnil rozlišovat kladné a záporné délky, obsahy a objemy. Navíc Möbiův list není jedinou jednostrannou plochou, kterou uvažoval; popsal totiž celou třídu mnohostěnů s touto vlastností – všechny mají nulový objem a nesplňují Eulerův vzorec. Nejmenší má 10 trojúhelníkových stěn, 15 hran a 6 vrcholů. A. F. Möbius též zavedl pojem *duální mnohostěn*.[21]

---

[14] Viz Listing J. B., *Vorstudien zur Topologie*, in Göttinger Studien, Erste Abtheilung: Mathematische und naturwissenschaftliche Abhandlungen, redigirt von Dr. August Bernhard Krische, bei Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1847, 811–875.

[15] Podle Eulerovy věty pro konvexní mnohostěny platí rovnost $s + v = h + 2$, kde s je počet stěn, h je počet hran a v je počet vrcholů mnohostěnu.

[16] Viz Listing J. B., *Der Census räumlicher Complexe, oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern*, aus dem zehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, in der Dieterichschen Buchhandlung, Göttingen, 1862, 86 stran.

[17] Originální zadání soutěžního úkolu znělo: *Perfectionner en quelque point important la théorie géométrique des polyèdres.* Viz Programme des prix proposés par l'Académie des sciences pour les années 1858, 1859, 1860 et 1861, Institut impérial de France, Académie des sciences, Sciences mathématiques, Grand prix de mathématiques, proposé pour 1861, str. 6.

[18] Viz Möbius A. F., *Theorie der elementaren Verwandtschaft*, Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Classe 15(1863), S. Hirzel, Leipzig, 18–57.

[19] Viz Möbius A. F., *Über die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders*, Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Classe 17(1865), S. Hirzel, Leipzig, 31–68.

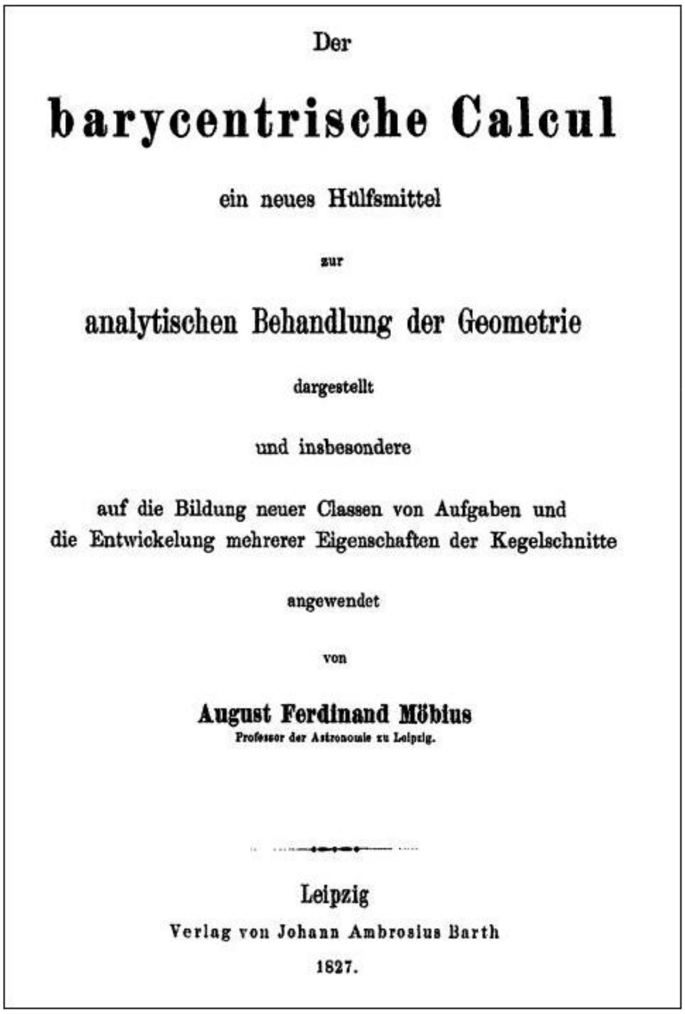
[20] Pojem orientovatelné veličiny v syntetické geometrii poprvé systematicky užíval Lazare Nicolas Carnot v práci *Géométrie de position* z roku 1803. A. F. Möbius tento pojem zavedl a využíval v analytické geometrii.

[21] Duálním mnohostěnem k danému mnohostěnu rozumíme mnohostěn, jenž má vrcholy ve středech jeho stěn. Navzájem duálními mnohostěny jsou např. krychle a pravidelný osmistěn nebo pravidelný dvanáctistěn a pravidelný dvacetistěn. Pravidelný čtyřstěn je duální sám k sobě.

2.3 Barycentrické (homogenní) souřadnice

Möbiův přístup

Roku 1827 vydal A. F. Möbius knihu *Der barycentrische Calcul*,[22] v níž podal úplný výklad svého nového počtu. Základní myšlenkou se zabýval již roku 1818, o pět let později publikoval první nástin své nové metody jako krátký dodatek k práci *Beobachtungen auf der Königlichen Universitäts-Sternwarte zu Leipzig.*[23]



Der

barycentrische Calcul

ein neues Hülfsmittel

zur

analytischen Behandlung der Geometrie

dargestellt

und insbesondere

auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und
die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte

angewendet

von

August Ferdinand Möbius

Professor der Astronomie zu Leipzig.

Leipzig

Verlag von Johann Ambrosius Barth

1827.

Obr. 24: August Ferdinand Möbius – *Der barycentrische Calcul*

---

[22] Viz Möbius A. F., *Der barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte*, Georg Olms Verlag, Leipzig, 1827, 454 stran; též viz *August Ferdinand Möbius, Gesammelte Werke*, Erster Band, Herausgegeben von R. Baltzer, Verlag von S. Hirzel, Leipzig, 1885, 1–388.

[23] Viz Möbius A. F., *Zwei geometrische Aufgaben*, Anhang zu „Beobachtungen auf der Königlichen Universitäts-Sternwarte zu Leipzig etc.“, bei Carl Cnobloch, Leipzig, 1823, 57–64; též *August Ferdinand Möbius, Gesammelte Werke*, Erster Band, Herausgegeben von R. Baltzer, Verlag von S. Hirzel, Leipzig, 1885, 389–398.

V *Barycentrickém počtu* poprvé představil tzv. *barycentrické* (*homogenní*) *souřadnice*. Nezávisle na něm a téměř ve stejném okamžiku publikovali Karl Wilhelm Feuerbach (1800–1834)[24] v Německu a Étienne Bobillier (1798–1840)[25] ve Francii práce využívající homogenní souřadnice.

A. F. Möbius svůj nový počet odvodil na základě metod geometrické statiky. V předmluvě k *Barycentrickému počtu* poukázal na skutečnost, že fyzikální koncept těžiště se s úspěchem využíval již v Archimédově době, kdy vedl k objevu řady vztahů mezi geometrickými veličinami. Zmínil rovněž Guldinovy věty.[26]

> *Es ist bekannt, dass die der Mechanik zugehörige Lehre vom Schwerpunkte schon oftmals als Hülfsmittel zur Erfindung rein geometrischer Wahrheiten benutzt worden ist. Die frühesten Versuche sind unstreitig die mechanische Quadratur der Parabel von Archimedes und der schon in des Pappus mathematischen Sammlungen sich vorfindende, jetzt unter dem Namen der centrobaryschen oder Guldins Regel bekannte Satz. ... Von demselben elementaren und rein geometrischen Begriffe des Schwerpunkts gehen auch die vorliegenden Untersuchungen aus. Die erste Veranlassung hierzu war die Erwägung der Fruchtbarkeit des Satzes, dass jedes System gewichtiger Punkte nur einen Schwerpunkt hat, und dass daher, in welcher Folge man auch die Punkte nach und nach in Verbindung bringt, zuletzt doch immer ein und derselbe Punkt gefunden werden muss. Die einfache Art, womit ich dadurch, mehrere geometrische Sätze zu beweisen, mich im Stande sah, bewog mich, zu noch grösserer Vereinfachung solcher Untersuchungen einen dafür passenden Algorithmus auszumitteln.* ([M2], str. iii a iv)

Základní myšlenka Möbiových barycentrických souřadnic je následující. Uvažujme pevně daný trojúhelník. Jako souřadnice libovolného bodu roviny označme hmoty m_1, m_2, m_3, které musíme umístit ve vrcholech daného trojúhelníku tak, aby uvažovaný bod roviny byl těžištěm (barycentrem, v originále *Schwerpunkt*) těchto hmot (viz obr. 25, na němž bodu T odpovídají souřadnice $m_1 = m_2 = m_3$). Pokud uvažovaný bod leží na hranici trojúhelníku, je jedna ze souřadnic nulová, pokud leží vně daného trojúhelníku, je alespoň jedna ze souřadnic záporná. Pokud všechny tři hmoty vynásobíme stejnou konstantou, jejich těžiště se nezmění. Barycentrické souřadnice bodu proto nejsou určeny jednoznačně, jednoznačně je určen pouze jejich poměr $m_1 : m_2 : m_3$.

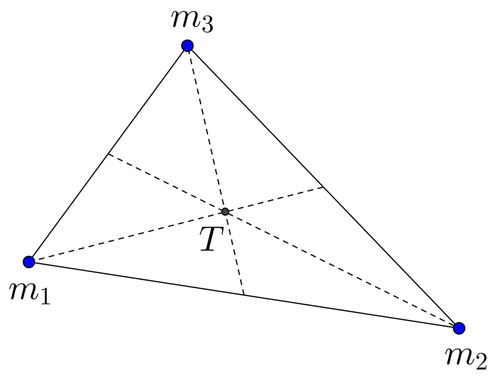
---

[24] Viz Feuerbach K. W., *Grundriß zu analytischen Untersuchungen der dreieckigen Pyramide*, In Commission bei Riegel und Wiesner, Nürnberg, 1827, 48 stran.

[25] Viz Bobillier É., *Géométrie de situation. Démonstration de quelques théorèmes sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres*, Annales de mathématiques pures et appliquées 18(1827/28), 89–98; *Géométrie analytique. Recherche de quelques lieux géométriques, dans l'espace*, Annales de mathématiques pures et appliquées 18(1827/28), 230–248.

[26] Guldinovy věty (též Pappos–Guldinovy věty) jsou pojmenovány po švýcarském matematikovi Paulu H. Guldinovi (1577–1643). Slouží k výpočtu povrchu a objemu rotačních těles. První Guldinova věta říká, že objem rotačního tělesa je roven součinu obsahu rotujícího útvaru a délky kružnice, kterou při rotaci opisuje těžiště rotujícího útvaru. Podle druhé Guldinovy věty je povrch rotačního tělesa roven součinu obvodu rotujícího útvaru a délky kružnice, kterou při rotaci opisuje těžiště rotujícího útvaru.

V tomto souřadném systému mají všechny členy rovnice nějaké křivky nebo plochy stejný stupeň, jsou tzv. homogenní (odtud název). Barycentrické souřadnice umožňují charakterizovat i nekonečně vzdálené body v projektivní rovině a operovat s imaginárními prvky.



Obr. 25: Barycentrické souřadnice

Vytvořením prvního významného příkladu homogenních souřadnic vlastně A. F. Möbius ukázal cestu, jak přenést Descartův analytický přístup do kontextu projektivní geometrie. Möbiova myšlenka užití barycentrických souřadnic k popisu bodů projektivní roviny připoutala okamžitě pozornost celé matematické komunity. Homogenní souřadnice se brzy staly obecně používaným prostředkem algebraické projektivní geometrie.

Plückerův přístup

A. F. Möbius inspiroval například Julia Plückera (1801–1868),[27] který v článku *Über ein neues Coordinatensystem*[28] z roku 1830 poprvé představil tzv. *trilineární souřadnice*. Postupoval však jinak než A. F. Möbius. Uvažoval tři různé přímky OO', OO'' a $O'O''$, z nichž každé dvě jsou různoběžné, a za souřadnice libovolného bodu M roviny vzal orientované kolmé vzdálenosti p, q, r bodu M od daných přímek (viz obr. 26, na němž pro souřadnice vnitřního bodu M ostroúhlého trojúhelníku $OO'O''$ platí: $p > 0$, $q < 0$, $r < 0$). Tyto souřadnice opět nejsou určeny jednoznačně (závisí na volbě jednotky), jsou určeny až na násobek libovolnou nenulovou konstantou.

Ve druhém svazku dvoudílné knihy *Analytisch-geometrische Entwicklungen*[29] zavedl J. Plücker obecné homogenní souřadnice projektivního prostoru, jimiž lze

[27] Julius Plücker byl dalším významným představitelem algebraické projektivní geometrie. Studoval na univerzitách v Bonnu a v Paříži. Roku 1825 v Bonnu obhájil svou disertační práci. V letech 1828 až 1831 působil jako mimořádný profesor matematiky na univerzitě v Bonnu, v letech 1832 až 1834 jako řádný profesor matematiky na univerzitě v Berlíně. Od roku 1836 až do své smrti zastával místo řádného profesora matematiky a fyziky na univerzitě v Bonnu. Ačkoliv jeho nejvýznamnější práce spadají do oblasti matematiky, sám se považoval spíše za experimentálního fyzika. Věnoval se krystalomagnetismu a spektrální teorii. V roce 1859 objevil katodové paprsky, jež vznikají ve výbojové trubici za sníženého tlaku.

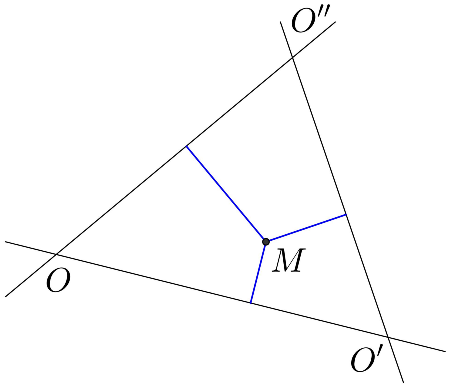
[28] Viz Journal für die reine und angewandte Mathematik 5(1830), 1–36.

[29] Viz Plücker J., *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, Zweiter Band, G. D. Baedeker, Essen, 1831, 293 stran.

popsat také přímky a roviny. Uvažoval speciální případ trilineárních souřadnic, který odpovídá situaci, kdy se jedna strana trojúhelníku stane přímkou v nekonečnu. Tyto souřadnice (x_1, x_2, x_3) získáme z obvyklých kartézských souřadnic (x, y) substitucí

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Rovnice každé křivky je pak homogenní v souřadnicích (x_1, x_2, x_3).



Obr. 26: Trilineární souřadnice

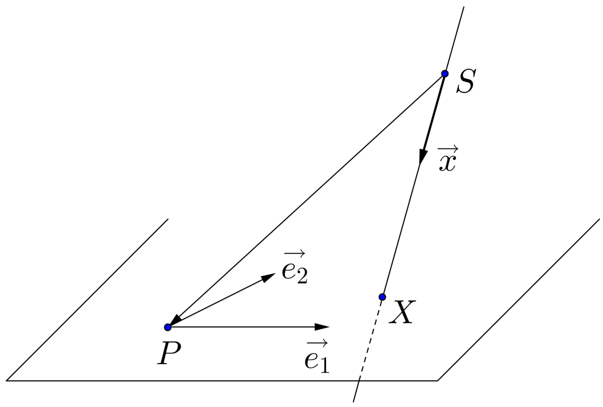
Homogenní souřadnice umožnily J. Plückerovi algebraicky charakterizovat nekonečně vzdálené (nevlastní) a imaginární prvky (přímka v nekonečnu má v tomto homogenním souřadném systému rovnici $x_3 = 0$) a vedly k zavedení přímkových souřadnic. Má-li rovnice přímky tvar $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, představuje trojice čísel (u_1, u_2, u_3) tzv. přímkové souřadnice této přímky. Tuto rovnici můžeme chápat jednak jako podmínku, za níž proměnný bod (x_1, x_2, x_3) leží na pevně dané přímce určené souřadnicemi (u_1, u_2, u_3), jednak jako podmínku, za níž proměnná přímka určená souřadnicemi (u_1, u_2, u_3) prochází pevně daným bodem (x_1, x_2, x_3). Ze symetrie výrazu $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3$ tak J. Plücker analyticky odvodil platnost principu duality. Plückerovo jméno nese šest homogenních souřadnic $p_{ij} = x_iy_j - x_jy_i$ přímky v prostoru, která prochází body (x_i) a (y_i), ačkoliv je jako první zavedl H. G. Grassmann roku 1844 ve své knize *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*.

Na základě analytického přístupu v geometrii představil J. Plücker ještě jednu zcela původní myšlenku. Roku 1865 (podle některých zdrojů však již v roce 1829) poukázal na to, že geometrie nemusí být vystavena pouze na bodu jako základním prvku; přímky, roviny nebo kružnice lze rovněž užít jako základní prvky nějaké geometrie. Tato myšlenka vedla k prvním úvahám o dimenzi geometrie. Tento pojem byl zaveden jako počet nezávislých údajů, kterých je potřeba k popisu polohy základního prvku uvažované geometrie. Např. rovina je dvoudimenzionální, pokud uvažujeme za základní prvky body nebo přímky, neboť bod v rovině se zvolenou soustavou souřadnic je určen dvěma souřadnicemi, dvěma čísly, stejně jako přímka, jejíž polohu v rovině můžeme jednoznačně popsat pomocí úseků, které vytíná na obou souřadných osách. Na druhé straně je však rovina trojdimenzionální, pokud za základní prvky uvažujeme kružnice, k jejichž jednoznačnému popisu polohy jsou třeba tři údaje – souřadnice jejího středu a poloměr.

J. Plücker později zobecnil Möbiovu myšlenku barycentrických souřadnic ve své knize *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*,[30] v níž homogenní souřadnice zavedl jako souřadnice, které se vztahují k základnímu čtyřstěnu.

Současný přístup

Pro porovnání uveďme, že v dnešní době se homogenní souřadnice zavádějí tak, že se v rovině zvolí lineární soustava souřadnic – bod P (počátek) a dva lineárně nezávislé vektory $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$. Mimo danou rovinu se zvolí bod S (viz obr. 27).



Obr. 27: Homogenní souřadnice

Každá přímka procházející bodem S je kromě tohoto bodu jednoznačně určena nenulovým směrovým vektorem $\vec{x}$; tento vektor lze zapsat jako lineární kombinaci vektorů $P - S$, $\vec{e_1}$ a $\vec{e_2}$:

$$\vec{x} = x_0(P - S) + x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2} \,.$$

Při hledání průsečíku $X = [x, y]$ přímky s danou rovinou pak řešíme rovnici

$$P + x \vec{e_1} + y \vec{e_2} = S + t \left[x_0(P - S) + x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2} \right],$$

neboli

$$P - S + x \vec{e_1} + y \vec{e_2} = tx_0(P - S) + tx_1 \vec{e_1} + tx_2 \vec{e_2} \,.$$

Protože vektory $P - S$, $\vec{e_1}$ a $\vec{e_2}$ jsou lineárně nezávislé, musí být splněny následující podmínky:

$$1 = tx_0, \quad x = tx_1, \quad y = tx_2.$$

Je-li x_0 nenulové, získáme jako průsečík vlastní bod $X = \left[\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right]$, je-li x_0 rovno nule, má uvažovaná přímka s danou rovinou společný nevlastní bod, neboli směr $x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2}$. Trojici čísel (x_0, x_1, x_2) nazýváme homogenní souřadnice (vlastního nebo nevlastního) bodu projektivní roviny; jsou určeny až na násobek libovolnou nenulovou konstantou. Dá se ukázat, že Möbiovy barycentrické souřadnice jsou jejich speciálním, limitním případem, kdy vztažný bod S uvažujeme v nekonečnu.

[30] Viz Plücker J., *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*, Erste Abtheilung, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1868, 226 stran, Zweite Abtheilung, Herausgegeben von Felix Klein, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1869, str. 227–378.

2.4 Geometrické transformace

Celá kniha *Der barycentrische Calcul* je rozdělena do tří tematických částí. První část (9 kapitol, str. 3–178) připomíná pojem těžiště a jeho vlastnosti a zavádí novou metodu barycentrického počtu pro určení polohy bodů. Dále se zabývá vyjádřením přímek, rovin, křivek (rovinných i prostorových) a ploch v těchto nových souřadnicích a převodem mezi barycentrickými a kartézskými souřadnicemi. Druhá část (8 kapitol, str. 179–368) se věnuje geometrickým transformacím, třetí část (5 kapitol, str. 369–454) se týká kuželoseček.

V následujících odstavcích se zaměříme na Möbiův přístup ke geometrickým transformacím a připomeneme jeho stěžejní myšlenky. V *Barycentrickém počtu* představil obecný koncept geometrické transformace, zaměřil se na vyšetřování transformací zprostředkujících přechod od jednoho geometrického útvaru k druhému. Geometrickou transformaci, tj. vzájemně jednoznačné zobrazení mezi dvěma objekty prostoru, nazýval termínem *Verwandtschaft* (příbuznost).[31] Základní „geometrické příbuznosti“ byly tehdy všestranně studovány, a proto se brzy objevila otázka jejich klasifikace, jíž se A. F. Möbius ve své knize zabýval.

V předmluvě nejprve popsal, jak v něm velké možnosti barycentrických souřadnic podnítily zájem o studium geometrických příbuzností. To ho vedlo ke zkoumání vztahů mezi dvěma geometrickými útvary, a tak „vznikla druhá část jeho knihy pojednávající o geometrických příbuznostech jako o nauce, která v sobě zahrnuje základy veškeré geometrie a která by byla jednou z nejobtížnějších, kdyby měla být zpracována v plné obecnosti a do všech důsledků“. Poukázal přitom na skutečnost, že v dané době se pozornost soustředí pouze na nejjednodušší typy geometrických příbuzností, speciálně na ty, které mají své využití v elementární geometrii.

> *Zugleich aber wurde ich dadurch bewogen, noch mehrere dergleichen Beziehungen zwischen Figuren auszumitteln, und somit entstand der zweite Abschnitt meines Buchs, welcher von den geometrischen Verwandtschaften handelt, einer Lehre, welche in dem hier gebrauchten Sinne die Grundlage der ganzen Geometrie in sich fasst, die aber auch eine der schwierigsten seyn möchte, wenn sie in völliger Allgemeinheit und erschöpfend vorgetragen werden soll. Im Gegenwärtigen sind nur die einfachsten Arten der Verwandtschaften betrachtet worden, diejenigen nämlich, welche auch in der niedern Geometrie in Anwendung kommen können.* ([M2], str. x)

V předmluvě též uvedl následující typy geometrických příbuzností: shodnost (*die Gleichheit und Aehnlichkeit*),[32] podobnost (*die Aehnlichkeit*), afinitu (*die Affinität*) a kolineaci (*die Collineation*), a vysvětlil jejich vzájemný vztah.[33]

[31] Jedná se nejspíše o německý překlad Eulerova označení *affinitas*.

[32] A. F. Möbius pro „shodné“ útvary i v první polovině 19. století stále užívá dřívější termín „shodné a podobné“. Termín „shodný“ (*gleich* = stejný, rovný) vyjadřující vztah mezi dvěma útvary používal ve smyslu „rovnoplochý“. Viz [M2], str. 213: *Zwei Dreiecke pflegt man einander gleich zu nennen, wenn sie einerlei Flächeninhalt haben.*

[33] Termín *afinita* zavedl L. Euler v díle *Introductio in analysin infinitorum* z roku 1748. Označení *kolineace* použil A. F. Möbius z podnětu svého přítele, filologa Benjamina Gottholda Weiskeho (1788–1842).

Von diesen Aufgaben schein man bisher bloss diejenigen gekannt zu haben, welche aus der Gleichheit und Aehnlichkeit, als der einfachsten Verwandtschaft, ihren Ursprung ziehen ... Die Aufgaben, zu denen die Aehnlichkeit allein führt, sind hiervon nicht wesentlich unterschieden. Wohl aber gelangt man zu Aufgaben ganz anderer Art durch die Affinität und durch die Gleichheit, welche letztere eine eben so specielle Art von der Affinität ist, als die Gleichheit und Aehnlichkeit von der Aehnlichkeit allein. Noch andere Aufgaben endlich bietet die noch allgemeinere Verwandtschaft der Collineation dar.

([M2], str. x–xi)

Shodnost a podobnost se podle A. F. Möbia podstatně neliší; toto tvrzení odpovídá vlastnostem tzv. hlavní grupy pozdějšího Erlangenského programu.[34] Obecnější jsou afinity, které zahrnují shodnosti a podobnosti jako zvláštní případy – to odpovídá vztahu mezi afinní a hlavní grupou. Ještě obecnější jsou kolineace. Také zde A. F. Möbius předjímal, přirozeně bez užití termínu grupa a bez výslovného grupového uvažování, začlenění afinní geometrie do geometrie projektivní.

Barycentrický počet obsahuje mnoho původních výsledků z oblasti afinní a projektivní geometrie. Barycentrické souřadnice umožnily A. F. Möbiovi popsat celou řadu afinních a projektivních vlastností dvou- a třídimenzionálních objektů. Proto významnou část své práce věnoval afinním a projektivním transformacím, které poprvé zapisoval analyticky v barycentrických souřadnicích.[35] Uvažoval obecně všechny spojité transformace roviny, které zachovávají linearitu, tj. přímky zobrazují opět na přímky. Zvláštní pozornost pak věnoval několika speciálním typům lineárních transformací – shodnostem, které navíc zachovávají délky úseček, podobnostem, které zachovávají tvary objektů, afinitám, které zachovávají rovnoběžnost, a kolineacím, které zachovávají kolineárnost bodů.

Shodné útvary definoval A. F. Möbius jako takové útvary, u nichž vzájemné vzdálenosti mezi každými dvěma body jednoho útvaru a odpovídajícími body druhého útvaru jsou stejné. Vlastní podobnost pak nepřesně přiblížil jako vztah mezi dvěma útvary, z nichž jeden lze chápat jako „opakování druhého útvaru ve větším nebo menším měřítku“; přesněji řečeno jako zobrazení, které zachovává poměr vzdáleností mezi body jednoho útvaru a odpovídajícími body druhého útvaru.

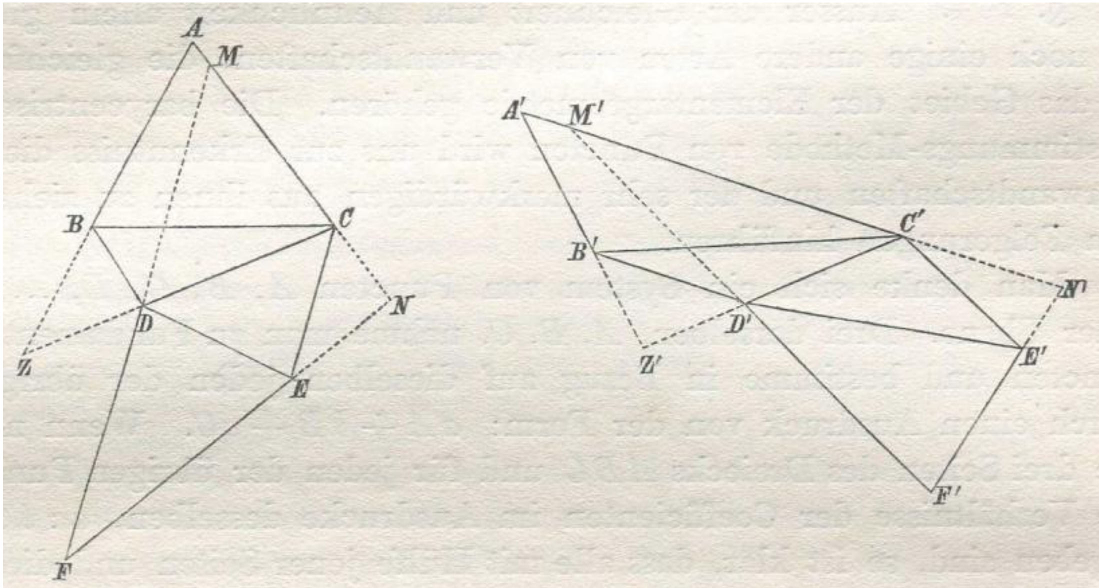
Wenn in zwei Figuren jedem Punkte der einen Figur ein Punkt der andern entspricht, dergestalt, dass der gegenseitige Abstand je zweier Punkte der einen Figur dem gegenseitigen Abstande der entsprechenden Punkte in der andern Figur gleich ist, so sind die Figuren einander gleich und ähnlich. ... Weniger einfach und von grösserer Ausdehnung ist die blosse Aehnlichkeit. Hier kann man die eine Figur als eine Wiederholung der andern nach einem grössern oder kleinern Maßstabe betrachten, oder bestimmter: Zwei Figuren sind einander ähnlich, wenn die gegenseitigen Abstände je zweier Punkte der einen

[34] O Erlangenském programu podrobně pojednává kapitola 4 této disertační práce.
[35] Projektivní transformace lze vyjádřit jako lineární transformace barycentrických souřadnic.

Figur in denselben Verhältnissen zu einander stehen, als wie die Abstände der entsprechenden Punkte in der andern.

([M2], str. 181, 187)

Kromě shodnosti a podobnosti A. F. Möbius podrobně vyšetřoval afinitu. Toto zobrazení přiblížil s využitím barycentrických souřadnic. Jsou-li v rovině dány tři nekolineární body A, B, C (*die Fundamentalpunkten*), lze každý bod roviny ABC vyjádřit jako nějakou jejich lineární kombinaci $aA + bB + cC$, kde a, b, $c \in \mathbb{R}$. Nechť bodům A, B, C jednoho útvaru odpovídají po řadě body A', B', C' druhého útvaru (viz obr. 28). Potom libovolnému bodu $D = aA + bB + cC$ odpovídá ve stejném zobrazení bod $D' = aA' + bB' + cC'$, jenž A. F. Möbius našel následujícím způsobem: Sestrojil průsečík Z přímek AB a CD, úsečku $A'B'$ prodloužil za bod B' a našel na jejím prodloužení bod Z' tak, aby pro délky úseček platila rovnost poměrů $|A'B'| : |B'Z'| = |AB| : |BZ|$. Dále sestrojil úsečku $C'Z'$ a našel na ní bod D' tak, aby platilo $|C'D'| : |D'Z'| = |CD| : |DZ|$.



Obr. 28: Afinita v Möbiově *Barycentrickém počtu*
(viz [BKS], Fig. 29, str. 178)

Analyticky lze uvažované afinní zobrazení popsat následujícím způsobem. Nechť A, B, C, P a A', B', C', P' jsou dvě čtveřice navzájem si odpovídajících bodů dvou útvarů; bodu $P = pA + qB + rC$ odpovídá bod $P' = pA' + qB' + rC'$, kde p, q, $r \in \mathbb{R}$. Zvolíme-li soustavu souřadnic tak, že přímka CA bude osou x a přímka CB bude osou y, má bod P vzhledem k této soustavě souřadnice

$$x = \frac{p}{p+q+r}\,|CA|\ , \quad y = \frac{q}{p+q+r}\,|CB|\ .$$

Analogicky zvolíme u druhého útvaru soustavu souřadnic tak, že osou x bude přímka $C'A'$ a osou y přímka $C'B'$. Potom souřadnice bodu P' vzhledem k takto zvolené soustavě souřadnic lze vyjádřit ve tvaru

$$x' = \frac{p}{p+q+r}\,|C'A'|\ , \quad y' = \frac{q}{p+q+r}\,|C'B'|\ ,$$

neboli platí

$$x' = \frac{|C'A'|}{|CA|}\,x\,, \quad y' = \frac{|C'B'|}{|CB|}\,y\,.$$[36]

V dalším odstavci odkázal na Eulerovu práci *Introductio in analysin infinitorum* pojednávající o výše uvedeném vzájemném vztahu mezi dvěma útvary. A. F. Möbius převzal Eulerovo označení *afinita*, část textu z jeho knihy dokonce ocitoval.

> *Von einer solchen gegenseitigen Beziehung der Figuren hat schon Euler gehandelt. ... Der von Euler hier aufgestellte Begriff der Affinitas ist also ganz mit dem vorhin entwickelten einerlei, und ich will daher gleichfalls diese allgemeinere Verwandtschaft Affinität, und Figuren, zwischen denen sie statt findet, affine Figuren nennen.*
> ([M2], str. 194–195)

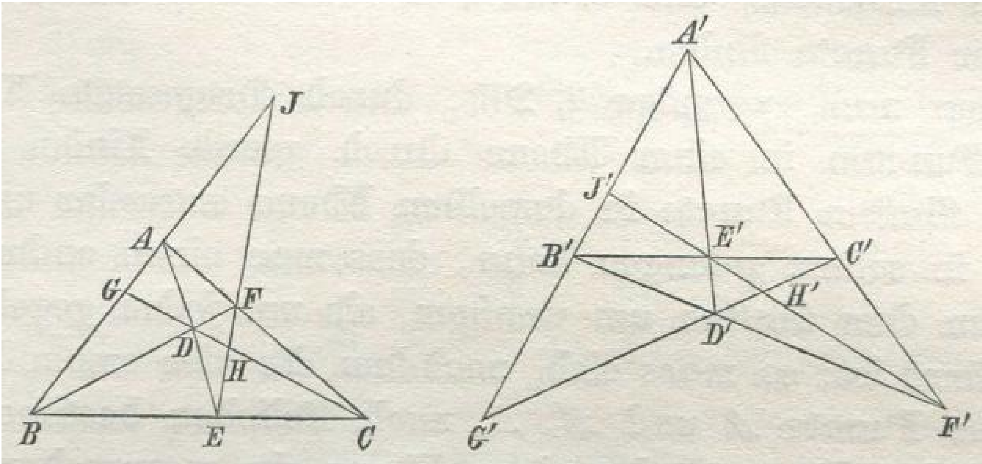
V následujícím textu své úvahy o afinitách analogicky rozšířil i na trojrozměrné útvary. Navíc mimo jiné ukázal, že se při afinních transformacích zachovávají poměry orientovaných délek, obsahů i objemů.

Dva geometrické útvary mohou být navzájem ještě v obecnějším vztahu, než je afinita. Takové „nejobecnější“ zobrazení A. F. Möbius nazval *kolineace* a definoval je jako zobrazení, které kolineární body zobrazí opět na kolineární body.

> *Das Wesen dieser neuen Verwandtschaft besteht also darin, dass bei zwei ebenen oder körperlichen Räumen, jedem Punkte des einen Raums ein Punkt in dem andern Raume dergestalt entspricht, dass, wenn man in dem einen Raume eine beliebige Gerade zieht, von allen Punkten, welche von dieser Geraden getroffen werden (collineantur), die entsprechenden Punkte in dem andern Raume gleichfalls durch eine Gerade verbunden werden können. Es ist deshalb diese Verwandtschaft die Verwandtschaft der Collineation genannt worden. Figuren, zwischen denen sie statt findet, heissen collinear verwandte, oder schlechthin collineare Figuren.* ([M2], str. 302)

Dále ukázal, že kolineace roviny je jednoznačně určena čtyřmi body, z nichž žádné tři nejsou kolineární, a jejich předepsanými obrazy, z nichž opět žádné tři nejsou kolineární. Nechť bodům A, B, C, D odpovídají v uvažované kolineaci po řadě body A', B', C', D' (viz obr. 29). Potom každému bodu přímky AD odpovídá určitý bod přímky $A'D'$, každý bod přímky BC má svůj jednoznačný obraz na přímce $B'C'$ atd. Proto průsečíku přímek AD a BC, jenž je na obr. 29 označen jako bod E, musí odpovídat průsečík přímek $A'D'$ a $B'C'$, tj. bod E'. Analogicky lze tímto postupem získat další dvojice odpovídajících si bodů; s využitím nově získaných dvojic bodů lze tento proces opakovat do nekonečna.

[36] Poznamenejme, že v originále je na tomto místě překlep; souřadnice y' je zapsána ve tvaru $y' = \frac{|C'B'|}{|CB|}\,x$. Viz [M2], str. 194.

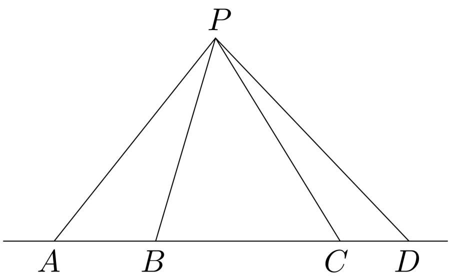


Obr. 29: Kolineace v Möbiově *Barycentrickém počtu*
(viz [BKS], Fig. 49, str. 267)

A. F. Möbius dospěl jako první k ucelené teorii dvojpoměru čtyř kolineárních bodů (v originále *das Doppelschnittsverhältniss* (*ratio bissectionalis*)) a k důkazu skutečnosti, že dvojpoměr je invariantní při projektivních transformacích.[37] Mimo jiné ukázal, že dvojpoměr čtyř kolineárních bodů A, B, C, D lze vyjádřit jako poměr

$$\frac{\sin APB}{\sin APC} : \frac{\sin BPD}{\sin CPD},$$

kde P je libovolný bod roviny neležící na uvažované přímce (viz obr. 30).



Obr. 30: Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů

V *Barycentrickém počtu* je na konci druhé části věnované transformacím v rámci závěrečných poznámek obsažena následující algebraická charakteristika geometrických příbuzností (viz tab. 1). Pro každou ze čtyř základních geometrických příbuzností (shodnost, podobnost, afinita, kolineace) je v tabulce uveden přesný počet nezávislých údajů, které je třeba zadat pro soustavu n bodů, aby bylo možno určit jejich obrazy při daném zobrazení; sloupce I, II, III odpovídají postupně případům, kdy zadané body leží v jedné přímce, resp. v jedné rovině, resp. v jednom prostoru.

[37] Viz [M2], Zweiter Abschnitt, Fünftes Capitel: *Die Doppelschnittsverhältnisse*, str. 243–265.

	I.	II.	III.
Gleichheit und Aehnlichkeit	$n-1$	$2n-3$	$3n-6$
Aehnlichkeit	$n-2$	$2n-4$	$3n-7$
Affinität	$n-2$	$2n-6$	$3n-12$
Collineation	$n-3$	$2n-8$	$3n-15$

Tab. 1: Algebraická charakteristika geometrických příbuzností (upraveno podle [M2], str. 364)

Pokusíme se vysvětlit, jak byly získány alespoň některé výsledky z výše uvedené tabulky. Uvažujme soustavu n bodů A, B, C, D, $\ldots$, které leží v jedné přímce. Při konstrukci shodné soustavy bodů ležících na nějaké přímce lze obraz A' bodu A zvolit zcela libovolně. Obraz B' bodu B je pak určen na základě vzdálenosti bodů A, B; musí platit rovnost $|A'B'| = |AB|$. Není přitom podstatné, na kterou stranu od bodu A' bod B' na danou přímku umístíme. Také další obraz C' bodu C musí vyhovovat rovnosti $|A'C'| = |AC|$, jeho poloha je však tentokrát určena již jednoznačně – umístíme jej buď na stejnou, nebo na opačnou stranu od bodu A' jako bod B', podle toho, zda body B a C leží na stejné polopřímce s počátečním bodem A, či nikoliv. Je tedy zřejmé, že po umístění obrazu A' prvního bodu je pro nalezení obrazu každého ze zbylých $n-1$ bodů zapotřebí znát jeho vzdálenost od bodu A. Ke konstrukci celé soustavy obrazů je tak třeba zadat celkem $n-1$ údajů.

Pokud body A, B, C, D, $\ldots$ nejsou kolineární, ale leží v jedné rovině, lze polohu bodu A' v uvažované rovině opět zvolit libovolně. Bod B' pak musí ležet ve vzdálenosti $|AB|$ od bodu A', tj. je libovolným bodem kružnice se středem v bodě A' a poloměrem $|AB|$; tuto kružnici označíme $k(A'; |AB|)$. Bod C' pak najdeme jako jeden (libovolný) z průsečíků kružnic $k(A'; |AC|)$ a $k(B'; |BC|)$. Bod D' musí být průsečíkem kružnic $k(A'; |AD|)$ a $k(B'; |BD|)$ – tentokrát však zvolíme ten z obou průsečíků, který leží buď ve stejné, nebo v opačné polorovině určené přímkou $A'B'$ jako bod C', podle toho, zda body C a D leží ve stejné polorovině určené přímkou AB, či nikoliv. Obecně pro soustavu n bodů tedy platí: Po umístění obrazu prvního bodu je k určení obrazu druhého bodu zapotřebí jeden údaj (jedna vzdálenost). Nalezení obrazu každého ze zbylých $n-2$ bodů pak vyžaduje znalost dvou údajů (dvou vzdáleností), čili celkem je třeba zadat $1+2(n-2) = 2n-3$ údajů. Analogicky pro body trojrozměrného prostoru, které nejsou ani kolineární, ani komplanární, získáme $1+2+3(n-3) = 3n-6$ údajů (vzdáleností) potřebných pro konstrukci shodné soustavy bodů.

Ke konstrukci podobné soustavy bodů ležících jak na přímce, tak v rovině nebo v prostoru bude zapotřebí vždy právě o jeden údaj méně než v případě shodnosti, neboť u podobnosti postačí znát pouze poměry jedné z výše uvedených vzdáleností k ostatním vzdálenostem.

Konstrukce afinního obrazu v případě n bodů v rovině bude probíhat následujícím způsobem. Prvním třem bodům A, B, C lze obrazy A', B', C' předepsat libovolně. Dalšímu bodu D však již musíme přiřadit bod D' tak, aby zůstaly zachovány poměry obsahů trojúhelníků:

$$D'B'C' : D'C'A' = DBC : DCA, \quad D'C'A' : D'A'B' = DCA : DAB.$$

Tato dvojitá podmínka musí platit pro každý ze zbylých $n-3$ bodů, proto celkový počet potřebných údajů je roven $2(n-3) = 2n-6$. Ostatní údaje z tabulky již ponecháme bez komentáře.

A. F. Möbius v pozdějších letech některé základní myšlenky o geometrických transformacích dále rozvedl a rozšířil na další „příbuznosti“. Jako první uvažoval obecné projektivní transformace prostoru, které bodům přiřazují roviny, spec. kolineární body zobrazují do koaxiálních rovin, tj. do svazku rovin. Takové transformace nazýval *korelace* – použil termín, jenž zavedl L. N. Carnot. V roce 1858 se obrátil k úvahám o tzv. elementárních příbuznostech (homeomorfismech), které jsou ještě obecnější než kolineace. Tyto úvahy dnes spadají do oblasti topologie.

V první polovině 19. století se poprvé objevily významnější úvahy týkající se vícerozměrné geometrie. A. F. Möbius v této souvislosti v *Barycentrickém počtu* poukázal na skutečnost, že geometrické objekty, které nelze vzájemně zobrazit na sebe v trojrozměrném prostoru, neboť jsou svými zrcadlovými obrazy, by mohly být na sebe zobrazeny ve čtyřrozměrném prostoru. Dále však tuto myšlenku zamítl a uvedl, že toto zobrazení není možné, neboť takový prostor nelze uvažovat.

> *Zur Coincidenz zweier sich gleichen und ähnlichen Systeme im Raume von drei Dimensionen: $A, B, C, D, \ldots$, und $A', B', C', D', \ldots$, bei denen aber die Punkte $D, E, \ldots$ und $D', E', \ldots$ auf ungleichnamigen Seiten der Ebenen ABC und $A'B'C'$ liegen, würde also, der Analogie nach zu schliessen, erforderlich seyn, dass man das eine System in einem Raume von vier Dimensionen eine halbe Umdrehung machen lassen könnte. Da aber ein solcher Raum nicht gedacht werden kann, so ist auch die Coincidenz in diesem Falle unmöglich.*
>
> ([M2], str. 185)

Nové algebraické metody obsažené v *Barycentrickém počtu* umožňují obecné řešení některých fundamentálních problémů, jako je určení kuželosečky procházející danými body, resp. dotýkající se daných přímek. A. F. Möbius nalezl racionální parametrické reprezentace kuželoseček, jako jeden z prvních matematiků studoval křivky třetího stupně v trojrozměrném prostoru a jejich vlastnosti. Jedním z jeho nejzajímavějších numerických výsledků týkajících se kuželoseček je teorém, podle něhož pravděpodobnost, že pět náhodně zvolených bodů projektivní roviny leží na hyperbole, je nekonečně větší než pravděpodobnost, že tyto body leží na elipse; poměr určený úvahami je odmocnina z nekonečna ku jedné.

... weil die Fläche einer sich in das Unendliche erstreckenden Parabel sich zu der unendlichen Ebene, in welcher sie liegt, wie eine endliche Grösse zu $\sqrt{\infty}$ verhält, so kann man immer die Quadratwurzel aus dem Unendlichen gegen ein Endliches wetten, dass fünf in einer Ebene willkührlich genommene Punkte eher in einer Hyperbel, als in einer Ellipse liegen. ([M2], str. 383)

A. F. Möbiovi se za jeho práci v oblasti geometrie dostalo uznání dvou velkých matematiků. Carl Friedrich Gauss označil Möbiův nový, jednotící pohled na geometrii jako jednu z nejrevolučnějších intuicí v historii matematiky. Barycentrický počet umístil na stejnou úroveň jako svoji teorii kongruencí, jako diferenciální počet a Lagrangeův variační počet. Také Felix Klein (1849–1925) (spoluvydavatel Möbiových sebraných spisů) ocenil Möbiův přínos ke klasifikaci geometrie, označil ho za svého předchůdce.

