Oponentský posudek disertační práce

E. Pernecká: Analysis in Banach spaces

Práce sestává ze tří článků, „Approximation properties and Schauder decompositions in Lipschitz-free spaces“, „On Schauder bases in Lipschitz-free spaces“ a „On uniformly differentiable mappings“, přičemž první dva již byly publikovány.

První dva články se zabývají problémem existence Schauderovy báze v preduálu $\mathcal{F}(M)$ k prostoru $\mathrm{Lip}_0(M)$ lipschitzovských funkcí na metrickém prostoru M. Problém je pozitivně vyřešen v případě, že M je jistý podprostor ℓ_1; jinak je alespoň za určitých podmínek na M dokázáno, že $\mathcal{F}(M)$ má omezenou aproximační vlastnost. Základním nástrojem je zde dobře známá n-lineární interpolace na n-dimenzionální krychli. Autoři si povšimli, že tato interpolace zachovává lipschitzovskou konstantu při použití ℓ_1-normy, tudíž se spolu s jejími dalšími užitečnými vlastnostmi velmi dobře hodí ke konstrukci lineárních rozšiřovacích operátorů na lipschitzovských funkcích a tím pádem i projekcí v $\mathrm{Lip}_0(\ell_1)$.

Výsledky jsou zajímavé, nicméně dojem mírně kazí prezentace. První článek není napsaný příliš pečlivě, takže se čte mnohem hůře, než by bylo objektivně nutné. Zejména je poněkud zarážející nekonzistence v tom, co je potřeba čtenáři vysvětlit a co se považuje za známé nebo jednoduché. Některé triviální věci autoři považují za nutné vysvětlovat a naopak často přejdou mlčením mnohem hlubší a závažnější obraty. Druhý článek je napsaný mnohem lépe a velmi oceňuji snahu o pečlivost a korektnost. Vzhledem k mírné komplikovanosti konstrukce je ovšem tím pádem čtenář zahrnut přívalem různých objektů a značení, ve kterých se obtížněji orientuje. Myslím, že při vhodnější volbě přístupu k indukci by šlo důkaz poněkud zpřehlednit.

Třetí článek je příspěvkem k probíhající snaze o zobecňování výsledků Aleksandra Pełczyńského a Alexandra Grothendiecka o nekompaktních lineárních operátorech z prostorů $C(K)$ na nelineární zobrazení se stejnoměrně spojitou derivací. Hlavním výsledkem je věta, která říká, že je-li f zobrazení z B_{ℓ_∞}, které má stejnoměrně spojitou derivaci a zobrazuje kanonické jednotkové vektory na množinu, která není relativně kompaktní, pak existuje mnoho bodů, ve kterých je restrikce derivace f na podprostor izometrický ℓ_∞ izomorfismem. To je jednak v jistém smyslu nelineární analogie věty Haskella Paula Rosenthala o fixování ℓ_∞ a jednak navazuje na výsledky Roberta Devilla a Petra Hájka o chování biduálních extenzí zobrazení se stejnoměrně spojitou derivací. Důkaz vyžívá techniky a lemmata z článků a knih P. Hájka. Prezentace obsahuje jen některé velmi drobné nedostatky a možná by stálo za to asi dvě nebo tři místa více rozvést.

Práce obsahuje nové a netriviální výsledky v aktuálních oblastech teorie Banachových prostorů a podle mého soudu rozhodně splňuje předpoklady pro to, aby byla uznána jako disertační práce k zisku titulu PhD.

Některé nedostatky a neobratnosti:

1) str. 6: Slovosled je dost matoucí, má být „On bounded sets the w^* topology coincides…“
2) str. 6: Asi špatné pořadí tvrzení: nejprve je třeba si uvědomit popis w^* topologie a až pak z toho plyne ta dualita.
3) str. 6: Stálo by za to upřesnit jednou větou, proč je $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ izometrické L_1.

4) str. 7-9: K-jemné rozklady jednotky, které jsou nesmírně technické, jsou v článku zhola zbytečné a jen odvádějí pozornost od tématu. Navíc se stejně fakticky vůbec nepoužívají. Mnohem lepší a navíc obecnější by bylo formulovat tvrzení za předpokladu existence lineárního rozšiřujícího operátoru.
5) str. 8: Operátory S_n jsou w^*-w^* spojité na celém prostoru (to plyne z Banachovy-Dieudonnéovy věty).
6) str. 8: Zmínit, že $S_n(f) \xrightarrow{\tau_p} f$ implikuje $S_n(f) \xrightarrow{w^*} f$, což pak dává tu WOT konvergenci T_n.
7) str. 8: Možná by stálo za to okomentovat ten konečný rank T_n.
8) str. 8: „Standard argument" napsat pořádně nebo dát odkaz na zdroj, kde je to uděláno pořádně! Které Mazurovo lemma se použije, jak se definují ty operátory, atd. Zde je to opravdu poměrně komplikovaná konstrukce a rozhodně mnohem složitější, než jiné věci, které jsou udělány detailně. Navíc se zde mlčky používá tvrzení, že pokud stejně lipschitzovské funkce konvergují bodově na husté množině, pak už konvergují bodově všude. Zajímavé je, že toto obecné tvrzení se nicméně považuje za nutné dokázat na konci na str. 15-16 v konkrétní a méně přehledné inkarnaci.
9) str. 8: Pozor na τ_p-τ_p spojitost operátorů E_n. Lebesgueova věta o konvergenci totiž neplatí pro nety. Navíc kdyby si autoři ten argument rozmysleli pořádně, viděli by, že ta omezenost domény pro τ_p-τ_p konvergenci je splněna automaticky.
10) str. 8: Na konci důkazu by bylo vhodné připsat $f(x_{n_0}) = S_n(f)(x_{n_0})$.
11) str. 10: Chtělo by to rozepsat, proč $J(P(\mu)) = \mu$.
12) str. 10: Další příklad nekonzistence: vzhledem k tomu, kolik toho autoři u čtenáře předpokládají je zvláštní, že považují za nutné podat definici prostoru ℓ_1.
13) str. 10: Autoři mají pravděpodobně na mysli *neexpanzivní* a nikoli *kontraktivní* projekce. (Kontraktivní operátor znamená $\|T(x) - T(y)\| < \|x - y\|$ pro $x \neq y$.)
14) Sekce 1.3.1: Operátor Λ je dobře známá n-lineární interpolace. Její vlastnosti jsou mnohem lépe vidět z explicitního vzorečku