Wenn auch Moebius noch nicht den modern formulierten Gruppenbegriff besitzt, so bietet doch der Begriff der „Verwandtschaft" ein Äquivalent; Moebius wird dadurch genau zu einem Vorläufer des „Erlanger Programms". ([K9], Teil I, str. 118)

F. Klein považoval za vhodné uvést tuto skutečnost dodatečně i v samotném Erlangenském programu. V jednom z pozdějších vydání připsal do původní verze z roku 1872 tři nové poznámky pod čarou. Poslední z nich, zařazená na úplný závěr textu, odkazuje na Möbiovy geometrické úvahy, jež odpovídají základní myšlence Erlangenského programu.

Im übrigen verweise ich gern noch, indem ich diesen Wiederabdruck des Erlanger Programms abschließe, auf die Arbeiten von Moebius (die ich selbst erst nach ihrem inneren Zusammenhang erfaßte, nachdem ich bei der von der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften in den Jahren 1885–1887 veranstalteten Gesamtausgabe seiner Werke mitwirken durfte). Moebius hat den allgemeinen Gruppenbegriff und auch viele der geometrischen Transformationen, die zu seiner Illustration im Erlanger Programm herangezogen werden, noch nicht gekannt, aber er hat, von einem sicheren Gefühl geleitet, seine aufeinanderfolgenden geometrischen Arbeiten genau so eingerichtet, wie es dem Grundgedanken des Programms entspricht. Schon im Mittelabschnitt seines Baryzentrischen Kalkuls (1827) ordnet er die „geometrischen Aufgaben" nach den „Verwandtschaften" der „Gleichheit" (Kongruenz), „Ähnlichkeit", „Affinität" und „Kollineation". ([K8], str. 497)

V první polovině 19. století však většina původních myšlenek *Barycentrického počtu*, kromě zavedení barycentrických souřadnic, zůstala bez větší odezvy. S Möbiovými výsledky se v plném rozsahu seznámilo pouze několik špičkových matematiků. Michael J. Crowe v této souvislosti napsal:

Möbius' highly original and well-presented work was well received, with Cauchy, Jacobi, Dirichlet, Steiner, Plücker, and Gauss all taking some interest in it. However his methods never attained widespread use, and no second edition of the work appeared ... ([Cw], str. 50)

Plného uznání a všeobecného přijetí se Möbiovu životnímu dílu v geometrii dostalo až později. Nedostatek formálního, zejména algebraického aparátu, kterým byly teorie grup a teorie invariantů, neumožnil A. F. Möbiovi uskutečnit zamýšlenou klasifikaci geometrie. K tomu dospěl až F. Klein ve svém Erlangenském programu (1872), o němž bude pojednáno v samostatné kapitole.

3. Cremonovy transformace

Národní obrození Itálie (italské *Risorgimento*) v letech 1848 až 1860 znamenalo též obrození italské matematiky. Řada matematiků se v této době zapojila do bojů proti rakouské nadvládě a přispěla k italské nezávislosti vedoucí až ke sjednocení Itálie po roce 1860. Jedním z aktivních účastníků války za italskou svobodu byl Luigi Cremona, matematik, jenž položil základy teorie biracionálních transformací projektivního prostoru. Tyto transformace, jež jsou po něm pojmenovány, mají velký význam v algebraické geometrii.

Od 60. let 19. století se velká pozornost v matematice soustředila zejména na studium algebraických křivek. Objevovaly se snahy složitější křivky nejprve transformovat s cílem zjednodušit popis jejich vlastností a vzájemných poloh. K tomu lze velmi dobře využít právě biracionální transformace, neboť umožňují zmenšit míru singularity dané křivky. Cremonovy transformace se však brzy z pomocného nástroje staly samostatným objektem matematického zkoumání a podnítily rozvoj nové ucelené oblasti algebraické geometrie. Věnujme se proto nejprve jejich autorovi.

Cremonovy životní osudy jsou podrobně popsány v několika publikacích.[1] Připomeneme proto jen základní životopisné a bibliografické údaje, které nám umožní zařadit jeho práce a výsledky do dobového i odborného kontextu.

3.1 Luigi Cremona

Luigi Cremona[2] se narodil 7. prosince 1830 v Pavii (Lombardie, dnešní Itálie) jako nejstarší ze čtyř dětí právníka Gaudenzia Cremony. Z jeho sourozenců se dospělého věku dožil pouze bratr Tranquillo Cremona (1837–1878), významný italský malíř, další bratr a sestra zemřeli v raném mládí. L. Cremona absolvoval s výborným prospěchem gymnázium v Pavii, poté ho politické události revolučního roku 1848 přiměly další studia přerušit. Jako vášnivý italský vlastenec se aktivně zapojil do hnutí za svobodnou Itálii. Zúčastnil se mimo jiné ozbrojené obrany Benátek před vpádem rakouského vojska, a ačkoliv 24. srpna 1849 Italové rakouskému vojsku podlehli, mohli město opustit se ctí. L. Cremona se poté vrátil do Pavie a na tamní univerzitě vystudoval pozemní stavitelství a architekturu. Z profesorů ho nejvíce ovlivnil Francesco Brioschi (1824–1897).

V srpnu 1854 se L. Cremona oženil s Elisou Ferrari, která v té době působila jako ředitelka mateřské školy v Gênes.[3] Společně vychovali tři děti, syna Vittoria a dcery Elenu a Italu.

[1] Např. [Bt], [Lo2], [LC] a [Pr], str. 116–143; relevantní informace poskytuje i webová stránka http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Cremona.html.

[2] Celým jménem Antonio Luigi Gaudenzio Giuseppe Cremona.

[3] L. Cremona se s Elisou Ferrari „seznámil“ prostřednictvím dopisů, jež Elisa posílala svému bratrovi Nicolovi Ferrari, který se společně s L. Cremonou zúčastnil v letech 1848 až 1849 boje proti rakouské nadvládě.

V této době došlo ke změně vlády v Piemontu. Nová vláda pod vedením Camilla Benso di Cavoura[4] iniciovala sjednocení Itálie, avšak Lombardie zůstávala stále pod nadvládou Rakouska. L. Cremona, který proti rakouské okupaci bojoval se zbraní v ruce, tak neměl šanci získat oficiální učitelské místo, a proto působil jako soukromý učitel u několika rodin v Pavii. Přitom se věnoval matematickému bádání a v září 1855 sepsal svůj první článek *Sulle tangenti sfero-coniugate*,[5] který zřejmě ovlivnil jeho další působení. Rozhodnutím ze dne 22. listopadu 1855 získal povolení učit na přechodnou dobu fyziku na gymnáziu, kde sám dříve studoval. V květnu 1856 sepsal další matematický článek *Intorno ad un teorema di Abel*,[6] který mu spolu s pověstí výborného učitele umožnil získat dne 17. prosince 1856 místo mimořádného profesora na gymnáziu v Pavii. O měsíc později, dne 17. ledna 1857, byl jmenován řádným profesorem na gymnáziu v Cremoně, kde setrval necelé tři roky.

Cremonovo působení na obou školách však nebylo nijak jednoduché. Jeho pozice na gymnáziu v Pavii byla nejistá, na gymnáziu v Cremoně zase učil matematiku v šesti ročnících, což týdně obnášelo celkem 17 hodin. Navíc v této době stále chyběly kvalitní italsky psané učebnice, proto L. Cremona pro své žáky ve volných chvílích ještě sepisoval pomocné učební texty.

Roku 1859 se Itálie s pomocí Francie vymanila z rakouského vlivu,[7] Lombardie byla odstoupena a připojena k Piemontu. L. Cremona již proto nemusel z politických důvodů zůstávat v ústraní. Dne 28. listopadu 1859 nastoupil jako profesor na *Liceo S. Alessandro* v Miláně, dne 10. června 1860 byl na základě královského výnosu jmenován řádným profesorem vyšší geometrie na univerzitě v Bologni. Navzdory časově náročné výuce na gymnáziu L. Cremona ještě před svým jmenováním univerzitním profesorem publikoval 18 matematických prací věnovaných zejména studiu křivek pomocí metod projektivní geometrie.

Na univerzitě v Bologni setrval až do října 1867. Během této doby publikoval 45 prací[8] a rozvinul teorii biracionálních transformací, později známých jako tzv. *Cremonovy transformace*. Jeho nejvýznamnější práce věnované transformacím rovinných křivek pocházejí z let 1863 až 1865. Roku 1866 za ně získal tzv. Steinerovu cenu (*the Steiner Prize*).[9]

[4] Camillo Benso di Cavour (1810–1861), italský politik, zakladatel italské liberální strany, dne 4. listopadu 1852 byl zvolen předsedou vlády Piemontu. Stal se historicky prvním předsedou italské vlády, od 23. března do 7. června 1861 zastával funkci ministra zahraničních věcí a námořnictva. Byl autorem několika reforem, založil politické noviny *Il Risorgimento* (Turin, 1847). Zemřel necelé tři měsíce po vyhlášení spojeného italského království.

[5] Viz Annali di scienze matematiche e fisiche 6(1855), 382–392.

[6] Viz Annali di scienze matematiche e fisiche 7(1856), 99–105.

[7] Italská válka za nezávislost byla ukončena podepsáním míru ve Villafranca dne 11. července 1859. Spojené italské království bylo oficiálně vyhlášeno dne 17. března 1861.

[8] Dodejme, že mezi těmito pracemi je mimo jiné 16 článků věnovaných řešení úloh uveřejněných v časopise *Nouvelles Annales*, 8 knih přehledového charakteru a 4 historické články sepsané na podporu výzkumu v oblasti geometrie.

[9] Cena byla pojmenována na počest významného švýcarského matematika Jacoba Steinera (1796–1863), který se věnoval zejména syntetické a projektivní geometrii a většinu života vyučoval na berlínské univerzitě. Podle jeho poslední vůle měla být udělována Berlínskou akademií věd každé dva roky za nové výsledky v oblasti syntetické geometrie. Byla dotována částkou 24 000 německých marek, což v té době představovalo částku vyšší než byl průměrný roční

V říjnu 1867 byl L. Cremona na Brioschiho doporučení novým královským výnosem povolán přednášet vyšší geometrii na *Regio Istituto Tecnico Superiore di Milano* (nyní *Politecnico di Milano*), kde mu byl v listopadu 1872 udělen titul řádného profesora. Toto období je v jeho životě považováno za vysoce tvůrčí. Sepsal řadu původních článků věnovaných kuželosečkám, rovinným křivkám, rozvinutelným plochám, plochám třetího a čtvrtého stupně, projektivní geometrii i statice.

Roku 1873 bylo L. Cremonovi nabídnuto místo generálního tajemníka nově ustavené italské vlády. Ačkoliv si této nabídky jako oddaný italský vlastenec velmi vážil, odmítl ji, neboť se chtěl věnovat matematickému bádání. Dne 9. října 1873 přesídlil do Říma, kde byl královským výnosem jmenován ředitelem a profesorem nově založené školy *Scuola degli ingegneri in Roma*. Pokud doufal, že odmítnutí vstupu do politiky mu umožní pokračovat ve vědecké práci, brzy shledal, že ho administrativní a učitelské povinnosti, zejména řízení nové školy, plně zaměstnávají a na vlastní práci v matematice mu nezbývá skoro žádný čas. Proto souhlasil s návrhem, jehož autory byli Enrico Betti (1823–1892) a Ulisse Dini (1845–1918) a který podpořil také Eugenio Bertini (1846–1933), aby přešel na stolici vyšší geometrie na univerzitu v Pise. Avšak tehdejší ministr školství nechtěl přijít o Cremonovu spolupráci během jeho působení v Římě, proto se zasadil o to, aby byl v listopadu 1877 přijat na stolici vyšší matematiky na univerzitě v Římě.

L. Cremona však cítil, že by měl přeci jen vstoupit do politiky. Dne 16. března 1879 byl zvolen senátorem, a tím jeho matematické bádání skončilo. V následujících letech působil ve funkci ministra školství, jeho zásluhou byla projektivní geometrie v bohaté hodinové dotaci zařazena do výuky na italských vysokých školách matematicko-fyzikálního a technického zaměření. Svou politickou kariéru zakončil jako víceprezident senátu. Zemřel na infarkt 10. června 1903 v Římě.

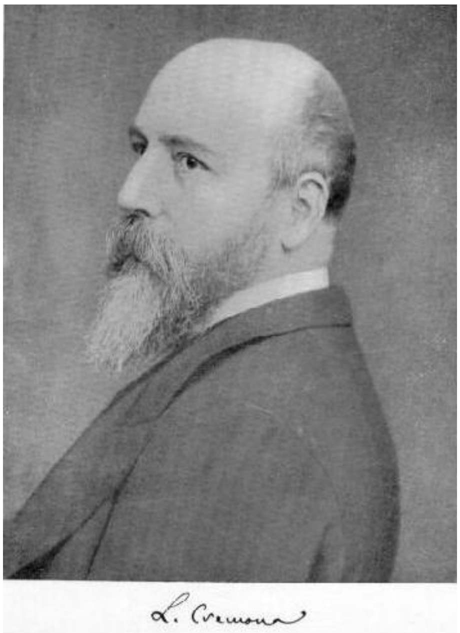
Během života se mu dostalo několika ocenění, byl členem řady vědeckých společností. V roce 1879 byl jmenován dopisujícím členem Královské společnosti v Londýně a roku 1883 členem Královské společnosti v Edinburghu. Dále byl generálním tajemníkem královské Lombardské akademie věd v Miláně, členem italské společnosti „čtyřiceti“, členem akademií a učených společností v Bologni, Neapoli, Göttingen, Lisabonu, Benátkách i v Praze, mimo jiné od roku 1871 prvním zahraničním čestným členem Jednoty českých mathematiků.

L. Cremona svými pracemi významně ovlivnil nejen italskou geometrii, byl jedním ze zakladatelů nové italské matematické školy. Měl pověst výborného přednášejícího, vychoval několik žáků, kteří se sami později úspěšně věnovali geometrii.[10] Je autorem více než stovky vědeckých prací. Věnoval se zejména projek-

příjem učitele. Poprvé byla udělena roku 1866, kdy ji získal L. Cremona společně s Rudolfem Sturmem (1841–1919), jenž se věnoval projektivní reprezentaci kubických ploch. L. Cremona tuto cenu obdržel ještě v roce 1874 jako ocenění vlastních geometrických výsledků. V některých letech cena udělena nebyla, neboť Berlínská akademie neobdržela žádné vyhovující práce. Od roku 1890 byla cena na návrh Leopolda Kroneckera (1823–1891) udělována jednou za pět let a bylo rozhodnuto, že v případě, že žádná z obdržených prací nebude shledána vyhovující, bude cena udělena významné práci z oblasti geometrie sepsané během posledních deseti let. Dodejme ještě, že roku 1900 byl jedním ze tří oceněných David Hilbert (1862–1943), který cenu získal za svou práci *Grundlagen der Geometrie* z roku 1899.

[10] Byli mezi nimi např. Eugenio Bertini, Giuseppe Veronese (1854–1917) a Giovanni Battista Guccia (1855–1914).

tivní a algebraické geometrii, diferenciálnímu a integrálnímu počtu. Odvodil mimo jiné vlastnosti projektivně sdružených útvarů, přepracoval a dokázal řadu tvrzení syntetické geometrie. Objevil navíc grafické metody řešení problémů statiky, tzv. *grafostatiky*. Své práce publikoval zejména v časopisech *Annali di scienze matematiche e fisiche* a *Annali di matematica pura ed applicata*. Druhý z časopisů, jenž v roce 1859 založil F. Brioschi, od roku 1867 pomáhal redigovat. Cremonovy články se objevily i v matematických časopisech ve Francii, Německu a Anglii, některé jeho významné práce byly přeloženy do dalších jazyků. Jmenujme jeho nejvýznamnější geometrické práce: *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*,[11] *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*[12] věnovaná Cremonovým transformacím, *Preliminari di una teoria geometrica della superficie*,[13] *Elementi di geometria projettiva*[14] a *Elementi di calcolo grafico*[15].



Obr. 31: Luigi Cremona

Podstatná část Cremonovy pozůstalosti zahrnující mimo jiné jeho pracovní i osobní korespondenci je uložena v Mazziniho institutu v Janově.[16] V souvislosti se studiem, podrobnou analýzou a tříděním dochovaných dokumentů byla

[11] Tipi Gamberini e Parmeggiani, Bologna, 1862, 128 stran; též viz Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna 12(1862), 305–436.

[12] Viz Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna 2(1863), 621–630, 5(1865), 3–35. Část I. též viz Annali di matematica pura ed applicata 6(1864), 153–168; nebo Giornale di matematiche 1(1863), 305–311. Část II. též viz Giornale di matematiche 3(1865), 269–280, 363–376.

[13] Tipi Gamberini e Parmeggiani, Bologna, 1866, 99 stran; též viz Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna 6(1867), 91–136, 7(1867), 29–78.

[14] G. B. Paravia e comp., Torino, 1873, 184 stran.

[15] Stamperia reale di G. B. Paravia e c., Torino, 1874, 77 stran.

[16] *Istituto Mazziniano di Genova*, fond *Legato Itala Cremona Cozzolino*. Otcovu pozůstalost janovskému institutu darovala Cremonova dcera Itala Cremona Cozzolino. Více viz Brigaglia A., Di Sieno S., *The Luigi Cremona Archive of the Mazzini Institute of Genoa*, Historia Mathematica 38(2011), 96–110; základní informace viz [Be3], str. 63–64.

v rámci výzkumného projektu zprovozněna webová stránka[17] obsahující soupis stěžejních příspěvků o Cremonově životě a díle, včetně odkazů na elektronické verze některých jeho prací.

3.2 Cremonovy (biracionální) transformace

Ve 2. polovině 19. století ve světě vrcholilo studium geometrických transformací, zájem matematiků se v této době obrátil k transformacím vyšších stupňů, speciálně se důraz kladl na tzv. biracionální transformace.

Biracionální transformací pro dvě nehomogenní souřadnice rozumíme transformaci ve tvaru

$$x' = \phi(x, y), \quad y' = \psi(x, y),$$

kde ϕ a ψ jsou racionální funkce proměnných x a y, které lze vyjádřit racionálními funkcemi proměnných x' a y'. V homogenních souřadnicích x_0, x_1 a x_2 mají biracionální transformace tvar

$$x'_i = F_i(x_0, x_1, x_2), \ \text{ pro } \ i = 0, 1, 2;$$

k nim inverzní transformace jsou pak tvaru

$$x_i = G_i(x'_0, x'_1, x'_2), \ \text{ pro } \ i = 0, 1, 2,$$

kde F_i a G_i jsou homogenní polynomy n-tého stupně v příslušných proměnných.[18]

Cremonovou transformací rozumíme každou biracionální transformaci projektivního prostoru nad tělesem K. Cremonovy transformace daného prostoru tvoří grupu, kterou nazýváme *Cremonovou grupou.* Z pohledu Kleinova Erlangenského programu[19] můžeme algebraickou geometrii jednoduše charakterizovat jako teorii invariantů algebraických křivek při biracionálních transformacích.

Nejjednodušším netriviálním příkladem Cremonovy transformace je kruhová inverze v rovině, která bodu X přiřazuje bod X' na přímce SX podle vztahu $|SX| \cdot |SX'| = r^2$, kde S je střed a r je poloměr zadané kružnice. Pokud zvolíme počátek soustavy souřadnic ve středu S dané kružnice a označíme-li $X = [x, y]$ a $X' = [x', y']$, získáme analytické vyjádření kruhové inverze ve tvaru

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Při kruhové inverzi se zobecněné kružnice (přímky nebo kružnice) zobrazí opět na zobecněné kružnice. Kruhová inverze byla první netriviální geometrickou transformací, která byla v souvislosti s biracionálními transformacemi studována.

[17] Viz http://www.luigi-cremona.it/.

[18] Termín *biracionální transformace* se někdy používá i v obecnějším smyslu, a to v případě, kdy transformace bodů nějaké křivky na jinou křivku je sice biracionální, ale není biracionální v celé rovině. Např. transformace $x' = x^2$, $y' = y$ není sice vzájemně jednoznačná v celé rovině, ale libovolnou křivku napravo od osy y zobrazuje na jinou křivku vzájemně jednoznačně.

[19] O Erlangenském programu je podrobně pojednáno v kapitole 4 této disertační práce.

Jiným příkladem Cremonových transformací jsou tzv. *kvadratické biracionální transformace roviny*, které lze v nehomogenních souřadnicích x, y vyjádřit jako lineární lomená zobrazení daná předpisem

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}, \quad y' = \frac{a_3x + b_3y + c_3}{a_4x + b_4y + c_4}.$$

Z nich je speciální pozornost věnována tzv. *standardní kvadratické transformaci*, kterou lze zapsat ve tvaru

$$x' = \frac{1}{x}, \quad y' = \frac{1}{y},$$

nebo v homogenních souřadnicích

$$x_0' = x_1x_2, \quad x_1' = x_0x_2, \quad x_2' = x_0x_1.$$

Jak kruhová inverze, tak kvadratické biracionální transformace roviny jsou transformacemi 2. stupně.[20] L. Cremona se ve své práci *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*[21] z let 1863 a 1865 zabýval problematikou konstrukce obecné geometrické transformace libovolného stupně, tj. řešil otázku, jak sestrojit transformaci, která přímky zobrazí obecně na křivky libovolného stupně. Při té příležitosti odvodil základní rovnice, které musí splňovat počty bodů společných všem takovým křivkám.

In questo breve scritto mi propongo di mostrare direttamente la possibilità di trasformazioni geometriche di figure piane, nelle quali le rette abbiano per corrispondenti delle curve di un dato ordine qualsivoglia. Stabilisco dapprima due equazioni che devono aver luogo fra i numeri de' punti semplici e multipli comuni a tutte le curve che corrispondono a rette. Poi dimostro come, per mezzo di raggi appoggiati a due linee direttrici, si possano projettare i punti di un piano sopra un secondo piano, e così trasformare una figura data in quello, in un'altra figura situata in questo.

Obr. 32: L. Cremona – *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*[22]

Uvažujme dva geometrické útvary, jeden v rovině P, druhý v rovině P', a mezi nimi vzájemně jednoznačnou transformaci, tj. transformaci, která každému bodu útvaru P přiřadí právě jeden bod útvaru P' a naopak. Zajímá nás, jaké křivky jednoho útvaru odpovídají při takovéto transformaci přímkám druhého útvaru.

Označme písmenem n stupeň křivky, která v útvaru P' odpovídá libovolné přímce útvaru P. Každá přímka útvaru P je jednoznačně určena dvěma body, proto je křivka n-tého stupně, která je jejím obrazem v uvažované transformaci,

---

[20] Stupněm transformace rozumíme stupeň křivky, na niž se při dané transformaci zobrazí obecná přímka.

[21] Viz Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna 2(1863), 621–630, 5(1865), 3–35. Část I. též viz Annali di matematica pura ed applicata 6(1864), 153–168; nebo Giornale di matematiche 1(1863), 305–311. Část II. též viz Giornale di matematiche 3(1865), 269–280, 363–376.

[22] Úryvek viz Giornale di matematiche 1(1863), str. 305.

jednoznačně určena obrazy těchto dvou bodů. Křivky útvaru P' odpovídající přímkám útvaru P tedy tvoří geometrickou síť n-tého stupně (libovolnými dvěma body útvaru P' prochází jediná křivka).

Křivka n-tého stupně je obecně určena $\frac{n(n+3)}{2}$ nezávislými podmínkami. Křivky útvaru P' příslušející přímkám útvaru P tedy musí splňovat $\frac{n(n+3)}{2} - 2 = \frac{(n-1)(n+4)}{2}$ společných podmínek. Dvě přímky útvaru P mají společný právě jeden bod (v případě rovnoběžných přímek uvažujeme nevlastní bod), jeho obraz tak bude průsečíkem jim odpovídajících křivek n-tého stupně. Dvě křivky n-tého stupně však mají obecně společných n^2 bodů (včetně násobnosti), z čehož plyne, že zbývajících $n^2 - 1$ průsečíků těchto křivek musí být společných všem křivkám uvažované sítě.

Označme symbolem x_r počet r-násobných bodů společných všem křivkám uvažované sítě. Protože r-násobný, dvěma křivkám společný bod zastupuje r^2 jednoduchých průsečíků, musí platit

$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + \ldots + (n-1)^2\, x_{n-1} = n^2 - 1. \tag{1}$$

Body společné všem křivkám sítě, jejichž počet je $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1}$, tak představují výše uvedených $\frac{(n-1)(n+4)}{2}$ společných podmínek. Přitom r-násobný bod má při určování algebraických křivek hodnost $\frac{r(r+1)}{2}$ jednoduchých podmínek. Musí proto platit

$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\, x_{n-1} = \frac{(n-1)(n+4)}{2}. \tag{2}$$

L. Cremona v této souvislosti poznamenal, že stejné podmínky (1) a (2) pro počty r-násobných bodů společných všem křivkám sítě získáme, když místo přímek v útvaru P budeme uvažovat obecně křivky libovolného stupně.

Tím je dokázáno, že křivky příslušející přímkám jednoho útvaru při Cremonově transformaci, které tvoří tzv. *homaloidní síť transformace*, musí mít společný jistý počet (jednoduchých i vícenásobných) bodů, které nazýváme *fundamentálními body* uvažované transformace. Počet fundamentálních bodů přitom musí vyhovovat rovnicím (1) a (2). Tyto rovnice mají obecně více řešení – počet řešení je tím větší, čím větší je číslo n. Každé řešení rovnic (1) a (2) pak určuje zvláštní transformaci.

Odečtením rovnic (1) a (2) získáme rovnici

$$x_2 + 3x_3 + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\, x_{n-1} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \tag{3}$$

ze které vyplývá, že musí být $x_{n-1} = 0$ nebo $x_{n-1} = 1$. V případě, že $x_{n-1} = 1$, z rovnic dále plyne, že $x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-2} = 0$ a $x_1 = 2n - 2$.

Vidíme tak, že mezi všemi transformacemi odpovídajícími dané hodnotě n je obsažena jedna, kterou bychom mohli nazvat „nejjednodušší“. Při ní mají křivky n-tého stupně odpovídající přímkám společný pouze jeden $(n-1)$-násobný bod a dále $2n-2$ jednoduchých bodů. Tato transformace se nazývá *de Jonquièresova transformace.*[23] Obecně ji lze vyjádřit ve tvaru

$$x' = x, \quad y' = \frac{P(x)\,y + Q(x)}{R(x)\,y + S(x)}\,,$$

kde $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ jsou polynomy neurčité x nad tělesem K.

Pro ilustraci uveďme několik příkladů.

Pro $n = 2$ přecházejí rovnice (1) a (2) v jedinou rovnici $x_1 = 3$. Přímkám útvaru P tedy v útvaru P' odpovídají křivky 2. stupně (kuželosečky), které vesměs procházejí třemi pevnými body (jsou opsány pevnému trojúhelníku). Tato transformace se nazývá *transformace konická.*

Pro $n = 3$ plynou z rovnic (1) a (2) rovnosti $x_1 = 4$, $x_2 = 1$. Přímkám útvaru P tedy v útvaru P' odpovídají křivky 3. stupně mající společný jeden dvojnásobný pevný bod a čtyři pevné jednoduché body.

Pro $n = 4$ mají rovnice (1) a (2) tvar $x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 15$, $x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 12$. Tyto rovnice mají dvě řešení: $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$ a $x_1 = 6$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Cremonovu transformaci lze získat rovněž složením libovolné posloupnosti kolineací (tj. lineárních transformací) a standardních kvadratických transformací. Obecné kvadratické transformace mají přitom v teorii Cremonových transformací fundamentální význam. Podle tzv. *Noetherova faktorizačního teorému*[24] totiž platí:

> *Je-li těleso K algebraicky uzavřené, lze každou Cremonovu transformaci projektivní roviny nad tělesem K složit z konečné posloupnosti kvadratických transformací.*

Noetherův důkaz[25] je založen na skutečnosti, že každý svazek racionálních křivek n-tého stupně lze pomocí kvadratické transformace převést na svazek racionálních křivek nižšího stupně. Konečnou posloupností kvadratických transformací lze tedy každý svazek racionálních křivek převést na svazek přímek.

---

[23] Ernest de Jonquières (1820–1901), francouzský námořní důstojník, jenž se věnoval geometrii.

[24] Max Noether (1844–1921), německý matematik, jeden ze zakladatelů algebraické geometrie. Úryvky z několika německy psaných dopisů, jež M. Noether roku 1871 zaslal L. Cremonovi, jsou v anglickém překladu otištěny v článku Menghini M., *Notes on the Correspondence between Luigi Cremona and Max Noether*, Historia Mathematica 13(1986), 341–351. M. Noether se v nich na L. Cremonu nejčastěji obracel s dotazy na přesné důkazy některých Cremonových tvrzení; v několika případech namítal, že Cremonovy důkazy nejsou přesvědčivé a postačující, že využívají pouze nepřímou metodu dedukce. Originály dopisů jsou uloženy v *Istituto Matematico „Guido Castelnuovo“ Università di Roma*. Více viz Israel G., Nurzia L., *Correspondence and manuscripts recovered at the Istituto Matematico „G. Castelnuovo“ of the University of Rome*, Historia Mathematica 10(1983), 93–97.

[25] Viz Noether M., *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen*, Mathematische Annalen 3(1870), 161–227; Noether M., *Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen*, Mathematische Annalen 5(1872), 635–639.

Nezávisle na M. Noetherovi faktorizační teorém objevili i William K. Clifford (1845–1879) a Jacob Rosanes,[26] jenž navíc dokázal, že každá vzájemně jednoznačná algebraická transformace roviny musí být Cremonovou transformací.[27]

V roce 1901 italský matematik Corrado Segre (1863–1924) ve svém článku upozornil na nedostatky v důkazu Noetherova faktorizačního teorému.[28] Italský matematik Guido Castelnuovo (1865–1952) publikoval ještě téhož roku nový důkaz tohoto teorému, v němž nejprve obecnou rovinnou Cremonovu transformaci rozložil do de Jonquièresových transformací a tyto transformace dále rozložil do kvadratických transformací.[29] Ve své době byl tento postup považován za první korektní a kompletní důkaz Noetherova faktorizačního teorému.

Roku 1916 americký matematik James W. Alexander (1888–1971) proti výše uvedenému důkazu G. Castelnuova protestoval a předložil vlastní důkaz využívající přímo kvadratické transformace.[30] Názory na oba důkazy se mezi matematiky různí. Někteří autoři Castelnuovův důkaz plně uznávají a Alexanderovy námitky přičítají jeho chybnému pochopení chování systémů křivek a množin nekonečně blízkých bodů.

V roce 1939 publikoval nový důkaz Noetherova faktorizačního teorému německý matematik Heinrich W. E. Jung (1876–1953). Ve svém článku *Zusammensetzung von Cremonatransformationen der Ebene aus quadratischen Transformationen*[31] dokázal tvrzení, že každou Cremonovu transformaci roviny lze složit z konečného počtu tzv. záměnných a fundamentálních transformací. Záměnnou transformací (v originále *die Vertauschungstransformation*) rozuměl transformaci

$$x' = y, \quad y' = x,$$

která navzájem zamění obě proměnné. Fundamentální transformace (v originále *die Fundamentaltransformation*) jednu proměnnou zachovává, její obecné analytické vyjádření má tvar

$$x' = x, \quad y' = \frac{a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy}{b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy} = \frac{f_0}{f_\infty}\,,$$

kde a_i, b_i jsou konstanty, polynomy f_0, f_∞ jsou nesoudělné a podíl $\frac{f_0}{f_\infty}$ není konstantní, ani nezávisí jenom na proměnné x.

[26] Jacob Rosanes (1842–1922), německý matematik, věnoval se algebraické geometrii a teorii invariantů; byl také šachovým mistrem.

[27] Viz Rosanes J., *Ueber diejenigen rationalen Substitutionen, welche eine rationale Umkehrung zulassen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 73(1871), 97–110.

[28] Viz Segre C., *Un'osservazione relativa alla riducibilità delle trasformazioni Cremoniane e dei sistemi lineari di curve piane per mezzo di trasformazioni quadratiche*, Atti della reale Accademia delle scienze di Torino 36(1901), 645–651.

[29] Viz Castelnuovo G., *Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano*, Atti della Reale Accademia delle scienze di Torino 36(1901), 861–874.

[30] Viz Alexander J. W., *On the factorization of Cremona plane transformations*, Transactions of the American Mathematical Society 17(1916), 295–300.

[31] Viz Journal für die reine und angewandte Mathematik 180(1939), 97–109.

V teorii Cremonových transformací lze rovněž dokázat, že libovolný biregulární automorfismus afinního prostoru nad tělesem K lze rozšířit na Cremonovu transformaci. Grupa všech automorfismů afinního prostoru je totiž podgrupou Cremonovy grupy. Grupa všech automorfismů afinní roviny nad tělesem K je generována podgrupou afinních transformací a podgrupou transformací tvaru

$$x' = ax + b, \quad y' = cy + Q(x),$$

kde a, b, $c \in K$, přitom a, $c \neq 0$, a $Q(x)$ je polynom neurčité x nad tělesem K. Struktura grupy všech automorfismů afinního prostoru dimenze n nad tělesem K není pro $n \geq 3$ obecně dosud známa.

Cremonovy transformace obecně nezachovávají stupeň[32] ani třídu[33] algebraických křivek, avšak zachovávají jejich rod[34]. Využívají se proto k redukci singularit rovinných algebraických křivek.

Závěrem připojme alespoň několik slov o Cremonových transformacích vícedimenzionálních prostorů, které jsou složitější než transformace roviny. Hlavním důvodem je skutečnost, že zatímco Cremonova transformace roviny je stejného stupně jako její inverze, v prostoru již Cremonova transformace a její inverze nemusí být nutně stejného stupně. L. Cremona ve své práci uvedl jako příklad kvadratickou transformaci, jejíž inverzí je transformace kubická. Nejvýznamnějším obecným výsledkem týkajícím se Cremonových transformací v trojrozměrném prostoru je tzv. *Hudsonové faktorizační teorém*:[35]

> *V trojrozměrném prostoru neexistuje konečná množina typů Cremonových transformací, z nichž by bylo možno složit libovolnou Cremonovu transformaci tohoto prostoru.*

Ve vícedimenzionálních prostorech tedy obdoba Noetherova faktorizačního teorému neplatí.

3.3 Cremonův vliv ve světě

Luigi Cremona svými pracemi významně přispěl k dalšímu rozvoji algebraické geometrie. Jako první obecně vyřešil problematiku existence vzájemně jednoznačného zobrazení mezi dvěma rovinami. Ve svém pojednání *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane* odkázal na dva články, jež před ním sepsali německý

[32] Stupněm algebraické křivky rozumíme maximální možný počet průsečíků této křivky s obecnou přímkou.

[33] Třídou algebraické křivky rozumíme maximální možný počet tečen této křivky jdoucích jedním bodem.

[34] Rodem rovinné algebraické křivky n-tého stupně rozumíme číslo p nabývající hodnot $p \in \left\{0, 1, 2, \ldots, \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right\}$. Toto číslo závisí na počtu a druhu singularit; pro daný stupeň n odpovídá maximální možná hodnota rodu p regulární křivce, tj. křivce bez jakýchkoliv singularit.

[35] Hilda Phoebe Hudson (1881–1965), anglická matematička, věnovala se teorii Cremonových transformací. Viz Hudson H. P., *Cremona Transformations in Plane and Space*, Cambridge University Press, Cambridge, 1927, 454 stran.

matematik Ludwig I. Magnus (1790–1861) a italský astronom Giovanni V. Schiaparelli (1835–1910). Oba studovali analytická vyjádření takové geometrické transformace, při níž libovolnému bodu jednoho rovinného útvaru odpovídá jediný bod jiného rovinného útvaru a naopak.

L. I. Magnus ve svém článku *Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie*[36] jako první analyticky zkoumal obecné kvadratické Cremonovy transformace a odvodil jejich základní vlastnosti.

G. V. Schiaparelli ve své práci *Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica*[37] pojal problematiku transformací obecněji. Uvažoval transformaci mezi dvěma rovinami (x, y) a (η, ν) definovanou pomocí funkcí $f(x, y, \eta, \nu) = 0$ a $g(x, y, \eta, \nu) = 0$, která bodu (x, y) jedné roviny přiřazuje jeden, dva nebo dokonce nekonečně mnoho bodů (η, ν) druhé roviny, a to v závislosti na použitých funkcích f, g. Dále však zkoumal pouze případy, kdy každému bodu (x, y) jedné roviny odpovídá opět pouze jeden bod (η, ν) druhé roviny a naopak. Takovou transformaci nazval transformací prvního řádu (*trasformazione di primo ordine*) a rozšířil ji i do trojrozměrného prostoru. Pro obecnou transformaci prvního řádu pak uvažoval tři kvadratické funkce popisující tři kuželosečky, které procházejí třemi pevně zvolenými body. Tímto způsobem dospěl ke kvadratické Cremonově transformaci.

L. Cremona dále poukázal na chybnou úvahu svých předchůdců, kteří pracovali s předpokladem, že kvadratická transformace je nejobecnější biracionální transformací mezi dvěma rovinami.[38] Uvedl na pravou míru, že složením dvou nebo více kvadratických transformací získáme obecně transformaci vyššího řádu.

Cremonova autorita a světové uznání přispěly k tomu, že se biracionální transformace přeměnily z pomocného nástroje v samostatný objekt matematického zkoumání. Koncem 19. a na počátku 20. století bylo předními matematiky sepsáno několik prací, které teorii Cremonových transformací shrnuly nebo i dále rozvíjely.

Arthur Cayley podal roku 1870 přehled teorie Cremonových transformací ve svém pojednání *On the rational transformation between two spaces.*[39] Je v něm bez důkazu uvedena i věta, kterou nezávisle na základě indukce odvodil William K. Clifford. Týká se rozkladu Cremonovy transformace na transformace kvadratické a je na ní založen algoritmus umožňující schematické znázornění všech Cremonových transformací.

Alfred Clebsch (1833–1872) ve svém článku *Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen*[40] dokázal, že přímé transformaci i transformaci k ní inverzní odpovídá stejný počet rovnocenných fundamentálních bodů, může se změnit pouze jejich pořadí. Důkaz této věty L. Cremona ve své práci pouze naznačil.

[36] Viz Journal für die reine und angewandte Mathematik 8(1832), 51–63.

[37] Stamperia reale, Torino, 1862, 95 stran. Též viz Memorie della reale Accademia delle scienze di Torino 21(1864), 227–319.

[38] L. Cremona tuto domněnku sám rovněž dříve zastával, a to v letech 1861 až 1862.

[39] Viz Proceedings of the London Mathematical Society 3(1870), 127–180.

[40] Viz Mathematische Annalen 4(1871), 490–496.

Rudolf Sturm (1841–1919) v článku *Beispiele zu den Cremona'schen ebenen Transformationen*[41] uvedl několik příkladů rovinných Cremonových transformací, u nichž jsou obě homaloidní sítě rozdílné. Dospěl k nim na základě využití jiného vzájemně jednoznačného zobrazení kubické plochy na rovinu.

Problematika Cremonových transformací zůstávala v centru zájmu některých matematiků i na počátku 20. století.[42]

3.4 Cremonův vliv v českých zemích

Pro vývoj české matematiky 2. poloviny 19. století je charakteristický zesílený zájem o geometrickou problematiku, někdy hovoříme o tzv. *české geometrické škole.* Tato škola působila téměř sto let, její vliv doznínal ještě po 2. světové válce. Pozornost matematiků byla zpočátku věnována především deskriptivní geometrii, později byly zkoumány otázky projektivní a konstruktivní syntetické geometrie, v závěru se pozornost této matematické školy obrátila k řešení geometrických problémů s využitím analytických a algebraických metod. Česká geometrická škola byla na rozdíl od zahraničních vědeckých škol[43] specifická tím, že nebyla organizačně ani vědecky vedena žádnou výraznou matematickou osobností, která by určovala její vědecký program, a nebyla ani vázána pouze na jedno vědecké pracoviště. Tematika prací sepsaných touto matematickou skupinou se přitom výrazně odlišuje od tematiky prací českých matematiků 1. poloviny 19. století.

Koncem 60. let 19. století začalo v českých zemích docházet k nárůstu počtu vědeckých publikací z oblasti geometrie. Podstatné rozšíření publikačních možností v této době představoval *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, který byl založen roku 1872. Od poloviny 19. století zde navíc existovala možnost publikovat odborné matematické výsledky ve výročních zprávách středních škol. Zvýšení produkce matematických prací v českých zemích lze sledovat i v *Pojednáních Královské české společnosti nauk* [Abhandlungen der Königlichen Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften] založených roku 1775.[44]

Problematikou biracionálních transformací se v českých zemích zabývalo několik matematiků. Velké zásluhy na tom má zejména Emil Weyr.

---

[41] Viz Mathematische Annalen 26(1886), 304–308.

[42] Viz např. Jung H. W. E., *Über die Cremonasche Transformation der Ebene*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 138(1910), 255–318.

[43] V 19. století docházelo ke vzniku vědeckých geometrických škol po celé Evropě. Ve Francii se již koncem 18. století utvořila geometrická škola vycházející z prací Gasparda Monge a později Jeana Victora Ponceleta, od 40. let 19. století zde působila vědecká škola rozvíjející geometrické dílo Michela Chaslese. V Německu vznikly po roce 1820 současně dvě významné geometrické školy, a to syntetická projektivní škola vycházející z prací Jacoba Steinera a Christiana von Staudta (1798–1867) a analyticko-algebraická škola rozvíjející ideje Julia Plückera. Italskou školu algebraické geometrie od 60. let 19. století kromě L. Cremony reprezentovali Francesco Brioschi, Eugenio Beltrami (1835–1900) a Enrico Betti.

[44] Počet publikovaných matematických prací rostl od konce 60. let 19. století až do konce století celkem lineárně. Zatímco v předchozím období byly publikovány ročně průměrně pouze dvě matematické práce, bylo v letech 1870 až 1890 publikováno ročně průměrně více než 11 prací. Geometrické práce přitom v tomto období tvořily téměř 60 procent všech publikovaných matematických prací. Viz Folta J., *Česká geometrická škola – Historická analýza*, Studie Československé akademie věd 9, Academia, Praha, 1982.

Emil Weyr

Emil Weyr (1848–1894), významný český matematik 2. poloviny 19. století, se geometrií začal zabývat kolem roku 1868, kdy ještě během studia začal pracovat jako asistent profesora J. H. K. Durège (1821–1893) na pražské polytechnice. V roce 1869 získal doktorát filozofie v Lipsku, roku 1870 byl jmenován soukromým docentem novější geometrie na pražské univerzitě. O rok později získal místo mimořádného profesora matematiky na české polytechnice v Praze. Roku 1875 byl povolán jako řádný profesor na vídeňskou univerzitu, aby tam přenesl a rozšířil novou geometrii úspěšně rozvíjenou právě v Praze.[45]

Obr. 33: Emil Weyr

Emil Weyr se zpočátku zajímal o jedno-víceznačné geometrické transformace, k nimž dospěl rozšířením principu korespondence naznačeného v Chaslesově *Aperçu historique*[46] z roku 1837. V obsáhlých, německy psaných monografiích[47] ukázal, že vedle bijektivního vztahu vyjadřujícího jedno-jednoznačnou projektivní transformaci existují mezi dvěma útvary také zobrazení, která danému prvku jednoho útvaru přiřazují více prvků útvaru druhého a naopak. Navíc poukázal na skutečnost, že zobrazení jedno-dvojznačná jsou v úzké souvislosti s teorií křivek 3. stupně s jedním dvojným bodem, resp. třetí třídy s jednou dvojnou tečnou a s teorií přímkových ploch 3. stupně. Ve svých pracích se Emil Weyr snažil omezovat použití analytické geometrie a v co největší míře, pokud to bylo možné, používat ryze syntetické metody.

[45] O Emilu Weyrovi viz Pánek A., *O životě a působení Dr. Emila Weyra*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 24(1895), 161–224; Bečvář J., *Sto let od smrti Emila Weyra*, Pokroky matematiky, fysiky a astronomie 39(1994), 102–107.

[46] Viz Chasles M., *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne, suivi d'un Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie*, M. Hayez, imprimeur de l'Académie Royale, Bruxelles, 1837, 851 stran.

[47] Weyr E., *Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse*, Teubner, Leipzig, 1869, 156 stran; Weyr E., *Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zwei–deutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung*, Teubner, Leipzig, 1870, 175 stran.

Ve školním roce 1870/71 Emil Weyr absolvoval studijní pobyt v Miláně, při kterém navázal pracovní i přátelské vztahy s L. Cremonou. Navštěvoval zde jeho přednášky, diskutovali spolu o geometrických otázkách.[48] Byl prvním českým matematikem, jenž pochopil zásadní význam Cremonových geometrických prací a jeho biracionálních transformací pro další rozvoj projektivní geometrie. Dvě nejvýznamnější Cremonovy práce proto přeložil do češtiny.[49] Své překlady s L. Cremonou konzultoval jednak při svých pobytech v Itálii, jednak v korespondenci.[50] V Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky vyšlo v roce 1874 v rámci literárního věstníku následující oznámení:[51]

> *Konečně oznamujeme, že dokončen jest již český překlad klassického spisu Úvod do geometrické theorie křivek rovinných, jejž sepsal dr. Ludvík Cremona a do češtiny převedl Emil Weyr. Zvláštního odporučení spis tento nepotřebuje; patříť mezi spisy světové. Mimo to není snad jediného čtenáře těchto listů, který by si překlad tento nebyl zjednal; podle vlastního seznání ustálil se tedy zajisté u každého našeho čtenáře jistý úsudek, o němž nepochybujeme, že jest na nejvýš pochvalný i pro spisovatele pro překladatele i pro vydavatele.*

V dubnu 1873 pobýval Emil Weyr opět v Itálii. Jedním z motivů této cesty byly konzultace s L. Cremonou a úřední jednání týkající se překladu druhé Cremonovy knihy.

Emil Weyr je společně se svým bratrem Eduardem Weyrem (1852–1903) autorem první česky psané učebnice projektivní geometrie nazvané *Základové vyšší geometrie*, jež vycházela od roku 1871 ve třech pokračováních jako příloha časopisu Živa.[52] Byla napsána s využitím francouzských a německých zdrojů, obsahuje

---

[48] Poznamenejme, že Emil Weyr původně zamýšlel podniknout studijní cestu do Paříže, avšak z důvodu vypuknutí prusko-francouzské války dne 2. srpna 1870 se nakonec rozhodl odjet do Itálie. V Archivu AV ČR (fond František Weyr) je uložen deník, jenž si Emil Weyr během svého italského pobytu vedl. Popisoval v něm setkání s italskými matematiky a atmosféru tehdejší Itálie. Zpočátku psal deník německy, později přešel do češtiny, která obsahuje řadu chyb. Viz Bečvář J., Bečvářová M., Škoda J., *Emil Weyr a jeho pobyt v Itálii v roce 1870/71*, edice Dějiny matematiky, svazek 28, ČVUT, Praha, 2006, 166 stran.

[49] Weyr E., *Cremonovy geometrické transformace útvarů rovinných*, Živa, sborník vědecký Musea království Českého, odbor přírodovědecký a mathematický č. X, nákladem Musea království Českého, Praha, 1872, 47 stran; *Úvod do geometrické theorie křivek rovinných*, sepsal Dr. Ludvík Cremona, české, spisovatelem rozmnožené a opravené vydání, jež uspořádal Emil Weyr, majetkem a nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1873, 176 stran. S opravami gramatických a tiskových chyb Emilu Weyrovi pomáhali fyzik a astronom Augustin Seydler (1849–1891) a matematik Karel Zahradník (1848–1916).

[50] Celkem 27 dopisů Emila Weyra zaslaných L. Cremonovi v letech 1870 až 1891 je uloženo v Dipartimento di Matematica Istituto „Guido Castelnuovo“, Università degli Studi di Roma „La Sapienza“. Převzato z [Be2], str. 264.

[51] Viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 3(1874), str. 291.

[52] Viz Weyrové Em. a Ed., *Základové vyšší geometrie*, díl I. *Theorie promítavých útvarů prvořadých*, díl II. *Theorie křivek stupně druhého*, díl III. *O přímočarých plochách druhého stupně a o vztahu kollineárném a reciprokém základních útvarů druhořadých a třetiřadých*, Živa, sborník vědecký Musea království Českého, odbor přírodovědecký a mathematický č. VIII, XI, XII, nákladem Musea království Českého, Praha, 1871, 1874, 1878, 114 + 186 + 167 stran. Recenze viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 8(1879), 141–143.

základní i speciální látku doplněnou o vlastní vědecké výsledky a ve své době výrazně přesáhla úroveň tehdejší české odborné literatury.

Po návratu z Itálie se Emil Weyr dále věnoval studiu speciálních typů jedno-víceznačných transformací, které nazval involucemi vyšších stupňů a tříd. Za involuci n-tého stupně a k-té třídy považoval takový vztah mezi prvky nějakého útvaru rodu nula, při kterém je volbou určitého počtu k prvků stanoveno dalších $n - k$ prvků ($n > k$) tohoto útvaru tak, že pro ně platí tzv. úplná záměnnost, tj. že kterýchkoliv k prvků daného útvaru lze považovat za prvky určující všechny ostatní prvky tohoto n-členného útvaru.[53] Těchto transformací Emil Weyr využíval ke studiu křivek rodu nula. Řadu svých pojednání z této problematiky shrnul v práci *Beiträge zur Curvenlehre*,[54] kterou značně přispěl k vybudování teorie racionálních křivek a ploch.

Další matematici v českých zemích

Ve stejné době jako Emil Weyr se Cremonovými transformacemi v českých zemích zabývalo i několik dalších matematiků.

Soukromý docent německé univerzity v Praze Seligmann Kantor (1857–1902) ve své práci věnované biracionálním transformacím vyřešil úlohu zadanou neapolskou akademií, a to nalézt v rovině periodické Cremonovy transformace, které po n-násobném užití převádí geometrický objekt sám v sebe.[55] S. Kantor tuto úlohu vyřešil zcela obecně, do té doby byly popsány pouze některé speciální případy.

Česká matematická komunita byla koncem 19. a na počátku 20. století s Cremonovými geometrickými pracemi i díky Emilu Weyrovi poměrně dobře seznámena. Alois Strnad[56] některé Cremonovy výsledky využil ve svém pojednání *Úvod do theorie kvadratických transformací rovinných*.[57] V Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky je v rámci literárního věstníku uveden mimo jiné tento popis a hodnocení:[58]

> *Pan spisovatel vykládá v první části svého pojednání pojem transformace vůbec, zmiňuje se po několika historických poznámkách krátce o transformaci lineárné a přechází potom k vlastnímu předmětu svého*

[53] Weyrovu definici involuce se snažili bratři Josef Silvestr (1848–1922) a Matěj Norbert (1859–1922) Vaněčkové kolem roku 1882 rozšířit též na útvary prostorové. Jejich snaha však skončila uvedením definice a několika speciálních, nepříliš náročných příkladů. Roku 1884 publikovali sérii tří krátkých, francouzsky psaných článků; viz Vaněčkové J. S. a M. N., *Sur l'involution des dimensions supérieures*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences Paris 99(1884), 742–744, 856–857, 909–911.

[54] Alfred Hölder, K. k. Hof- und Universitätsbuchhändler Wilhelm Braumüller, Wien, 1880, 64 stran.

[55] Viz Kantor S., *La trasformazione birazionale. Relazione di E. Caporali*, Napoli, 1883. S. Kantor se však touto problematikou zabýval již v několika článcích z roku 1880.

[56] Alois Strnad (1852–1911), český matematik, od roku 1873 asistent deskriptivní geometrie na české polytechnice v Praze. V letech 1876 až 1891 vyučoval na reálce v Hradci Králové, poté pět let působil na reálce v Praze. V roce 1896 byl jmenován ředitelem reálky v Kutné Hoře. Věnoval se zejména projektivní geometrii, je autorem několika středoškolských učebnic.

[57] Viz Výroční zpráva c. k. vyšší realné školy v Hradci Králové za školní rok 1886–87.

[58] Viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 17(1888), 140–141.

pojednání. ... všímá si z těchto transformací bedlivěji kvadratické inverse a v ní obsažené inverse kruhové; mimo to zavádí novou neinvoluční transformaci, obecnější než inverse kvadratická, již nazývá transformací pomocí čtyř bodů kuželosečky. ... Pojednání toto stává se cenným již volbou důležitého předmětu, o němž nebylo dosud u nás soustavně pojednáno. Mimo to vyniká jasným výkladem a přehledným látky uspořádáním, kteréž vlastnosti náleží k přednostem všech prací páně Strnadových.

Na výše uvedené Strnadovo pojednání se později odvolával Bedřich Procházka,[59] jenž v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky uveřejnil článek *O křivosti křivky odvozené transformací kvadratickou.*[60] S využitím kinematické geometrie poukázal na možnost konstrukce tečen a středu křivosti křivek, jež získáme kvadratickou transformací libovolné křivky. Ve stejné době publikoval v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky Karel Zahradník[61] ve třech částech pojednání *O jisté birationální kubické transformaci a jejím upotřebení v theorii křivek.*[62]

Cremonův vliv u nás pak dozníval ještě po 1. světové válce, konkrétně v několika pracích Bohumila Bydžovského[63]. Na téma Cremonových transformací sepsal celkem 13 článků, z toho 6 česky a 7 francouzsky.[64] Ještě před 1. světovou válkou, v roce 1909, publikoval článek *O jisté nekonečné grupě Cremonových transformací*,[65] v němž zkoumal, zda vzájemně jednoznačným transformacím v rovině, které zachovávají kubickou křivku, neodpovídají vzájemně jednoznačné transformace celé roviny. Z dalších česky psaných prací jmenujme např. články *O některých grupách Cremonových transformací v rovině*[66] a *O zvláštním druhu grup Cremonových involucí v rovině*[67]. O grupách Cremonových transformací přednášel i na 8. mezinárodním kongresu matematiků v Bologni v září 1928.[68]

[59] Bedřich Procházka (1855–1934), český matematik, od roku 1876 asistent deskriptivní geometrie na německé a po roce na české technice. Vyučoval matematiku a deskriptivní geometrii na několika středních školách v Praze, později si učitelskou aprobaci rozšířil o fyziku. Roku 1884 se habilitoval na české technice v Praze, avšak ani titul soukromého docenta mu nezajistil místo na žádné vysoké škole. V následujících letech působil na středních školách v Chrudimi, v Pardubicích a v Praze. Roku 1897 byl jmenován ředitelem nově založené reálky v Náchodě. V roce 1904 získal místo profesora deskriptivní geometrie na české technice v Brně, roku 1908 přešel na českou techniku do Prahy, kde byl v následujícím roce zvolen rektorem.

[60] Viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 35(1906), 32–36.

[61] Karel Zahradník (1848–1916), český matematik, od roku 1872 asistent na české technice v Praze. V letech 1876 až 1899 působil jako řádný profesor matematiky na chorvatské univerzitě v Záhřebu. V roce 1899 se stal prvním rektorem české vysoké školy technické v Brně.

[62] Viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 34(1905), 105–123, 329–341; 38(1909), 6–25. Poznamenejme pro úplnost, že druhá a třetí část mají v názvu slovo „biracionální“ místo „birationální“. O práci podrobně viz Bečvářová M., Čižmár J., *Karel Zahradník (1848–1916), Praha – Záhřeb – Brno*, edice Dějiny matematiky, svazek 46, Matfyzpress, Praha, 2011, 194–205.

[63] Bohumil Bydžovský (1880–1969), profesor matematiky na pražské univerzitě. O jeho životě a díle viz Francová L., *Život a dílo Bohumila Bydžovského*, disertační práce, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha, 2001; Olejníčková J., *Vědecké dílo Bohumila Bydžovského*, disertační práce, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha, 2005.

[64] Některé z prací se však tematicky překrývají, nebo se jedná o překlady mezi oběma jazyky.

[65] Viz Rozpravy II. třídy České Akademie věd a umění 18(1909), 8 stran.

[66] Viz Zprávy sjezdu československých přírodozpytců a lékařů, 1928.

[67] Viz Zprávy sjezdu matematiků zemí slovanských, Varšava, 1929, 314–317.

[68] Viz Bydžovský B., *Remarque sur les groupes finis de transformations de Cremona*, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna, 3–10 Settembre 1928, Tomo IV, 43–44.

Největší pozornost věnoval tzv. kvadratickým involucím n-rozměrného prostoru. V článku *Kvadratické involuce v prostoru n-rozměrném*[69] odvodil ve vhodně zvolené soustavě souřadnic rovnice obecné kvadratické Cremonovy transformace. Ocitujme úvodní odstavec, v němž B. Bydžovský shrnul obsah svého článku:[70]

> *V tomto metodickém příspěvku k teorii Cremonových transformací v obecném prostoru projektivním jsou odvozeny nutné podmínky pro homaloidní soustavu kvadratických nadploch a z toho vyvozeny (známé) rovnice nejobecnější kvadrokvadratické*[71] *transformace Cremonovy ve vhodně volené soustavě souřadné. Odtud snadno plynou rovnice pro kvadratickou involuci; je-li tato involuce inversí, lze ji vyjádřiti velmi jednoduše i pro obecnou soustavu souřadnou. Ke konci je odvozena podmínka pro to, aby dvě inverse složeny dávaly opět kvadratickou involuci.*

B. Bydžovský ve svém článku dospěl k závěru, že k dané inverzi existuje nekonečně mnoho inverzí, které jsou s ní záměnné a jejichž složením s uvažovanou inverzí získáme kvadratickou involuci. Každá taková inverze je určena svým středem, jenž je však libovolný. V několika dalších pracích pak B. Bydžovský výše uvedené transformace použil jako pomocný nástroj ke zkoumání algebraických křivek.

Můžeme konstatovat, že ve druhé polovině 19. století byla problematika geometrických transformací, řešitelná prostředky syntetické geometrie, uzavřenou oblastí. Témata zvládnutelná čistě konstrukčními prostředky již byla vyčerpána. Zájem matematiků se proto přirozeně obrátil ke složitějším otázkám, jejichž řešení spočívalo ve využití metod a výsledků dalších matematických disciplín. Studium Cremonových transformací do tohoto celosvětového trendu přesně zapadá, neboť vyžaduje velké nároky na geometrickou představivost a užití algebraických metod.

[69] Viz Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 60(1931), 214–224.

[70] Viz Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 60(1931), str. 214.

[71] B. Bydžovský užíval termín kvadrokvadratická transformace pro transformaci „kvadratickou v obou směrech“.

4. Erlangenský program

Erlangenský program představuje významný mezník ve vývoji geometrie 19. století, neboť na dlouhou dobu zásadně ovlivnil zaměření a další rozvoj matematiky. Tento název dostala slavná přednáška Felixe Kleina *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* [Srovnávací úvahy o novějších geometrických bádáních]. F. Klein její text předložil v říjnu roku 1872 na univerzitě v Erlangen u příležitosti svého jmenování řádným profesorem. Tato přednáška, v níž byl vyložen význam pojmu grupa pro klasifikaci různých geometrií, vyšla také jako samostatná brožura [K2].[1] Postupně byla přeložena do dalších jazyků.[2]

Životní osudy F. Kleina jsou podrobně popsány v několika publikacích.[3] Připomeneme proto jen základní životopisné a bibliografické údaje, které nám umožní zařadit Kleinovy práce a výsledky do dobového i odborného kontextu.

4.1 Felix Klein

Felix Klein se narodil 25. dubna 1849 v Düsseldorfu. Absolvoval zde gymnázium a poté odešel studovat matematiku a fyziku na univerzitu v Bonnu. V roce 1866, ještě během studia, získal místo laboratorního asistenta u Julia Plückera, který se zabýval teoretickou matematikou a experimentální fyzikou. Pod jeho vedením sepsal disertační práci *Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Koordinaten auf eine kanonische Form* [O transformaci obecné rovnice druhého stupně v přímkových souřadnicích na kanonický tvar],[4] za niž roku 1868 získal doktorát.

Během následujících dvou let postupně navštívil slavná matematická pracoviště v Berlíně, Paříži a Göttingen. V roce 1870 začal v Paříži spolupracovat s norským matematikem Sophusem Lie (1842–1899), s nímž se seznámil nedlouho předtím v Berlíně. S. Lie se tehdy teprve krátce zabýval matematikou, právě on má však nezanedbatelný podíl na Kleinových výsledcích, neboť ho přivedl k myšlence propojení geometrie a teorie grup. Tato idea sehrála velkou roli v Kleinově pozdější práci. F. Klein a S. Lie začali již v té době chápat zásadní význam

[1] F. Klein svůj program znovu otiskl v roce 1893 v časopisu *Mathematische Annalen*, který v té době redigoval; viz Mathematische Annalen 43(1893), 63–100. Při té příležitosti do původního textu dodatečně přidal několik poznámek, s cílem upřesnit nebo doplnit některá tvrzení. Erlangenský program byl dále otištěn v [K8], str. 460–497, a v časopisu The New Mathematical Intelligencer 0(1977), 22–30.

[2] Italský překlad: Fano G., *Considerazioni comparative su ricerche geometriche recenti*, Annali di matematica pura ed applicata 17(1890), 307–343; francouzský překlad: Padé M. H., *Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure 8(1891), 87–102, 173–199; anglický překlad: Haskell M. W., *A comparative review of recent researches in geometry*, Bulletin of the New York Mathematical Society 2(1893), 215–249; polský překlad: Dickstein S., *Rozważania porównawcze o nowszych badaniach geometrycznych*, Prace matematyczno-fizyczne 6(1895), 27–61. Oficiální překlad do češtiny však dosud není k dispozici.

[3] Např. [To], [Ja], str. 219–230, a [WA], str. 470–481; relevantní informace poskytuje i webová stránka http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Klein.html.

[4] Viz Mathematische Annalen 23(1884), 539–578; též [K8], str. 5–49.

teorie grup, a proto si oblast matematiky, která je zajímala, „rozdělili“ na dvě části; F. Klein se soustředil na nespojité a S. Lie na spojité grupy. V Paříži se F. Klein stýkal také s francouzskými matematiky, zejména s Camillem Jordanem (1838–1922), profesorem na École Polytechnique, a studoval jejich práce.

V červenci 1870 proslovil pruský kancléř Otto von Bismarck (1815–1898) útočnou řeč proti francouzské vládě, Francie vyhlásila 19. července Prusku válku a F. Klein se rozhodl Paříž opustit. Krátce sloužil v armádě jako zdravotník, počátkem roku 1871 se však habilitoval a začal přednášet na univerzitě v Göttingen. Právě tehdy učinil své významné objevy, které se týkaly zejména geometrie. V roce 1872 byl ve věku pouhých 23 let jmenován řádným profesorem filozofické fakulty univerzity v Erlangen. Působil zde však pouze do roku 1875, kdy mu bylo nabídnuto výhodnější místo na Technische Hochschule v Mnichově; přednášel zde velkému počtu posluchačů, mezi nimiž bylo i několik budoucích významných matematiků. V srpnu 1875 se F. Klein oženil s Annou Hegelovou (1851–1927), vnučkou významného německého filozofa Georga Wilhelma Friedricha Hegela (1770–1831). Narodily se jim čtyři děti, tři dcery a jeden syn. Nejmladší dcera Elisabeth po svém otci zdědila nadání, studovala matematiku a fyziku, později připravila k vydání některé Kleinovy přednášky.

Po pětiletém působení na Technische Hochschule přesídlil F. Klein do Lipska, kde pracoval v letech 1880 až 1886. Chtěl zde vybudovat školu Riemannovy geometrie a teorie funkcí. Na podzim roku 1882 se však zhroutil a začal propadat těžkým depresím. Jeho kariéra špičkového tvůrčího matematika tím skončila. Roku 1886 se vrátil na univerzitu v Göttingen (na jeho místo v Lipsku přišel S. Lie), kde působil až do roku 1913. Spektrum jeho přednášek bylo široké; přednášel řadu partií matematiky a fyziky, např. teoretickou mechaniku nebo teorii potenciálu. V roce 1913 ze zdravotních důvodů univerzitu opustil, během první světové války se věnoval soukromé výuce matematiky. Zemřel 22. června 1925 v Göttingen.

Obr. 34: Felix Klein

Kleinovy zásluhy v matematice, zejména v geometrii, jsou všestranné. Na univerzitě v Göttingen vybudoval matematické středisko světové úrovně, které se pod jeho vedením stalo významným centrem matematického bádání. Přicházeli sem mladí lidé z celého světa a studovali speciální matematické otázky. Zřídil zde matematickou knihovnu a čítárnu, zavedl pravidelná týdenní diskusní setkání. Kromě geometrie a teorie grup se hlouběji věnoval i algebraickým rovnicím a teorii funkcí; z těchto oblastí publikoval na sedmdesát prací.

V roce 1876 převzal vedení časopisu *Mathematische Annalen*, který roku 1868 založili Alfred Clebsch (1833–1872) a Carl Gottfried Neumann (1832–1925), a přispěl nepochybně ke zvýšení jeho úrovně. Tento časopis se specializoval především na problémy komplexní analýzy, otázky algebraické geometrie a teorie invariantů. Právě pod Kleinovým vedením začaly *Mathematische Annalen* konkurovat významnému časopisu *Journal für die reine und angewandte Mathematik* vydávanému berlínskými matematiky, který měl v té době za sebou již téměř padesátiletou úspěšnou historii. Na více než šedesát let se *Mathematische Annalen* staly jedním z nejvýznamnějších matematických časopisů. V roce 1885 byl F. Klein přijat do londýnské Královské společnosti, roku 1913 se stal členem Berlínské akademie věd.

Ke konci své kariéry se začal zajímat i o výuku matematiky na německých školách, snažil se o její modernizaci. Prosadil, aby se na středních školách vyučovaly základy teorie funkcí a základy diferenciálního a integrálního počtu (tzv. *Kleinsche Reform*). Roku 1908 byl na 4. mezinárodním kongresu matematiků v Římě jmenován předsedou Mezinárodní komise pro vyučování matematice. Pod jeho vedením bylo vydáno několik publikací o výuce matematiky na všech stupních škol. Aktivně se podílel také na vydávání mnohasvazkové *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*, sám vydal čtyři svazky věnované mechanice.

4.2 Základní myšlenka klasifikace geometrií

V následujících třech odstavcích nastíníme v elementární podobě hlavní myšlenku Kleinova přístupu ke klasifikaci různých geometrií.

Elementární eukleidovská geometrie studuje ty vlastnosti geometrických útvarů, které zůstávají zachovány při jejich „pohybech“. Většinou takto hovoříme o přímých nebo nepřímých shodnostech. Říkáme, že útvary A a B jsou shodné, je-li možno útvar A přemístit tak, aby splynul s útvarem B. Místo libovolných „pohybů“ (shodností) se však můžeme omezit např. pouze na všechna posunutí nebo pouze na všechny rotace kolem pevně zvoleného bodu apod., tj. na množinu nějakých speciálních transformací.

Nechť M je množina nějakých transformací (roviny, prostoru). Útvary A a B (v rovině, v prostoru) pokládáme za „ekvivalentní“ (vzhledem k množině M), existuje-li v této množině transformace f, která útvar A převádí na útvar B, tj. platí $f(A) \equiv B$. Přitom požadujeme, aby uvedená relace mezi oběma útvary byla opravdu ekvivalencí, tj. aby byla reflexivní, symetrická a tranzitivní. Odtud vyplývá, že množina M musí být uzavřená vzhledem ke skládání transformací (plyne z tranzitivity), musí obsahovat identickou transformaci (plyne z reflexivity) a s každou transformací musí obsahovat také transformaci k ní inverzní (plyne ze symetrie). Množina M spolu s operací skládání je tedy grupou.

Každá grupa geometrických transformací tedy definuje určitou ekvivalenci geometrických útvarů. Volbou různých grup transformací tak získáváme různé geometrie: volíme-li klasické „pohyby“ (shodnosti), dostáváme eukleidovskou geometrii, afinní transformace vedou ke geometrii afinní, projektivní transformace vedou ke geometrii projektivní apod.

4.3 Grupy

Je třeba zdůraznit, že v sedmdesátých letech 19. století již teorie grup jako matematická disciplína existovala (rodila se přibližně na přelomu dvacátých a třicátých let 19. století), nikoliv však ve své dnešní podobě. Pojem grupy se v matematice objevil v souvislosti se studiem řešitelnosti algebraických rovnic vyšších stupňů, jednalo se o tzv. řešitelnost *v radikálech.*[5] Při těchto bádáních začínali matematici čím dál tím více pracovat s grupami permutací.

V letech 1770 až 1771 sepsal významnou práci o algebraických rovnicích Joseph Louis Lagrange (1736–1813). Jeho spis *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* [Úvahy o algebraickém řešení rovnic][6] se stal velkou inspirací pro mnoho dalších matematiků. J. L. Lagrange se v něm zabýval základní otázkou, proč metody, které umožňují řešení algebraických rovnic stupně nejvýše čtvrtého, zůstávají pro rovnice vyšších stupňů neúspěšné. Tato otázka ho vedla ke studiu racionálních funkcí kořenů rovnic a jejich chování při permutaci kořenů.

Roku 1799 uveřejnil italský matematik Paolo Ruffini (1765–1822) pojednání *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto* [Obecná teorie rovnic, v níž je dokázána nemožnost algebraického řešení obecné rovnice stupně většího než čtyři][7] obsahující „důkaz“ neřešitelnosti algebraické rovnice stupně vyššího než čtvrtého v radikálech. Nebyl však uznán jako úplný, neboť je založen na hypotéze, že *radikály* lze vyjádřit jako racionální funkce kořenů rovnice.

Úplný důkaz neřešitelnosti obecné algebraické rovnice stupně vyššího než čtvrtého v radikálech podal jako první norský matematik Niels Henrik Abel (1802–1829). V roce 1824 na vlastní náklady vydal spis *Mémoire sur les équations algébriques, où on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième dégré* [Pojednání o algebraických rovnicích s důkazem neřešitelnosti obecné rovnice pátého stupně],[8] v němž poprvé prezentoval svůj důkaz. Když

[5] O řešitelnosti algebraické rovnice v radikálech hovoříme, pokud je možno její kořeny vyjádřit vzorcem, v němž jsou použity pouze koeficienty dané rovnice a operace sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování. Poznamenejme ještě, že slovo *radikál* je tradičním termínem pro odmocninu.

[6] Viz Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin 1(1770), 134–215; 2(1771), 138–253.

[7] Nella stamperia di S. Tommaso d'Aquino, Bologna, 1799, parte prima, 206 stran, parte seconda, str. 207–509.

[8] De l'imprimerie de Groendahl, Christiania, 1824, 8 stran.

začal v roce 1826 August Leopold Crelle (1780–1855) vydávat časopis *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, uveřejnil v prvním ročníku také několik Abelových prací; jednou z nich byl článek *Beweis der Unmöglichkeit algebraische Gleichungen von höheren Graden als dem vierten allgemein aufzulösen* [Důkaz obecné neřešitelnosti algebraické rovnice stupně vyššího než čtvrtého][9] obsahující novou, propracovanější verzi stejného důkazu. N. H. Abel v něm implicitně použil teorii grup a některé Lagrangeovy a Cauchyho výsledky týkající se počtu hodnot, kterých může funkce n proměnných nabývat při jejich permutaci.

Dva měsíce před svou smrtí publikoval N. H. Abel článek *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement* [Pojednání o zvláštní třídě rovnic řešitelných algebraicky],[10] který pojednává o speciální třídě rovnic všech stupňů řešitelných v radikálech, a v němž je mimo jiné dokázáno následující obecné tvrzení:

> *Jestliže všechny kořeny nějaké rovnice lze vyjádřit jako racionální funkce jednoho z nich, označme jej x, a pokud libovolné dva kořeny $\theta_1 x$ a $\theta_2 x$, kde θ_1 a θ_2 jsou racionální funkce, splňují podmínku $\theta_1\theta_2 x = \theta_2\theta_1 x$, potom je uvažovaná rovnice řešitelná v radikálech.*

Uvedené Abelovo tvrzení je přitom speciálním případem hlavního výsledku tzv. *Galoisovy teorie*. O ní bude řeč v následujícím odstavci.

Studiem řešitelnosti algebraických rovnic v radikálech se na přelomu dvacátých a třicátých let 19. století intenzivně zabýval také Evariste Galois (1811–1832). Jako první použil v roce 1830 termín *grupa* (v originále *groupe*), a to nejprve ve smyslu množina. Při studiu řešitelnosti obecné algebraické rovnice v radikálech našel určitou podmínku týkající se „substitucí na permutacích".[11] Substituce rozdělil do „grup" a odhalil jejich uzavřenost (složení dvou substitucí je opět substituce). Každé rovnici potom přiřadil grupu permutací. Dále se zabýval rozkladem grupy na pravé a levé třídy podle podgrupy a uvažoval případ, kdy se oba rozklady shodují, tj. případ, kdy je uvažovaná podgrupa normální. Poté rozvinul obecnou teorii (dnes nazývanou *Galoisovou*), která umožňuje podle struktury tzv. *Galoisovy grupy*[12] dané rovnice rozhodnout o její řešitelnosti v radikálech. Platí následující tvrzení:

> *Rovnice $f(x) = 0$, kde f je polynom nad tělesem K, je řešitelná v radikálech právě tehdy, když je její Galoisova grupa G řešitelná, tj. právě tehdy, když existuje posloupnost podgrup $G \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_m = E$ taková, že každá grupa H_k je normální podgrupou grupy H_{k-1} a všechny faktorové grupy H_{k-1}/H_k jsou Abelovy.*

---

[9] Viz Journal für die reine und angewandte Mathematik 1(1826), 65–84.

[10] Viz Journal für die reine und angewandte Mathematik 4(1829), 131–156.

[11] E. Galois permutací rozuměl pořadí kořenů a substituci chápal jako vzájemně jednoznačné zobrazení množiny kořenů.

[12] *Galoisova grupa* rovnice $f(x) = 0$, kde f je polynom nad tělesem K, je grupa všech automorfismů rozkladového nadtělesa polynomu f, které jsou identické na K.

Pro ireducibilní rovnice prvočíselného stupně dokázal E. Galois toto tvrzení:

> *Ireducibilní rovnice $f(x) = 0$, jejímž stupněm je nějaké prvočíslo n, je řešitelná v radikálech právě tehdy, když každá substituce grupy G převádí kořen x_k do kořenu $x_{k'}$ pomocí následující lineární transformace indexu k: $k' = ak + b \pmod{n}$.*

Protože Galoisova grupa obecné rovnice 5. stupně výše uvedenou podmínku nesplňuje, vyplývá odtud, že taková rovnice není řešitelná v radikálech.

E. Galois své výsledky publikoval útržkovitě v letech 1830 až 1832; hlavní myšlenky jeho rukopisu *Mémoire sur la résolution algébrique des équations* [Pojednání o algebraickém řešení rovnic] publikoval až v roce 1846 Joseph Liouville v časopisu *Journal de mathématiques pures et appliquées.*[13]

Grupami permutací se zabýval také Augustin Louis Cauchy (1789–1857). V článcích uveřejněných v letech 1844 až 1846 dokázal řadu poznatků o grupách substitucí, které jsou podgrupami symetrické grupy.[14] Zdůraznil také rozdíl mezi permutacemi a substitucemi; permutaci představuje libovolné pořadí n proměnných, substituce je přechod od jedné permutace k jiné.[15] Později se „substituce“ ve významu, v jakém je používali A. L. Cauchy a E. Galois, začaly nazývat naopak „permutacemi“, což lépe vystihovalo původní význam latinského slova *permutare* (zaměňovat, vyměňovat).

V padesátých a šedesátých letech 19. století pak začal prudký a systematický rozvoj teorie grup. Arthur Cayley (1821–1895) zavedl v roce 1854 pojem grupy a jako první podal poměrně moderní definici tohoto pojmu. V práci *On the theory of groups, as depending on the symbolic equation* $\Theta^n = 1$ [O teorii grup v souvislosti se symbolickou rovnicí $\Theta^n = 1$][16] definoval grupu jako abstraktní množinu symbolů s asociativní operací, která obsahuje jednotkový prvek a rovnice $ax = b$ a $ya = b$ v ní mají jednoznačná řešení pro každá a a b. Dále uvedl možnost definovat grupu tabulkou popisující násobení jejích prvků (tzv. *Cayleyho tabulka*) a zkoumal způsoby jejího zadávání pomocí generátorů. Poznamenal přitom, že prvky grupy mohou být libovolné objekty. Kromě pojmu grupy zavedl v této práci řadu dalších základních pojmů abstraktní teorie; objevuje se zde např. pojem izomorfismu. Cayleyho výsledkům nebyla zpočátku věnována příliš velká pozornost, později se však staly významnými zejména pro svou exaktní definici grupy a objevily se prakticky ve všech učebnicích.

[13] Viz *Analyse d'un Mémoire sur la résolution algébrique des équations*, Bulletin des Sciences mathématiques, physiques et chimiques 13(1830), 271–272; Journal de mathématiques pures et appliquées 11(1846), 395–396.

[14] Viz Cauchy A. L., *Oeuvres complètes*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009, 516 stran.

[15] Jak jsme již poznamenali, E. Galois používal stejnou terminologii, avšak nepříliš důsledně.

[16] Viz The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science 7(1854), 40–47, 408–409; 18(1859), 34–37.

Zásadní význam pro další rozvoj teorie grup mělo dílo francouzského matematika Camilla Jordana (1838–1922). V roce 1868/69 publikoval rozsáhlé pojednání *Mémoire sur les groupes des mouvements* [Pojednání o grupách pohybů][17] obsahující analýzu fyzikálních pohybů pevných těles v prostoru,[18] jež ho vedla ke klasifikaci grup pohybů. Teorii grup dále aplikoval na výsledky A. Bravaise[19] a dalších fyziků, které se týkaly krystalové mřížky. Roku 1870 vyšel v Paříži Jordanův spis *Traité des substitutions et des équations algébriques* [Traktát o substitucích a algebraických rovnicích][20] obsahující mimo jiné první systematický výklad Galoisovy teorie, který je důsledně vybudován na teorii grup permutací. Tato práce navíc přináší podrobné shrnutí všech dosavadních výsledků teorie grup včetně Jordanových vlastních výsledků. Věnuje se např. zobrazení jedné grupy na jinou nebo na sebe samu. Poprvé se zde objevuje termín homomorfismus, ovšem ve významu surjektivního homomorfismu, tj. epimorfismu.

Koncem dubna 1870 přijel na studijní pobyt do Paříže Felix Klein a spolu se Sophusem Lie se z Jordanovy knihy *Traité des substitutions* seznámili s teorií grup permutací. Oba pak studiu grup věnovali velkou pozornost a přenesli pojem grupy do geometrie.[21] Právě Jordanovo dílo zásadním způsobem ovlivnilo Kleinův přístup ke klasifikaci různých geometrií, dalo mu do rukou rozhodující algebraický aparát k vypracování Erlangenského programu.

F. Klein ve své tehdejší práci využil nejen nejnovější poznatky teorie grup, ale také některé podněty teorie invariantů. Klasická teorie invariantů vznikla kolem roku 1850 v Anglii. Mezi nejvýznamnější matematiky zabývající se teorií invariantů patřili již zmíněný Arthur Cayley a James Joseph Sylvester (1814–1897), který vytvořil řadu pojmů a termínů této teorie, včetně základního termínu *invariant.*

Pro Kleinův Erlangenský program se podnětnou inspirací stal Cayleyho spis *A sixth memoir upon quantics* [Šesté pojednání o kvantikách][22] z roku 1859, v němž bylo ukázáno, jak chápat metrické vlastnosti geometrických objektů z pohledu teorie invariantů. Základní Cayleyho přístup spočívá v myšlence, že vlastnosti geometrických útvarů, které jsou invariantní vůči geometrickým transformacím, se musí projevit také analyticky ve formě algebraických invariantů *kvantik*,[23] které daným geometrickým útvarům odpovídají.

[17] Viz Annali di matematica pura ed applicata 2(1868/69), 167–215, 322–345.

[18] C. Jordan zkoumal hlavně šroubový pohyb, otočení kolem osy a posunutí ve směru osy.

[19] Auguste Bravais (1811–1863), francouzský přírodovědec; zabýval se zejména krystalografií. Odvodil čtrnáct topologicky odlišných krystalových mřížek – tzv. *Bravaisovy mřížky.*

[20] Gauthier-Villars, Paris, 1870, 667 stran.

[21] F. Klein a S. Lie teorii grup v geometrii využili již roku 1871 v práci o W-křivkách v rovině, tj. křivkách, které jsou invariantní při jednoparametrické grupě komutativních lineárních transformací. Viz Klein F., Lie S., *Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen*, Mathematische Annalen 4(1871), 50–84; též [K8], 424–459.

[22] Viz Philosophical Transactions of the Royal Society of London 149(1859), 61–90.

[23] Pod pojmem *kvantika* (v originále *quantic*) A. Cayley rozuměl v dnešní terminologii formu, tj. homogenní polynom n-tého stupně v m neurčitých s konstantními koeficienty.

4.4 Geometrie

V následujících odstavcích uvedeme velmi stručný přehled vývoje geometrie až do vzniku Erlangenského programu.

Počátky geometrie jsou spojeny se zeměměřictvím, vytyčováním a konstrukcí staveb a využíváním geometrických tvarů, vzorů a ornamentů. Ve starém Egyptě a Mezopotámii se geometrie rozvíjela v souvislosti s řešením praktických problémů, které postupně vedly k počátkům teoretické geometrie. Vysokého stupně abstrakce dosáhlo studium geometrie v Řecku v 6. až 4. stol. př. n. l. Kolem roku 300 př. n. l. sepsal Eukleidés z Alexandrie (asi 325–265 př. n. l.) významné dílo *Základy* (řecky *Stoicheia*, latinsky *Elementa*) obsahující většinu tehdejších matematických poznatků. Eukleidův výklad je založen na logické dedukci jednotlivých matematických vět z definic, postulátů a axiomů. Geometrii obsaženou v *Základech* dnes označujeme jako *klasickou eukleidovskou geometrii*. Prakticky až do konce 18. století zůstávala předmětem studia celé řady matematiků a byla jediným tehdy známým „druhem" geometrie.

V 17. století došlo ke vzniku nových metod studia eukleidovské geometrie. Roku 1637 vydal francouzský matematik René Descartes (1596–1650) krátké filozofické pojednání *Discours de la méthode* [Rozprava o metodě],[24] v němž objasňuje svůj racionalistický přístup ke studiu přírody. Jedním ze tří dodatků k této práci byla kniha *La Géométrie* [Geometrie],[25] v níž autor načrtnul obecnou metodu propojující algebru a geometrii. Právě tato kniha prezentovala hlavní myšlenky *analytické geometrie*. Neobsahuje přitom ani kartézské souřadnice, ani rovnice přímek, ačkoliv jednotlivé rovnice 2. stupně jsou interpretovány jako rovnice vyjadřující kuželosečky. Její velká část je věnována teorii algebraických rovnic, mimo jiné je v ní obsaženo tzv. Descartovo pravidlo znamének. Hlavní Descartův přínos však spočívá v tom, že na eukleidovskou geometrii systematicky aplikoval algebru, v níž bylo v předcházejícím století dosaženo významných výsledků. Poznamenejme, že k základní myšlence analytické geometrie dospěl ve stejné době také francouzský matematik Pierre de Fermat (1601–1665). Jeho práce o tomto tématu však byla publikována se značným zpožděním a vývoj matematiky téměř neovlivnila.[26]

V první polovině 17. století se rovněž objevily první myšlenky *projektivní geometrie*. Jejich autorem je francouzský architekt Girard Desargues (1591–1661). Jeho spis *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan* [Předběžný náčrt pokusu o pochopení jevů při vzájemném

[24] Viz Descartes R., *Discours de la méthode, pour bien conduire sa raison, & chercher la vérité dans les sciences. Plus La Dioptrique, Les Meteores, et La Géométrie. Qui sont des essais de cete methode*, De l'imprimerie de Ian Maire, Leyde (Leiden), 1637, 78 stran.

[25] Český překlad včetně komentáře viz *René Descartes: Geometrie*, z francouzského originálu přeložil Jiří Fiala, Oikoymenh, Praha, 2010, xlvi + 106 stran (protilehlé stránky mají duplicitní stránkování). Kniha navíc obsahuje přetisk prvního latinského vydání z roku 1683 v překladu Franse van Schootena (1615–1660).

[26] Fermatovo pojednání *Ad locos planos et solidos isagoge* sepsané roku 1636 bylo uveřejněno až po jeho smrti. Viz Fermat P., *Varia opera mathematica*, apud Joannem Pech, Tolosae (Toulouse), 1679, 1–8.

styku kužele a roviny][27] z roku 1639 obsahuje některé základní pojmy a myšlenky projektivní geometrie, např. ideu nevlastních bodů. V roce 1648 uveřejnil G. Desargues větu o perspektivních trojúhelnících.[28] Ve své době však jeho dílo zůstalo stranou zájmu. Jednak jej zastínila rozvíjející se analytická geometrie, jednak mohl být překážkou Desarguesův neobvyklý způsob vyjadřování. Ve své práci totiž použil kolem sedmdesáti nových výrazů, z nichž většina byla převzata z botaniky a byla těžko srozumitelná. Jedinou výjimkou je pojem *involuce*, který se používá dodnes. Význam myšlenek, s nimiž G. Desargues přišel, se v plném rozsahu projevil až v 19. století.

Také koncem 18. století a na počátku 19. století vznikaly a rozvíjely se nové geometrické metody. S těmi nejdůležitějšími přišel francouzský matematik Gaspard Monge (1746–1818). V letech 1768 až 1780 působil na vojenské akademii v Mézières, kde ho přípravy přednášek o stavbě pevností přivedly k rozvinutí *deskriptivní geometrie* jako zvláštního odvětví geometrie. Mongeova hlavní idea spočívala v zobrazení trojrozměrných objektů pomocí vhodné projekce do dvou rovin, vodorovné a svislé. Své přednášky uveřejnil v roce 1799 v knize *Géométrie descriptive* [Deskriptivní geometrie].[29] Jako jeden z prvních matematiků začal využívat analytické metody při studiu prostorových křivek a ploch. Jeho práce o tomto tématu byly uveřejněny roku 1807 v knize *Application de l'analyse à la géométrie* [Aplikace analýzy na geometrii],[30] kterou lze považovat za první knihu o *diferenciální geometrii*. Forma výkladu je však značně odlišná od dnešního obvyklého přístupu. V Mongeových pracích lze nalézt kořeny tzv. syntetické i algebraické metody. U jeho žáků se obě metody oddělily; syntetická metoda vedla k *projektivní geometrii*, algebraická metoda se stala základem moderní *analytické a algebraické geometrie*. Hlavními představiteli algebraické geometrie byli v Německu již dříve zmiňovaní A. F. Möbius a J. Plücker, ve Francii M. Chasles a v Anglii A. Cayley.

Jedním z Mongeových žáků byl Jean Victor Poncelet, jenž je považován za zakladatele *projektivní geometrie*. Ovlivněn Mongeovým analytickým přístupem ke geometrii rozvinul novou geometrickou disciplínu, jejíž některé myšlenky naznačil již dvě století před ním G. Desargues. Ponceletův spis *Traité des propriétés projectives des figures* [Pojednání o projektivních vlastnostech útvarů],[31] který vyšel roku 1822 v Paříži, obsáhl všechny důležité pojmy tohoto nového odvětví geometrie, jako např. dvojpoměr, perspektivitu a projektivitu. Tato objemná kniha byla prvním souhrnným pojednáním o projektivní geometrii, která se stala již během dalšího desetiletí ucelenou matematickou teorií. Na Ponceletovy myšlenky navázali zejména švýcarský matematik Jacob Steiner a německý matematik Karl Georg Christian von Staudt (1798–1867).

[27] Publication par voie d'impression à cinquante exemplaires, source René Taton, Paris, 1639, 36 stran.

[28] Viz *Desarguesova věta* v kapitole 1 této disertační práce.

[29] Viz Monge G., *Géométrie descriptive. Leçons données aux Écoles Normales, l'an 3 de la Republique*, Baudouin, Paris, 1799, 132 stran.

[30] Viz Monge G., *Application de l'analyse à la géométrie, à l'usage de l'École impériale polytechnique*, Bernard, Paris, 1807, 416 stran.

[31] Viz Poncelet J. V., *Traité des propriétés projectives des figures: ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain*, Bachelier, Paris, 1822, 426 stran.

Zatímco všechny výše uvedené druhy geometrie „pouze“ vnášejí nové metody do studia geometrie eukleidovské, rodil se na počátku 19. století zcela nový typ geometrie, *geometrie neeukleidovská.*

Otázka, zda pátý Eukleidův postulát o rovnoběžkách je nezávislým axiomem, nebo zda jej lze odvodit z ostatních axiomů, zaměstnávala matematiky více než dva tisíce let. Někteří z nich vypracovali různé „důkazy“ nezávislosti pátého postulátu, které však v nějaké skryté formě tento postulát využívaly. V 18. století se řada matematiků neúspěšně pokoušela Eukleidův postulát o rovnoběžkách dokázat sporem. Dospěli přitom k některým myšlenkám geometrie neeukleidovské. Jmenujme alespoň italského matematika G. Saccheriho (1667–1733), švýcarské matematiky L. Bertranda (1731–1812) a J. H. Lamberta (1728–1777) a francouzského matematika A. M. Legendrea (1752–1833), kteří při svých pokusech dokázat platnost pátého postulátu sporem došli k větám, které dnes řadíme do neeukleidovské geometrie. Žádný z nich však nemůže být označen za objevitele nové geometrie, neboť jejich výsledky byly více méně izolované a nebyla mezi nimi patrná žádná hlubší souvislost.[32]

Německý matematik Carl Friedrich Gauss byl patrně prvním matematikem, který byl zcela přesvědčen o nezávislosti pátého postulátu, a tedy i o tom, že další geometrie, které by se zakládaly na volbě jiného axiomu, jsou logicky možné. Během svého života však o této problematice nic nepublikoval.

Za objevitele neeukleidovské geometrie jsou kromě C. F. Gausse považováni ruský matematik Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792–1856) a maďarský důstojník János Bolyai (1802–1860). N. I. Lobačevskij své myšlenky shrnul roku 1826 ve francouzsky psané práci *Exposition succinte des principles de la Géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des paralèlles* [Stručný výklad základů geometrie s přesným důkazem věty o rovnoběžkách], v níž poprvé ukázal, že axiom o rovnoběžkách není k vybudování geometrie nutný. K vytištění jeho práce však roku 1826 nedošlo pro nepochopení ze strany kolegů; výtah z tohoto rukopisu je obsažen v Lobačevského práci *O načalach geometrii* [O základech geometrie] uveřejněné v letech 1829 až 1830 v časopise kazaňské univerzity, na níž v té době N. I. Lobačevskij působil.

János Bolyai svůj spis o neeukleidovské geometrii dokončil již roku 1825; vyšel však až roku 1832 jako *Appendix, scientiam spatii absolute veram exhibens* [Dodatek vysvětlující absolutně přesnou nauku o prostoru] ke knize jeho otce Farkase (Wolfganga) Bolyaie (1775–1856) nazvané *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos* [Pojednání o základech matematiky pro pilné mladíky].[33] Jak

[32] O objevu neeukleidovské geometrie viz Pavlíček J. B., *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského*, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1953, 142–212.

[33] Viz Bolyai J., *Appendix, scientiam spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate axiomatis XI. Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica*; in Bolyai F., *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi*, Maros Vásárhely, 1832, 502 stran. Český překlad díla J. Bolyaie „Appendix“ viz Šedivý J. (ed.), *Světonázorová výchova v matematice*, Sborník vybraných referátů z letních škol MPS JČSMF, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1987, 253–296 (přeložili J. Pech a J. Šedivý).

N. I. Lobačevskij, tak i J. Bolyai ve svých pracích považovali pátý Eukleidův postulát za nezávislý axiom a vytvořili geometrii založenou na odlišném axiomu, podle něhož lze k dané přímce daným bodem, který na ní neleží, vést alespoň dvě různé rovnoběžky. Ještě několik desetiletí po svém objevu zůstávala neeukleidovská geometrie nesrozumitelnou a nepochopenou, mnoho vůdčích matematiků ji vůbec neznalo nebo ji odmítalo.

Prvním velkým matematikem, který plně pochopil její význam, byl Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), jenž vytvořil další typ neeukleidovské geometrie. Ve své přednášce *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* [O hypotézách, na nichž spočívají základy geometrie][34] pronesené roku 1854 na univerzitě v Göttingen představil obecnou metrickou geometrii, která zahrnuje celkem tři typy různých geometrií; vedle geometrie Eukleidovy a Lobačevského to je geometrie, jež byla později nazvána geometrií Riemannovou. V této geometrii se každé dvě přímky navzájem protínají, z čehož plyne, že neexistují rovnoběžky.

K obecnému uznání neeukleidovských geometrií došlo až po roce 1870. Přispěl k němu rovněž Felix Klein, který poukázal na to, že kdyby existovaly logické rozpory v neeukleidovské geometrii, byly by stejné rozpory obsaženy také v geometrii eukleidovské. Podle něho se pro Lobačevského geometrii používá také název *hyperbolická geometrie*, pro eukleidovskou název *parabolická geometrie* a pro Riemannovu název *eliptická geometrie*[35].

4.5 Erlangenský program

Nyní se věnujme přímo Erlangenskému programu. Jak již bylo řečeno, v říjnu 1872 předložil Felix Klein na univerzitě v Erlangen text své nástupní profesorské přednášky, která se později stala známou jako Erlangenský program. Sestává z úvodu, deseti kapitol a závěrečných poznámek.

V úvodu F. Klein nastínil tehdejší situaci v geometrii a uvedl, že ve vývoji geometrického bádání zaujímala v posledních padesáti letech přední místo geometrie projektivní. Zdůraznil, že vedle elementární (eukleidovské) a projektivní geometrie existuje celá řada dalších geometrií, např. geometrie reciprokých poloměrů[36] nebo geometrie racionálních transformací. Jeho cílem bylo zformulovat obecný

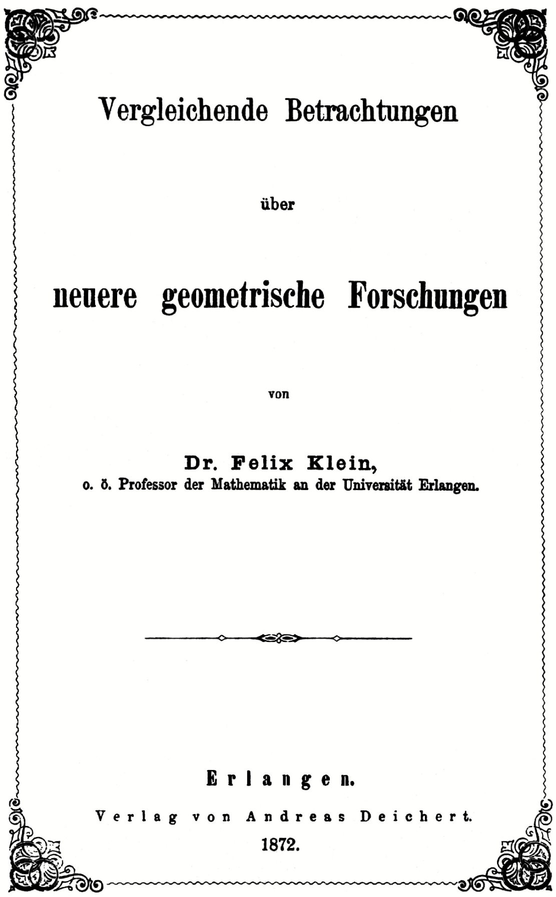
[34] Text přednášky viz Riemann B., *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, aus dem Nachlass des Verfassers mitgetheilt durch R. Dedekind, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13(1866/67), 133–150. Český překlad viz Riemann B., *O hypotézách, které leží v základech geometrie (spolu s vysvětlením H. Weyla)*, z německého originálu přeložil Petr Rys, Univerzita J. E. Purkyně, Pedagogická fakulta, Ústí nad Labem, 1999, 35 stran.

[35] Poznamenejme, že Riemannova geometrie zahrnuje vedle eliptické geometrie ještě *sférickou geometrii*, která při dimenzi 2 splývá s eukleidovskou geometrií na sféře, jestliže jako „přímky“ uvažujeme hlavní kružnice. V této geometrii se každé dvě „přímky“ protínají právě ve dvou bodech, a proto ve sférické geometrii neplatí věta, že každé dva různé body určují právě jednu přímku. Tím se geometrie sférická odlišuje od eliptické, v níž tato věta platí.

[36] Transformací reciprokými poloměry (*die Transformation durch reziproke Radien*) F. Klein rozuměl transformaci, která každému bodu P přiřadí bod P' ležící na přímce OP spojující bod P s počátkem O a pro niž je součin $OP \cdot OP'$ roven dané konstantě. Viz [K7], str. 203. Geometrie reciprokých poloměrů odpovídá v dnešní terminologii tzv. Möbiově inverzní geometrii.

princip, který by jednotlivé geometrie jasně a jednoznačně vymezil a logicky je uspořádal. Podle F. Kleina se jeho záměr jevil oprávněným z toho důvodu, že geometrie, svým obsahem jednotná, rozpadala se rychlým rozvojem v tehdejší době v řadu téměř oddělených disciplín, rozvíjejících se značně nezávisle jedna na druhé. Své geometrické úvahy přitom nepovažoval za nijak převratnou myšlenku, ve své práci chtěl jen přehledně vymezit a shrnout výsledky, jež do větší či menší míry jistě tušili mnozí další matematici.

> *Wenn wir es im Nachstehenden unternehmen, ein solches Prinzip aufzustellen, so entwickeln wir wohl keinen eigentlich neuen Gedanken, sondern umgränzen nur klar und deutlich, was mehr oder minder bestimmt von Manchem gedacht worden ist. Aber es schien um so berechtigter, derartige zusammenfassende Betrachtungen zu publiciren, als die Geometrie, die doch ihrem Stoffe nach einheitlich ist, bei der raschen Entwicklung, die sie in der letzten Zeit genommen hat, nur zu sehr in eine Reihe von beinahe getrennten Disciplinen zerfallen ist, die sich ziemlich unabhängig voneinander weiter bilden.*
>
> ([K2], str. 3–4)



Vergleichende Betrachtungen

über

neuere geometrische Forschungen

von

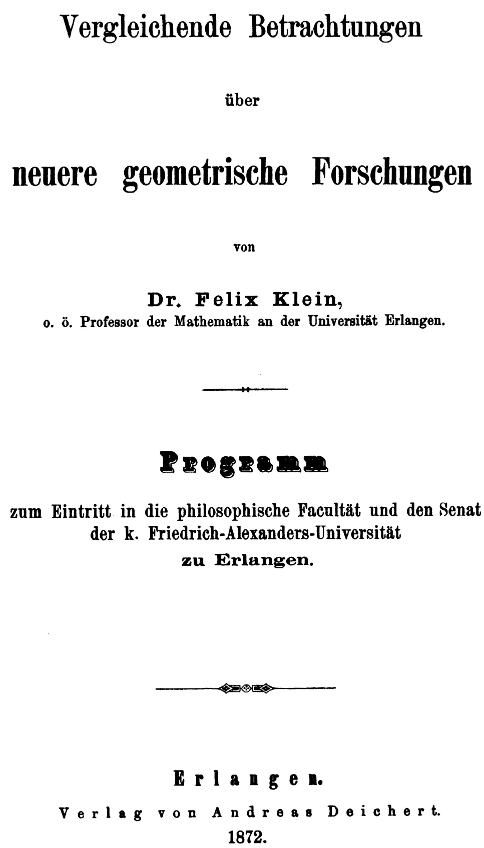
Dr. Felix Klein,

o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen.

Erlangen.

Verlag von Andreas Deichert.

1872.



Vergleichende Betrachtungen

über

neuere geometrische Forschungen

von

Dr. Felix Klein,

o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen.

Programm

zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der k. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen.

Erlangen.

Verlag von Andreas Deichert.

1872.

Obr. 35: Titulní a úvodní strana Erlangenského programu

První kapitola, v níž je zformulována základní myšlenka Kleinova přístupu ke klasifikaci různých geometrií, se týká grup prostorových transformací. F. Klein nejprve zavedl a vysvětlil pojem grupa transformací – rozuměl jím takovou soustavu transformací, která má tu vlastnost, že každá transformace složená z libovolných transformací této soustavy je rovněž její součástí.[37] V dalším textu uvažoval transformace prostoru, které zachovávají geometrické vlastnosti prostorového útvaru. Tyto transformace tvoří grupu, kterou F. Klein nazval *hlavní grupou* (v originále *die Hauptgruppe*). Geometrické vlastnosti se tedy nemění při těchto transformacích, tj. u prvků hlavní grupy. Naopak lze říci, že geometrické vlastnosti lze charakterizovat právě na základě jejich invariantnosti vůči transformacím z hlavní grupy. Geometrii poté definoval následujícím způsobem: *Je dán geometrický prostor a nějaká grupa transformací. Úkolem geometrie je zkoumat právě ty vlastnosti prostoru, které se nemění při transformacích dané grupy. Jinými slovy řečeno, každá geometrie je teorií invariantů dané grupy transformací.* Ocitujme tuto nejdůležitější pasáž v původním znění:

> *Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden. In Anlehnung an die moderne Ausdrucksweise, die man freilich nur auf eine bestimmte Gruppe, die Gruppe aller linearen Umformungen, zu beziehen pflegt, mag man auch so sagen: Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben. Man entwickele die auf die Gruppe bezügliche Invariantentheorie.* ([K2], str. 7)

F. Klein přitom zdůrazňoval, že grupu transformací lze volit zcela libovolně.

Grupy transformací umožňují podle F. Kleina nejen zkoumání a klasifikaci daných geometrií, ale rovněž zavedení nových geometrií. Základní geometrické pojmy jsou potom určeny jako invarianty zvolených grup transformací. Pokud však základní geometrické objekty dané geometrie určíme až na základě jejich invariantnosti vůči uvažované grupě transformací, nemůžeme předem definiční obor těchto transformací omezit právě na tyto objekty. F. Klein tedy musel definiční obor transformací stanovit nezávisle na nějakých objektech, čehož dosáhl tím, že za definiční obor zvolil obecně n-dimenzionální projektivní prostor (varietu).[38]

[37] V roce 1893 F. Klein dodatečně do 8. poznámky pod čarou přidal upřesnění, že uvedenou definici grupy transformací je třeba doplnit. Mlčky se totiž předpokládá, že taková grupa navíc obsahuje ke každé transformaci rovněž transformaci inverzní. V případě grup obsahujících nekonečně mnoho transformací to není nutné, avšak pro úplnost by tento požadavek měl být v definici explicitně uveden. Viz [K8], str. 462.

[38] F. Klein použil označení *die gesamte Mannigfaltigkeit* (něm. *die Mannigfaltigkeit* = rozmanitost), které v samotném Erlangenském programu nijak blíže neobjasnil. Vysvětlení lze nalézt v článku Klein F., *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, Mathematische Annalen 4(1871), 573–625. Zde definoval pojem *eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen* takto: Je-li dáno n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sestrojíme obor n-krát nekonečně mnoha systémů hodnot, které získáme tak, že proměnné x nezávisle na sobě necháme proběhnout reálné hodnoty od $-\infty$ do $+\infty$.

F. Klein tedy charakterizoval každou geometrii pomocí grupy geometrických transformací, které zachovávají základní vlastnosti dané geometrie. Např. klasickou eukleidovskou geometrii asocioval s grupou shodností, tj. s grupou transformací, které zachovávají eukleidovskou vzdálenost, a Lobačevského geometrii s grupou transformací, které zachovávají nějakou regulární, bodově reálnou kuželosečku. Ve svých úvahách však opomenul afinní geometrii, kterou lze přirozeným způsobem asociovat s grupou afinit. F. Klein se k tomuto opomenutí roku 1921 sebekriticky přiznal; ve svých přednáškách afinní grupu začal zdůrazňovat teprve od školního roku 1895/96. Jedním z důvodů mohla být skutečnost, že ve druhé polovině 19. století se pozornost matematiků soustředila na analytickou projektivní geometrii, jež byla na vrcholu svého rozkvětu, středem zájmu se staly kolineace (obecná lineární zobrazení), a afinity jako jejich speciální případ ustoupily do pozadí. Jejich postavení v geometrii se radikálně změnilo až ve 20. století.[39]

Ve druhé kapitole F. Klein zavedl uspořádání geometrií, a to tak, že relaci inkluze mezi jednotlivými grupami transformací přenesl na odpovídající geometrie. Pokud nějakou grupu nahradíme jinou grupou, která danou grupu obsahuje, zůstane zachována pouze část původních geometrických vlastností. Přechodem k rozšířené grupě nebo k vlastní podgrupě tak lze přejít od jednoho typu geometrie k jinému.[40] Erlangenský program tedy přinesl jednoduchý, ale důležitý princip uspořádání jednotlivých geometrií.

Ilustrujme nyní Kleinovy myšlenky na příkladech. Nechť M je množina všech bodů nějaké roviny. Uvažujme množinu G všech transformací množiny M, která obsahuje právě všechny transformace složené z osových souměrností (a tedy rovněž všechna posunutí a otočení). Protože složení libovolných transformací z množiny G je opět prvkem množiny G a ke každé transformaci z množiny G existuje v této množině transformace inverzní, je množina G grupou. Jí odpovídající geometrií je *klasická eukleidovská geometrie*, G je grupa shodností. Protože takové vlastnosti jako délka, obsah, shodnost, podobnost, kolmost, rovnoběžnost a kolineárnost bodů jsou invariantní vzhledem ke grupě G, studuje eukleidovská geometrie právě tyto vlastnosti.

Pokud grupu G rozšíříme na nejmenší grupu obsahující navíc všechny stejnolehlosti, získáme grupu podobností. Vzhledem k této grupě již délka, obsah a shodnost invariantní nezůstávají, a tedy se v této geometrii nestudují. Podobnost, kolmost, rovnoběžnost a kolineárnost bodů se však stále zachovávají, a jsou proto předmětem studia této geometrie. Obdobně projektivní geometrie studuje ty vlastnosti, které zůstávají invariantní vzhledem ke grupě projektivních transformací. Z výše zmíněných vlastností se v tomto případě zachovává pouze kolineárnost bodů. Významným invariantem této grupy je také dvojpoměr čtyř kolineárních bodů.

---

[39] Zásluhu na tom má Hermann Weyl (1885–1955), jenž ve svém díle *Raum – Zeit – Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie* [We1] pojednal afinní geometrii axiomaticky, v souvislosti s geometrií vektorového prostoru.

[40] F. Klein tento přístup přiblížil na příkladu sférické trigonometrie, již lze získat z eukleidovské geometrie přechodem od grupy shodností k její podgrupě, která zachová invariantní nějaký bod. Podobným způsobem by bylo možné od projektivní geometrie přejít ke geometrii afinní, pokud bychom místo grupy kolineací uvažovali její podgrupu, která zachová invariantní nějakou rovinu.

V následující tabulce (viz tab. 2) je vybráno pět základních geometrických vlastností a u každé ze čtyř zvolených grup transformací je uvedeno, zda uvažované transformace dané vlastnosti zachovávají, či nikoliv.

vlastnost/grupa	*grupa shodností*	*grupa podobností*	*grupa afinit*	*grupa projektivit*
poloha	mění se	mění se	mění se	mění se
velikost	zachována	mění se	mění se	mění se
kolmost	zachována	zachována	mění se	mění se
rovnoběžnost	zachována	zachována	zachována	mění se
kolineárnost	zachována	zachována	zachována	zachována

Tab. 2: Invarianty grup transformací

Jednotlivé grupy lze relací inkluze uspořádat takto:

$$\begin{matrix}\text{grupa}\\ \text{shodností}\end{matrix} \subset \begin{matrix}\text{grupa}\\ \text{podobností}\end{matrix} \subset \begin{matrix}\text{grupa}\\ \text{afinit}\end{matrix} \subset \begin{matrix}\text{grupa}\\ \text{projektivit}\end{matrix}$$

Každé grupě přitom přísluší odpovídající geometrie. Grupě shodností odpovídá eukleidovská geometrie, grupě podobností odpovídá „podobnostní“ geometrie, grupě afinit odpovídá afinní geometrie a grupě projektivit odpovídá projektivní geometrie. Z výše uvedeného schématu inkluzí grup transformací tak získáme následující uspořádání klasických geometrií:

$$\begin{matrix}\text{eukleidovská}\\ \text{geometrie}\end{matrix} \supset \begin{matrix}\text{podobnostní}\\ \text{geometrie}\end{matrix} \supset \begin{matrix}\text{afinní}\\ \text{geometrie}\end{matrix} \supset \begin{matrix}\text{projektivní}\\ \text{geometrie}\end{matrix}$$

Kleinova jednotná definice vévodila geometrii přibližně padesát let. Dnes je již zřejmé, že všechny typy geometrií do jeho schématu začlenit nelze, příkladem jsou algebraická nebo diferenciální geometrie. Navíc je třeba upřesnit, že geometrie není jednoznačně určena pouze geometrickým prostorem, v němž pracujeme, a volbou nějaké grupy transformací. Je ještě navíc potřeba specifikovat, které geometrické objekty bereme za základní stavební prvky uvažované geometrie. Pokud uvažujeme např. projektivní rovinu a grupu projektivních transformací, nezáleží na tom, zda za základní prvky vezmeme body nebo přímky, vždy získáme stejný geometrický systém (plyne z platnosti principu duality). V rovinné eukleidovské geometrii, v níž princip duality neplatí, bychom však získali v závislosti na volbě základních elementů dva různé geometrické systémy.

Např. pokud trojúhelník zadáme pomocí jeho stran, které leží na třech různých přímkách, z nichž každé dvě jsou různoběžné, pak „součet vzdáleností všech dvojic stran“, tj. součet velikostí úhlů, které strany navzájem svírají, je pro všechny trojúhelníky stejný; v obloukové míře je roven 2π rad. Na druhou stranu, pokud trojúhelník určíme pomocí trojice různých, nekolineárních bodů, pak součet jejich vzdáleností, tj. obvod uvažovaného trojúhelníku, je pro různé trojúhelníky různý. Každý geometrický systém je tedy zcela jednoznačně určen volbou tří základních charakteristik – geometrického prostoru, grupy transformací, které zachovávají podstatné vlastnosti objektů, a základního prvku uvažované geometrie, z něhož jsou složeny geometrické objekty.

Z hlediska teorie grup lze význam volby základního prvku uvažované geometrie vysvětlit následovně. Uvažujme všechny transformace obsažené ve zvolené grupě transformací G, které zachovávají základní prvek uvažované geometrie (tj. zobrazí jej opět na sebe). Takové transformace zřejmě tvoří grupu, která je podgrupou grupy G – nazývá se *stabilizační podgrupou* příslušející uvažované geometrii se zvoleným základním prvkem. Pokud tedy např. grupa G je tvořena všemi shodnostmi eukleidovské roviny a základním prvkem geometrie je bod, potom stabilizační podgrupa bude tvořena všemi otočeními kolem uvažovaného bodu. Pokud však základním prvkem bude přímka, budou stabilizační podgrupu tvořit všechna posunutí ve směru zvolené přímky, osová souměrnost podle zvolené přímky a všechny středové souměrnosti podle bodů zvolené přímky. V řeči teorie grup budou dva geometrické systémy totožné, pokud se budou shodovat i ve stabilizačních podgrupách. Základní prvky takových geometrických systémů se přitom mohou lišit, příkladem je výše zmiňovaná projektivní geometrie.[41]

Další kapitoly Erlangenského programu již okomentujeme jen stručně.

Třetí kapitola je věnována projektivní geometrii. F. Klein zde mimo jiné uvedl, že každá prostorová transformace, která nenáleží hlavní grupě, může být využita k přenesení vlastností známého útvaru na útvar nový. Kromě projektivních transformací uvažoval také tzv. dualistické a imaginární transformace; současně s nimi zavedl imaginární prvky.

Ve čtvrté kapitole se F. Klein zabýval „přenášením prostřednictvím zobrazení“ (v originále *Übertragung durch Abbildung*). Uvažoval varietu A jako definiční obor transformací grupy B. Pokud pomocí nějakého zobrazení přejdeme od variety A k jiné varietě A', změníme tímto zobrazením grupu B na grupu B', jejíž transformace se vztahují k varietě A'. Vlastnosti útvarů variety A se přenesou na odpovídající útvary variety A'. Tuto myšlenku ilustroval na příkladech.

Pátá kapitola je mimo jiné věnována tzv. přímkové geometrii. Již Kleinův učitel J. Plücker poukázal roku 1865 na to, že geometrie nemusí být vybudována pouze na bodu jako základním prvku; přímky, roviny nebo kružnice lze též užít jako základní prvky nějaké geometrie. F. Klein v této kapitole zdůraznil, že základními prvky geometrie mohou být libovolné útvary uvažované variety.

[41] Poznamenejme, že F. Klein považoval dva geometrické prostory M a M', jimž přísluší grupy transformací G a G', za identické, pokud existuje takové vzájemně jednoznačné zobrazení $f\colon M \to M'$, které indukuje izomorfismus $\varphi\colon G \to G'$ mezi grupami transformací.

Als Element der geraden Linie, der Ebene, des Raumes, überhaupt einer zu untersuchenden Mannigfaltigkeit kann statt des Punctes jedes in der Mannigfaltigkeit enthaltene Gebilde: die Punctgruppe, ev. die Curve, die Fläche u. s. w. verwandt werden. ... Aber so lange wir der geometrischen Untersuchung dieselbe Gruppe von Aenderungen zu Grunde legen, bleibt der Inhalt der Geometrie unverändert, das heisst, jeder Satz, der bei einer Annahme des Raumelements sich ergab, ist auch ein Satz bei beliebiger anderer Annahme, nur die Anordnung und Verknüpfung der Sätze ist geändert. Das Wesentliche ist also die Transformationsgruppe; die Zahl der Dimensionen, die wir einer Mannigfaltigkeit beilegen wollen, erscheint als etwas Secundäres.
([K2], str. 16)

Dále zde uvedl souvislost projektivní geometrie roviny s teorií binárních forem, neboli s projektivní geometrií přímky, kterou lze ztotožnit s projektivní geometrií kuželosečky nahrazením každého bodu přímky dvojicí bodů, v nichž uvažovaná přímka protne danou kuželosečku.

Die Theorie der binären Formen und die projectivische Geometrie der Ebene unter Zugrundelegung eines Kegelschnittes sind gleichbedeutend. ... Die Theorie der binären Formen und die allgemeine projectivische Massgeometrie in der Ebene sind dasselbe. ([K2], str. 17)

F. Klein přitom odkázal na tzv. Hesseův princip (v originále *das Hessesche Übertragungsprinzip*).[42] Obdobným způsobem, s využitím homogenních souřadnic, našel souvislost mezi projektivní geometrií prostoru a teorií bikvadratických (kvaternárních) forem.

V šesté kapitole se F. Klein zabýval geometrií reciprokých poloměrů (inverzní geometrií) a porovnával ji s projektivní geometrií. Uvedl, že v projektivní geometrii jsou základními pojmy bod, přímka a rovina, zatímco kružnice, resp. sféra jsou pouze speciálními případy kuželosečky, resp. plochy druhého stupně. Naproti tomu v geometrii reciprokých poloměrů jsou základními pojmy bod, kružnice a sféra; přímka a rovina jsou speciálními případy útvarů, které obsahují nekonečně vzdálený (nevlastní) bod.[43] Dále našel souvislost mezi geometrií reciprokých poloměrů v rovině a projektivní geometrií na ploše druhého stupně (na kvadrice). V závěru kapitoly se věnoval reprezentaci geometrie reciprokých poloměrů pomocí teorie binárních forem komplexních proměnných.

V sedmé kapitole F. Klein navázal na některé předchozí myšlenky a dále je rozvíjel. Připomněl, že geometrii roviny lze propojit s geometrií na kuželosečce tím, že přímkám roviny přiřadíme dvojice bodů, v nichž přímky danou kuželosečku protínají. Obdobně můžeme dát do souvislosti geometrii prostoru s geometrií na

[42] Ludwig Otto Hesse (1811–1874), německý matematik. Hesseův princip je založen na skutečnosti, že pokud přímku v projektivní rovině zobrazíme z nějakého bodu libovolné kuželosečky na tuto kuželosečku, potom kolineace přímky jsou určeny kolineacemi roviny, které kuželosečku zobrazí samu na sebe, a naopak. Toto zobrazení určuje izomorfismus mezi grupou kolineací přímky a grupou kolineací roviny, které danou kuželosečku zachovávají. Viz Hesse L. O., *Ein Uebertragungsprincip*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 66(1866), 15–21.

[43] Elementární geometrii získáme, pokud tento bod pevně zafixujeme.

sféře tím, že každé rovině prostoru přiřadíme kružnici, ve které uvažovaná rovina danou sféru protíná. Pomocí stereografické projekce lze geometrii na sféře převést na geometrii v rovině; proto si budou navzájem odpovídat prostorová geometrie, jejímiž základními prvky jsou roviny a jejíž grupa obsahuje lineární transformace zachovávající danou sféru, a rovinná geometrie, jejímiž základními prvky jsou kružnice a jejíž grupou je grupa reciprokých poloměrů. Uvedenou prostorovou geometrii dále zobecnil; uvažoval obsáhlejší grupu a dospěl k tzv. Lieově sférické geometrii. Na závěr zmínil, že výsledné rozšíření lze pomocí určitého zobrazení přenést také na rovinnou geometrii.

Osmá kapitola přibližuje další metody založené na zkoumání nějaké grupy bodových transformací. Samostatný odstavec se týká tehdy ještě relativně neznámé topologie (v originále *die Analysis situs*), kterou F. Klein charakterizoval jako teorii invariantů spojitých bodových transformací. Dále se věnoval geometrii racionálních transformací; ukázal, že na přímce jsou racionální transformace totožné s lineárními transformacemi, v rovině se jedná o tzv. Cremonovy transformace, které lze vytvořit složením kvadratických transformací. V závěru kapitoly se zabýval grupou všech bodových transformací; uvedl, že libovolná bodová transformace nekonečně malé části prostoru vždy odpovídá nějaké lineární transformaci.

V deváté kapitole F. Klein pojednal o grupě všech kontaktních transformací. Kontaktní transformací rozuměl každou substituci, která proměnné x, y, z a jejich parciální diferenciální podíly označené $p = \frac{dz}{dx}$ a $q = \frac{dz}{dy}$ vyjadřuje pomocí nových veličin x', y', z', p', q'. Název je odvozen ze skutečnosti, že dotýkající se plochy se při těchto transformacích zobrazí opět na plochy, které se dotýkají. Pokud za základní prvky geometrie vezmeme body, lze kontaktní transformace rozdělit do tří skupin podle toho, zda uvažované transformace bodům přiřazují opět body (tj. jedná se o bodové transformace), nebo křivky, nebo plochy. F. Klein ve svých dalších úvahách volil za základní prvek prostoru systém hodnot x, y, z, p, q. Kontaktní transformace lze poté ekvivalentně definovat jako právě ty substituce pěti proměnných x, y, z, p, q, které zachovávají vztah $dz - p\,dx - q\,dy = 0$. Předmětem Kleinova dalšího zkoumání byly variety, které lze vyjádřit pomocí soustavy parciálních diferenciálních rovnic prvního stupně.

Poslední, desátá kapitola rozšiřuje pojem „varieta“. F. Klein zde připomněl, že všechny geometrické úvahy provedené v prostoru lze přenést také na libovolnou varietu. Dále se krátce zmínil o jedné oblasti moderní algebry, kterou je teorie invariantů. V závěru kapitoly demonstroval svůj geometrický přístup k prostorům s konstantní Gaussovou křivostí. Důvodem je souvislost s Lobačevského hyperbolickou geometrií, jež se lokálně realizuje na prostorech se zápornou konstantní křivostí, a s Riemannovou eliptickou geometrií, jež se lokálně realizuje na prostorech s kladnou konstantní křivostí.

Na závěr F. Klein připojil ještě sedm poznámek. V prvních dvou poukázal na svůj hlavní záměr, jenž ho přivedl k využití teorie grup v geometrii; doufal, že se mu podaří vnést do roztříštěné geometrie opět řád, jednotu a nové perspektivy. První poznámka pojednává o rozporu mezi syntetickým a analytickým přístupem v geometrii, druhá kritizuje tehdejší přílišnou separaci geometrie do jednotlivých, úzce zaměřených disciplín. Pátá poznámka se týká neeukleidovské geometrie.

První reakce na Erlangenský program

F. Klein v Erlangenském programu prezentoval svůj jednotný pohled na geometrii. Do té doby byly jednotlivé geometrie (eukleidovská, projektivní, hyperbolická, eliptická) zkoumány odděleně. Kleinovy výsledky však nebyly ihned pochopeny a přijaty. Ještě dvacet let poté zůstávalo toto jeho dílo široce neznámé; zmínky o Erlangenském programu z uvedené doby nacházíme spíše výjimečně. Lze se domnívat, že s Kleinovými geometrickými výsledky byla krátce po roce 1872 nejlépe seznámena italská matematická komunita.[44] Později bylo zjištěno, že několik dalších matematiků, např. Henri Poincaré (1854–1912),[45] Wilhelm Karl Joseph Killing (1847–1923)[46] a Eduard Study (1862–1922),[47] přišlo nezávisle na Kleinovi na podobné myšlenky. Erlangenský program se stal všeobecně známým až poté, co jej F. Klein znovu otiskl v roce 1893 v časopisu *Mathematische Annalen*.

Česká matematická komunita nevěnovala Erlangenskému programu dlouhou dobu prakticky žádnou pozornost. V *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky*, jenž začal vycházet právě v roce 1872, není z té doby o Kleinově programu ani krátká zmínka. První referenci nalezneme v časopisu až v roce 1906 v rámci recenze učebnice *Lehrbuch der analytischen Geometrie*, jejímiž autory jsou L. Heffter a C. Koehler.[48] Kniha obsahuje výklad základů geometrie v duchu základní myšlenky Erlangenského programu, recenzent Jan Vojtěch (1879–1953) proto nejprve krátce popsal Kleinův „důležitý princip, jenž poskytuje neobyčejně jasný pohled na podstatu celé geometrie i jednotlivých jejích částí“.

Možná pod vlivem výše uvedené knihy sepsal Jan Vojtěch článek *Geometrické transformace prvního stupně v rovině a jich grupy*, jenž byl na pokračování uveřejněn v následujících dvou číslech časopisu.[49] Obsahuje systematický přehled

[44] O vlivu Erlangenského programu na geometrické práce vybraných italských matematiků viz Boi L., *The influence of the Erlangen Program on Italian geometry, 1880–1890: n-dimensional geometry in the works of d'Ovidio, Veronese, Segre and Fano*, Archives Internationales d'Histoire des Sciences 40(1990), 30–75.

[45] H. Poincaré byl ve své práci ovlivněn dílem C. Jordana a objevem neeukleidovské geometrie. Roku 1880 dospěl k závěru, že geometrie studuje grupy operací tvořených takovými přemístěními geometrického objektu, které ho nedeformují. Svoji myšlenku vyložil v článku obsahujícím základy teorie Fuchsových funkcí a diferenciálních rovnic. Článek zaslal do soutěže vypsané pařížskou akademií věd, ale protože žádnou cenu nezískal, nebyl tehdy publikován; byl objeven a prozkoumán teprve o sto let později. Viz Gray J. J., *The three supplements to Poincaré's prize essay of 1880 on Fuchsian functions and differential equations*, Archives Internationales d'Histoire des Sciences 32(1982), 221–235.

[46] W. Killing pod vlivem prací H. Helmholtze a B. Riemanna studoval jednotlivé geometrie z pohledu teorie grup; viz Killing W., *Erweiterung des Raumbegriffes*, Programm Braunsberg, 1884, 21 stran. Zatímco F. Klein se soustředil na klasifikaci známých geometrií, W. Killing zdůrazňoval potřebu systematické a úplné klasifikace všech možných forem prostoru. Jeho výzkumný program zahrnoval mimo jiné problém kompletní klasifikace všech Lieových algeber nad tělesem komplexních čísel.

[47] E. Study byl v kontaktu se S. Lie, pod vlivem Grassmannovy knihy nazvané *Die Lineale Ausdehnungslehre* (1844) rozpracoval algebraické pojetí geometrie s využitím teorie invariantů.

[48] Viz Heffter L., Koehler C., *Lehrbuch der analytischen Geometrie*, Band I: *Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1905, 517 stran. Recenze viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 35(1906), 134–136.

[49] Viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 35(1906), 249–275, 377–397.

všech geometrických transformací v rovině. J. Vojtěch se zaměřil na vyšetřování transformací, které vzniknou skládáním jednoduchých transformací – uvažoval středové souměrnosti, translace, osové souměrnosti (pravoúhlé i šikmé), rotace a homothetie; postupně dospěl i k afinním a obecným kolineárním transformacím. Své výsledky dokládal na základě názorných konstrukcí, uvedl a odvodil však i analytická vyjádření všech transformací.

4.6 Elementární matematika

V letech 1908 až 1911 postupně vyšly tři díly Kleinových přednášek *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* [Elementární matematika z vyššího hlediska], které byly určeny středoškolským učitelům a studentům. Každý díl má tři části. První je věnován aritmetice, algebře a analýze, obsahuje přednášky konané na univerzitě v Göttingen v zimním semestru 1907/08; byl vydán roku 1908. Druhý díl se týká geometrie, obsahuje přednášky konané v letním semestru 1908; byl vydán roku 1909. Ve třetím díle jsou mimo jiné studovány funkce reálné proměnné (zejména jejich znázornění v pravoúhlé soustavě souřadnic) a rovinné křivky; byl vydán roku 1911.

Ocitujme úvodní text z Kleinovy předmluvy k prvnímu vydání prvního dílu.[50] F. Klein v něm komentuje, komu je tato kniha zejména určena, tedy učitelům vyšších středních škol a studentům. V závěru úryvku specifikuje svůj zamýšlený záměr, tj. vyložit v knize obsah a základy matematiky s ohledem na skutečné potřeby výuky, a to z hlediska moderní vědy, ale zároveň co nejjednodušším, nejpodnětnějším a nejpřesvědčivějším způsobem.

> *Die neue Autographie, welche ich hiermit dem mathematischen Publikum und ganz besonders den Lehrern der Mathematik an unseren höheren Schulen unterbreite, ist als eine erste Fortsetzung jener Vorträge „über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen", speziell über „die Organisation des mathematischen Unterrichts" gedacht, die ich im vorigen Jahre mit Herrn Schimmack zusammmen im Teubnerschen Verlag habe erscheinen lassen. An die damals gegebene Übersicht über die verschiedenen Formen der Unterrichtsaufgabe, die dem Mathematiker gestellt sein kann, sollen sich jetzt, allgemein zu reden, Entwicklungen über den Unterrichtsstoff selbst schließen, in denen ich bemüht bin, dem Lehrer – oder auch dem reiferen Studenten – Inhalt und Grundlegung der im Unterricht zu behandelnden Gebiete, unter Bezugnahme auf den tatsächlichen Unterrichtsbetrieb, vom Standpunkte der heutigen Wissenschaft in möglichst einfacher und anregender Weise überzeugend darzulegen.*

[50] Viz Klein F., *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Teil I: *Arithmetik, Algebra, Analysis*, Vorlesungen gehalten im Wintersemester 1907–08 von F. Klein, Ausgearbeitet von E. Hellinger, B. G. Teubner, Leipzig, 1908; citace z první strany nestránkované předmluvy.

Ve druhém dílu jsou mimo jiné obsaženy základní myšlenky Erlangenského programu. V jeho první části F. Klein nejprve zkoumá geometrické prostory a jejich základní vlastnosti. Ve druhé se podrobně věnuje jednotlivým typům geometrických transformací a jejich analytickým vyjádřením.[51] Poslední, třetí část představuje systematické pojednání o geometrii a jejích základech a zahrnuje základní myšlenky klasifikace geometrií pomocí geometrických transformací.

F. Klein zde nejprve uvažuje „speciální lineární substituce" – posunutí, otáčení, středovou a osovou souměrnost a podobná zobrazení. Geometrii poté definuje jako teorii invariantů těchto lineárních substitucí. Uvádí některé geometrické vlastnosti, které se při těchto transformacích nemění, jejich souhrn nazývá metrickou geometrií. Poté odvozuje další „druhy" geometrie. Začíná afinními transformacemi, které jsou zobecněním výše uvedených lineárních substitucí, a dochází k afinní geometrii, jakožto teorii invariantů afinních transformací. Poté uvažuje projektivní transformace, jež afinní transformace zahrnují jako speciální případ. Geometrické vlastnosti, které se při projektivních transformacích nemění, se zřejmě zachovávají také při transformacích afinních. Tím lze z afinní geometrie vyčlenit geometrii projektivní, jako teorii invariantů projektivních transformací.[52]

Pomocí stejného principu odvozuje F. Klein geometrii reciprokých poloměrů a topologii, kterou nazývá *analysis situs*. Tento přístup dále precizuje na základě pojmu grupa a formuluje obecný princip umožňující charakterizovat jednotlivé geometrie.

4.7 Pokračovatelé Felixe Kleina

V první polovině 20. století na Kleinovu práci v oblasti klasifikace geometrií navázali, pouze s částečným úspěchem, Američan Oswald Veblen (1880–1960) a Francouz Élie Cartan (1869–1951), kteří se zabývali rozšířením a zobecněním Kleinovy definice tak, aby zahrnovala i ty geometrie, které Kleinův Erlangenský program neobsáhl.

É. Cartan v roce 1922 vypracoval teorii zobecněných prostorů, roku 1926 popsal teorii symetrických prostorů. Úvahy o prostorech ho přivedly na myšlenku grupové koncepce geometrie, která zahrnovala nejen všechny geometrie obsažené v Erlangenském programu, ale rovněž geometrii Riemannovu a některé další příbuzné teorie. Cartanův vědecký program v geometrii navíc zahrnoval teorii Lieových grup mnohem důkladněji než geometrie ve smyslu Kleinovy definice. É. Cartan rovněž prohloubil Kleinovu definici ekvivalence geometrií; ukázal, že ekvivalentní geometrie odpovídají právě takovým grupám, které mají stejnou strukturu.[53]

---

[51] F. Klein zde studuje zejména afinní a projektivní transformace, transformaci reciprokými poloměry, stereografickou a Mercatorovu projekci, duální, kontaktní a imaginární transformace.

[52] F. Klein tento svůj postup, vyčlenění afinní a projektivní geometrie z geometrie metrické, přirovnává k postupu chemika, který pomocí stále silnějších činidel izoluje ze své sloučeniny stále hodnotnější složky. V jeho případě byly činidlem nejprve afinní, a poté projektivní transformace.

[53] S. Lie v roce 1888 dokázal, že dvě grupy mají stejnou strukturu právě tehdy, když jejich parametrické grupy lze ztotožnit vhodnou transformací parametrů. Viz Lie S., *Theorie der Transformationsgruppen*, erster Abschnitt, unter Mitwirkung von Friedrich Engel, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1888, 632 stran.

Podrobně o Cartanových výsledcích pojednává kniha [Sh], z níž ocitujme v anglickém překladu Cartanova slova z roku 1939:

> *In the wake of the movement of ideas which followed the general theory of relativity, I was led to introduce the notion of new geometries, more general than Riemannian geometry, and playing with respect to the different Klein geometries the same role as the Riemannian geometries play with respect to Euclidean space. The vast synthesis that I realized in this way depends of course on the ideas of Klein formulated in his celebrated Erlangen programmme while at the same time going far beyond it since it includes Riemannian geometry, which had formed a completely isolated branch of geometry, within the compass of a very general scheme in which the notion of group still plays a fundamental role.* ([Sh], str. 171)

I na začátku 21. století se někteří matematici ke Kleinovým úvahám o klasifikaci geometrií na základě teorie grup stále vracejí a dále je rozvádějí a zobecňují. V této souvislosti uveďme alespoň krátký článek *An extension of Erlangen Program*, jehož autorem je rumunský matematik Sorin Lugojan.[54] Grupy transformací uvažované v Kleinově Erlangenském programu rozšířil na „pseudogrupy“ transformací, které s každou transformací obsahují i transformaci k ní inverzní a navíc z definice splňují ještě dalších pět podmínek. Pseudogrupy transformací se dnes úspěšně využívají v teorii parciálních diferenciálních rovnic.

Charakter přímého zobecnění Erlangenského programu má v dnešní době tzv. teorie kategorií. Tato problematika však již výrazně překračuje zaměření této disertační práce.

4.8 Fyzikální souvislosti

Výchozí myšlenka Kleinova Erlangenského programu, tj. důraz na invarianty při geometrických transformacích, se z geometrie brzy rozšířila i do mechaniky a matematické fyziky a vedla až ke speciální teorii relativity. Souvisí totiž s problematikou vyjádření fyzikálních zákonů nezávisle na souřadném systému.

Základem klasické mechaniky je tzv. *Galileiho princip relativity* zformulovaný v 17. století, který uvádí, že všechny inerciální vztažné soustavy[55] jsou pro popis mechanických dějů rovnocenné, ve všech platí stejné zákony mechaniky a rovnice, které je popisují, mají ve všech takových soustavách stejný tvar. To znamená, že ve všech vztažných soustavách, které jsou vzhledem k povrchu Země v rovnoměrném přímočarém pohybu, probíhají všechny mechanické děje úplně stejně jako v soustavě spojené s povrchem Země. Pozorovatel jedoucí vlakem stálou rychlostí po přímé vodorovné trati, pokud nemá možnost pozorovat okolí, žádným mechanickým pokusem nezjistí, zda se vztažná soustava spojená s vlakem

[54] Viz Analele Universităţii Bucureşti, Matematică 52(2003), 49–54.

[55] Inerciální vztažné soustavy (lat. *inertia* = setrvačnost) jsou vztažné soustavy, v nichž izolovaná tělesa zůstávají v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu. V inerciálních vztažných soustavách platí Newtonovy pohybové zákony.

pohybuje, jak velkou rychlostí a kterým směrem. Pozorovatel uvnitř soustavy konající rovnoměrný přímočarý pohyb svůj pohybový stav nerozliší od klidu.

Galileiho princip relativity z pohledu transformací vlastně uvádí, že všechny fyzikální vlastnosti se zachovávají při těch transformacích fyzikálního systému, které mu udělují konstantní rychlost. Takové transformace se nazývají *Galileiho transformace*. Galileiho transformaci mezi prostorovými souřadnicemi x, y, z a časem t naměřenými v soustavě, která je v klidu, a jim odpovídajícími souřadnicemi x', y', z' a časem t' naměřenými v soustavě, která se pohybuje ve směru osy x rovnoměrně přímočaře rychlostí v, lze popsat vztahy

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Jinými slovy, fyzikální vlastnosti těles můžeme charakterizovat jako právě ty vlastnosti těles, které se zachovávají při Galileiho transformacích. Lze přitom dokázat, že Galileiho transformace tvoří grupu. Galileiho princip relativity tedy lze vyjádřit v geometrické řeči, která je v podstatě ekvivalentní Kleinově definici geometrie. Galileiho princip relativity tak vlastně říká, že fyzika, přesněji klasická mechanika, jako věda zkoumá takové fyzikální vlastnosti trojrozměrného prostoru, které jsou invariantní vzhledem ke grupě Galileiho transformací. Ukazuje se tedy, že klasickou mechaniku lze ztotožnit s jistou geometrií trojrozměrného prostoru vhodnou volbou grupy transformací.

Moderní fyzika počátku 20. století Galileiho princip relativity nahradila obecnějším, tzv. *Einsteinovým principem relativity*, který se stal základem speciální teorie relativity.[56] Je rozšířením Galileiho (mechanického) principu relativity i na jevy elektrické, magnetické nebo optické. Přitom je potřeba nahradit Galileiho transformace komplikovanějšími, tzv. *Lorentzovými transformacemi*, které rovněž tvoří grupu. Lorentzovu transformaci mezi prostorovými souřadnicemi x, y, z a časem t naměřenými v soustavě, která je v klidu, a jim odpovídajícími souřadnicemi x', y', z' a časem t' naměřenými v soustavě, která se pohybuje ve směru osy x rovnoměrně přímočaře rychlostí v, lze vyjádřit vztahy

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

kde c je rychlost světla ve vakuu.

Pokud tedy přecházíme od klasické mechaniky, jejímiž hlavními představiteli jsou Galileo Galilei a Isaac Newton, k Einsteinově speciální teorii relativity, mění se tím vlastně náš geometrický pohled na okolní svět; příslušný geometrický systém je v souladu s Kleinovými myšlenkami určen volbou grupy transformací, které zachovávají fyzikální zákony platné v rámci uvažované fyziky. Při Lorentzových transformacích jsou invariantní tzv. Maxwellovy rovnice elektrodynamiky, které popisují základní vlastnosti elektromagnetického pole.[57]

[56] Albert Einstein (1879–1955) speciální teorii relativity poprvé představil v článku *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik 322(1905), 891–921. Více informací viz *Albert Einstein: Teorie relativity*, úvodní slovo Jan Novotný, edice Quantum, svazek 3, Vysoké učení technické v Brně, Nakladatelství VUTIUM, Brno, 2005, 210 stran.

[57] O teorii elektromagnetického pole a Maxwellových rovnicích podrobně viz Sedlák B., Štoll I., *Elektřina a magnetismus*, Academia, Praha, 2002, 632 stran; 2. vydání, Karolinum, Praha, 2012, 595 stran; 3. vydání, Karolinum, Praha, 2013, 600 stran.

5. Meranský program

Ve druhé polovině 19. století postupně narůstal ve všech vyspělých zemích zájem o matematiku a promítal se i do její výuky na středních školách. Společenský rozvoj, a tím i rozvoj školství, byl přirozenou reakcí na tehdejší prudký rozkvět vědy a techniky. Vývoj matematiky v letech 1800 až 1870 přinesl podstatné změny v jejím obsahu, metodách práce i aplikacích, na něž střední škola do té doby nereagovala. Také výuka matematiky na vysokých školách zejména technického směru pokročila natolik, že vyžadovala mnohem širší a pevnější základy středoškolské matematiky.

Snahy o reformu výuky matematiky se ve většině hlavních evropských zemí objevovaly od šedesátých let 19. století. Přinesly změny jak v obsahu středoškolské matematiky, tak v metodách její výuky ve školách. V mezinárodním měřítku byla iniciátorkou a koordinátorkou těchto snah Mezinárodní komise pro vyučování matematice. Jedním z čelních představitelů reformního hnutí, kteří jejím prostřednictvím ovlivnili vyučování matematice na všech stupních a typech škol, byl německý matematik Felix Klein.

5.1 Reformní snahy Felixe Kleina

F. Klein se během své kariéry zajímal o výuku matematiky na německých školách, snažil se o její modernizaci. Svými reformními aktivitami usiloval mimo jiné o větší propojení učiva matematiky mezi jednotlivými ročníky a stupni škol, od elementárních až po školy vysoké. Zasadil se o nové uspořádání obsahu výuky tak, aby absolventi středních škol byli lépe připraveni ke studiu matematiky a technických disciplín na vysokých školách.

Připomeňme stručně hlavní životní osudy Felixe Kleina, tentokrát v souvislosti s jeho snahami o reformu matematického vzdělávání.[1]

Jak již bylo řečeno, F. Klein studoval matematiku a fyziku na univerzitě v Bonnu. Pod vedením Julia Plückera zde roku 1868 sepsal disertační práci *Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Koordinaten auf eine kanonische Form* [O transformaci obecné rovnice druhého stupně v přímkových souřadnicích na kanonický tvar].[2] Spolu s ní předložil k obhajobě formulace pěti vlastních tezí. První čtyři body se týkaly jeho další matematické práce, poslední bod zahrnoval doporučení, aby byli žáci na střední škole seznamováni vedle syntetické eukleidovské geometrie i s dalšími geometrickými disciplínami; na mysli měl zejména analytickou a deskriptivní geometrii.[3]

[1] Viz Timerding H. E., *Felix Klein und die Reform des mathematischen Unterrichts*, Die Naturwissenschaften 7(1919), 303–307; Prandtl L., *Felix Klein und die Förderung der „angewandten Wissenschaften“*, Die Naturwissenschaften 7(1919), 307–310 (oba články viz [FK]); dále [K3], [K4], [K5], [Ma] a [To].

[2] Viz Mathematische Annalen 23(1884), 539–578; též [K8], str. 5–49.

[3] *Es ist wünschenswert, daß neben der Euklidischen Methode neuere Methoden der Geometrie in den Unterricht auf Gymnasien eingeführt werden.* Viz [K8], str. 49.

Ueber

die Transformation

der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades
zwischen Linien-Coordinaten

auf eine canonische Form.

Inauguraldissertation,

zur Erlangung der Doctorwürde bei der philosophischen
Facultät zu Bonn eingereicht

und am 12. December 1868 mit Thesen vertheidigt

von

Felix Klein.

Namen der Opponenten:
Emil Budde, Dr. phil.
Ernst Sagorski, cand. phil.
Johannes Seeger, Dd. phil.

Bonn.

Druck von Carl Georgi.

Obr. 36: Titulní list Kleinovy disertační práce

Thesen.

1. Diejenige kanonische Gleichungsform, welche **Battaglini** seiner Arbeit über Komplexe des zweiten Grades zugrunde legt:

$$\sum_{\varkappa} a_{\varkappa} p_{\varkappa}^2 = 0,$$

ist nicht die allgemeine.

2. Die Anwendung, welche **Cauchy** von den in seiner méthode générale, propre à fournir les équations de conditions rélatives aux limites des corps [Comptes rendus, VIII (vgl. Cauchys Werke (1) IV, p. 193 ff.)] entwickelten Prinzipien auf lineare Differentialgleichungen einer beliebigen Ordnung gibt (ibid.), scheint nicht über alle Bedenken erhaben.

3. Bei Erklärung der Lichtphänomene kann die Annahme eines Lichtäthers nicht umgangen werden.

4. Positive und negative Elektrizität sind nicht als entgegengesetzt gleich zu betrachten.

5. Es ist wünschenswert, daß neben der Euklidischen Methode neuere Methoden der Geometrie in den Unterricht auf Gymnasien eingeführt werden.

Obr. 37: Kleinovy teze předložené spolu s disertační prací

Počátkem roku 1871 se F. Klein habilitoval a začal přednášet na univerzitě v Göttingen. V roce 1872 byl ve věku pouhých 23 let jmenován řádným profesorem matematiky na filozofické fakultě univerzity v Erlangen. Při této příležitosti předložil v říjnu 1872 text své nástupní přednášky *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* [Srovnávací úvahy o novějších geometrických bádáních], která se později stala známou jako tzv. *Erlangenský program.*[4] Dne 7. prosince 1872 následovala na univerzitě v Erlangen podle tamních zvyklostí nástupní řeč, v níž se F. Klein věnoval povaze vyššího vzdělávání.[5] Podle [Ma] ho k tomu přitom vedly ryze praktické důvody, chtěl kolegy přesvědčit o nezbytnosti zřízení matematických seminářů a cvičení. V seminářích spatřoval příležitost vést studenty k samostatné tvůrčí práci a v praktických cvičeních chtěl rozvíjet mimo jiné jejich prostorovou představivost. Apeloval na samotný smysl a účel matematiky, její aplikace a nezbytnou nutnost procvičování matematického myšlení. Ostře kritizoval výuku matematiky na gymnáziích, její přílišný formalismus a učební metody spočívající v učení nazpaměť. Uvedl, že je nutné pozvednout matematické vzdělání budoucích učitelů matematiky na vyšší teoretickou úroveň tak, aby bylo v souladu s dosaženými vědeckými poznatky.

F. Klein přednášel na univerzitě v Erlangen pouze do roku 1875, kdy mu bylo nabídnuto výhodnější místo na Technische Hochschule v Mnichově. Zde setrval pět let, v roce 1880 přešel na nově ustavené profesorské místo na univerzitě v Lipsku. Ve své nástupní řeči *Über die Beziehungen der neueren Mathematik zu den Anwendungen* [O vztazích novější matematiky k aplikacím] pronesené 25. října 1880 formuloval připomínky k univerzitní výuce matematiky. Kritizoval zejména její velkou specializaci a s tím spojené zřizování matematicky úzce zaměřených škol. Za důsledek této roztříštěnosti a specializace označil stagnaci univerzitní výuky matematiky. Požadoval proto její rozdělení na obecné elementární přednášky poskytující většině studentů souhrnný přehled matematiky a na speciální vyšší přednášky určené vybraným skupinám studentů. Dalším problémem, na který ve své řeči upozornil, byla stále se zvětšující propast mezi čistou a aplikovanou matematikou. Příčiny viděl v neustálém zobecňování řešených problémů, jež vede k přílišné abstrakci. Požadoval proto zařadit do univerzitní výuky matematiky více aplikací.

Na univerzitě v Lipsku působil F. Klein do roku 1886, poté se vrátil na univerzitu do Göttingen. Za jeho vydatné podpory zde v roce 1886 vznikla první katedra didaktiky matematiky (*Lehrstuhl für Didaktik der mathematischen Wissenschaften*). Zrodila se zde také myšlenka dalšího vzdělávání středoškolských profesorů matematiky formou přednášek a prázdninových kurzů, které měly zvýšit úroveň jejich teoretické a metodické připravenosti. První kurzy se pod Kleinovým vedením uskutečnily v roce 1892, poté se opakovaly každé dva roky až do první světové války. Konaly se vždy o velikonočních prázdninách.

[4] O Erlangenském programu podrobně pojednává kapitola 4 této disertační práce.

[5] Originální německý přepis Kleinovy nástupní řeči včetně anglického překladu a komentáře viz Rowe D. E., *Felix Klein's „Erlanger Antrittsrede"*, A Transcription with English Translation and Commentary, Historia Mathematica 12(1985), 123–141.

V té době se F. Klein začal zabývat otázkou vztahu matematiky a technických věd. Na univerzitě v Göttingen zamýšlel zřídit technické laboratoře, v nichž by se studenti seznámili s matematickými aplikacemi nejen teoreticky, ale i prakticky. Jeho plány vybudovat technický institut však narazily na tvrdý odpor jak ze strany technických vysokých škol, které se obávaly konkurence, tak ze strany univerzit, které v tom spatřovaly nežádoucí odklon od čisté matematiky. Očekávaje podporu ze strany univerzity, začal se F. Klein zajímat o problematiku vzdělávání budoucích učitelů. Svůj požadavek seznámit studenty s praktickými matematickými aplikacemi přenesl na studenty učitelství a rozšířil jej o požadavek znovuzavedení samostatné vědecké závěrečné práce, která byla zrušena roku 1887. Proti vytvoření odpovídajících podmínek ke studiu učitelství nebylo možno nic namítat, a tak F. Klein dosáhl svého cíle zřídit na univerzitě v Göttingen technický institut.

Na přelomu 19. a 20. století se ve světě uskutečnilo několik mezinárodních kongresů matematiků, na nichž se F. Klein rovněž angažoval.[6] Roku 1897 se v Zürichu konal 1. mezinárodní kongres matematiků, na němž F. Klein vystoupil s přednáškou *Zur Frage des höheren mathematischen Unterrichts* [K otázce výuky vyšší matematiky].

Kolem roku 1900 se jako matematik snažil navázat kontakty se zástupci ostatních přírodovědných předmětů. O Velikonocích roku 1900 v Göttingen, při příležitosti prázdninových kurzů pro učitele matematiky a fyziky, vystoupil společně s fyzikem Eduardem Rieckem (1845–1915) na téma *Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an höheren Schulen* [O významu aplikované matematiky a fyziky ve výuce na vyšších školách]. V srpnu téhož roku byla na 2. mezinárodním kongresu matematiků v Paříži ustavena mezinárodní sekce pro vyučování matematice.

V prosinci 1901 se v Göttingen uskutečnila porada, které se zúčastnilo několik univerzitních profesorů matematicko-přírodovědných předmětů (včetně F. Kleina) a tři profesoři göttingenského gymnázia. Ve zprávě z tohoto shromáždění jsou již načrtnuty téměř všechny úkoly, které byly později řešeny v tzv. *Meranském programu*. Byly zde diskutovány otázky související s postavením matematiky a přírodních věd na středních školách, ústřední návrh – vyučovat na reálkách základy diferenciálního a integrálního počtu a jejich využití k popisu jednodušších přírodních procesů – byl odsouhlasen s tím, že se jedná o vlastní jádro celého matematicko-fyzikálního vzdělání.

Další prázdninový kurz pro učitele matematiky a fyziky se konal v Göttingen o Velikonocích roku 1902. F. Klein na něm mimo jiné poukazoval na zásadní význam pojmu funkce ve výuce matematiky již na nižším stupni gymnázia a přikláněl se k zařazení infinitesimálního počtu i do výuky na gymnáziích.

[6] Sborníky ze všech mezinárodních kongresů uskutečněných v letech 1893 až 2010 jsou v elektronické verzi dostupné na webových stránkách Mezinárodní matematické společnosti; viz http://www.mathunion.org/ICM/. Velmi stručný přehled historie kongresů viz Albers D. J., Alexanderson G. L., Reid C., *International Mathematical Congresses, An illustrated History 1893–1986*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1987, 63 stran.

O dva roky později, o Velikonocích roku 1904, se v Göttingen uskutečnil další prázdninový kurz. Návrhy na reorganizaci matematického vzdělávání diskutované při této příležitosti byly zveřejněny pod názvem *Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen* [Nové příspěvky k otázce výuky matematiky a fyziky na vyšších školách]. V nich bylo jako hlavní příspěvek obsaženo Kleinovo pojednání *Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen* [O aktuální reorganizaci matematického vzdělávání na vyšších školách].[7]

Otázka výuky středoškolské matematiky byla rovněž jedním z hlavních témat 3. mezinárodního kongresu matematiků v Heidelbergu v srpnu 1904. Téhož roku se v Breslau (Wrocław, Vratislav) sešlo shromáždění Společnosti německých přírodovědců a lékařů (*Versammlung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte*), na němž byla ustavena komise pro vyučování přírodovědným předmětům (*Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte*). Jejím prvním předsedou byl zvolen August Gutzmer.[8] F. Klein této komisi předložil vlastní návrh na reformu matematicko-fyzikálního vzdělávání. Činnost komise vyústila v reformní návrh na úpravu středoškolského přírodovědného vzdělávání, jenž byl představen, diskutován a posléze přijat na dalším shromáždění Společnosti německých přírodovědců a lékařů konaném v září 1905 v Meranu. Proto bývá označován jako tzv. *Meranský program*. Komise pro vyučování přírodovědným předmětům, která ještě vypracovala návrh na vědecké vzdělávání budoucích učitelů přírodních věd, však zanikla roku 1907. Od roku 1908 její úlohu převzal Německý výbor pro matematické a přírodovědné vzdělávání (*Deutscher Ausschuss für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*).

5.2 Meranský program

Meranským programem bývá označován návrh německé komise pro vyučování přírodovědným předmětům na reformu středoškolského vzdělávání v těchto předmětech.[9] V jeho pozadí stály následující tři obecné cíle:

1. střední školy by neměly poskytovat ani jednostranně jazykovědné a historické, ani jednostranně matematicko-přírodovědné vzdělávání,

2. matematika a přírodní vědy jsou rovnocenné jazykovému vzdělávání; střední školy by měly poskytovat specifické obecné vzdělávání,

3. všechny střední školy by měly poskytovat rovnocenné vzdělávání.

[7] Viz Klein F., *Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen*, Vorträge gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern 1904, Teubner, Leipzig und Berlin, 1904, 82 stran. Recenze viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 34(1905), 259–260.

[8] Karl Friedrich August Gutzmer (1860–1924), německý matematik, v letech 1896 až 1899 soukromý docent na univerzitě v Halle, v letech 1899 až 1905 profesor matematiky na univerzitě v Jeně, roku 1905 jmenován řádným profesorem na univerzitě v Halle. Zabýval se zejména teorií diferenciálních rovnic.

[9] Viz *Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, Entwürfe von der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte, Teil 1, Teubner, Leipzig, 1905, 1–48.

S ohledem na dosažení těchto cílů měla být středoškolská výuka matematiky založena na následujících třech základních principech:

1. přizpůsobit výuku přirozenému duševnímu vývoji žáků (*psychologický princip*),
2. rozvíjet schopnost matematického nazírání na okolní svět (*utilitární princip*),
3. vést žáky k uvědomování si souvislostí mezi jednotlivými poznatky (*didaktický princip*).

Meranský program připisoval matematice ve středoškolském vzdělávání jedno z klíčových postavení. Její hlavní úkoly viděl zejména v rozvíjení rozumových schopností a logického myšlení. Mezi obecnými požadavky na výuku matematiky na středních školách byly uvedeny následující záměry:

- poskytnout vědecky podložený přehled matematického učiva,
- rozvíjet schopnost matematického myšlení a jeho využití při řešení praktických úloh,
- přiblížit význam matematiky pro exaktní poznání přírody a moderní kulturu vůbec.

Nově chtěl do výuky zavést výchovu k funkčnímu myšlení; pojem funkce se měl stát ústředním pojmem veškeré výuky matematiky. Měl být prezentován jednak graficky, na praktických příkladech,[10] jednak aritmeticky, na příkladech jednoduchých závislostí. F. Klein rovněž doporučoval vysvětlit podstatu „stoupání a klesání“ grafu funkce nebo výpočet obsahu plochy pod základními křivkami (grafy elementárních funkcí), a tím žáky pomalu připravovat na zavedení pojmů derivace a integrál. Základy infinitesimálního počtu měly být zařazeny do osnov vyšších tříd jako důležitý pomocný nástroj, např. při studiu průběhu funkcí.

Meranský program na výuku matematiky na středních školách kladl z hlediska jejího obsahu následující požadavky:

- podporovat rozvoj prostorové představivosti,
- prostoupit učivo pojmem funkce, rozvíjet funkční myšlení,
- zavést diferenciální a integrální počet,
- zařadit do výuky grupy geometrických transformací,
- omezit formalismus a abstraktní učivo,
- řešit úlohy z praktického života,
- rozvíjet mezipředmětové vztahy.

[10] F. Klein uvádí v [K5] jako příklad grafický jízdní řád.

Aby výše uvedené reformní návrhy nevedly k přetěžování žáků, byly současně s nimi předloženy nově vypracované učební plány pro jednotlivé typy středních škol. Ocitujme krátkou pasáž z úvodu učebního plánu pro matematiku:[11]

> *Die Mathematik befindet sich an unseren höheren Lehranstalten in wesentlich anderer Lage als die Naturwissenschaften: sie braucht sich die erforderliche Geltung innerhalb des Schulorganismus nicht erst zu erkämpfen, sondern sie bedarf nur einer gewissen Anpassung an die modernen Aufgaben der Schule ...*
> *Einmal gilt es (wie in allen anderen Fächern), den Lehrgang mehr als bisher dem natürlichen Gange der geistigen Entwicklung anzupassen, überall an den vorhandenen Vorstellungskreis anzuknüpfen, die neuen Kenntnisse mit dem vorhandenen Wissen in organische Verbindung zu setzen, endlich den Zusammenhang des Wissens in sich und mit dem übrigen Bildungsstoff der Schule von Stufe zu Stufe mehr und mehr zu einem bewußten zu machen. ...*
> *Von hier aus entspringen zwei Sonderaufgaben: die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denken.* ([K5], str. 208–209)

Školní úřady většiny německých zemí přijaly meranské návrhy velmi příznivě. Prusko vybralo pět středních škol,[12] aby reorganizaci výuky matematiky prakticky vyzkoušely. Zprávy o nově zavedených učebních plánech, které tyto školy vypracovaly, vyznívaly ve prospěch meranských návrhů.

Hlavní myšlenky Meranského programu se staly východiskem několika dalších reforem, které přinesly obsahové i metodické změny v učivu středoškolské matematiky.

5.3 Další reformní snahy

V roce 1906 se shromáždění Společnosti německých přírodovědců a lékařů konalo ve Stuttgartu. Byly na něm navrženy obsahové změny, které souvisely zejména se snahou obohatit středoškolskou matematiku o základy matematické analýzy. Také tento návrh byl vypracován pod Kleinovým vedením; požadoval mimo jiné zavedení a rozvíjení pojmu funkce na příkladech elementárních funkcí a začlenění některých prvků infinitesimálního počtu do středoškolské výuky matematiky.

[11] Viz *Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, Teubner, Leipzig, 1905, 11–21. Též *Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten*, Verhandlungen der Naturforscherversammlung 1905, I, 156–167; nebo Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 36(1905), 543–553. Tento plán byl otištěn i v [K5] pod názvem *Der Meraner Lehrplan für Mathematik* jako jeden ze tří dodatků (str. 208–220); další dva dodatky tvoří Kleinovy články *Bericht an die Breslauer Naturforscherversammlung über den Stand des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen* z roku 1904 (str. 193–207) a *Probleme des mathematisch-physikalischen Hochschulunterrichts* z roku 1905 (str. 221–236). Recenze knihy [K5] je otištěna v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky 37(1908), 161–163.

[12] Mathematik Realgymnasium Düren, Gymnasium Göttingen, Oberrealschule Kiel, Oberrealschule auf der Burg Königsberg, Gymnasium Hannoversch Münden.

Další shromáždění Společnosti německých přírodovědců a lékařů se uskutečnilo roku 1907 v Drážďanech. Bylo na něm přijato doporučení posilovat v přípravě budoucích učitelů matematiky i ve středoškolské výuce matematiky aplikace na úkor některých izolovaných speciálních problémů, které nejsou podstatné pro utváření uceleného, vnitřně logicky propojeného systému středoškolského matematického vzdělání. F. Klein přitom prosadil vyzkoušení tohoto návrhu v Německu v roce 1908.

Roku 1908 se v Římě konal 4. mezinárodní kongres matematiků, na němž bylo předneseno osm referátů o reformním dění ve vyučování matematice v různých zemích. Současně byla ustavena Mezinárodní komise pro vyučování matematice (*International Commission on Mathematical Instruction*),[13] která se zabývala organizací, vyučovacími metodami a učebními plány veškeré výuky matematiky, od elementární až po vysokoškolskou. Své zastoupení v ní měly tyto státy: Anglie, Německo, USA, Francie, Itálie, Švýcarsko a Rakousko-Uhersko. Na místo předsedy byl navržen opět německý matematik A. Gutzmer, který se však této funkce zřekl a navrhl místo sebe F. Kleina, jenž byl zvolen a jmenován do funkce i přes svou nepřítomnost. Kromě již přijatých požadavků na obsahové změny ve výuce středoškolské matematiky komise doporučila obohatit výuku geometrie na středních školách o některé prvky projektivní geometrie a vedle matematické analýzy zařadit do osnov také základy dalších speciálních disciplín – teorie množin a teorie grup. Pod Kleinovým vedením vydala Mezinárodní komise pro vyučování matematice několik publikací o výuce matematiky na všech stupních a typech škol.

V návaznosti na Mezinárodní komisi pro vyučování matematice byly postupně v jednotlivých zemích ustaveny národní komise, které měly vypracovat podrobnou souhrnnou zprávu o organizaci a metodách výuky matematiky v dané zemi. Měly poskytnout materiál pro srovnání stavu výuky v jednotlivých zemích a vzájemnou inspiraci v oblasti školství. Jejich výsledky byly zveřejněny na 5. mezinárodním kongresu matematiků roku 1912 v Cambridge. Sešlo se celkem na 280 národních zpráv.[14]

Činnost Mezinárodní komise pro vyučování matematice zanikla během 1. světové války; obnovena byla teprve na 8. mezinárodním kongresu matematiků konaném v Bologni v roce 1928, tedy až po Kleinově smrti.

[13] Viz Howson A. G., *Seventy-five years of the International Commission on Mathematical Instruction*, Educational Studies in Mathematics 15(1984), 75–93; Lehto O., *Mathematics without Borders: A History of the International Mathematical Union*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1998, 399 stran.

[14] Každá zpráva měla dvě části. V první části byl popsán současný stav organizace výuky matematiky, zejména typy škol, cíle, obsah, rozsah a metody výuky, systém zkoušek, teoretická a praktická příprava učitelů pro zkoušky učitelské způsobilosti. Druhá část zprávy nastínila ideje a vývojové tendence vztahující se k reorganizaci škol a obecné cíle vzdělávání. Z hlediska obsahu výuky byla speciální pozornost věnována infinitesimálnímu počtu, analytické, deskriptivní a projektivní geometrii. Důraz byl kladen na využití praktických úloh a experimentů ve výuce matematiky, na výuku fyziky z pohledu matematiky, mezipředmětové vztahy a historii matematiky. V centru zájmu stála také kvalitní příprava budoucích učitelů matematiky.

5.4 Situace v českých zemích v 19. století

První polovina 19. století, spojená v našich dějinách s tzv. národním obrozením, byla poznamenána absolutistickou vládou.[15] Školství se tehdy řídilo statutem z roku 1774, v němž byla stanovena povinnost šestileté školní docházky pro děti ve věku od šesti do dvanácti let. Střední vzdělávání poskytovala šestiletá gymnázia, nad nimiž byl stanoven státní dozor. Hlavním vyučovaným předmětem byla latina, ostatní předměty včetně matematiky a přírodních věd byly vyučovány jen okrajově. Na šestiletá gymnázia navazovaly dvouleté filozofické ústavy, které byly mezistupněm mezi gymnáziem a univerzitou. Až do roku 1848 se tento stav školství jen velmi málo proměňoval.

Revoluční rok 1848 je důležitým mezníkem také ve vývoji školství v našich zemích, které byly tehdy součástí habsburské monarchie. Dne 23. března 1848 bylo totiž nově zřízeno ministerstvo vyučování,[16] které převzalo záštitu nad celým školstvím a pomohlo realizovat tzv. *Exner-Bonitzův program reformy středního školství*.[17] Dosavadní šestileté gymnázium bylo spojením s oběma ročníky filozofického studia přeměněno na osmileté, jež bylo rozděleno do dvou čtyřletých cyklů. Nižší byl zaměřen na elementární výuku, vyšší poskytoval filozoficko-historické a matematicko-přírodovědné vzdělávání. Výuka byla obohacena o další předměty včetně fyziky, zvýšil se počet vyučovacích hodin i podíl matematiky a přírodních věd ve výuce. Gymnázium přestalo být jedinou střední všeobecně vzdělávací školou. Od roku 1851 vznikaly první šestileté reálky,[18] jež byly roku 1868 prodlouženy na sedmileté. Měly poskytovat všeobecné vzdělávání s důrazem na matematiku a přírodní vědy, byly chápány hlavně jako příprava pro studium na technice. Nově byla od roku 1869 stanovena závěrečná, státem kontrolovaná maturitní zkouška, jež měla prověřovat připravenost absolventa k dalšímu akademickému studiu. Zpočátku se konala pouze na gymnáziích a opravňovala ke studiu na univerzitě,[19] od roku 1872 byla zavedena rovněž na reálkách jako podmínka pro další studium na technických vysokých školách. Tím došlo do značné míry k zrovnoprávnění obou stávajících typů středních škol.[20]

---

[15] Na vládě se tehdy významnou měrou podílel kníže Klement Václav Lothar von Metternich (1773–1859). V letech 1809 až 1848 byl rakouským ministrem zahraničí, v letech 1821 až 1848 působil jako státní kancléř rakouského císařství.

[16] Poznamenejme, že v letech 1849 až 1860 byl ministrem vyučování Leopold Leo hrabě Thun-Hohenstein (1811–1888).

[17] Franz Friedrich Exner (1802–1853), německý filozof, od roku 1832 profesorem filozofie v Praze, roku 1848 jmenován ministerským radou. Hermann Bonitz (1814–1888), německý filolog, profesor na gymnáziu ve Štětíně (Szczecin), od roku 1849 profesorem klasické filologie a filozofie na univerzitě ve Vídni. Roku 1849 předložili *Entwurf der Organisation der Gymnasien und Realschulen in Oesterreich* [Nástin organizace gymnázií a reálek v Rakousku], jenž byl veřejně vyhlášen a provizorně potvrzen 16. září 1849, císařem Františkem Josefem I. byl však oficiálně schválen a podepsán až 9. prosince 1854.

[18] Reálky byly schváleny císařským nařízením ze dne 2. března 1851. Roku 1853 bylo uzákoněno jednotné vyučování na všech reálkách v Rakousku.

[19] Absolventi gymnázií, kteří chtěli pokračovat ve studiu na technice, museli složit dodatečnou zkoušku z deskriptivní geometrie.

[20] O historii školského systému viz Kádner O., *Vývoj a dnešní soustava školství*, I. díl, II. díl, Sfinx, Praha, 1929, 1931, 549 + 651 stran; Veselá Z., *Vývoj české školy a učitelského vzdělání*, Masarykova univerzita, Brno, 1992, 147 stran; Mikulčák J., *Nástin dějin vzdělávání v matematice (a také školy) v českých zemích do roku 1918*, editoval Jindřich Bečvář, edice

České země se do celoevropského reformního hnutí ve výuce matematiky a přírodovědných předmětů zapojily již od samého počátku. Garantem a hlavním organizátorem reformních snah v našich zemích byla již od svého vzniku v roce 1862 *Jednota českých matematiků a fyziků*,[21] která nejen zprostředkovávala přebírání zahraničních zkušeností, ale také se sama na reformních aktivitách významně podílela. Má velké zásluhy o rozvoj novodobé české matematicko-fyzikální literatury, pod kterou spadají i středoškolské učebnice. Díky vhodně vedené odborné i organizační činnosti Jednoty dosáhla úroveň výuky matematiky na českých středních školách úrovně předních evropských zemí, a to jak v obsahu výuky, tak i v metodách práce. Analytická geometrie, jejíž zařazení do výuky školské matematiky požadoval F. Klein v Německu od školního roku 1867/1868, byla na reálkách a gymnáziích v habsburské monarchii vyučována prakticky již od úpravy osnov v roce 1854, deskriptivní geometrie, která výrazně přispívala k rozvoji prostorové představivosti, se na českých, resp. moravských reálkách učila již od roku 1874, resp. 1869. Tehdejší zákon o reálkách navíc zdůrazňoval všeobecně vzdělávací charakter těchto škol se zřetelem k matematicko-přírodovědným disciplínám. V rámci úpravy školních osnov v roce 1884 byly do výuky geometrie na střední škole zařazeny i některé partie projektivní geometrie.

Po roce 1860 sílila v souvislosti s uzákoněním výuky v českém jazyce potřeba českých učebnic matematiky pro střední školy. Václav Šimerka (1819–1887) v době svého působení jako suplující učitel na gymnáziu v Českých Budějovicích předložil školským úřadům ke schválení rukopis učebnice algebry, do něhož jako jeden z prvních autorů zařadil též úvodní výklad diferenciálního a integrálního počtu. Školské úřady však zařazení infinitesimálního počtu do středoškolské učebnice tehdy neschválily, a proto V. Šimerka rukopis upravil a vydal jej ve dvou svazcích. První z nich, nazvaný *Algebra čili počtářství obecné pro vyšší gymnasia* (1863),[22] obsahoval pouze povinné učivo pro střední školy. Druhý, nazvaný *Přídavek k Algebře pro vyšší gymnasia* (1864) a obsahující výklad infinitesimálního počtu, byl schválen jen jako kniha pomocná.

Je třeba zdůraznit, že matematici v našich zemích pouze nepřejímali reformní myšlenky ze zahraničí, ale sami k reformnímu dění ve světě též přispěli. Jmenujme např. tzv. *Pražské návrhy* (Prager Vorschläge), které přednesl školní rada Karel Zahradníček na 9. německo-rakouském středoškolském dnu 9. dubna 1906 ve Vídni. Byly obsaženy v přednášce *Zur Frage der Infinitesimalrechnung an der österreichischen Mittelschule* [K otázce infinitesimálního počtu na rakouské střed-

Dějiny matematiky, svazek 42, Matfyzpress, Praha, 2010, 312 stran. O školských reformách viz Hrubý D., *Školské reformy (2)*, Školské reformy do roku 1948, Učitel matematiky 16(2008), 129–145.

[21] *Jednota českých matematiků a fyziků* byla založena roku 1862 jako *Spolek pro volné přednášky z mathematiky a fysiky.* V roce 1869 byl Spolek přejmenován na *Jednotu českých mathematiků.* Současný název nese od roku 1912; v letech 1921 až 1939 a poté 1945 až 1993 se však používal název *Jednota československých matematiků a fyziků.* O historii Jednoty viz Houdek F., *Dějepis jednoty českých mathematiků v Praze*, JČM, Praha, 1872, 64 stran; Posejpal V., *Dějepis Jednoty českých mathematiků*, JČM, Praha, 1912, 131 stran; Veselý F., *100 let Jednoty československých matematiků a fyziků*, SPN, Praha, 1962, 127 stran; Bečvářová M., *Z historie Jednoty 1862–1869*, edice Dějiny matematiky, svazek 13, Prometheus, Praha, 1999, 138 stran.

[22] Druhé vydání nazvané *Algebra čili počtářství obecné pro vyšší gymnasia a reálné školy* vyšlo roku 1868, třetí upravené vydání v roce 1874.

ní škole].[23] V jejím úvodu K. Zahradníček položil otázku, zda mají být prvky infinitesimálního počtu zařazeny do středoškolských osnov, a v jejím průběhu argumentoval jednoznačně ve prospěch kladné odpovědi. Poukazoval zejména na rozvíjení mezipředmětových vztahů mezi matematikou a fyzikou, na potřebnost a vhodnost infinitesimálního počtu při řešení některých úloh. Odvolával se přitom na názory a zkušenosti své i svých kolegů, na zprávy německé komise pro vyučování přírodovědným předmětům a na závěry jednání této komise formulované v Meranském programu. To svědčí o tom, že naše matematická veřejnost byla o reformním dění ve světě velmi dobře informována.[24]

5.5 Marchetova reforma

Na Meranský program, stuttgartské a drážďanské reformní návrhy reagovala v Rakousku-Uhersku *Marchetova reforma učebních osnov*,[25] jež byla vyhlášena dne 8. srpna 1908. Jejím cílem bylo vytvoření jednotného systému středoškolského vzdělávání, které by poskytovalo několik rovnocenných typů středních škol. Její obsah vzešel částečně z ankety vyhlášené rakouským Ministerstvem kultu a vyučování ve Vídni, která proběhla ve dnech 21. až 25. ledna 1908.[26] Stávající střední školy, osmiletá (klasická) gymnázia a sedmileté reálky, byly rozšířeny o nový typ střední školy – osmileté reálné gymnázium s rozšířenou výukou přírodovědných předmětů, jež svou oblibou brzy zastínilo klasické gymnázium. V souvislosti s tím byla diskutována oprávněnost absolventů jednotlivých typů středních škol k vysokoškolskému studiu; maturitní zkoušky ze všech typů středních škol byly uznány za rovnocenné.

V rámci reformy byly vypracovány nové, moderní učební osnovy pro všechny typy středních škol, které byly do praxe zavedeny od školního roku 1909/1910, a to ve všech prvních pěti ročnících najednou. Z hlediska učebního obsahu bylo hlavním výsledkem Marchetovy reformy zařazení elementárních funkcí a některých prvků infinitesimálního počtu do výuky matematiky na reálkách a částečně i na gymnáziích. Mezi učebními metodami doporučenými ministerstvem pro výuku na střední škole byla zdůrazněna heuristická metoda, učitel měl při vyučování usilovat o spolupráci celé třídy.

[23] Viz Österreichische Mittelschule, 1906, 189–203.

[24] Poznamenejme, že ve Francii byly poznatky o elementárních funkcích a základy infinitesimálního počtu do jednotného učebního plánu středoškolské matematiky zařazeny roku 1902. Podobné tendence a reformní snahy se v této době objevily rovněž v Anglii a v USA.

[25] Gustav Marchet (1846–1916), od roku 1882 profesor národního hospodářství na Vysoké škole zemědělské ve Vídni, v období od 2. června 1906 do 15. listopadu 1908 rakouský ministr kultu a vyučování.

[26] V rámci ankety proběhla řada jednání a diskusí nad předloženými návrhy reorganizace obsahu výuky na gymnáziích. Byly projednány možnosti vzniku nových typů středních škol, jejich učební plány, požadovaný rozsah znalostí absolventů, otázka zjednodušení maturitních zkoušek, pravidla přechodu žáků na vyšší vzdělávací stupeň, otázky klasifikace atd. Mezi 70 účastníky ankety bylo rovněž 7 českých zástupců v čele s významným pedagogem a tehdejším poslancem říšské rady Františkem Drtinou (1861–1925). Rozsáhlý soupis a protokol ankety vyšel pod názvem *Die Mittelschul-Enquete 1908* ve Vídni (760 stran).

Kromě obsahových změn přineslo přijetí Meranského programu nový pohled na matematiku a její postavení ve středoškolském vzdělávání. To se promítlo i do některých změn v metodickém zpracování učiva. V souvislosti se snahami rozvíjet funkční myšlení žáků se v geometrii již v sekundě objevily úlohy, v nichž se sledovaly závislosti obsahů rovinných útvarů na velikostech jejich určujících prvků. Lineární funkce se poprvé začaly studovat již v kvartě, užívaly se ke grafickému řešení lineárních rovnic. V sextě byla zavedena kvadratická funkce a grafické řešení kvadratických rovnic, rovinná trigonometrie byla doplněna o grafy goniometrických funkcí. Na všech typech vyšších středních škol se měly probírat základy teorie pravděpodobnosti, analytická geometrie byla rozšířena o využití diferenciálního počtu.[27]

5.6 České učebnice matematiky

Změna školních osnov přijatá v rámci Marchetovy reformy v roce 1908 si vyžádala tvorbu nových učebnic matematiky pro všechny ročníky a typy středních škol, které by respektovaly zamýšlené obsahové a metodické změny. Tento úkol na sebe vzala *Jednota českých matematiků a fyziků*, jež na návrh Karla Petra[28] a Bohumila Kučery[29] zřídila dvě speciální komise, matematickou a fyzikální, které se poprvé sešly na společné schůzi dne 26. dubna 1909. Jejich hlavním úkolem bylo vybrat ze svých řad odborníky na vyučování matematice, kteří by podle nových osnov sepsali učebnice, a zajistit, aby rukopisy nových učebnic prošly přísným recenzním řízením uvnitř Jednoty ještě před jejich oficiálním úředním schvalovacím řízením.

Za autory učebnic pro nižší třídy středních škol byli po širší diskusi vybráni Ladislav Červenka[30] pro aritmetiku a algebru a Miloslav Valouch[31] pro geometrii, za autory učebnic pro vyšší třídy středních škol byli zvoleni pro aritmetiku a alge-

[27] O vývoji vyučování matematice viz Potůček J., *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900–1945*, I. díl – *Vznik a vývoj jednotlivých typů škol a jejich osnov matematiky*, II. díl – *Učebnice matematiky*, Pedagogická fakulta Západočeské univerzity, Plzeň, 1992, 1993, 55 + 49 stran; Vetter Q., *Czechoslovakia*, The National Council of Teachers of Mathematics, The fourth yearbook – *Significant changes and trends in the teaching of mathematics throughout the world since 1910*, Teachers College, Columbia University, New York, 1929, 9–20. Učební plány a osnovy matematiky pro jednotlivé typy škol viz Mikulčák J., *Nástin dějin vzdělávání v matematice (a také školy) v českých zemích do roku 1918*, editoval Jindřich Bečvář, edice Dějiny matematiky, svazek 42, Matfyzpress, Praha, 2010, 312 stran.

[28] Karel Petr (1868–1950), původně středoškolský učitel matematiky a fyziky, vyučoval na středních školách v Chrudimi, Brně, Přerově a Olomouci. Roku 1902 se habilitoval v matematice na české technice v Brně. Od roku 1903 působil jako mimořádný a od roku 1908 jako řádný profesor matematiky na Filozofické fakultě české univerzity v Praze, kde setrval až do roku 1938. Věnoval se zejména algebře a teorii čísel, spolupracoval na pozvednutí úrovně odborné přípravy středoškolských učitelů matematiky.

[29] Bohumil Kučera (1874–1921), profesor experimentální fyziky, roku 1908 byl jmenován mimořádným a roku 1911 řádným profesorem české univerzity v Praze.

[30] Ladislav Červenka (1874–1947), středoškolský učitel matematiky a deskriptivní geometrie, vyučoval na středních školách v Praze a v Kutné Hoře, v letech 1919 až 1935 působil jako zemský školní inspektor.

[31] Miloslav Valouch (1878–1952), středoškolský učitel matematiky a fyziky, vyučoval na středních školách v Olomouci, Rokycanech a Litomyšli. V roce 1909 byl jmenován profesorem na reálce v Praze, v letech 1918 až 1927 působil na Ministerstvu školství a národní osvěty.

bru Bohumil Bydžovský[32] a pro geometrii Jan Vojtěch[33]. V letech 1910 až 1912 postupně sepsali učebnice aritmetiky a geometrie pro všechny třídy středních škol ve verzích pro gymnázia, reálná gymnázia a reálky.[34] Dočkaly se několika vydání a byly s drobnými úpravami používány až do padesátých let 20. století. Mezi hlavními požadavky kladenými na jejich autory bylo, aby učebnice co nejvíce odpovídaly zamýšleným obsahovým a metodickým změnám učiva, aby středoškolské učebnice byly v souladu s vysokoškolskými a aby v nich byla používána jednotná terminologie a symbolika.[35]

Porovnáme-li nové učebnice s učebnicemi z předcházejícího období,[36] zjistíme, že se liší především výraznou snahou o vysvětlení podstaty veškeré předkládané látky. Nové poznatky jsou odvozovány s využitím předchozích zkušeností žáků, což vede k logicky uspořádanému zpracování látky.[37] Větší důraz je kladen na budování elementárních matematických teorií přiměřeně věku žáků, na logické usuzování a kritické hodnocení získaných výsledků např. ověřováním správnosti výpočtů. Nový způsob zpracování učiva je založen na cyklickém uspořádání osnov matematiky, žáci se během celého studia k jednotlivým tématům postupně několikrát vracejí s tím, že se vždy přidává na obecnosti a látka je probírána na kvalitativně vyšší úrovni. Také tato skutečnost výrazně odlišuje nové učebnice od učebnic vydaných před rokem 1905.

[32] Bohumil Bydžovský (1880–1969), původně středoškolský učitel matematiky a fyziky, vyučoval na středních školách v Kutné Hoře, Praze a Kladně. Roku 1909 se habilitoval v matematice na univerzitě v Praze a začal přednášet na české technice v Praze. Roku 1917 byl jmenován profesorem matematiky na pražské univerzitě, v roce 1918 působil jako tajemník na Ministerstvu školství a národní osvěty. V roce 1930 byl jmenován děkanem Přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy, v letech 1946 a 1948 byl rektorem univerzity.

[33] Jan Vojtěch (1879–1953), původně středoškolský učitel matematiky a fyziky, vyučoval na středních školách v Praze, Olomouci, Lipníku nad Bečvou a Brně. Jako profesor matematiky působil v letech 1915 až 1923 na české technice v Brně a v letech 1923 až 1949 na technice v Praze.

[34] Seznam schválených učebnic, vydaných Jednotou českých mathematiků a fysiků podle osnov z r. 1908 a 1909, viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 42(1913), 527–528.

[35] Pro mezinárodní instituce byla o českých středoškolských učebnicích matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky vypracována podrobná zpráva *Die Lehrbücher für Mathematik, darstellende Geometrie und Physik an den Mittelschulen mit böhmischer Unterrichtssprache*, jejímiž autory byli za matematiku Karel Vorovka (1879–1929), za deskriptivní geometrii Ladislav Červenka a za fyziku Václav Posejpal (1874–1935). Zpráva vyšla roku 1914 ve Vídni jako 13. sešit *Bericht über den mathematischen Unterricht in Österreich*. Vorovkova zpráva o učebnicích aritmetiky a geometrie obsahuje stručný úvod, přehled českých učebnic vydaných v letech 1861 až 1912 a rozbor vybraných učebních textů (55 stran).

[36] Např. Fischer F. X., *Arithmetika pro nižší třídy středních škol* (2. opravené vydání, 1873, 249 stran); Tůma F., *Arithmetika pro prvou a druhou třídu škol gymnasijních* (1886, 208 stran); Tůma F., *Arithmetika pro třetí a čtvrtou třídu škol gymnasijních* (1886, 175 stran); Starý V., Machovec F., *Arithmetika pro nižší třídy gymnasií* (6. opravené vydání, 1891, 276 stran); Sommer J., *Arithmetika pro školy reálné, díl 1., 2., 3.* (2. vydání, 1900, 1901, 1902, 96 + 80 + 86 stran); Jarolímek Č., *Geometrie pro čtvrtou třídu škol reálných* (1874, 92 stran); Jarolímek V., *Geometrie pro II. a III. třídu škol realných (Planimetrie)* (1891, 96 stran); Strnad A., *Geometrie pro vyšší školy reálné* (1893, 324 stran); Jarolímek V., *Geometrie pro nižší třídy škol realných* (3. vydání, 1897, 188 stran).

[37] Jednota českých matematiků a fyziků požadovala, aby autoři učebnic pro vyšší třídy středních škol sepsali také učebnice pro IV. třídu nižší střední školy, které měly obsahovat shrnutí a systematizaci probraného učiva, neboť nižší střední škola poskytovala relativně ucelené vzdělání. Autoři, kteří tuto rekapitulaci provedli, tak přesně věděli, na jakých poznatcích mohou ve vyšších třídách stavět a na jaké učivo mohou dále navazovat.

Na následujících stránkách se podrobněji podíváme na učebnice B. Bydžovského a J. Vojtěcha, které na více než tři desetiletí ovlivnily výuku matematiky na našich středních školách. Pokusíme se stručně popsat jejich nejdůležitější rysy, poukážeme na nové tematické okruhy výkladu, jejich metodické zpracování, odbornou úroveň a náročnost učiva. Hlavní pozornost věnujeme především částem pojednávajícím o geometrických transformacích.[38]

V nových učebnicích B. Bydžovského a J. Vojtěcha[39] jsou poprvé v souladu s požadavkem vytyčeným v nových osnovách soustavně zkoumány funkce a je jim věnována značná pozornost. Studují se vlastnosti, průběh a grafické znázornění jednotlivých funkcí v závislosti na hodnotách příslušných koeficientů. Všude, kde je k tomu vhodná příležitost, je výklad ilustrován geometrickou problematikou, oproti učebnicím z předchozího období často upozorňuje na souvislosti mezi algebrou, matematickou analýzou a geometrií, např. při grafickém řešení soustav rovnic. Současně s logaritmickými funkcemi jsou studovány funkce exponenciální. Je konstatována souměrnost grafů obou funkcí podle osy I. a III. kvadrantu. Pojem inverzní funkce však zaveden není a až do roku 1945 se v učebnicích neobjevil. Souvisí to zřejmě s tehdejším pojetím výkladu problematiky funkcí, které byly studovány vždy pouze jako funkce konkrétní (lineární, kvadratické apod.). Obecná definice funkce na středoškolské úrovni vůbec vyslovena nebyla. Ve studiu jednotlivých funkcí však nové učebnice šly do značné hloubky. Při vyšetřování jejich průběhu byly určovány i lokální a globální extrémy – tímto způsobem se u nás do středoškolské matematiky postupně dostávaly prvky diferenciálního počtu. V učebnici *Mathematika pro nejvyšší třídu gymnasií a reálných gymnasií* [BV2] je již v partii o funkcích diferenciálnímu a integrálnímu počtu věnována značná pozornost. Kromě základních pojmů jakými jsou spojitost, limita a derivace funkce, je zde vyložen rozvoj funkcí v řady a výpočet omezeného i neomezeného integrálu.

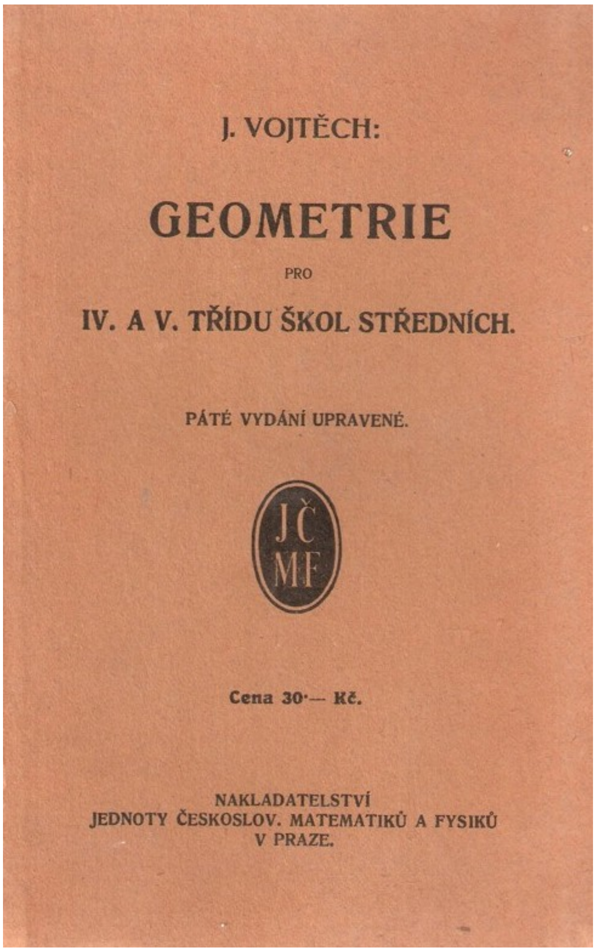
Je třeba konstatovat, že nové učebnice matematiky byly odborně na vysoké úrovni. Později se objevily oprávněné připomínky, že často přesahovaly chápání žáků a vedly k jejich neúměrnému přetěžování. V dalších vydáních byly proto některé obtížné partie vynechány nebo alespoň zjednodušeny.

[38] Podrobný rozbor vývoje obsahu českých středoškolských učebnic přesahuje zaměření a cíle této disertační práce. Zájemcům lze doporučit např. následující práce: Lávička M., *Vývoj vyučování analytické geometrie na českých středních školách od Exner-Bonitzova programu (1849)*, disertační práce, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha, 1999; Němečková M., *Vývoj vyučování komplexním číslům na českých středních školách od Exner-Bonitzova programu (1849)*, disertační práce, Univerzita Karlova, Matematický ústav, Praha, 2002; Melcer M., *Finanční matematika v českých učebnicích (Od Marchetovy reformy)*, edice Dějiny matematiky, svazek 55, Matfyzpress, Praha, 2013, 366 stran. Analýzu učebnic deskriptivní geometrie v současné době v rámci své disertační práce dokončuje V. Moravcová, syntetické geometrii však zatím nebyla věnována dostatečná pozornost.

[39] Bydžovský B., *Arithmetika pro IV. a V. třídu gymnasií a reálných gymnasií* (1910, 181 stran); Bydžovský B., *Arithmetika pro IV. třídu škol reálných* (1910, 149 stran); Bydžovský B., *Arithmetika pro VI. a VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií* (1911, 154 stran); Bydžovský B., *Arithmetika pro V. až VII. třídu škol reálných* (1911, 196 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro IV. třídu gymnasií a reálných gymnasií* (1910, 142 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro IV. třídu reálek* (1910, 94 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro V. třídu gymnasií* (1910, 134 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro V. třídu reálných gymnasií* (1910, 122 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro VI. třídu gymnasií a reálných gymnasií* (1911, 131 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro VI. třídu reálek* (1911, 164 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií* (1912, 147 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro VII. třídu reálek* (1912, 166 stran).

V nových středoškolských učebnicích matematiky se poprvé na základě doporučení osnov objevily také grupy geometrických transformací.

Vojtěchovy učebnice geometrie pro IV. a V. třídu středních škol,[40] zpracované v duchu Meranského programu, kladly na geometrické transformace velký důraz. V učebnici *Geometrie pro IV. a V. třídu škol středních* [V2] se v partii věnované planimetrii z této problematiky objevila následující témata: osová souměrnost, posouvání, otáčení, shodnost trojúhelníků a mnohoúhelníků, souměrnost čtyřúhelníků, pohyby rovinných útvarů, stejnolehlost a podobnost rovinných útvarů, v dodatku pro reálky byla navíc zkoumána homologie. Partie věnovaná stereometrii zahrnovala posouvání a otáčení, souměrnost (podle bodu, přímky a roviny včetně osové souměrnosti vyšších řádů[41]), stejnolehlost a podobnost.



Obr. 38: Obálka učebnice [V2]

[40] Vojtěch J., *Geometrie pro IV. třídu gymnasií a reálných gymnasií* (1910, 142 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro IV. třídu reálek* (1910, 94 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro V. třídu gymnasií* (1910, 134 stran); Vojtěch J., *Geometrie pro V. třídu reálných gymnasií* (1910, 122 stran).

[41] *Útvar prostorový má osu souměrnosti n-tého řádu, jestliže může zaujmouti n poloh různých a přece totožných, totiž $n-1$ nových poloh, v nichž splývá s polohou původní.* Uvedené nové polohy takto souměrného útvaru získáme jeho otočením kolem dané osy o úhel velikosti $\frac{360^\circ}{n}$ a dále o jeho násobky až do hodnoty $(n-1)\cdot\frac{360^\circ}{n}$. Viz [V2], str. 181.

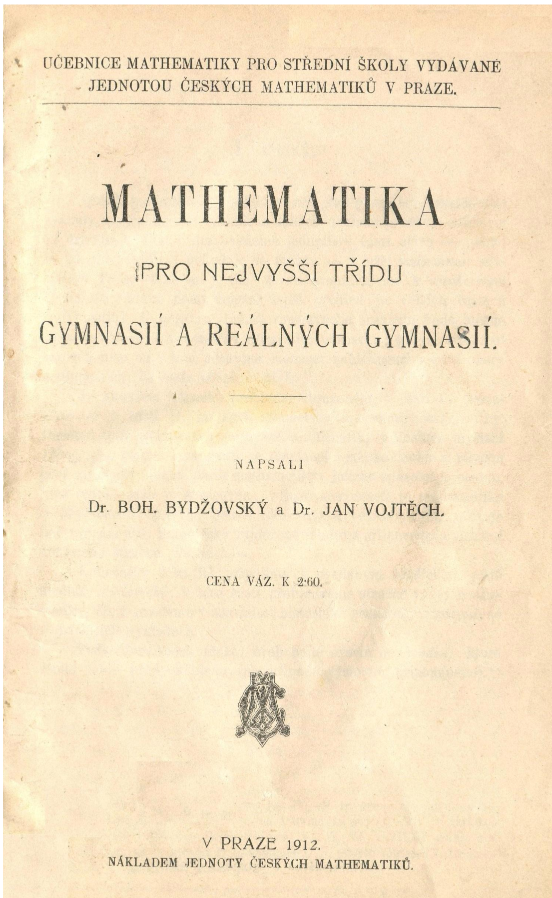
V úvodu Vojtěchovy učebnice [V2] jsou shodnost, podobnost a souměrnost zavedeny takto:

> *Dva geometrické útvary slují shodné (kongruentní), je-li možno jeden z nich uvésti pohybem v takovou polohu, aby se úplně (ve všech svých částech) ztotožňoval s druhým; čili shodné útvary představují týž útvar na různých místech. Shodné útvary mají týž tvar i touž velikost. Pozorujeme, že lze změniti daný útvar v nový tak, aby tvar jeho zůstal ve všech částech zachován (zmenšíme-li jej nebo zvětšíme, na př. čočkou); i nazýváme takový nový útvar podobným danému. ...*
> *Pozorujíce obraz nějakého útvaru v rovném zrcadle, seznáváme, že se liší od předmětu pouze opačným uspořádáním svých částí; jmenujeme jej souměrným k danému.* ([V2], str. 5–6)

Na tento úvod navazuje následující vymezení obsahu geometrie:

> *Geometrie vyšetřuje ty vlastnosti útvarů, které se nemění pohybem jejich, proměnou v útvary podobné a proměnou v útvary k nim souměrné.* ([V2], str. 6)

V této formulaci je již patrná Kleinova jednotná definice geometrie, autor ji však podal co nejpřijatelnějším způsobem s přihlédnutím k rozumovým schopnostem žáků odpovídajícího věku. Ačkoliv to není explicitně řečeno, omezil se přirozeně pouze na elementární eukleidovskou geometrii; existence jiných geometrií není ani naznačena.



Obr. 39: Titulní list učebnice [BV2]

Bydžovského a Vojtěchova učebnice *Mathematika pro nejvyšší třídu gymnasií a reálných gymnasií* [BV2] téma geometrických transformací pojímá vzhledem k předpokládané vyšší rozumové vyspělosti žáků mnohem obecněji, jsou zde podrobně vyloženy základní myšlenky obsažené v Kleinově Erlangenském programu. Kniha je rozdělena do tří částí; první část (str. 2–136) obsahuje přehled matematického učiva probíraného v posledním ročníku střední školy, druhá část (str. 137–159) zahrnuje výklad o základních pojmech logiky, o základech matematiky, jejím charakteru a praktickém i kulturním významu, třetí část (str. 159–179) představuje stručný přehled historie matematiky od starověku až po tehdejší dobu.

Geometrickým transformacím je v této učebnici věnována 5. kapitola nazvaná *Transformace* (str. 68–82). Hned v jejím úvodu je zdůrazněn základní význam pojmu *transformace* a pojmu *grupa* v geometrii. Grupa transformací je posléze, po nastínění základních představ, definována následujícím způsobem:

> *Grupa transformací je taková soustava transformací, že kterékoli dvě z nich postupně provedené (a tedy i libovolný jich počet) lze nahraditi jedinou transformací téže soustavy. Transformace, při které nenastává žádná změna, sluje identická a patří vždy ke grupě.* ([BV2], str. 68)

Z dnešního pohledu v této definici chybí explicitní požadavek existence inverzní transformace ke každé transformaci. Speciálně jsou jako příklady grup uvedeny pohyby v rovině, rovinné translace, rotace kolem pevného středu v rovině, pohyby v prostoru a šroubové pohyby[42] kolem téže osy. Dále je poznamenáno, že při grupě pohybů v rovině nebo v prostoru jsou tvar, velikost a smysl (uspořádání, tj. orientace) geometrických útvarů *invariantní*. V dalším textu je pozornost věnována souměrnosti, je zdůrazněn zásadní rozdíl mezi souměrnými útvary v rovině (podle přímky) a v prostoru (podle roviny).

> *Rovinné útvary spolu (dle osy) souměrné nelze ztotožniti žádným pohybem, při kterém body útvarů těch setrvají v rovině jejich; možno je však ztotožniti překlopením kolem osy souměrnosti, tedy pohybem v prostoru. I jsou dva rovinné útvary dle osy souměrné přece shodny, odpovídající sobě části jejich jsou však v opačných smyslech uspořádány (jsou „obráceně“ shodny). ... Prostorové útvary dle roviny souměrné nejsou shodny, protože jich vůbec nelze ztotožniti; shodují se však ve všech svých částech sobě odpovídajících, lišíce se pouze smyslem jejich uspořádání. Mezi souměrnými útvary v rovině a v prostoru jest tedy důležitý rozdíl.* ([BV2], str. 70–71)

Současně je zdůvodněno, že souměrnosti v rovině ani v prostoru grupy netvoří.

> *Proměníme-li útvar U_1 v útvar souměrný U_2 (dle osy v rovině nebo dle roviny v prostoru), tento pak opět (dle libovolné osy, po případě roviny) v útvar souměrný U_3, jsou U_1 a U_3 téhož smyslu a lze je ztotožniti pohybem. Dvě transformace v útvar souměrný po sobě provedené nelze tedy nahraditi proměnou téhož druhu; proto netvoří proměny v útvar souměrný ani v rovině ani v prostoru grupy.* ([BV2], str. 71)

[42] Šroubovým pohybem se rozumí pohyb v prostoru složený z otočení kolem přímky (osy) a posunutí ve směru této přímky.

Rozšířením grupy pohybů (rovinných nebo prostorových) o souměrnosti však získáme opět grupu; při ní jsou invariantní tvar a velikost geometrických útvarů.

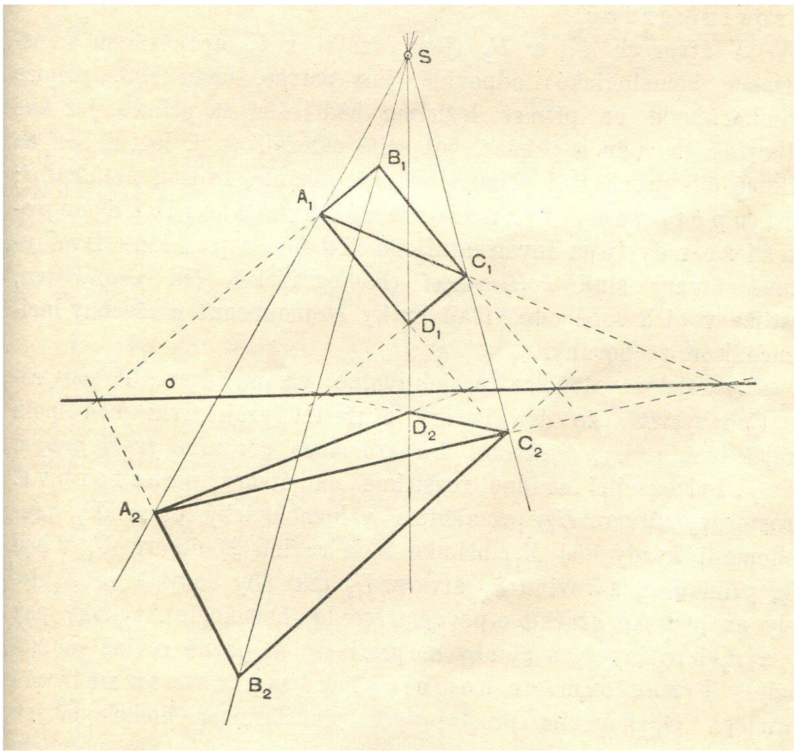
Další odstavec je věnován podobnosti a homothetickým transformacím, které rovněž tvoří grupu; při ní jsou invariantní tvar geometrických útvarů a velikost úhlů. Je uvedeno, že grupa pohybů v rovině nebo v prostoru (rozšířená v rovině o souměrnosti podle osy) rozšiřuje se grupou transformací homothetických v grupu transformací podobnostních. Při ní již zůstává invariantní pouze tvar geometrických útvarů.

Následuje vymezení elementární (metrické) geometrie jakožto geometrie, která přísluší ke grupě podobnostních transformací:

> *V geometrii t. zv. elementární čili metrické vyšetřujeme ty vlastnosti útvarů geometrických, jež jsou invariantní při všech transformacích útvarů těch v útvary podobné (proměny v útvary shodné a v útvary souměrné sem počítaje), t. j. při grupě transformací podobnostních. V tomto smyslu geometrie elementární přísluší ke grupě transformací podobnostních.* ([BV2], str. 72)

V dalších odstavcích se učebnice zabývá projektivní geometrií. Ocitujme pro ilustraci definici homologie (viz obr. 40):

> *Dva rovinné útvary U_1 a U_2 jsou homologické (perspektivní) dle určitého bodu (středu homologie) S a dle určité přímky (osy homologie) o, jestliže dvojice jejich bodů sobě odpovídajících leží na paprscích téhož svazku o středu S a dvojice jejich přímek sobě odpovídajících protínají se na téže ose o.* ([BV2], str. 73)



Obr. 40: Homologie mezi dvěma rovinnými útvary ([BV2], str. 73)

Je uvedeno, že homologické transformace v rovině ani v prostoru netvoří grupy. Zachovává se při nich však incidence geometrických prvků (bodů, přímek a rovin). Projektivnost mezi dvěma útvary je následně v rovině definována takto:

> *Dva rovinné útvary slují kollineární (homografické) čili projektivní, jestliže v nich sobě odpovídají prvky stejnojmenné a všechny incidence jsou zachovány.* ([BV2], str. 74)

Projektivní transformace v rovině i v prostoru již grupy tvoří.

V dalším textu se připomíná rozšiřování eukleidovských přímek, rovin i prostoru o „prvky v nekonečnu“ a princip duality[43]. Poslední odstavec nese název *Význam transformací pro úvahy geometrické.* Geometrické transformace jsou zde charakterizovány jako důležitý pomocný nástroj při studiu vlastností geometrických útvarů.[44] Dále je naznačena možnost využití geometrických transformací k přenášení vlastností z původního útvaru na útvar transformovaný.[45] Ocitujme úvod posledního odstavce obsahující tyto hlavní myšlenky:

> *Geometrické transformace jsou samy o sobě důležitým předmětem úvah geometrických. Jsou však také názornou a vydatnou pomůckou při vyšetřování útvarů geometrických: všímáme si buď útvarů a vztahů při transformaci invariantních, nebo srovnávajíce útvar transformovaný s útvarem původním, odvozujeme vlastnosti onoho z vlastností tohoto. V tom bývá jednak úspora práce, ježto věta dokázaná pro některý útvar převádí se potom (se zřetelem k transformaci) na útvar transformovaný, jednak ulehčení, protože každou úvahu geometrickou můžeme provésti pro nejjednodušší z těch útvarů, jež spolu transformací souvisí.* ([BV2], str. 80)

V závěru uvedeného odstavce je nastíněn význam geometrických transformací pro uspořádání geometrie; každá grupa geometrických transformací charakterizuje příslušnou geometrii.[46] Kapitola věnovaná geometrickým transformacím končí stručnou poznámkou:

> *Uvedený význam grup transformačních pro podstatu a uspořádání geometrie vytkl první Felix Klein (1872).* ([BV2], str. 82)

---

[43] *Zákon duálnosti v rovině: Ke každé větě geometrie projektivní lze připojiti novou větu tím, že v ní slovo **bod** nahradíme slovem **přímka** a naopak. Zákon duálnosti v prostoru: Každá věta projektivní geometrie přechází ve větu rovněž správnou, nahradíme-li v ní slovo **bod** slovem **rovina** a naopak.* Viz [BV2], str. 78–79.

[44] Např. translace slouží ke studiu geometrických útvarů obsahujících rovnoběžné přímky nebo roviny. Rotaci lze využít k vyšetřování kolmých přímek i rovin, útvarů obsahujících kružnice nebo útvarů souměrných. Podobnost útvarů zkoumáme na základě jejich stejnolehlosti (homothetie).

[45] Např. lze pomocí vhodné transformace některé vlastnosti kružnice (např. věty o vzájemné poloze přímky a kružnice nebo věty o pólu a poláře) přenést obecně na kuželosečky. Zdrojem mnoha nových geometrických vět týkajících se vlastností transformovaných útvarů jsou transformace homologické nebo transformace polární.

[46] *Ke grupě geometrických transformací patří soustava geom. útvarů a jich vlastností, jež jsou při transformacích těch invariantní; grupa ta charakterisuje příslušnou soustavu vět čili příslušnou geometrii.* Viz [BV2], str. 81.

V 11. kapitole nazvané *Mathematická věda a její význam* nalezneme následující vymezení obsahu geometrie:

> *Obsah geometrie můžeme děliti podle předmětu nebo podle methody. Vzhledem k předmětu je pronikavé rozdělení geometrie podle grup transformací, při kterých jsou vlastnosti geometrických útvarů invariantní; rozeznáváme tak geometrii příslušnou ke grupě transformací (pohybových a) podobnostních (geometrie metrická čili elementární, jejíž nejjednodušší části bývají dosud nazývány planimetrie, stereometrie a trigonometrie), geometrii příslušnou ke grupě transformací projektivních (geom. projektivní), geometrii vlastností, jež jsou invariantní při všech proměnách, kterými se neporušuje souvislost útvarů (tvar jejich se však jinak libovolně mění, tak zvaná analysis situs, k níž na př. patří Eulerova věta o mnohostěnech).* ([BV2], str. 156)

Na závěr ještě ocitujme krátký úryvek z poslední, 13. kapitoly věnované historickému přehledu vývoje „novodobé“ matematiky. Autoři v něm poukazují na stěžejní pojmy „současné“ matematiky, jimiž jsou pojem *funkce* a pojem *transformace*:

> *Mathematika doby nejnovější má několik charakteristických rysů. Celým vývojem mathematiky novodobé připravována byla vláda dvou pojmů: pojmu funkce a pojmu transformace. Nauka o funkcích a nauka o transformacích došly a docházejí stoupajícího rozkvětu nejen v užším smyslu mathematických odvětví, nýbrž pronikají všechno moderní myšlení mathematické. ... Theorie transformací geometrických nabyla vynikajícího významu geometrií projektivní; odtud spěje k dalšímu a všestrannému rozvoji.* ([BV2], str. 175)

Na Bydžovského a Vojtěchovy učebnice *Mathematika pro nejvyšší třídu gymnasií a reálných gymnasií* [BV2] a *Mathematika pro nejvyšší třídu reálek* [BV1], jež se od verze pro gymnázia obsahově příliš neliší, vyšla roku 1913 v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky recenze Bohuslava Hostinského (1884–1951).[47] Recenze vyznívá ve prospěch obou učebnic celkem příznivě, její autor se však neztotožňuje s užitím termínu „grupa transformací“. Připomeňme stručně část jeho vyjádření:

> *V geometrii jsou důkladně vyloženy principy geometrie metrické i projektivní a pojem transformace ... Jádro celé knihy tvoří první část (mathematická), jež jest psána veskrze přesně a v moderním duchu. ... Spisovatelé právem upozorňují na několika místech na to, jaký význam má theorie transformací pro nynější mathematiku. Název „grupa transformací“, kterého důsledně užívají, nepokládám za vhodný; myslím, že by spíše se doporučovalo přidržeti se způsobu, jakého právě při pojmenování tohoto důležitého pojmu bylo užito v literatuře německé, francouzské, italské a anglické, voliti totiž známé, v řeči dávno užívané slovo; název „skupina transformací“ úplně by vyhověl.*

[47] Viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 42(1913), 201–202.

6. Transformace na přelomu 19. a 20. století

Jednotná klasifikace všech známých geometrií vyložená v Erlangenském programu do jisté míry přispěla k odhalení obecnějších geometrických zákonitostí, jež stojí v pozadí moderní matematické vědy, a otevřela cestu k položení axiomatických základů geometrie. Ačkoliv se Felix Klein k axiomaticky budované moderní matematice počátku 20. století i k jejímu množinovému pojetí stavěl velmi rezervovaně, stal se nevědomky jedním z iniciátorů nového přístupu k základům geometrie. Intuitivní přístup založený převážně na syntetické geometrii byl postupně nahrazován moderním, formalizovaným způsobem argumentace a zdůvodňování, názorné geometrické představy zastínila abstraktní axiomatika.

F. Klein svůj názor na užití axiomatické metody v matematice vyjádřil např. ve svém díle *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* [K9]. V návaznosti na axiomatickou definici grupy napsal:

> *Diese abstrakte Formulierung ist für die Ausarbeitung der Beweise vortrefflich, sie eignet sich aber durchaus nicht zum Auffinden neuer Ideen und Methoden, sondern sie stellt vielmehr den Abschluß einer voraufgegangenen Entwicklung dar.* ([K9], Teil I, str. 335–336)

Abstraktní vymezení nových pojmů pomocí axiomů, které tyto pojmy splňují, jsou podle něj sice vhodné pro důkazy, nikoliv však pro objev nových myšlenek a metod.

F. Klein na druhou stranu dovedl uznat zásluhy axiomatického přístupu, ale pouze v případě, že axiomy přirozeně vyplynuly jako logická podstata již rozvinuté matematické teorie. Ostře se však ohrazoval proti názoru, že axiomy jsou libovolná tvrzení, která zvolíme za základ matematické teorie. Tento přístup pokládal za čistě filozofický pohled mající kořeny v nominalismu,[1] označil jej za *der Tod aller Wissenschaft.* Zdůrazňoval, že základními axiomy geometrie nemohou být zcela libovolná tvrzení, jejich přesný obsah musí být vhodně vyvozen z vlastností geometrického prostoru. Doložme Kleinův přístup k axiomům dvěma krátkými úryvky z druhého dílu jeho knihy *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* [K7]:

> *Demgegenüber findet man bei solchen Leuten, die sich nur für die logische und nicht für die anschauliche oder die allgemein-erkenntnistheoretische Seite der Sache interessieren, neuerdings häufig die Meinung, die Axiome seien nur willkürliche Sätze, die wir ganz freiwillig anerkennen, und die Grundbegriffe schließlich ebenso nur willkürliche Zeichen für Dinge, mit denen wir operieren wollen. ...*

[1] Nominalismus byl vedle realismu jedním ze dvou základních filozofických směrů středověku. Prosazoval názor, že obecné pojmy jsou pouhá jména, která na základě poznání vytváří člověk, že reálně existují pouze jednotlivé věci se svými individuálními vlastnostmi. Nejznámějším představitelem nominalismu byl anglický františkán William Occam (1290–1349).

Ich selbst teile diesen Standpunkt keineswegs, sondern halte ihn für den Tod aller Wissenschaft: die Axiome der Geometrie sind – wie ich meine – nicht willkürliche, sondern vernünftige Sätze, die im allgemeinen durch die Raumanschauung veranlaßt und in ihrem Einzelinhalt und Reihenfolge durch Zweckmäßigkeitsgründe reguliert werden.
([K7], str. 383–384)

6.1 Axiomatický systém

Axiomatický systém je ve své podobě obsažen již v Eukleidových *Základech*. Brzy po jejich sepsání však byly zjištěny určité nedostatky v jejich logické struktuře. Problematické jsou již úvodní definice (*výměry*) základních geometrických pojmů. Eukleidés se totiž domníval, že pojmy jako *bod*, *přímka* a *rovina* lze jednoduše „definovat" pouze na základě geometrické intuice.[2] Každý matematický pojem však musí být definován pomocí jiných matematických pojmů, které je rovněž potřeba přesně definovat pomocí dalších pojmů atd. Všechny matematické pojmy není proto možné explicitně definovat, aniž bychom se vyhnuli definicím kruhem nebo budovali „nekonečný" řetězec definic. Na začátku je třeba zvolit skupinu základních (primitivních) nedefinovaných pojmů, jejichž význam je intuitivně zřejmý, a další matematické pojmy již pomocí nich přesně definovat. Přitom volba základních pojmů není jednoznačná. Postuláty a axiomy potom představují tvrzení o základních pojmech, jejichž platnost se předpokládá a která specifikují vlastnosti zvolených pojmů. Z tohoto hlediska se základní matematické pojmy axiomatického systému definují implicitně pomocí postulátů a axiomů, které tyto pojmy splňují.

Za axiomy však nelze zvolit zcela libovolná tvrzení týkající se základních pojmů. Axiomatický systém musí být logicky konzistentní, musí splňovat následující požadavky: musí být *úplný*, *nezávislý* a *bezesporný*. V úplném axiomatickém systému je každé tvrzení rozhodnutelné, tj. lze jednoznačně určit, zda v rámci uvažovaného systému je dané tvrzení pravdivé či nikoliv. Není možné do systému axiomů přidat další axiom, který je s nimi konzistentní a je na daných axiomech nezávislý. Nezávislost skupiny axiomů znamená, že žádný z uvažovaných axiomů nelze vyvodit z ostatních. V opačném případě by byla formulace takového tvrzení jako axiomu nadbytečná, byl by logickým důsledkem ostatních axiomů. Bezespornost axiomatického systému zaručuje, že v rámci takového systému nelze současně odvodit nějaké tvrzení i jeho negaci.

Dalším slabým místem Eukleidových *Základů* je skutečnost, že některé předpoklady využívané při důkazech tvrzení nejsou v textu explicitně uvedeny, vycházejí pouze z geometrické intuice. Např. první postulát[3] uvádí, že existuje alespoň jedna přímka jdoucí dvěma různými body, neříká již však, že taková přímka

[2] Eukleidés ve svých *Základech* definoval bod, přímku a rovinu následujícím způsobem: *Bod jest, co nemá dílu. Čára pak délka bez šířky. Hranicemi čáry jsou body. Přímá jest čára (přímka), která svými body táhne se rovně. Plocha jest, co jen délku a šířku má. Hranicemi plochy jsou čáry. Rovinná jest plocha (rovina), která přímkami na ní jsoucími prostírá se rovně.* Viz [Eu], str. 1. Je třeba poznamenat, že Eukleidés „přímkou" rozuměl v dnešním smyslu úsečku, podobně „rovinu" chápal pouze jako omezenou část rovinné plochy.

[3] *Budiž úkolem od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu vésti přímku.* Viz [Eu], str. 2.

existuje právě jedna. Přitom Eukleidés ve svých důkazech často předpokládal existenci jediné přímky s uvedenou vlastností.

Kritiku Eukleidova systému definic, postulátů a axiomů (*výměry*, *úkoly prvotné* a *zásady*) lze nalézt již u nejstarších známých komentátorů *Základů*, jimiž byli Pappos z Alexandrie (asi 290–350) a Proklos (410–485)[4]. Na nedostatky pak během dalšího vývoje podle [Kl] upozorňovali i mnozí další. Francouzský matematik a básník Jacques Peletier du Mans (1517–1582) kritizoval Eukleidovy důkazy vět o shodnosti. Německý filozof Arthur Schopenhauer (1788–1860) poukazoval na sedmý Eukleidův axiom,[5] podle něhož objekty, které se navzájem kryjí, jsou shodné. Namítal, že kryjící se objekty jsou podle naší empirické zkušenosti identické, uvedený axiom proto považoval za nadbytečný. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) zastával názor, že Eukleidés se spolehl na intuici, když v první knize při řešení úlohy I[6] využil skrytý předpoklad, že dvě kružnice, z nichž každá prochází středem druhé, se protínají. Své připomínky k Eukleidovým *Základům* vyjádřil i Carl Friedrich Gauss (1777–1855), jenž v práci postrádal přesné vymezení relace uspořádání bodů na přímce; kritizoval rovněž definice přímky a roviny. Dnes je navíc zřejmé, že Eukleidovy axiomy na druhou stranu umožňují i „důkazy“ některých nepravdivých tvrzení,[7] neboť přesně neurčují polohu určitých bodů vzhledem k ostatním. Americký historik matematiky Morris Kline (1908–1992) ve své knize [Kl] v této souvislosti napsal:

> *Euclidean geometry was supposed to have offered accurate proofs of theorems suggested intuitively by figures, but actually it offered intuitive proofs of accurately drawn figures.* ([Kl], volume 3, str. 1007)

Přes všechny výše uvedené výtky a nedostatky byly Eukleidovy *Základy* po dlouhá staletí považovány za model rigorózního způsobu dokazování a dedukce. Teprve koncem 19. století si matematici začali plně uvědomovat rozsah nedostatků v Eukleidově systému. V souvislosti s rozvojem neeukleidovských geometrií, jejichž logická konzistence byla tehdy již spolehlivě prokázána, vyvstala potřeba geometrický systém nastolený Eukleidem revidovat a přepracovat.

První myšlenky axiomatického přístupu v geometrii zformuloval Moritz Pasch a poté systematicky rozvinul David Hilbert; jim bude věnována pozornost v následujícím textu. Podle [Ev1] další uspokojivé systémy axiomů eukleidovské geometrie představili např. italští matematici Giuseppe Peano[8] a Mario Pieri[9] a dále

[4] Viz Proclus, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, Translated, with Introduction and Notes, by Glenn R. Morrow, With a new foreword by Ian Mueller, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1992, 355 stran.

[5] *A co se navzájem kryje, navzájem rovno jest.* Viz [Eu], str. 2.

[6] *Na dané přímce omezené postav trojúhelník rovnostranný.* Viz [Eu], str. 3.

[7] Např. důkaz tvrzení, že všechny trojúhelníky jsou rovnostranné. Viz [Kl], volume 3, str. 1006–1007.

[8] Giuseppe Peano (1858–1932) pracoval se základními pojmy *bod*, *úsečka* a *pohyb*. Viz Peano G., *I principii di geometria logicamente esposti*, Fratelli Bocca Editori, Stabilimento Tipografico Vincenzo Bona, Torino, 1889, 40 stran; *Sui fondamenti della Geometria*, Rivista di matematica 4(1894), 51–90.

[9] Mario Pieri (1860–1913) vypracoval systém 20 axiomů, za základní zvolil pojmy *bod* a *pohyb*. Viz Pieri M., *Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo. Monografia del punto*

američtí matematici Oswald Veblen[10] a Edward V. Huntington[11]. Základům geometrie se ve své práci věnoval i italský matematik Giuseppe Veronese.[12]

6.2 Moritz Pasch

Moritz Pasch se narodil 8. listopadu 1843 v rodině obchodníka v Breslau (Wrocław, Vratislav). Vystudoval zde gymnázium a roku 1860 nastoupil na místní univerzitu. Nejprve zamýšlel studovat chemii, posléze si však za svůj studijní obor zvolil matematiku. Roku 1865 obhájil na univerzitě disertační práci *De duarum sectionem conicarum in circulos projectione* sepsanou pod vedením Heinricha E. Schrötera (1829–1892) a získal doktorát. Poté odjel studovat na univerzitu do Berlína, kde v té době působili Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897) a Leopold Kronecker (1823–1891). V říjnu 1866 mu však zemřel otec, a proto M. Pasch na krátký čas své studium přerušil a vrátil se domů.

V listopadu 1870 předložil na univerzitě Giessenu svou habilitační práci *Zur Theorie der Komplexe und Kongruenzen von Geraden* a začal zde přednášet. V srpnu 1873 byl jmenován mimořádným profesorem a o dva roky později řádným profesorem. M. Pasch se na univerzitě kromě výzkumných aktivit zapojil i do výuky budoucích středoškolských učitelů, byl předsedou komise pro zkoušky učitelské způsobilosti. V akademickém roce 1885/86 byl zvolen děkanem filozofické fakulty, v akademickém roce 1893/94 působil na univerzitě jako rektor. Vychoval kolem 30 doktorandů. V dubnu 1911 svou činnost na univerzitě ukončil, neboť se chtěl věnovat pouze matematickému bádání. V roce 1923 obdržel u příležitosti svých osmdesátých narozenin dva čestné doktoráty univerzit ve Freiburgu a ve Frankfurtu. Moritz Pasch zemřel 20. září 1930 na dovolené v lázních Homburg v Německu.[13]

M. Pasch se zpočátku zabýval algebraickou geometrií, poté začal zkoumat základy geometrie a matematické analýzy. Kromě řady matematických článků[14]

e del moto, Memorie della reale Accademia delle scienze di Torino 49(1900), 173–222. M. Pieri pohyb chápal (v dnešní terminologii) jako vzájemně jednoznačné zobrazení množiny všech bodů na sebe, splňující další podmínky. Viz [Č2], str. 196.

[10] Oswald Veblen (1880–1960) sestavil systém 16 axiomů s primitivními pojmy *bod* a *relace uspořádání*. Viz Veblen O., *A system of axioms for geometry*, Transactions of the American Mathematical Society 5(1904), 343–384.

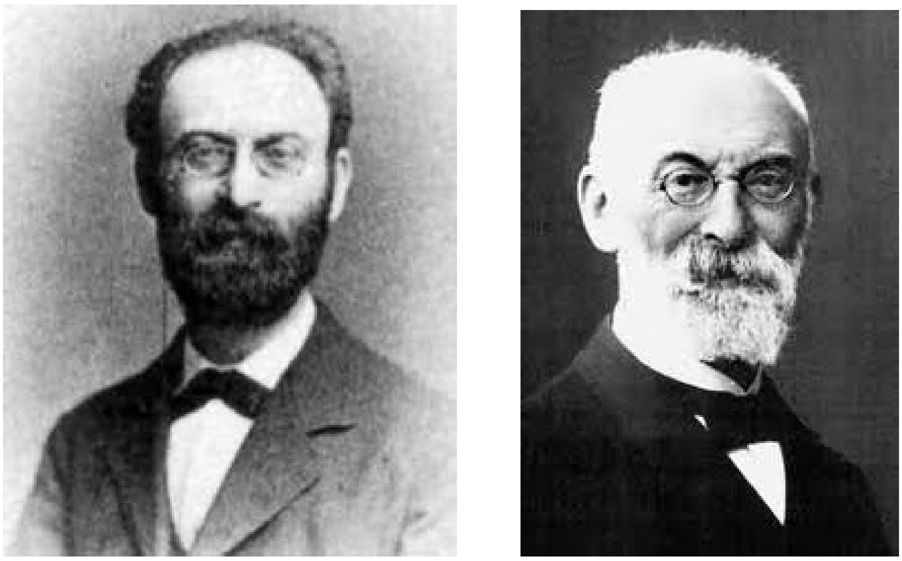
[11] Edward V. Huntington (1874–1952) ve svém systému 23 axiomů uvažoval základní pojmy *sféra* a *relace inkluze*. Viz [Ev1], str. 457.

[12] Giuseppe Veronese (1854–1917) pracoval s nedefinovanými pojmy *přímka*, *úsečka* a *shodnost úseček*. Viz Veronese G., *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare*, Lezioni per la scuola di magistero in matematica, Tipografia del Seminario, Padova, 1891, 630 stran.

[13] O životě a díle M. Pasche viz Engel F., Dehn M., *Moritz Pasch*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 44(1934), 120–142. Relevantní informace poskytuje i webová stránka http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Pasch.html.

[14] Můžeme uvést např. následující články: Pasch M., *Der Ursprung des Zahlbegriffs*, Mathematische Zeitschrift 11(1921), 124–156; *Über zentrische Kollineation*, Mathematische Annalen 90(1923), 103–107; *Betrachtungen zur Begründung der Mathematik*, Mathematische Zeitschrift 20(1924), 231–240; *Die natürliche Geometrie*, Mathematische Zeitschrift 21(1924), 151–153.

publikoval tři významné monografie: *Vorlesungen über neuere Geometrie*,[15] *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung*[16] a *Grundlagen der Analysis*[17]. Jeho jméno je dnes v matematice spojeno s formulací tzv. *Paschova axiomu*, podle kterého přímka protínající stranu AB trojúhelníku ABC ve vnitřním bodě musí nutně protnout ještě jednu jeho další stranu ve vnitřním bodě, pokud neprochází vrcholem C.



Obr. 41: Moritz Pasch

M. Pasch významně přispěl k rozvoji axiomatického přístupu v geometrii, jenž stojí v pozadí moderní matematiky 20. století. Od dob Eukleida byl prvním matematikem, který geometrii budoval na základě formálně zvolených abstraktních axiomů. Odstranil přitom výše zmíněný významný nedostatek Eukleidova axiomatického systému týkající se volby základních, nedefinovaných pojmů.

Vorlesungen über neuere Geometrie

Roku 1882 publikoval M. Pasch knihu *Vorlesungen über neuere Geometrie* [P1], jejímž cílem bylo položit základy projektivní geometrie nezávislé na Eukleidově axiomu o rovnoběžkách.[18] Omezil se na čistě formální axiomatický přístup nezávislý na fyzikální interpretaci matematických pojmů. Poukázal na skutečnost, že řada geometrů ve svých úvahách příliš spoléhá na fyzikální intuici, ve skutečnosti je však geometrie (včetně eukleidovské) pouze umělou konstrukcí, která má nějaký vztah k našemu fyzikálnímu prostoru, nicméně není jeho přesnou reprezentací. Uvedl, že např. princip duality je v rozporu s našimi fyzikálními představami o bodech a přímkách; záměnnost těchto pojmů nelze přijmout na základě intuice.

[15] Viz Pasch M., *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1882, 201 stran.

[16] Viz Pasch M., *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung*, Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1882, 188 stran.

[17] Viz Pasch M., *Grundlagen der Analysis*, ausgearbeitet unter Mitwirkung von Clemens Thaer, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1909, 140 stran.

[18] Některé axiomy projektivní geometrie nebo jejich analogie však měly význam rovněž pro axiomatizaci eukleidovské i neeukleidovských geometrií.

M. Pasch ve své práci zvolil za základní pojmy následující prvky geometrie: *bod*, *úsečka* a *část roviny*.[19] Volbu posledních dvou pojmů namísto pojmů *přímka* a *rovina* zdůvodnil tím, že nikdo vlastně nemá s celou přímkou a celou rovinou žádnou zkušenost. Axiomy nepovažoval jako řada jeho předchůdců za „samozřejmé pravdy", ale za tvrzení o nedefinovaných pojmech, která sice mohou vycházet z naší zkušenosti s fyzikální realitou, ale pokud je jednou zvolíme, všechny důkazy dalších tvrzení z nich musí vyplývat bez dalšího odvolávání se na naši zkušenost. Byl prvním matematikem, jenž poukázal na skutečnost, že Eukleidés ve svých důkazech využíval vlastnosti uspořádání, aniž by se o nich někde zmínil. Sám proto ve své knize nejprve implicitně zavedl relaci uspořádání pro kolineární body[20] a poté zformuloval vlastnosti uspořádání, které jsou dnes základem každé metrické geometrie.


VORLESUNGEN
ÜBER NEUERE GEOMETRIE

VON

MORITZ PASCH
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GIESSEN

ZWEITE AUFLAGE

MIT EINEM ANHANG:

DIE GRUNDLEGUNG DER GEOMETRIE
IN HISTORISCHER ENTWICKLUNG

VON

MAX DEHN
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT
FRANKFURT A. M.

MIT INSGESAMT 115 ABBILDUNGEN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1926

Obr. 42: Moritz Pasch – *Vorlesungen über neuere Geometrie*

[19] M. Pasch v prvním vydání své knihy z roku 1882 mezi základní pojmy zařadil rovněž *shodnost úseček*.

[20] *Wir ziehen zunächst nur eine einzige Gerade in Betracht. Sind A, B, C Punkte einer Geraden g, also C in der Geraden AB gelegen, so bilden die drei Punkte eine gerade Reihe, d. h. es liegt entweder A innerhalb der Strecke BC, oder B innerhalb der Strecke AC, oder C innerhalb der Strecke AB. Liegt etwa C innerhalb der Strecke AB, so sagt man: Der Punkt C liegt in der Geraden g zwichen A und B, A und C auf derselben Seite von B, B und C auf derselben Seite von A, A und B auf verschiedenen Seiten von C.* Viz [P1], str. 9.

Definice a axiomy shodnosti

M. Pasch ve své knize *Vorlesungen über neuere Geometrie* [P1] zavedl pojem shodnosti následujícím způsobem. Pro jednoduchost uvažoval nejprve dvojice pevně svázaných bodů $a\,b$ a $a'\,b'$. Přitom se omezil na geometrické útvary, které se skládají pouze z vlastních bodů. Dva útvary $a\,b$ a $a'\,b'$ (v tomto případě úsečky) nazval shodnými, pokud je oba lze „překrýt" stejným, vzhledem k daným útvarům pohyblivým, třetím útvarem:

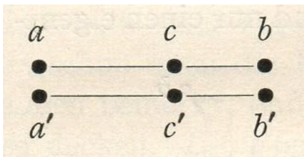
> *Sehen wir jetzt ganz davon ab, ob die Figuren $a\,b$ und $a'\,b'$ gegen einander beweglich sind oder nicht. Ich kann jedenfalls eine Figur herstellen, welche gegen jene beiden Figuren beweglich ist und mit der einen zum Decken gebracht werden kann. Ist es möglich, eine und dieselbe Figur sowohl mit $a\,b$ als auch mit $a'\,b'$ zum Decken zu bringen, so heissen die Figuren $a\,b$ und $a'\,b'$ congruent.* ([P1], str. 102)

V dalším textu pro shodnost útvarů zformuloval těchto deset axiomů:[21]

I. *Die Figuren $a\,b$ und $b\,a$ sind congruent.*

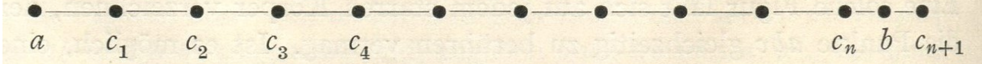
II. *Zur Figur $a\,b\,c$ kann man einen und nur einen eigentlichen Punkt b' derart hinzufügen, dass $a\,b$ und $a\,b'$ congruente Figuren werden und b' in der geraden Strecke $a\,c$ oder c in der geraden Strecke $a\,b'$ liegt.*

III. *Liegt der Punkt c innerhalb der geraden Strecke $a\,b$, und sind die Figuren $a\,b\,c$ und $a'\,b'\,c'$ congruent, so liegt der Punkt c' innerhalb der geraden Strecke $a'\,b'$.*



Obr. 43: III. Grundsatz ([P1], str. 105)

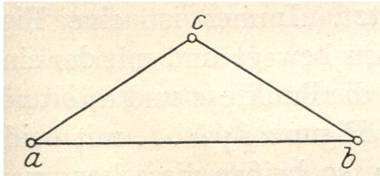
IV. *Liegt der Punkt c_1 innerhalb der geraden Strecke $a\,b$, und verlängert man die Strecke $a\,c_1$ um die congruente Strecke $c_1\,c_2$, diese um die congruente Strecke $c_2\,c_3$ u. s. f., so gelangt man stets zu einer Strecke $c_n\,c_{n+1}$, welche den Punkt b enthält.*



Obr. 44: IV. Grundsatz ([P1], str. 105)

[21] M. Pasch tyto axiomy v prvním vydání své knihy z roku 1882 i ve druhém, dodatky opatřeném vydání z roku 1912 označil jako *I. Grundsatz* až *X. Grundsatz*, v dalším vydání z roku 1926 je označil jako *I. Kernsatz* až *X. Kernsatz*. Citace viz [P1], 1882, str. 103–110.

V. *Wenn in der Figur $a\,b\,c$ die Strecken $a\,c$ und $b\,c$ congruent sind, so sind die Figuren $a\,b\,c$ und $b\,a\,c$ congruent.*



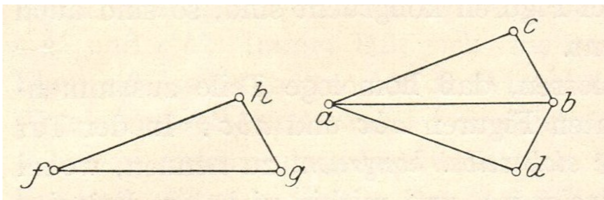
Obr. 45: V. Grundsatz ([P1], str. 106)

VI. *Wenn zwei Figuren congruent sind, so sind auch ihre homologen Theile*[22] *congruent.*

VII. *Wenn zwei Figuren einer dritten congruent sind, so sind sie einander congruent.*

VIII. *Wird von zwei congruenten Figuren die eine um einen eigentlichen Punkt erweitert, so kann man die andere um einen eigentlichen Punkt so erweitern, dass die erweiterten Figuren wieder congruent sind.*

IX. *Sind zwei Figuren $a\,b$ und $f\,g\,h$ gegeben, $f\,g\,h$ nicht in einer geraden Strecke enthalten, $a\,b$ und $f\,g$ congruent, und wird durch a und b eine ebene Fläche gelegt, so kann man in dieser oder in ihrer Erweiterung genau zwei Punkte c und d so angeben, dass die Figuren $a\,b\,c$ und $a\,b\,d$ der Figur $f\,g\,h$ congruent sind, und zwar hat die Strecke $c\,d$ mit der Strecke $a\,b$ oder deren Verlängerung einen Punkt gemein.*



Obr. 46: IX. Grundsatz ([P1], str. 109)

X. *Zwei Figuren $a\,b\,c\,d$ und $a\,b\,c\,e$, deren Punkte nicht in ebenen Flächen liegen, sind nicht congruent.*

Uvedené axiomy popisují základní vlastnosti shodných útvarů. Mimo jiné je v nich implicitně obsaženo tvrzení, že relace shodnosti je ekvivalencí; reflexivnost plyne přímo z definice shodnosti, symetrii a tranzitivnost shodnosti zahrnují axiomy I. a VII. Axiom III. dokládá, že shodnost zachovává uspořádání kolineárních bodů. Znění axiomu IV. je dnes známo jako tzv. *Archimédův axiom.* Podle axiomu IX. existují v rovině právě dvě shodnosti (přímá a nepřímá), které daný trojúhelník zobrazí na trojúhelník s ním shodný, je-li předepsán obraz jedné jeho strany. Axiom X. vyplývá ze skutečnosti, že M. Pasch rozlišoval mezi „pravotočivou" a „levotočivou bází".

[22] M. Pasch termínem *die homologen Theile* označoval odpovídající si části dvou shodných útvarů.

6.3 David Hilbert

David Hilbert byl významným německým matematikem a filozofem. Narodil se 23. ledna 1862 v Königsbergu (Královec, Kaliningrad). V roce 1872 nastoupil na Friedrichskolleg Gymnasium, středoškolské studium však zakončil na vědečtěji zaměřeném Wilhelm Gymnasium, na něž přestoupil v roce 1879. Na podzim roku 1880 začal studovat na univerzitě v Königsbergu, kde navázal přátelství a spolupráci s Hermannem Minkowskim (1864–1909) a později i s Adolfem Hurwitzem (1859–1919), jenž na univerzitě působil od roku 1884 jako mimořádný profesor. Pod vedením Ferdinanda von Lindemanna (1852–1939) sepsal D. Hilbert disertační práci nazvanou *Über invariante Eigenschaften spezieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunktionen*, za niž mu byl roku 1885 udělen doktorát. V letech 1886 až 1892 působil na univerzitě jako soukromý docent, v roce 1893 jako mimořádný profesor a v letech 1893 až 1895 jako řádný profesor.

V roce 1895 přešel D. Hilbert na Kleinův podnět na katedru matematiky na univerzitu v Göttingen,[23] na tehdejší nejlepší matematický ústav na světě, kde působil po celý zbytek své aktivní kariéry. V letech 1902 až 1939 byl editorem časopisu *Mathematische Annalen*. D. Hilbert zemřel 14. února 1943 v Göttingen.[24]

Obr. 47: David Hilbert

[23] Uveďme pro úplnost, že Felix Klein o Hilbertův přechod na univerzitu v Göttingen neúspěšně usiloval již v roce 1892, když se na katedře matematiky uvolnilo místo po Hermannu A. Schwarzovi (1843–1921), který v tomto roce přesídlil do Berlína. Na volné místo na univerzitě v Göttingen byl tehdy přijat Heinrich Weber (1842–1913), jenž o tři roky později přešel do Strasbourgu.

[24] O Hilbertově životě viz [Ja], str. 246–257; [WA], str. 500–513. Relevantní informace poskytuje i webová stránka http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Hilbert.html. Dále viz Blumenthal O., *David Hilbert*, Die Naturwissenschaften 10(1922), 67–72; Reid C., *Hilbert*, Springer-Verlag, New York, 1996, 228 stran.

D. Hilbert se v prvních pracích zabýval obecnou algebrou, zejména teorií invariantů. Roku 1888 představil vlastní řešení tzv. Gordanova problému,[25] v němž podal důkaz existence konečné báze pro formy více proměnných, i když mu jeho abstraktní metoda neumožnila takovou bázi nalézt. Článek obsahující existenční důkaz zaslal k otištění do časopisu *Mathematische Annalen*, recenzent Paul Gordan, autor tohoto problému, jeho revoluční přístup však shledal příliš obtížným a uveřejnění článku odmítl. Komentoval jej slovy: „Das ist nicht Mathematik. Das ist Theologie." Své vyjádření zaslal F. Kleinovi, jenž rozpoznal význam Hilbertovy práce a zajistil, aby byl článek v původním znění v časopisu otištěn.[26] D. Hilbert svou novou metodu později ještě rozšířil v dalším článku, v němž navíc odhadl maximální počet prvků takové báze, a opět jej zaslal k otištění v časopisu *Mathematische Annalen*.[27] F. Klein poté D. Hilbertovi napsal, že nepochybuje o tom, že se jedná o nejvýznamnější dílo z obecné algebry, které kdy bylo v časopisu otištěno.

V roce 1897 vydal D. Hilbert práci z algebraické teorie čísel nazvanou *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*, známou krátce jako *Zahlbericht*.[28] Kromě shrnutí dosažených výsledků, o něž se již dříve zasloužili Ernst Eduard Kummer (1810–1893), Leopold Kronecker (1823–1891) a Richard Dedekind (1831–1916), obsahuje navíc řadu Hilbertových původních výsledků. Roku 1900 představil na 2. mezinárodním kongresu matematiků v Paříži 23 otevřených matematických problémů.[29] Jejich řešení vedlo k dalšímu rozvoji vybraných matematických disciplín a podnítilo další matematický výzkum. Řada problémů byla vyřešena během 20. století. Kolem roku 1909 se D. Hilbert začal zajímat o funkcionální analýzu, konkrétně o integrální rovnice, a některé otázky variačního počtu.[30]

Roku 1920 zformuloval výzkumný projekt známý jako tzv. *Hilbertův program*, jenž požadoval, aby byla matematika postavena na pevných logických základech.

[25] Německý matematik Paul Gordan (1837–1912) v roce 1868 dokázal existenci konečné báze pro binární formy. Jeho důkaz využívající komplexní čísla však z důvodu výpočetní složitosti nebylo možno zobecnit pro formy více proměnných. Viz Gordan P., *Beweis, dass jede Covariante und Invariante einer binären Form eine ganze Function mit numerischen Coefficienten einer endlichen Anzahl solcher Formen ist*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 69(1868), 323–354.

[26] Viz Hilbert D., *Ueber die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten*, Mathematische Annalen 32(1888), 342–350.

[27] Viz Hilbert D., *Ueber die Theorie der algebraischen Formen*, Mathematische Annalen 36(1890), 473–534. P. Gordan na tento článek později reagoval; viz Gordan P., *Ueber einen Satz von Hilbert*, Mathematische Annalen 42(1893), 132–142.

[28] Viz Hilbert D., *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*, Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 4(1894/95), 175–535 (bylo vytištěno až roku 1897).

[29] Viz Hilbert D., *Mathematische Probleme*, Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris 1900, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Heft 3, 1900, 253–297; též Archiv der Mathematik und Physik 1(1901), 44–63, 213–237. Úplné znění všech předložených matematických problémů včetně komentáře ke každému z nich též viz *Die Hilbertschen Probleme*, erläutert von einem Autorenkollektiv unter der Redaktion von P. S. Alexandrov, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 252, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2007, 302 stran.

[30] O Hilbertově díle viz Dehn M., *Hilberts geometrisches Werk*, Die Naturwissenschaften 10(1922), 77–82; Weyl H., *David Hilbert and his mathematical work*, Bulletin of the American Mathematical Society 50(1944), 612–654.

Jeho cílem bylo vypracovat axiomatické systémy základních matematických oborů (aritmetiky, klasické analýzy, logiky, teorie množin), z nichž matematický obsah vychází, tj. ukázat, že všechna matematická tvrzení lze formálními postupy vyvodit z konečného systému správně zvolených axiomů a že takový systém je logicky konzistentní.[31]

Hilbertovo jméno je dnes v matematice spojeno zejména s určitým typem prostoru nekonečné dimenze (tzv. *Hilbertův prostor*), jenž se využívá nejen v matematické, resp. funkcionální analýze, ale např. i v kvantové mechanice. Svými pracemi přispěl k novým objevům nejen v matematice, ale i v matematické fyzice (kinetická teorie plynů, teorie záření, teorie gravitace).

Grundlagen der Geometrie

Hilbertovo nejznámější dílo o základech geometrie vyšlo roku 1899 pod názvem *Grundlagen der Geometrie.*[32] Představil v něm první úplný systém 20 axiomů eukleidovské geometrie, kterým nahradil tradiční Eukleidovy axiomy a z něhož bylo možno všechna tvrzení eukleidovské geometrie odvodit. Svou prací předznamenal nový směr v matematickém bádání 20. století – moderní axiomatický přístup, jenž vedl k matematickému formalismu.[33] D. Hilberta k axiomatickému přístupu v geometrii významně inspiroval německý matematik Hermann Ludwig Gustav Wiener (1857–1939), jenž roku 1891 na výročním shromáždění německých přírodovědců a lékařů v Halle vystoupil s přednáškou *Über Grundlagen und Aufbau der Geometrie.*[34]

---

[31] Viz Hilbert D., Ackermann W., *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer-Verlag, Berlin, 1928, 120 stran; Hilbert D., Bernays P., *Grundlagen der Mathematik*, Band I, II, Springer-Verlag, Berlin, 1934, 1939, 468 + 498 stran.

[32] Viz Hilbert D., *Grundlagen der Geometrie*, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen, herausgegeben von dem Fest-Comitee, I. Theil, Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1899, 92 stran. D. Hilbert své dílo od uveřejnění první verze v roce 1899 mnohokrát upravoval, přepracovával a doplňoval, stále se k němu vracel a celý axiomatický systém postupně upřesňoval a vylepšoval. Kniha se během následujících let dočkala několika vydání i překladů, její definitivní verze vyšla v rámci 7. přepracovaného a rozšířeného vydání v roce 1930. Francouzský překlad viz Hilbert D., *Les principes fondamentaux de la géométrie*, traduit par L. Laugel, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure 17(1900), 103–209; též Gauthier-Villars, Paris, 1900, 114 stran. Anglický překlad viz Hilbert D., *The foundations of geometry*, authorized translation by E. J. Townsend, The Open Court Publishing Company, Chicago, 1902, 132 stran.

[33] Podle matematického formalismu jsou obsahem matematiky operace se symboly splňující formálně stanovená pravidla.

[34] Úplný text přednášky se nedochoval, bylo publikováno pouze krátké shrnutí. Viz Wiener H., *Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1(1890/91), 45–48; *Weiteres über Grundlagen und Aufbau der Geometrie*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 3(1894), 70–80. Další okolnosti vzniku Hilbertových *Grundlagen der Geometrie* viz Toepell M., *On the origins of David Hilbert's „Grundlagen der Geometrie"*, Archive for History of Exact Sciences 35(1986), 329–344; Toepell M., *100 Jahre Grundlagen der Geometrie – David Hilbert's entscheinender Beitrag zur Formalisierung der Mathematik*, Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1(1999), 10–15, český překlad viz Toepell M., *100 let „Základů geometrie": Rozhodující příspěvek Davida Hilberta k formalizaci matematiky*, přeložila Alena Šolcová, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 45(2000), 89–97.

FESTSCHRIFT
ZUR FEIER DER ENTHÜLLUNG DES GAUSS-WEBER-DENKMALS IN GÖTTINGEN. HERAUSGEGEBEN VON DEM FEST-COMITEE. I. THEIL.

GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

VON

DR. DAVID HILBERT,

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

MIT 50 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.

Obr. 48: David Hilbert – *Grundlagen der Geometrie*

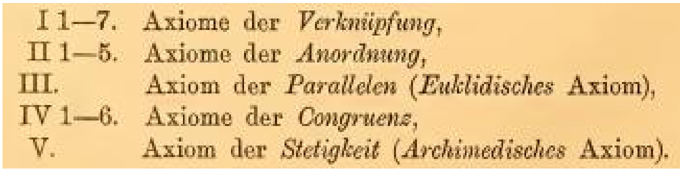
D. Hilbert ve své práci uvažoval *body*, *přímky* a *roviny* jako primitivní, nedefinované geometrické objekty, které jsou v určitém vzájemném vztahu.[35] Úplný popis všech vztahů mezi nimi (relace incidence mezi bodem a přímkou nebo bodem a rovinou, relace uspořádání bodů na přímce, relace shodnosti a rovnoběžnosti) pak podávají axiomy. Ocitujme Hilbertova slova z úvodu první kapitoly:

> *Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte und bezeichnen sie mit A, B, C, $\ldots$; die Dinge des zweiten Systems nennen wir Gerade und bezeichnen sie mit a, b, c, $\ldots$; die Dinge des dritten Systems nennen wir Ebenen und bezeichnen sie mit α, β, γ, $\ldots$; die Punkte heissen auch die Elemente der linearen Geometrie, die Punkte und Geraden heissen die Elemente der ebenen Geometrie und die Punkte, Geraden und Ebenen heissen*

[35] Německý matematik Ludwig Otto Blumenthal (1876–1944) citoval následující Hilbertův výrok, který stručně vystihuje podstatu axiomatického přístupu v geometrii, při němž hlavní roli hrají axiomaticky zavedené vlastnosti základních pojmů. D. Hilbert měl k volbě základních matematických pojmů poznamenat, že vždy musí být možnost namísto *bodů*, *přímek* a *rovin* říkat *stoly*, *židle* a *žejdlíky piva*: *Man muß jederzeit an Stelle von „Punkte, Geraden, Ebenen“ „Tische, Stühle, Bierseidel“ sagen können.* Uvedený citát údajně pochází z Hilbertovy konverzace v čekárně na vlakovém nádraží v Berlíně v pátek 25. září 1891 při jeho cestě zpět do Königsbergu. Viz Blumenthal O., *Lebensgeschichte*, in *David Hilbert: Gesammelte Abhandlungen*, dritter Band: Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes nebst einer Lebensgeschichte, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935, 402–403.

die Elemente der räumlichen Geometrie oder des Raumes. Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „liegen", „zwischen", „parallel", „congruent", „stetig"; die genaue und vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die Axiome der Geometrie. ([Hi4], str. 4)

Axiomy rozdělil D. Hilbert do pěti skupin: axiomy incidence, uspořádání, rovnoběžnosti, shodnosti a spojitosti (viz obr. 49).



I 1—7.	Axiome der *Verknüpfung*,
II 1—5.	Axiome der *Anordnung*,
III.	Axiom der *Parallelen* (*Euklidisches* Axiom),
IV 1—6.	Axiome der *Congruenz*,
V.	Axiom der *Stetigkeit* (*Archimedisches* Axiom).

Obr. 49: Hilbertovy axiomy ([Hi4], str. 4)

Hilbertovy axiomy přitom nerozlišují mezi rovinnou a prostorovou eukleidovskou geometrií, obě spojují do jednotného systému. V dalším textu se zaměříme na Hilbertovy výsledky související s geometrickými transformacemi.

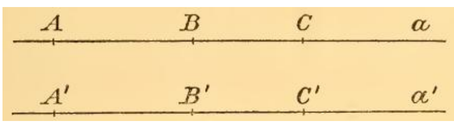
Axiomy shodnosti

D. Hilbert ve své knize *Grundlagen der Geometrie* [Hi4] pojem shodnosti úseček zavedl pomocí následujících axiomů:[36]

1. *Wenn A, B zwei Punkte auf einer Geraden a und ferner A' ein Punkt auf derselben oder einer anderen Geraden a' ist, so kann man auf einer gegebenen Seite der Geraden a' von A' stets einen und nur einen Punkt B' finden, so dass die Strecke AB (oder BA) der Strecke $A'B'$ congruent ist, in Zeichen: $AB \equiv A'B'$. Jede Strecke ist sich selbst congruent, d. h. es ist stets: $AB \equiv AB$.*

2. *Wenn eine Strecke AB sowohl der Strecke $A'B'$ als auch der Strecke $A''B''$ congruent ist, so ist auch $A'B'$ der Strecke $A''B''$ congruent, d. h.: wenn $AB \equiv A'B'$ und $AB \equiv A''B''$, so ist auch $A'B' \equiv A''B''$.*

3. *Es seien AB und BC zwei Strecken ohne gemeinsame Punkte auf der Geraden a und ferner $A'B'$ und $B'C'$ zwei Strecken auf derselben oder einer anderen Geraden a' ebenfalls ohne gemeinsame Punkte; wenn dann $AB \equiv A'B'$ und $BC \equiv B'C'$ ist, so ist auch stets $AC \equiv A'C'$.*



Obr. 50: Axiom 3. ([Hi4], str. 11)

[36] Viz [Hi4], str. 10–12.

4. *Es sei ein Winkel $\angle(h,k)$ in einer Ebene α und eine Gerade a' in einer Ebene α', sowie eine bestimmte Seite von a' auf α' gegeben. Es bedeute h' einen Halbstrahl der Geraden a', der vom Punkte O' ausgeht: dann giebt es in der Ebene α' einen und nur einen Halbstrahl k', so dass der Winkel (h,k) (oder (k,h)) congruent dem Winkel (h',k') ist und zugleich alle inneren Punkte des Winkels (h',k') auf der gegebenen Seite von a' liegen, in Zeichen: $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$. Jeder Winkel ist sich selbst congruent, d. h. es ist stets $\angle(h,k) \equiv \angle(h,k)$.*

5. *Wenn ein Winkel (h,k) sowohl dem Winkel (h',k') als auch dem Winkel (h'',k'') congruent ist, so ist auch der Winkel (h',k') dem Winkel (h'',k'') congruent, d. h. wenn $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$ und $\angle(h,k) \equiv \angle(h'',k'')$ ist, so ist auch stets $\angle(h',k') \equiv \angle(h'',k'')$.*

6. *Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Congruenzen $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ gelten, so sind auch stets die Congruenzen $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ und $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$ erfüllt.*

Axiom 1. se týká „přenášení“ úseček; zjednodušeně řečeno říká, že každou úsečku lze jediným způsobem „přenést“ na danou přímku, je-li předem dán jeden její krajní bod a zvolena polopřímka, na níž leží druhý krajní bod úsečky. Z axiomů 1. a 2. vyplývá, že shodnost úseček je reflexivní, symetrická a tranzitivní, tj. shodnost úseček je ekvivalencí. Axiom 3. vyjadřuje požadavek na „sčítání úseček“. Axiomy 2. a 3. se obsahově shodují s prvními dvěma Eukleidovými axiomy aplikovanými na úsečky.[37] Axiom 4. se týká „přenášení“ úhlů; zjednodušeně řečeno říká, že každý úhel lze jediným způsobem „přenést“ do dané roviny, je-li předem dáno jedno jeho rameno a zvolena polorovina, v níž leží druhé rameno úhlu. Z axiomů 4. a 5. vyplývá, že i shodnost úhlů je ekvivalencí. Tvrzení axiomu 6. odpovídá skutečnosti, že dva trojúhelníky, které se shodují ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném, se shodují i ve zbývajících vnitřních úhlech.

V dalším textu výše uvedené axiomy D. Hilbert využil k odvození základních vět o shodnosti trojúhelníků.[38] Dále mimo jiné dokázal, že v případě dvou shodných úhlů platí shodnost i pro úhly k nim vedlejší, a že všechny pravé úhly jsou navzájem shodné. Na základě shodnosti úseček definoval kružnici se středem M jako množinu všech bodů A v rovině, pro něž jsou úsečky MA navzájem shodné.

D. Hilbert požadoval, aby axiomatický systém byl úplný, nezávislý a bezesporný. Nezávislost axiomů ve svém novém geometrickém systému demonstroval jeho postupným rozvíjením. Při té příležitosti odvodil řadu „pseudogeometrií“, aby v každém dalším kroku ilustroval potřebnost dalších axiomů charakterizujících eukleidovskou geometrii.[39] V rámci Hilbertova systému nelze prokázat, že

[37] *Veličiny témuž rovné i navzájem rovné jsou. Když se přidají veličiny rovné k rovným, i celky jsou rovny.* Viz [Eu], str. 2.

[38] V dnešní terminologii: Jestliže se dva trojúhelníky shodují ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném, pak jsou shodné. Jestliže se dva trojúhelníky shodují v jedné straně a úhlech k ní přilehlých, pak jsou shodné. Jestliže se dva trojúhelníky shodují ve všech třech stranách, pak jsou shodné.

[39] Axiomy incidence vedou k projektivní geometrii. Pokud k nim přidáme navíc axiomy uspořádání, získáme afinní geometrii. Dalším přidáním axiomů shodnosti obdržíme metrickou geometrii.

každý axiom je nezávislý na ostatních, protože obsah některých axiomů odkazuje na předchozí axiomy.[40] D. Hilbert však ukázal, že axiomy libovolné z pěti skupin axiomů nelze odvodit z axiomů ostatních čtyř skupin. Pro každý případ předložil geometrickou interpretaci, resp. model geometrie, který splňuje axiomy čtyř skupin, avšak nesplňuje všechny axiomy páté skupiny axiomů. Ve své práci též ukázal, že jeho axiomy eukleidovské geometrie jsou konzistentní – umožňují totiž definovat vzájemně jednoznačné zobrazení mezi body na přímce a reálnými čísly, a vedou tak k obvyklým axiomům pro úplně uspořádané těleso reálných čísel. Případné rozpory v axiomatickém systému eukleidovské geometrie by proto nutně vedly ke sporu s axiomy reálných čísel.[41]

D. Hilbert na obhajobu konzistence eukleidovské geometrie použil její aritmetickou interpretaci. Geometrické pojmy nahradil jejich analytickými reprezentacemi, které umožnily provedení důkazů vět pomocí algebraických metod. V případě rovinné geometrie ztotožnil bod s uspořádanou dvojicí (x, y) reálných čísel a přímku s poměrem $(u : v : w)$ tří reálných čísel, kde $u \neq 0$ nebo $v \neq 0$. Relaci incidence mezi bodem a přímkou vyjádřil následujícím způsobem: bod (x, y) leží na přímce $(u : v : w)$, pokud platí rovnost $ux + vy + w = 0$. Rovněž shodnosti (posunutí, osovou souměrnost podle osy x a otočení kolem počátku soustavy souřadnic) interpretoval algebraicky pomocí jejich analytických vyjádření. Důkaz shodnosti dvou objektů spočíval v nalezení takové shodné transformace, která jeden objekt zobrazí na druhý.

Definice pohybu

V roce 1902 publikoval D. Hilbert pojednání *Ueber die Grundlagen der Geometrie*,[42] v němž byla poprvé uvedena jeho definice *pohybu*, v dnešním pojetí *transformace*. Toto pojednání navíc později zahrnul jako jeden z celkem deseti dodatků i do 7. přepracovaného a rozšířeného vydání své knihy *Grundlagen der Geometrie*.[43]

---

[40] Americký student Robert Lee Moore (1882–1974) dokázal, že jeden z Hilbertových axiomů (axiom II 4. v prvním vydání [Hi4] z roku 1899) není nezávislý na ostatních axiomech, a je tedy v axiomatickém systému nadbytečný. Důkaz tehdy s odkazem na skutečného autora publikoval jeho učitel George Bruce Halsted (1853–1922); viz Halsted G. B., *The betweenness assumptions*, The American Mathematical Monthly 9(1902), 98–101. D. Hilbert tuto námitku posléze uznal a v dalších vydáních své knihy výše uvedený axiom již vynechal. Viz Wilder R. L., *Robert Lee Moore, 1882–1974*, Bulletin of the American Mathematical Society 82(1976), 417–427; Wilder R. L., *The mathematical work of R. L. Moore: Its background, nature and influence*, Archive for History of Exact Sciences 26(1982), 73–97. Dodejme ještě, že Robert L. Moore později sám publikoval vlastní systém axiomů eukleidovské geometrie založený na primitivních pojmech *bod*, *uspořádání* a *shodnost*; viz Moore R. L., *Sets of metrical hypotheses for geometry*, Transactions of the American Mathematical Society 9(1908), 487–512.

[41] Připomeňme, že obdobným způsobem argumentoval Felix Klein v případě neeukleidovské geometrie, jejíž logickou konzistenci obhajoval logickou konzistencí geometrie eukleidovské.

[42] Viz Mathematische Annalen 56(1902), 381–422.

[43] Viz *Anhang IV. Über die Grundlagen der Geometrie*, in Hilbert D., *Grundlagen der Geometrie*, siebente umgearbeitete und vermehrte Auflage, Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig, Berlin, 1930, 178–230.

D. Hilbert v článku představil nový axiomatický systém rovinné geometrie založený na pojmu *grupa*.[44] Poukázal přitom na Lieovu práci *Theorie der Transformationsgruppen*,[45] v níž je systém axiomů postačujících k výstavbě geometrie rovněž obsažen. Jeho přístup byl však zcela odlišný. D. Hilbert poprvé pracoval s pojmy Cantorovy teorie množin a využíval Jordanovu větu, podle níž každá spojitá uzavřená rovinná křivka bez dvojnásobných bodů tuto rovinu rozdělí na jednu vnitřní a jednu vnější oblast. Hilbertovy axiomy však podle něj bylo možno z Lieova systému axiomů jednoduše odvodit jako jejich speciální případy.

Ve svém článku nejprve zavedl rovinu a poté definoval *pohyb* jako vzájemně jednoznačnou spojitou transformaci roviny, kterou „lze obrátit“:

> ***Definition der Bewegung.*** *Eine Bewegung ist eine umkehrbar eindeutige stetige Transformation der Bildpunkte der Zahlenebene*[46] *in sich von der Art, dass dabei der Umlaufssinn einer geschlossenen Jordan'schen Curve*[47] *stets derselbe bleibt. Eine Bewegung, bei welcher der Punkt M ungeändert bleibt, heisst eine Drehung um den Punkt M.*
> ([Hi6], str. 383)

Pohyb tedy podle Hilbertovy definice zachovává orientaci každé uzavřené Jordanovy křivky. Pohyb, při kterém bod M zůstává na svém místě, nazval *otočením* kolem bodu M.[48]

V dalším textu zformuloval následující tři axiomy, které musí výše definované pojmy *pohyb* a *otočení* splňovat:

> ***Axiom I.*** *Werden zwei Bewegungen hintereinander ausgeführt, so ist die dann entstehende Transformation unserer Ebene in sich wiederum eine Bewegung.*
> ***Axiom II.*** *Wenn A und M beliebige von einander verschiedene Punkte der Ebene sind, so kann man den Punkt A durch Drehung um M stets in unendlich viele verschiedene Lagen bringen.*
> ***Axiom III.*** *Wenn es Bewegungen giebt, durch welche Punktetripel in beliebiger Nähe des Punktetripels ABC in beliebige Nähe des Punktetripels $A'B'C'$ übergeführt werden können, so giebt es stets auch eine solche Bewegung, durch welche das Punktetripel ABC genau in das Punktetripel $A'B'C'$ übergeht.* ([Hi6], str. 384–385)

[44] D. Hilbert předpokládal, že analogickým způsobem lze axiomatický systém vytvořit i pro případ prostorové geometrie.

[45] Viz Lie S., *Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie*, Abteilung V. in *Theorie der Transformationsgruppen*, dritter und letzter Abschnitt, unter Mitwirkung von Friedrich Engel, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1893, 830 stran.

[46] D. Hilbert pod pojmem *die Zahlenebene* rozuměl obvyklou rovinu se zvolenou pravoúhlou soustavou souřadnic: *Wir verstehen unter der Zahlenebene die gewöhnliche Ebene mit einem rechtwinkligen Coordinatensystem x, y.* Viz [Hi6], str. 382.

[47] D. Hilbert užíval pojem *die Jordan'sche Curve* ve smyslu spojitá rovinná křivka bez dvojnásobných bodů: *Eine Doppelpunktslose und einschliesslich ihrer Endpunkte stetige Curve in dieser Zahlenebene heisse eine Jordan'sche Curve.* Viz [Hi6], str. 382.

[48] D. Hilbert kromě pojmu *otočení* (*die Drehung*) pracoval navíc speciálně s pojmem *polootočení* (*die Halbdrehung*), jímž rozuměl otočení o úhel π. Jeho složením se sebou samým získáme identitu: *Unter einer Halbdrehung H um einen Punkt M verstehen wir eine Drehung um den Winkel π d. h. eine Drehung, die noch einmal ausgeführt die Identität ergiebt.* Viz [Hi6], str. 409–410.

Jinými slovy krátce řečeno:

> ***Axiom I.*** *Die Bewegungen bilden eine Gruppe.*
> ***Axiom II.*** *Jeder wahre Kreis besteht aus unendlich vielen Punkten.*
> ***Axiom III.*** *Die Bewegungen bilden im Endlichen ein abgeschlossenes System.* ([Hi6], str. 384–385)

Složením dvou pohybů získáme tedy opět pohyb, neboli pohyby tvoří grupu. Jsou-li A a M libovolné, navzájem různé body roviny, lze bod A získat pomocí otočení kolem bodu M nekonečně mnoha způsoby. Jinými slovy řečeno, každá kružnice obsahuje nekonečně mnoho bodů.[49] Pohyby dále tvoří uzavřený systém; jsou-li dány pohyby, které trojici bodů libovolně blízkých bodům A, B, C zobrazí libovolně blízko bodům A', B', C', potom vždy existuje takový pohyb, který trojici bodů A, B, C zobrazí přímo na trojici bodů A', B', C'.

D. Hilbert poté dokázal, že rovinnou geometrií vyhovující axiomům I až III je buď eukleidovská geometrie, nebo Bolyai-Lobačevského geometrie:

> *Eine ebene Geometrie, in welcher die Axiome I–III erfüllt sind, ist entweder die Euklidische oder die Bolyai-Lobatschefsky'sche ebene Geometrie.* ([Hi6], str. 385–386)

Chceme-li získat samotnou eukleidovskou geometrii, je potřeba axiom I. rozšířit o požadavek, že grupa pohybů obsahuje invariantní podgrupu. Tento požadavek zde zastupuje Eukleidův axiom o rovnoběžkách.

Ve svém článku dále mimo jiné ukázal, že pokud nějaký pohyb zachová libovolné dva body roviny, pak zachová i všechny další body této roviny, tj. jedná se o identitu. Přitom každý bod roviny lze nějakým pohybem zobrazit na libovolný bod této roviny.[50]

Důležitým úkolem byla také potřeba zavést v novém geometrickém systému pojem přímky a odvodit její vlastnosti nezbytné pro výstavbu geometrie.[51] V závěru článku pak D. Hilbert ukázal, že ve vybudované rovinné geometrii platí dříve uvedené axiomy shodnosti.

---

[49] D. Hilbert definoval kružnici jako množinu všech bodů, které získáme pomocí všech možných otočení kolem bodu M, pokud jako vzor uvažujeme libovolný bod různý od bodu M: *Nennen wir die Gesammtheit derjenigen Punkte, die durch die sämmtlichen Drehungen um M aus einem von M verschiedenen Punkte entstehen, einen wahren Kreis in unserer ebenen Geometrie.* Viz [Hi6], str. 384. Používal přitom termín *der wahre Kreis*, jenž v uvedeném článku nijak blíže neobjasnil.

[50] *Wenn irgend zwei Punkte bei einer Bewegung der Ebene festbleiben, so bleiben alle Punkte fest, d. h. die Bewegung ist die Identität. Jeder Punkt der Ebene lässt sich durch eine Bewegung gewiss in jeden anderen Punkt der Ebene überführen.* Viz [Hi6], str. 409.

[51] D. Hilbert odvodil mimo jiné následující tvrzení: *Die wahre Gerade ist eine stetige Curve. Die wahre Gerade keinen Doppelpunkt besitzt. Die wahre Gerade nicht in sich selbst zurücklaufen kann. Zwei Gerade haben höchstens einen Punkt gemein. Irgend zwei Punkte in unserer ebenen Geometrie stets durch eine wahre Gerade verbunden werden können.* Viz [Hi6], str. 418–420.

Reakce na Hilbertovy Základy geometrie

Česká matematická komunita byla na přelomu 19. a 20. století s axiomatickým systémem geometrie poměrně dobře seznámena. V Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky vyšla roku 1903 v rámci literárního věstníku obsáhlá recenze Hilbertova díla.[52] Její autor Antonín Libický[53] uvedl v českém překladu mimo jiné i úplné znění všech dvaceti axiomů. Ocitujme z jeho recenze krátké úryvky:

> *Pojednání toto jest – jak praví spisovatel v úvodu – nový pokus, zbudovati geometrii na jednoduché a úplné soustavě axiomů na sobě nezávislých a odvoditi z nich nejdůležitější věty geometrické, při čemž by se též objasnil význam rozličných skupin axiomů a dosah důsledků z nich plynoucích. Vyšetřuje kriticky principy geometrie, řídil se autor zásadou, že jest třeba zkoumati, zdali jest vůbec možno, odpověděti k nějaké předložené otázce, máme-li zření k předepsanému někdy postupu při řešení a k omezeným prostředkům, jichž můžeme použiti. … Jest pravda, že již před Hilbertem vykonáno bylo v tomto oboru mnoho pozoruhodného; Killing, Schur, Stolz, Pasch, Veronese a j. pracemi svými v posledním desítiletí velice přispěli k tomu, aby mohla býti vyšetřena soustava axiomů si neodporujících, jež by tvořila bezpečný základ geometrie. Hilbert přivedl tyto práce k jakémusi zakončení; na soustavě axiomů, již sestavil v kap. I. svého pojednání, může býti založena geometrie, v níž není ani žádných vnitřních nesrovnalostí, ani nějakých nejasností nebo docela nesprávností. … Všem, kdož se zajímají o problemy, jež se vztahují ku základům geometrie, buď znamenité pojednání Hilbertovo nejvřeleji doporučeno.*

Hilbertův axiomatický systém přitahoval pozornost českých matematiků ještě v polovině 20. století. Jan Vyšín[54] v té době logické výstavbě eukleidovské geometrie věnoval třetí díl své učebnice *Elementární geometrie*.[55] Podle jeho vlastních slov z předmluvy „je to vlastně jakási procházka Hilbertovou soustavou axiomů, která má čtenáři pomocí řady modelů osvětlit podstatu a význam abstraktní geometrie“.[56] J. Vyšín v knize navíc mimo jiné dokázal ekvivalenci Hilbertových axiomů shodnosti s axiomy pohybovými.

---

[52] Viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 32(1903), 147–156.

[53] Antonín Libický (1854–1930), středoškolský učitel matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky, od roku 1906 byl ředitelem reálky v Hradci Králové. Patřil mezi znalce a popularizátory teorie relativity.

[54] Jan Vyšín (1908–1983), původně středoškolský učitel matematiky a deskriptivní geometrie, v letech 1946 až 1953 působil jako asistent na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy. Roku 1953 byl jmenován docentem matematiky na Vysoké škole pedagogické v Praze. Po jejím zrušení v roce 1959 přešel na Matematicko-fyzikální fakultu Univerzity Karlovy, kde setrval až do roku 1972, kdy se stal vedoucím Kabinetu pro modernizaci vyučování matematice v Matematickém ústavu Československé akademie věd.

[55] Viz Vyšín J., *Elementární geometrie III* (*Logická výstavba*), Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952, 111 stran.

[56] Citace viz [Vš1], str. 3. Dodejme, že J. Vyšín abstraktní geometrií rozuměl geometrii, která staví na geometrických pojmech, a nikoliv na představách.

V další své knize *Soustava axiomů eukleidovské geometrie*[57] pojednal J. Vyšín logické základy geometrie speciálně v jednorozměrném, dvojrozměrném a trojrozměrném eukleidovském prostoru. V souladu s Hilbertovými *Základy geometrie* stanovil v dvojrozměrném i v trojrozměrném eukleidovském prostoru pět skupin axiomů (axiomy incidence, uspořádání, shodnosti, spojitosti a rovnoběžnosti),[58] axiomy incidence přitom formuloval v množinové terminologii.[59] Také zde J. Vyšín poukázal na skutečnost, že shodnost lze v geometrii zavést dvěma způsoby, a to buď na základě shodnosti úseček, nebo shodnosti jako pohybu (přemístění), tj. shodného zobrazení. Navíc definoval pojem *volné úsečky* jako třídy všech navzájem shodných úseček a odvodil základní vlastnosti součtu, rozdílu a porovnávání volných úseček. Analogicky zavedl pojem *volného úhlu* a jeho vlastnosti.

I ve světě byly Hilbertovy výsledky přijaty velmi příznivě. Felix Klein přes své protichůdné názory na Hilbertovo formální pojetí podstaty matematiky jeho práci v této oblasti se zájmem sledoval. Význam Hilbertova axiomatického přístupu k základům geometrie oceňoval a jeho práci *Grundlagen der Geometrie* označil za nejvýznamější dílo z této oblasti matematiky. V návaznosti na nezávislost 5. Eukleidova axiomu o rovnoběžkách napsal:

> *So entstand die sog. moderne geometrische Axiomatik, die in ihren Betrachtungen genau den Wegen folgt, die jene alten Untersuchungen gewiesen haben: Man sieht zu, welche Teile der Geometrie sich ohne Anwendung gewisser Axiome aufbauen lassen, und ob man auch unter der Annahme des Gegenteiles eines einzelnen Axiomes zu einem logisch widerspruchsfreien Systeme einer sog. „Pseudogeometrie“ gelangen kann. Als wichtigstes hierher gehöriges Werk habe ich Ihnen Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ zu nennen, deren Hauptziel gegenüber früheren Untersuchungen es ist, in der angedeuteten Weise die Bedeutung der Stetigkeitsaxiome für die Geometrie festzustellen.*
> ([K7], str. 379)

Hilbertův žák Hermann Weyl (1885–1955), jenž působil jako soukromý docent v Göttingen, ve svém článku *David Hilbert and his mathematical work*[60] Hilbertův axiomatický přístup nejen k základům geometrie, ale obecně k základům každé vědy, komentoval následujícími slovy:

> *Hilbert is the champion of axiomatics. The axiomatic attitude seemed to him one of universal significance, not only for mathematics, but for all sciences. His investigations in the field of physics are conceived in the axiomatic spirit. In his lectures he liked to illustrate the method by examples taken from biology, economics, and so on. The*

[57] Viz Vyšín J., *Soustava axiomů eukleidovské geometrie*, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1959, 209 stran. Recenze viz Časopis pro pěstování matematiky 85(1960), 207–209.

[58] V případě jednorozměrného eukleidovského prostoru J. Vyšín z pochopitelných důvodů uvažoval pouze axiomy uspořádání, shodnosti a spojitosti.

[59] Např. první dva axiomy incidence v podání J. Vyšína znějí takto: *Dva různé body náleží jediné přímce. Přímka obsahuje aspoň dva různé body.* Viz [Vš2], str. 155.

[60] Viz Weyl H., *David Hilbert and his mathematical work*, Bulletin of the American Mathematical Society 50(1944), 612–654.

modern epistemological interpretation of science has been profoundly influenced by him. Sometimes when he praised the axiomatic method he seemed to imply that it was destined to obliterate completely the constructive or genetic method. I am certain that, at least in later life, this was not his true opinion. For whereas he deals with the primary mathematical objects by means of the axioms of his symbolic system, the formulas are constructed in the most explicit and finite manner. In recent times the axiomatic method has spread from the roots to all branches of the mathematical tree. Algebra, for one, is permeated from top to bottom by the axiomatic spirit. One may describe the role of axioms here as the subservient one of fixing the range of variables entering into the explicit constructions. But it would not be too difficult to retouch the picture so as to make the axioms appear as the masters. An impartial attitude will do justice to both sides; not a little of the attractiveness of modern mathematical research is due to a happy blending of axiomatic and genetic procedures.

([We2], str. 644–645)

Závěr

V předložené disertační práci jsme se pokusili vyzdvihnout a zdokumentovat vybrané významné okamžiky, které přispěly k vývoji matematického bádání v oblasti geometrických transformací.

Tato problematika má svůj význam i v dnešní době, ačkoliv je tematika geometrických transformací po teoretické stránce již vyčerpána. Geometrické transformace hrají v matematice nezanedbatelnou roli – zavádějí do statických geometrických útvarů dynamiku, umožňují měnit jejich polohu i tvar, útvary se vlivem transformací posouvají, otáčejí, překlápějí, zmenšují, zvětšují a deformují podle předem stanovených pravidel. Tento proces lze využít při řešení složitějších problémů, které lze vhodně transformovat na jednodušší, nebo jejich řešení rozložit do několika na sebe navazujících kroků. Geometrické transformace v sobě navíc přirozeným způsobem propojují algebraické metody umožňující jejich analytický popis s názorným syntetickým přístupem.

V posledních letech se složitější geometrické transformace zkoumají výhradně s využitím výpočetní techniky, což bylo ještě v polovině 20. století prakticky nemožné. Moderní matematické programy umožňují studium transformací libovolně velkých řádů včetně jejich analytického vyjádření a grafického výstupu. Můžeme navíc konstatovat, že geometrické transformace dnes vlastně patří mezi nejčastěji používané operace v počítačové grafice.

Seznam literatury

[A1] Abel N. H., *Mémoire sur les équations algébriques, où on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième dégré*, De l'imprimerie de Groendahl, Christiania, 1824, 8 stran

[A2] Abel N. H., *Beweis der Unmöglichkeit algebraische Gleichungen von höheren Graden als dem vierten allgemein aufzulösen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 1(1826), 65–84

[A3] Abel N. H., *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 4(1829), 131–156

[Ag] D'Aguillon F., *Opticorum libri sex: Philosophis iuxtà ac Mathematicis utiles*, ex officina Plantiniana, apud viduam et filios I. Moreti, Antverpiae, 1613, 684 stran

[AAR] Albers D. J., Alexanderson G. L., Reid C., *International Mathematical Congresses, An illustrated History 1893–1986*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1987, 63 stran

[Al] Alexander J. W., *On the factorization of Cremona plane transformations*, Transactions of the American Mathematical Society 17(1916), 295–300

[Ar] *Aristoteles' Werke*, Erster Band: Acht Bücher Physik, Griechisch und Deutsch und mit sacherklärenden Anmerkungen herausgegeben von Carl Prantl, Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1854, 528 stran

[BKS] Baltzer R., Klein F., Scheibner W. (eds.), *August Ferdinand Möbius, Gesammelte Werke*, Band I, II, III, IV, Verlag von S. Hirzel, Leipzig, 1885, 1886, 1886, 1887, 633 + 708 + 580 + 731 stran

[Bč1] Bečvář J., *Sto let od smrti Emila Weyra*, Pokroky matematiky, fysiky a astronomie 39(1994), 102–107

[Bč2] Bečvář J., *Z historie lineární algebry*, edice Dějiny matematiky, svazek 35, Matfyzpress, Praha, 2007, 519 stran

[BBŠ] Bečvář J., Bečvářová M., Škoda J., *Emil Weyr a jeho pobyt v Itálii v roce 1870/71*, edice Dějiny matematiky, svazek 28, ČVUT, Praha, 2006, 166 stran

[BF] Bečvář J., Fuchs E. (ed.), *Historie matematiky I*, edice Dějiny matematiky, svazek 1, Jednota českých matematiků a fyziků, Brno, 1994, 241 stran

[Be1] Bečvářová M., *Z historie Jednoty 1862–1869*, edice Dějiny matematiky, svazek 13, Prometheus, Praha, 1999, 138 stran

[Be2] Bečvářová M., *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918*, edice Dějiny matematiky, svazek 34, Matfyzpress, Praha, 2008, 355 stran

[Be3] Bečvářová M., *J. S. Vaněček a L. Cremona (nově objevená korespondence)*, in Bečvář J., Bečvářová M. (ed.), *34. mezinárodní konference Historie matematiky*, Matfyzpress, Praha, 2013, 63–80

[BČ] Bečvářová M., Čižmár J., *Karel Zahradník (1848–1916), Praha – Záhřeb – Brno*, edice Dějiny matematiky, svazek 46, Matfyzpress, Praha, 2011, 410 stran

[Bel] Bellavitis G., *Teoria delle figure inverse, e loro uso nella geometria elementare*, Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto 6(1836), 126–141

[B] *Bericht über die Jahresversammlung in Meran vom 24. bis 29. September 1905*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 14(1905), 516–525

[Br] Bernays P., *Die Bedeutung Hilberts für die Philosophie der Mathematik*, Die Naturwissenschaften 10(1922), 93–99

[Bt] Bertini E., *Life and works of L. Cremona*, Proceedings of the London Mathematical Society 1(1904), 5–18

[Bl] Blumenthal O., *David Hilbert*, Die Naturwissenschaften 10(1922), 67–72

[Bb1] Bobillier É., *Géométrie de situation. Démonstration de quelques théorèmes sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres*, Annales de mathématiques pures et appliquées 18(1827/28), 89–98

[Bb2] Bobillier É., *Géométrie analytique. Recherche de quelques lieux géométriques, dans l'espace*, Annales de mathématiques pures et appliquées 18(1827/28), 230–248

[Boi] Boi L., *The influence of the Erlangen Program on Italian geometry, 1880–1890: n-dimensional geometry in the works of d'Ovidio, Veronese, Segre and Fano*, Archives Internationales d'Histoire des Sciences 40(1990), 30–75

[Bol] Bolyai J., *Appendix, scientiam spatii absolute veram exhibens; a veritate aut falsitate axiomatis XI. Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica*, in Bolyai F., *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi*, Maros Vásárhely, 1832, 502 stran

[Bos] Bosse A., *Manière universelle de Mr. Desargues, pour pratiquer la perspective par petit-pied, comme le geometral*, De l'imprimerie de Pierre Des-Hayes, Paris, 1648, 342 stran

[BS] Brigaglia A., Di Sieno S., *The Luigi Cremona Archive of the Mazzini Institute of Genoa*, Historia Mathematica 38(2011), 96–110

[Bü] Bützberger F., *Über Bizentrische Polygone, Steinersche Kreis- und Kugelreihen und die Erfindung der Inversion*, B. G. Teubner, Leipzig, 1913, 50–55

[Bd1] Bydžovský B., *O jisté nekonečné grupě Cremonových transformací*, Rozpravy II. třídy České Akademie věd a umění 18(1909), 8 stran

[Bd2] Bydžovský B., *O některých grupách Cremonových transformací v rovině*, Zprávy sjezdu československých přírodozpytců a lékařů, 1928

[Bd3] Bydžovský B., *Remarque sur les groupes finis de transformations de Cremona*, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna, 3–10 Settembre 1928, Tomo IV, 43–44

[Bd4] Bydžovský B., *O zvláštním druhu grup Cremonových involucí v rovině*, Zprávy sjezdu matematiků zemí slovanských, Varšava, 1929, 314–317

[Bd5] Bydžovský B., *Kvadratické involuce v prostoru n-rozměrném*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 60(1931), 214–224

[BV1] Bydžovský B., Vojtěch J., *Mathematika pro nejvyšší třídu reálek*, Jednota českých mathematiků, Praha, 1911, 176 stran

[BV2] Bydžovský B., Vojtěch J., *Mathematika pro nejvyšší třídu gymnasií a reálných gymnasií*, Jednota českých mathematiků, Praha, 1912, 179 stran

[Can] Cantor M., *Allgemeine deutsche Biographie*, herausgegeben durch die historische Commission bei der königlichen Akademie der Wissenschaften, Band 22, Verlag von Duncker & Humblot, Leipzig, 1885, 514 stran

[Car1] Carnot L. N., *De la corrélation des figures de géométrie*, Duprat, Paris, 1801, 188 stran

[Car2] Carnot L. N., *Géométrie de position*, Duprat, Paris, 1803, 489 stran

[Cas] Castelnuovo G., *Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano*, Atti della Reale Accademia delle scienze di Torino 36(1901), 861–874

[Cau] Cauchy A. L., *Oeuvres complètes*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009, 516 stran

[Ca1] Cayley A., *On the theory of groups, as depending on the symbolic equation* $\Theta^n = 1$, The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science 7(1854), 40–47, 408–409; 18(1859), 34–37

[Ca2] Cayley A., *Note on the „Circular Relation“ of Prof. Möbius*, The quarterly journal of pure and applied mathematics 2(1858), str. 162

[Ca3] Cayley A., *A sixth memoir upon quantics*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London 149(1859), 61–90

[Ca4] Cayley A., *On the rational transformation between two spaces*, Proceedings of the London Mathematical Society 3(1870), 127–180

[Cha] Chasles M., *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne, suivi d'un Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie*, M. Hayez, imprimeur de l'Académie Royale, Bruxelles, 1837, 851 stran

[Cl] Clebsch A., *Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen*, Mathematische Annalen 4(1871), 490–496

[Con] Contro W. S., *Von Pasch zu Hilbert*, vorgelegt von B. L. van der Waerden, Archive for History of Exact Sciences 15(1976), 283–295

[Co1] Coolidge J. L., *A Treatise on Algebraic Plane Curves*, Dover Publications, New York, 1959, 513 stran

[Co2] Coolidge J. L., *A History of Geometrical Methods*, Dover Publications, Mineola, New York, 2003, 451 stran

[C1] Cremona L., *Sulle tangenti sfero-coniugate*, Annali di scienze matematiche e fisiche 6(1855), 382–392

[C2] Cremona L., *Intorno ad un teorema di Abel*, Annali di scienze matematiche e fisiche 7(1856), 99–105

[C3] Cremona L., *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, Tipi Gamberini e Parmeggiani, Bologna, 1862, 128 stran; též viz Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna 12(1862), 305–436

[C4] Cremona L., *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*, Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna 2(1863), 621–630, 5(1865), 3–35; část I. též viz Annali di matematica pura ed applicata 6(1864), 153–168, nebo Giornale di matematiche 1(1863), 305–311; část II. též viz Giornale di matematiche 3(1865), 269–280, 363–376

[C5] Cremona L., *Preliminari di una teoria geometrica della superficie*, Tipi Gamberini e Parmeggiani, Bologna, 1866, 99 stran; též viz Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna 6(1867), 91–136, 7(1867), 29–78

[C6] Cremona L., *Úvod do geometrické theorie křivek rovinných*, české, spisovatelem rozmnožené a opravené vydání, jež uspořádal Emil Weyr, majetkem a nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1873, 176 stran

[C7] Cremona L., *Elementi di geometria projettiva*, G. B. Paravia e comp., Torino, 1873, 184 stran

[C8] Cremona L., *Elementi di calcolo grafico*, Stamperia reale di G. B. Paravia e c., Torino, 1874, 77 stran

[Cw] Crowe M. J., *A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System*, Notre Dame University Press, Notre Dame, 1967, 270 stran

[Č1] Čižmár J., *Biracionálne transformácie 1860–1960, historický prehl'ad*, in Bečvář J., Fuchs E. (ed.), *Matematika v proměnách věků I*, edice Dějiny matematiky, svazek 11, Prometheus, Praha, 1998, 79–98

[Č2] Čižmár J., *Základy geometrie v 19. storočí*, in Bečvář J., Bečvářová M. (ed.), *33. mezinárodní konference Historie matematiky*, Matfyzpress, Praha, 2012, 195–200

[Da] Dandelin P. G., *Mémoire sur l'emploi des projections stéréographiques en géométrie*, Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres de Bruxelles 4(1827), 11–47

[De] Dehn M., *Hilberts geometrisches Werk*, Die Naturwissenschaften 10(1922), 77–82

[Ds] Desargues G., *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan*, Publication par voie d'impression à cinquante exemplaires, source René Taton, Paris, 1639, 36 stran

[D1] Descartes R., *Discours de la méthode, pour bien conduire sa raison, & chercher la vérité dans les sciences. Plus La Dioptrique, Les Meteores, et La Géométrie. Qui sont des essais de cete methode*, De l'imprimerie de Ian Maire, Leyde (Leiden), 1637, 78 stran

[D2] *René Descartes: Geometrie*, z francouzského originálu přeložil Jiří Fiala, Oikoymenh, Praha, 2010, xlvi + 106 stran (protilehlé stránky mají duplicitní stránkování)

[Ei1] Einstein A., *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik 322(1905), 891–921

[Ei2] *Albert Einstein: Teorie relativity*, úvodní slovo Jan Novotný, edice Quantum, svazek 3, Vysoké učení technické v Brně, Nakladatelství VUTIUM, Brno, 2005, 210 stran

[Em] Emch A., *The discovery of inversion*, Bulletin of the American Mathematical Society 20(1914), 412–415

[ED] Engel F., Dehn M., *Moritz Pasch*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 44(1934), 120–142

[Eu] Eukleidovy *Základy* (Elementa), přeložil František Servít, Nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1907, 314 stran

[E1] Euler L., *Introductio in analysin infinitorum*, Tomus secundus, apud Marcum-Michaelem Bousquet, Lausannae, 1748, 398 stran

[E2] Euler L., *De repraesentatione superficiei sphaericae super plano*, Acta academiae scientiarum imperialis Petropolitanae 1(1777), 107–132

[E3] Euler L., *De projectione geographica superficiei sphaericae*, Acta academiae scientiarum imperialis Petropolitanae 1(1777), 133–142

[E4] Euler L., *De centro similitudinis*, Nova acta academiae scientiarum imperialis Petropolitanae 9(1791), 154–165

[Ev1] Eves H., *An Introduction to the History of Mathematics*, Fourth edition, Library of Congress Cataloging in Publication Data, United States of America, 1953, 588 stran

[Ev2] Eves H., *Great Moments in Mathematics: After 1650*, Mathematical Association of America, Washington, 1983, 276 stran

[Fa] *Al-Farghānī: On the astrolabe*, Arabic text edited with translation and commentary by Richard Lorch, Boethius: Texte und Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften, svazek 52, Franz Steiner Verlag, Stuttgart, 2005, 447 stran

[FFW] Fauvel J., Flood R., Wilson R. J. (eds.), *Möbius and his band: mathematics and astronomy in nineteenth-century Germany*, Oxford University Press, USA, 1993, 184 stran

[FK] *Felix Klein, zur Feier seines siebzigsten Geburtstages*, Die Naturwissenschaften 7(1919), 275–317

[Fe] Fermat P., *Varia opera mathematica*, apud Joannem Pech, Tolosae (Toulouse), 1679, 1–8

[Fu] Feuerbach K. W., *Grundriß zu analytischen Untersuchungen der dreieckigen Pyramide*, In Commission bei Riegel und Wiesner, Nürnberg, 1827, 48 stran

[Fo] Folta J., *Česká geometrická škola – Historická analýza*, Studie Československé akademie věd 9, Academia, Praha, 1982, 90 stran

[Fr] Francová L., *Život a dílo Bohumila Bydžovského*, disertační práce, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha, 2001, 230 stran

[Go1] Gordan P., *Beweis, dass jede Covariante und Invariante einer binären Form eine ganze Function mit numerischen Coefficienten einer endlichen Anzahl solcher Formen ist*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 69(1868), 323–354

[Go2] Gordan P., *Ueber einen Satz von Hilbert*, Mathematische Annalen 42(1893), 132–142

[Gs] Grassmann H. G., *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert*, Verlag von Otto Wigand, Leipzig, 1844, 279 stran

[GG] Grattan-Guinness I., *The Fontana History of the Mathematical Sciences: The Rainbow of Mathematics*, Harper Collins Publishers, A Fontana Press Original, London, 1997, 817 stran

[Gr1] Gray J. J., *The three supplements to Poincaré's prize essay of 1880 on Fuchsian functions and differential equations*, Archives Internationales d'Histoire des Sciences 32(1982), 221–235

[Gr2] Gray J. J., *Poincaré and Klein – Groups and Geometries*, in Boi L., Flament D., Salanskis J.-M. (Eds.), *1830–1930: A Century of Geometry*, Epistemology, History and Mathematics, Lecture Notes in Physics 402, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1992, 35–44

[Ha] Halsted G. B., *The betweenness assumptions*, The American Mathematical Monthly 9(1902), 98–101

[Haw] Hawkins T., *The Erlanger Programm of Felix Klein: Reflections on Its Place in the History of Mathematics*, Historia Mathematica 11(1984), 442–470

[HK] Heffter L., Koehler C., *Lehrbuch der analytischen Geometrie*, Band I: *Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1905, 517 stran

[He1] Heiberg J. L. (ed.), *Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis*, vol. I, II, B. G. Teubner, Leipzig, 1891, 1893, 451 + 361 stran

[He2] Heiberg J. L. (ed.), *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia*, vol. II: Opera astronomica minora, B. G. Teubner, Leipzig, 1907, 282 stran

[He3] Heiberg J. L. (ed.), *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii*, vol. I, B. G. Teubner, Leipzig, 1910, 445 stran

[Hes] Hesse L. O., *Ein Uebertragungsprincip*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 66(1866), 15–21

[Hi1] Hilbert D., *Ueber die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten*, Mathematische Annalen 32(1888), 342–350

[Hi2] Hilbert D., *Ueber die Theorie der algebraischen Formen*, Mathematische Annalen 36(1890), 473–534

[Hi3] Hilbert D., *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*, Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 4(1894/95), 175–535 (bylo vytištěno až roku 1897)

[Hi4] Hilbert D., *Grundlagen der Geometrie*, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen, herausgegeben von dem Fest-Comitee, I. Theil, Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1899, 92 stran; zweite, durch Zusätze vermehrte und mit fünf Anhängen versehene Auflage, Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1903, 175 stran; siebente umgearbeitete und vermehrte Auflage, Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig, Berlin, 1930, 326 stran

[Hi5] Hilbert D., *Mathematische Probleme*, Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris 1900, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Heft 3, 1900, 253–297; též Archiv der Mathematik und Physik 1(1901), 44–63, 213–237

[Hi6] Hilbert D., *Ueber die Grundlagen der Geometrie*, Mathematische Annalen 56(1902), 381–422; též *Anhang IV. Über die Grundlagen der Geometrie*, in Hilbert D., *Grundlagen der Geometrie*, siebente umgearbeitete und vermehrte Auflage, Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig, Berlin, 1930, 178–230

[Hi7] Hilbert D., *Axiomatisches Denken*, Mathematische Annalen 78(1917), 405–415

[Hi8] *David Hilbert: Gesammelte Abhandlungen*, dritter Band: Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes nebst einer Lebensgeschichte, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935, 435 stran

[Hi9] *Die Hilbertschen Probleme*, erläutert von einem Autorenkollektiv unter der Redaktion von P. S. Alexandrov, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Band 252, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2007, 302 stran

[HA] Hilbert D., Ackermann W., *Grundzüge der theoretischen Logik*, Springer-Verlag, Berlin, 1928, 120 stran

[HB] Hilbert D., Bernays P., *Grundlagen der Mathematik*, Band I, II, Springer-Verlag, Berlin, 1934, 1939, 468 + 498 stran

[Ho] Houdek F., *Dějepis jednoty českých mathematiků v Praze*, Jednota českých mathematiků, Praha, 1872, 64 stran

[How] Howson A. G., *Seventy-five years of the International Commission on Mathematical Instruction*, Educational Studies in Mathematics 15(1984), 75–93

[Hr] Hrubý D., *Školské reformy (2)*, Školské reformy do roku 1948, Učitel matematiky 16(2008), 129–145

[Hu] Hudson H. P., *Cremona Transformations in Plane and Space*, Cambridge University Press, Cambridge, 1927, 454 stran

[IN] Israel G., Nurzia L., *Correspondence and manuscripts recovered at the Istituto Matematico „G. Castelnuovo“ of the University of Rome*, Historia Mathematica 10(1983), 93–97

[Ja] James I., *Remarkable Mathematicians, From Euler to von Neumann*, The Mathematical Association of America, Cambridge University Press, Cambridge, 2002, 433 stran

[Jo1] Jordan C., *Mémoire sur les groupes des mouvements*, Annali di matematica pura ed applicata 2(1868/69), 167–215, 322–345

[Jo2] Jordan C., *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1870, 667 stran

[Ju1] Jung H. W. E., *Über die Cremonasche Transformation der Ebene*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 138(1910), 255–318

[Ju2] Jung H. W. E., *Zusammensetzung von Cremonatransformationen der Ebene aus quadratischen Transformationen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 180(1939), 97–109

[Juš] Juškevič A. P., *Dějiny matematiky ve středověku*, Academia, Praha, 1978, 448 stran

[Kan] Kantor S., *La trasformazione birazionale. Relazione di E. Caporali*, Napoli, 1883

[Kád] Kádner O., *Vývoj a dnešní soustava školství*, I. díl, II. díl, Sfinx, Praha, 1929, 1931, 549 + 651 stran

[Ke] Kepler J., *Astronomiae pars optica. Ad Vitellionem paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur*, apud Claudium Marnium & haeredes Ioannis Aubrii, Francofurti, 1604, 449 stran

[Ki] Killing W., *Erweiterung des Raumbegriffes*, Programm Braunsberg, 1884, 21 stran

[K1] Klein F., *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, Mathematische Annalen 4(1871), 573–625

[K2] Klein F., *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät und den Senat der k. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen, Verlag von A. Deichert, Erlangen, 1872, 48 stran

[K3] Klein F., *Über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 11(1902), 128–141

[K4] Klein F., *Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an den höheren Schulen*, Vorträge gehalten bei Gelegenheit des Ferienkurses für Oberlehrer der Mathematik und Physik, Göttingen, Ostern 1904, Teubner, Leipzig und Berlin, 1904, 82 stran

[K5] Klein F., *Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen*, Bearbeitet von Rud. Schimmack, Teil 1, *Von der Organisation des mathematischen Unterrichts*, Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen, B. G. Teubner, Leipzig, 1907, 236 stran

[K6] Klein F., *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Teil I: *Arithmetik, Algebra, Analysis*, Vorlesungen gehalten im Wintersemester 1907–08 von F. Klein, Ausgearbeitet von E. Hellinger, B. G. Teubner, Leipzig, 1908, 590 stran

[K7] Klein F., *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Teil II: *Geometrie*, Vorlesung gehalten im Sommersemester 1908 von F. Klein, Ausgearbeitet von E. Hellinger, B. G. Teubner, Leipzig, 1909, 515 stran

[K8] Klein F., *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Erster Band: *Liniengeometrie, Grundlegung der Geometrie, Zum Erlanger Programm*, Herausgegeben von R. Fricke und A. Ostrowski (von F. Klein mit ergänzenden Zusätzen versehen), Verlag von Julius Springer, Berlin, 1921, 612 stran

[K9] Klein F., *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Teil I, für den Druck bearbeitet von R. Courant und O. Neugebauer, Teil II, für den Druck bearbeitet von R. Courant und St. Cohn-Vossen, Springer, Berlin, 1926, 1927, 385 + 208 stran

[KL] Klein F., Lie S., *Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen*, Mathematische Annalen 4(1871), 50–84

[Kl] Kline M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, volume 1, 2, 3, Oxford University Press, New York, Oxford, 1972, 1 211 stran

[Ko] Kolář I., *Erlangenský program*, in Bečvář J., Fuchs E. (ed.), *Matematika v 19. století*, edice Dějiny matematiky, svazek 3, Prometheus, Praha, 1996, 82–87

[Kol] Kolman A., *Dějiny matematiky ve starověku*, z ruského originálu přeložila Marcela Hedrlínová, Academia, Praha, 1968, 224 stran

[KY1] Kolmogorov A. N., Yushkevich A. P., *Mathematics of the 19th Century – Mathematical Logic, Algebra, Number Theory, Probability Theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1992, 308 stran

[KY2] Kolmogorov A. N., Yushkevich A. P., *Mathematics of the 19th Century – Geometry, Analytic Function Theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1996, 291 stran

[KT] Kubát V., Trkovská D., *Analytická geometrie v afinních a eukleidovských prostorech*, Matfyzpress, Praha, 2011, 359 stran

[KuL] Kunitzsch P., Lorch R., *Theodosius: Sphaerica*, Arabic and Medieval Latin translations, Boethius: Texte und Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften, svazek 62, Franz Steiner Verlag, Stuttgart, 2010, 431 stran

[La1] Lagrange J. L., *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin 1(1770), 134–215, 2(1771), 138–253

[La2] Lagrange J. L., *Sur la construction des cartes géographiques*, Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin 1779, 161–210

[Le] Lehto O., *Mathematics without Borders: A History of the International Mathematical Union*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1998, 399 stran

[Lie] Lie S., *Theorie der Transformationsgruppen*, erster, zweiter, dritter und letzter Abschnitt, unter Mitwirkung von Friedrich Engel, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1888, 1890, 1893, 632 + 554 + 830 stran

[Lt] Lietzmann W., *25 Jahre Meraner Vorschläge*, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen 61(1930), 289–300

[Li1] Liouville J., *Analyse d'un Mémoire sur la résolution algébrique des équations*, Bulletin des Sciences mathématiques, physiques et chimiques 13(1830), 271–272; Journal de mathématiques pures et appliquées 11(1846), 395–396

[Li2] Liouville J., *Note au sujet de l'article précédent*, Journal de mathématiques pures et appliquées 12(1847), 265–290

[Ls1] Listing J. B., *Vorstudien zur Topologie*, in Göttinger Studien, Erste Abtheilung: Mathematische und naturwissenschaftliche Abhandlungen, redigirt von Dr. August Bernhard Krische, bei Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1847, 811–875

[Ls2] Listing J. B., *Der Census räumlicher Complexe, oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern*, aus dem zehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, in der Dieterichschen Buchhandlung, Göttingen, 1862, 86 stran

[Lo1] Loria G., *Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwickelung*, ins Deutsche übertragen von Fritz Schütte, Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1888, 132 stran

[Lo2] Loria G., *Luigi Cremona et son oeuvre mathématique*, Bibliotheca mathematica, Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften, dritte Folge, fünfter Band, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1904, 125–195

[Lu] Lugojan S., *An extension of Erlangen Program*, Analele Universităţii Bucureşti, Matematică 52(2003), 49–54

[LC] *Luigi Cremona (1830–1903)*, Papers from the Conference on Mathematical Studies held in Milano, October 16–17, 2003, Incontro di Studio 36, Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Milan, 2005, 237 stran

[Lut] Luther I. O., *The geometric transformations in the medieval Near and Middle East*, Istoriko-matematičeskie issledovanija 36(1995), 40–60 (Russian)

[Mg] Magnus L. I., *Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 8(1832), 51–63

[Ma] Mattheis M., *Felix Kleins Gedanken zur Reform des mathematischen Unterrichtswesens vor 1900*, Der Mathematikunterricht 46(2000), 41–61

[Me] Menghini M., *Notes on the Correspondence between Luigi Cremona and Max Noether*, Historia mathematica 13(1986), 341–351

[Mi] Mikulčák J., *Nástin dějin vzdělávání v matematice (a také školy) v českých zemích do roku 1918*, editoval Jindřich Bečvář, edice Dějiny matematiky, svazek 42, Matfyzpress, Praha, 2010, 312 stran

[Mo1] Monge G., *Géométrie descriptive. Leçons données aux Écoles Normales, l'an 3 de la Republique*, Baudouin, Paris, 1799, 132 stran

[Mo2] Monge G., *Application de l'analyse à la géométrie, à l'usage de l'École impériale polytechnique*, Bernard, Paris, 1807, 416 stran

[ML] Monge G., Liouville J., *Application de l'analyse à la géométrie*, Bachelier, Paris, 1850, 638 stran

[Moo] Moore R. L., *Sets of metrical hypotheses for geometry*, Transactions of the American Mathematical Society 9(1908), 487–512

[M1] Möbius A. F., *Zwei geometrische Aufgaben*, Anhang zu „Beobachtungen auf der Königlichen Universitäts-Sternwarte zu Leipzig etc.“, bei Carl Cnobloch, Leipzig, 1823, 57–64

[M2] Möbius A. F., *Der barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte*, Georg Olms Verlag, Leipzig, 1827, 454 stran

[M3] Möbius A. F., *Barycentrische Lösung der Aufgabe des Herrn Th. Clausen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 5(1830), 102–106

[M4] Möbius A. F., *Über eine allgemeinere Art der Affinität geometrischer Figuren*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 12(1834), 109–133

[M5] Möbius A. F., *Die Hauptsätze der Astronomie: zum Gebrauche bei seinen Vorlesungen für Gebildete zusammengestellt*, bei Georg Joachim Göschen, Leipzig, 1836, 30 stran

[M6] Möbius A. F., *Lehrbuch der Statik*, Erster Theil, Zweiter Theil, bei Georg Joachim Göschen, Leipzig, 1837, 355 + 313 stran

[M7] Möbius A. F., *Die Elemente der Mechanik des Himmels, auf neuem Wege ohne Hülfe höherer Rechnungsarten dargestellt*, Weidmann'sche Buchhandlung, Leipzig, 1843, 315 stran

[M8] Möbius A. F., *Über die Zusammensetzung gerader Linien und eine daraus entspringende neue Begründungsweise des barycentrischen Calculs*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 28(1844), 1–9

[M9] Möbius A. F., *Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung*, Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Classe 2(1855), S. Hirzel, Leipzig, 529–595

[M10] Möbius A. F., *Theorie der elementaren Verwandtschaft*, Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Classe 15(1863), S. Hirzel, Leipzig, 18–57

[M11] Möbius A. F., *Über die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders*, Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Classe 17(1865), S. Hirzel, Leipzig, 31–68

[Nád] Nádeník Z., *Reception of Grassmann's ideas in Bohemia*, in Schubring G. (ed.), *Hermann Günther Grassmann (1809–1877): visionary mathematician, scientist and neohumanist scholar*, Boston Studies in the Philosophy of Science 187(1996), 147–153

[New] Newton I., *Philosophiae naturalis principia mathematica*, vol. I, editio nova, summa cura recensita, excudit Georgius Brookman, Glasguae, 1833, 752 stran

[N1] Noether M., *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen*, Mathematische Annalen 3(1870), 161–227

[N2] Noether M., *Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen*, Mathematische Annalen 5(1872), 635–639

[N3] Noether M., *Luigi Cremona*, Mathematische Annalen 59(1904), 1–19

[No] Nový L. a kol., *Dějiny exaktních věd v českých zemích do konce 19. století*, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1961, 431 stran

[Ol] Olejníčková J., *Vědecké dílo Bohumila Bydžovského*, disertační práce, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha, 2005, 155 stran

[Pa] Pahl F., *Geschichte des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts*, Verlag von Quelle und Meyer, Leipzig, 1913, 328–334

[P1] Pasch M., *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1882, 201 stran; zweite mit zusätzen versehene Ausgabe, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1912, 225 stran; zweite Auflage mit einem Anhang *Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung* von Max Dehn, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1926, 275 stran

[P2] Pasch M., *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung*, Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1882, 188 stran

[P3] Pasch M., *Grundlagen der Analysis*, ausgearbeitet unter Mitwirkung von Clemens Thaer, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1909, 140 stran

[P4] Pasch M., *Der Ursprung des Zahlbegriffs*, Mathematische Zeitschrift 11(1921), 124–156

[P5] Pasch M., *Über zentrische Kollineation*, Mathematische Annalen 90(1923), 103–107

[P6] Pasch M., *Betrachtungen zur Begründung der Mathematik*, Mathematische Zeitschrift 20(1924), 231–240

[P7] Pasch M., *Die natürliche Geometrie*, Mathematische Zeitschrift 21(1924), 151–153

[Pat] Patterson B. C., *The origins of the geometric principle of inversion*, Isis 19(1933), 154–180

[Pav] Pavlíček J. B., *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského*, Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1953, 222 stran

[Pán] Pánek A., *O životě a působení Dr. Emila Weyra*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 24(1895), 161–224

[Pe1] Peano G., *I principii di geometria logicamente esposti*, Fratelli Bocca Editori, Stabilimento Tipografico Vincenzo Bona, Torino, 1889, 40 stran

[Pe2] Peano G., *Sui fondamenti della Geometria*, Rivista di matematica 4(1894), 51–90

[PŠ] Pech J., Šedivý J., *Český překlad díla J. Bolyaie „Appendix"*, in Šedivý J. (ed.), *Světonázorová výchova v matematice*, Sborník vybraných referátů z letních škol MPS JČSMF, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1987, 253–296

[Pi] Pieri M., *Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo. Monografia del punto e del moto*, Memorie della reale Accademia delle scienze di Torino 49(1900), 173–222

[Pl1] Plücker J., *Über ein neues Coordinatensystem*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 5(1830), 1–36

[Pl2] Plücker J., *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, Zweiter Band, G. D. Baedeker, Essen, 1831, 293 stran

[Pl3] Plücker J., *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*, Erste Abtheilung, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1868, 226 stran, Zweite Abtheilung, Herausgegeben von Felix Klein, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1869, str. 227–378

[Pon] Poncelet J. V., *Traité des propriétés projectives des figures: ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain*, Bachelier, Paris, 1822, 426 stran

[Pos] Posejpal V., *Dějepis Jednoty českých mathematiků*, Jednota českých mathematiků, Praha, 1912, 131 stran

[Po1] Potůček J., *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900–1945*, I. díl – *Vznik a vývoj jednotlivých typů škol a jejich osnov matematiky*, Pedagogická fakulta Západočeské univerzity, Plzeň, 1992, 55 stran

[Po2] Potůček J., *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900–1945*, II. díl – *Učebnice matematiky*, Pedagogická fakulta Západočeské univerzity, Plzeň, 1993, 49 stran

[Pr] Prandtl L., *Felix Klein und die Förderung der „angewandten Wissenschaften"*, Die Naturwissenschaften 7(1919), 307–310

[Pra] Prasad G., *Some great mathematicians of the nineteenth century: Their lives and their works*, volume II, Benares Mathematical Society, Koehler, Benares, 1934, 324 stran

[Pro] Procházka B., *O křivosti křivky odvozené transformací kvadratickou*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 35(1906), 32–36

[Pc] Proclus, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, Translated, with Introduction and Notes, by Glenn R. Morrow, With a new foreword by Ian Mueller, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1992, 355 stran

[Que] Quetelet A., *Note*, Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres de Bruxelles 4(1827), 111–113

[R] *Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, Entwürfe von der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte, Teil 1, Teubner, Leipzig, 1905, 1–48

[Re] Reid C., *Hilbert*, Springer-Verlag, New York, 1996, 228 stran

[Ri1] Riemann B., *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, aus dem Nachlass des Verfassers mitgetheilt durch R. Dedekind, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13(1866/67), 133–150

[Ri2] Riemann B., *O hypotézách, které leží v základech geometrie (spolu s vysvětlením H. Weyla)*, z německého originálu přeložil Petr Rys, Univerzita J. E. Purkyně, Pedagogická fakulta, Ústí nad Labem, 1999, 35 stran

[Rs] Rosanes J., *Ueber diejenigen rationalen Substitutionen, welche eine rationale Umkehrung zulassen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 73(1871), 97–110

[Ro] Rosenfeld B. A., *A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space*, Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences 12, Springer-Verlag, New York, 1988, 471 stran

[Rw1] Rowe D. E., *A Forgotten Chapter in the History of Felix Klein's Erlanger Programm*, Historia Mathematica 10(1983), 448–454

[Rw2] Rowe D. E., *Felix Klein's „Erlanger Antrittsrede"*, A Transcription with English Translation and Commentary, Historia Mathematica 12(1985), 123–141

[Rw3] Rowe D. E., *Klein, Lie, and the „Erlanger Programm"*, in Boi L., Flament D., Salanskis J.-M. (Eds.), *1830–1930: A Century of Geometry*, Epistemology, History and Mathematics, Lecture Notes in Physics 402, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1992, 45–54

[Rw4] Rowe D. E., *The Philosophical Views of Klein and Hilbert*, in Chikara S., Mitsuo S., Dauben J. W., *The Intersection of History and Mathematics*, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1994, 187–202

[Ru] Ruffini P., *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto*, Nella stamperia di S. Tommaso d'Aquino, Bologna, 1799, parte prima, 206 stran, parte seconda, str. 207–509

[Sch] Schiaparelli G. V., *Sulla trasformazione geometrica delle figure ed in particolare sulla trasformazione iperbolica*, Stamperia reale, Torino, 1862, 95 stran; též viz Memorie della reale Accademia delle scienze di Torino 21(1864), 227–319

[SwŠ] Schwabik Š., Šarmanová P., *Malý průvodce historií integrálu*, edice Dějiny matematiky, svazek 6, Prometheus, Praha, 1996, 95 stran

[ScSr] Scriba C. J., Schreiber P., *5000 Jahre Geometrie*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2001, 629 stran

[SŠ] Sedlák B., Štoll I., *Elektřina a magnetismus*, Academia, Praha, 2002, 632 stran; 2. vydání, Karolinum, Praha, 2012, 595 stran; 3. vydání, Karolinum, Praha, 2013, 600 stran

[Se] Segre C., *Un'osservazione relativa alla riducibilità delle trasformazioni Cremoniane e dei sistemi lineari di curve piane per mezzo di trasformazioni quadratiche*, Atti della reale Accademia delle scienze di Torino 36(1901), 645–651

[Sh] Sharpe R. W., *Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*, Graduate texts in mathematics, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1997, 421 stran

[Str] Strnad A., *Úvod do theorie kvadratických transformací rovinných*, Výroční zpráva c. k. vyšší realné školy v Hradci Králové za školní rok 1886–87

[St] Struik D. J., *Dějiny matematiky*, Malá moderní encyklopedie, svazek 43, Orbis, Praha, 1963, 251 stran

[Sr] Struve H., *Zur Geschichte des Abbildungsbegriffs*, Mathematische Semesterberichte 32(1985), 181–194

[Stu] Sturm R., *Beispiele zu den Cremona'schen ebenen Transformationen*, Mathematische Annalen 26(1886), 304–308

[ŠMŽ] Šedivý J., Mikulčák J., Židek S., *Antologie z učebnic matematiky, Období 1860–1960*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1988, 320 stran

[Ši] Šišma P., *Arabská matematika*, in Bečvář J. a kol., *Matematika ve středověké Evropě*, edice Dějiny matematiky, svazek 19, Prometheus, Praha, 2001, 151–183

[Ti] Timerding H. E., *Felix Klein und die Reform des mathematischen Unterrichts*, Die Naturwissenschaften 7(1919), 303–307

[To] Tobies R., *Felix Klein*, Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner, Band 50, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1981, 104 stran

[T1] Toepell M., *On the origins of David Hilbert's „Grundlagen der Geometrie“*, Archive for History of Exact Sciences 35(1986), 329–344

[T2] Toepell M., *100 Jahre Grundlagen der Geometrie – David Hilbert's entscheinender Beitrag zur Formalisierung der Mathematik*, Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1(1999), 10–15

[T3] Toepell M., *100 let „Základů geometrie“: Rozhodující příspěvek Davida Hilberta k formalizaci matematiky*, přeložila Alena Šolcová, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 45(2000), 89–97

[VV] Vaněčkové J. S. a M. N., *Sur l'involution des dimensions supérieures*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences Paris 99(1884), 742–744, 856–857, 909–911

[Veb] Veblen O., *A system of axioms for geometry*, Transactions of the American Mathematical Society 5(1904), 343–384

[Ver] Veronese G., *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare*, Lezioni per la scuola di magistero in matematica, Tipografia del Seminario, Padova, 1891, 630 stran

[Ve] Veselá Z., *Vývoj české školy a učitelského vzdělání*, Masarykova univerzita, Brno, 1992, 147 stran

[Vs] Veselý F., *100 let Jednoty československých matematiků a fyziků*, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1962, 127 stran

[Vt] Vetter Q., *Czechoslovakia*, The National Council of Teachers of Mathematics, The fourth yearbook – *Significant changes and trends in the teaching of mathematics throughout the world since 1910*, Teachers College, Columbia University, New York, 1929, 9–20

[Vi] Vitruvius Polio M., *Deset knih o architektuře*, z latinského originálu přeložil Alois Otoupalík, Svoboda, Praha, 1979, 430 stran

[V1] Vojtěch J., *Geometrické transformace prvního stupně v rovině a jich grupy*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 35(1906), 249–275, 377–397

[V2] Vojtěch J., *Geometrie pro IV. a V. třídu škol středních*, 5. upravené vydání, tiskem a nákladem Jednoty československých matematiků a fysiků, Praha, 1924, 262 stran

[Vš1] Vyšín J., *Elementární geometrie III* (*Logická výstavba*), Přírodovědecké vydavatelství, Praha, 1952, 111 stran

[Vš2] Vyšín J., *Soustava axiomů eukleidovské geometrie*, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1959, 209 stran

[Wa] Waerden B. L. van der, *A History of Algebra, From al-Khwārizmī to Emmy Noether*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985, 271 stran

[We1] Weyl H., *Raum – Zeit – Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie*, dritte, umgearbeitete Auflage, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1919, 272 stran

[We2] Weyl H., *David Hilbert and his mathematical work*, Bulletin of the American Mathematical Society 50(1944), 612–654

[Wr1] Weyr E., *Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde und der algebraischen Curven und Flächen als deren Erzeugnisse*, Teubner, Leipzig, 1869, 156 stran

[Wr2] Weyr E., *Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zwei–deutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung*, Teubner, Leipzig, 1870, 175 stran

[Wr3] Weyr E., *Cremonovy geometrické transformace útvarů rovinných*, Živa, sborník vědecký Musea království Českého, odbor přírodovědecký a mathematický č. X, nákladem Musea království Českého, Praha, 1872, 47 stran

[Wr4] Weyr E., *Beiträge zur Curvenlehre*, Alfred Hölder, K. k. Hof- und Universitätsbuchhändler Wilhelm Braumüller, Wien, 1880, 64 stran

[WW] Weyrové Em. a Ed., *Základové vyšší geometrie*, díl I. *Theorie promítavých útvarů prvořadých*, díl II. *Theorie křivek stupně druhého*, díl III. *O přímočarých plochách druhého stupně a o vztahu kollineárném a reciprokém základních útvarů druhořadých a třetiřadých*, Živa, sborník vědecký Musea království Českého, odbor přírodovědecký a mathematický č. VIII, XI, XII, nákladem Musea království Českého, Praha, 1871, 1874, 1878, 114 + 186 + 167 stran

[Wh] White H. S., *Cremona's works*, Bulletin of the American Mathematical Society 24(1918), 238–243

[Wi1] Wiener H., *Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1(1890/91), 45–48

[Wi2] Wiener H., *Weiteres über Grundlagen und Aufbau der Geometrie*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 3(1894), 70–80

[Wd1] Wilder R. L., *Robert Lee Moore, 1882–1974*, Bulletin of the American Mathematical Society 82(1976), 417–427

[Wd2] Wilder R. L., *The mathematical work of R. L. Moore: Its background, nature and influence*, Archive for History of Exact Sciences 26(1982), 73–97

[Wu] Wussing H., *Ke vzniku Erlangenského programu*, přeložil a upravil František Dušek, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 13(1968), 367–373

[WA] Wussing H., Arnold W., *Biographien bedeutender Mathematiker*, Eine Sammlung von Biographien, Volk und Wissen Volkseigener Verlag, Berlin, 1975, 549 stran

[W1] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history

[W2] http://inserv.math.muni.cz/biografie/

[Ya] Yaglom I. M., *Felix Klein and Sophus Lie, Evolution of the Idea of Symmetry in the Nineteenth Century*, Birkhäuser, Boston, Basel, 1988, 237 stran

[Za] Zahradník K., *O jisté birationální kubické transformaci a jejím upotřebení v theorii křivek*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 34(1905), 105–123, 329–341, 38(1909), 6–25

[Zi] Zich O., *K třicátému výročí úmrtí Davida Hilberta*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 18(1973), 301–306