$$\Lambda(f)(x) = \sum_{\gamma \in \{0,1\}^n} f(\gamma) \prod_{j\,:\,\gamma_j = 1} x_j \prod_{j\,:\,\gamma_j = 0} (1 - x_j)$$

než z uvedené induktivní definice. Důkaz Lemmatu 1.3.2 z tohoto vzorce by byl nejspíše kratší. Navíc je pro metodu v článku velmi důležité (a není to explicitně zmíněno), že tato interpolace dává na hranici hyperkrychle H totéž, jako interpolace nižší dimenze na hyperkrychlích ležících na hranici H.
15) Formalizace pomocí středů krychlí asi není nejvhodněji zvolená; mám za to, že kdyby se za referenční bod vzal vrchol, bylo by vše asi mírně jednodušší a značení lépe čitelné.
16) Lemma 1.3.2: Podle mě by mělo být zmíněno, že smysl je hlavně v tom, že operátor Λ je lineární; jinak jsou extenze se zachováním lipschitzovské konstanty jednoduché a to i na obecném metrickém prostoru.
17) str. 13: Bod y ve značení $x_{h,k}^{\varepsilon,y}$ je k ničemu, všude je $y = 0$. Toto nepřispívá k čitelnosti článku.
18) str. 13: Na co je tu zmíněna ta norma $\|\cdot\|_2$?
19) str. 13: Vůbec se neřeší to, že $P_n(g)$ je dobře definovaná funkce. (K tomu jsou potřeba vlastnosti té interpolace, viz bod 14).)
20) str. 14, důkaz Lemmatu 1.3.3: Vlastnost (AF) se zde používá na zobrazení, ale definovaná je jen pro funkce.

21) str. 14, nerovnosti dole: Neřeší se lipschitzovskost při přechodu přes různé krychle.
22) str. 15 dole: Autoři si nejspíše pořádně nerozmysleli, proč je Q_n τ_p-τ_p spojitý, a rozhodně to nenapsali. On je totiž asi dokonce τ_p-$\|\cdot\|_\infty$ a τ_p-$\|\cdot\|_{\mathrm{Lip}}$ spojitý, tedy se lze zbavit restrikce na omezené množiny.
23) str. 15 dole: To, že $Q_n(f) \xrightarrow{\tau_p} f$, je mnohem jasnější z jednoduchého obecného tvrzení, viz bod 8).

24) str. 19: Bylo by vhodné vysvětlit slovně co jsou ty množiny G^j zač.
25) str. 20 dole: Zmínit, že $x \pm e_i \in G^{k-1}$ pro $i \in I_x \cap I_y$ a $x \pm e_{i_j^x}, y \pm e_{i_j^y} \in G^{k-1}$.
26) str. 23 dole: Má tam asi být $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i \cap \ell_1$.
27) str. 23 dole: Chybí možnost $X_i = \mathbb{R}$.
28) celá sekce 2.3: Podle mě lze bez újmy na obecnosti (pomocí posunutí) předpokládat, že $0 \in X_i$ a tedy je bod $\mathcal{O}$ zcela zbytečný a jen zatěžuje celý formalismus.
29) str. 24 nahoře: Zdá se, že operátory ψ a σ jsou zbytečné, celý prostor X by měl jít rovnou „sbalit“ pomocí izometrie.
30) str. 24 dole: Nekonzistence. Zde považují autoři za nutné vysvětlit ten slabý uzávěr, zatímco na str. 16 se to přejde mlčením a ani se tam ten slabý uzávěr neobjeví.
31) str. 25–29, indukce: Nejsou předem pořádně popsány všechny objekty, které se budou během indukce konstruovat, a jaké mají mít vlastnosti. Není vysvětlena role E_n. Není jasné, k čemu je v kroku „zvyšování dimenze“ E_n. Není náhodou v tomto kroku $P_n = P_{n-1}$? Není vysvětlena role W_n, takže není jasné, proč z $W_{n-1} = \emptyset$ a (2.2) plyne existence k_n.

    Asi by bylo lepší netrvat na indexování P_n, ale konstruovat něco jako $P_{n,j,k}$; speciálně jinak rozdělit ty kroky v „nafukování“. Výrazně by to podle mě zpřehlednilo celou konstrukci.
32) str. 28: G_n^0 je ta „předchozí“ mřížka, to slovní vysvětlení „distance in the direction“ je matoucí.
33) str. 30 nahoře: Místo $\mathbb{R}^N$ má asi být $\mathbb{R}^{d_n}$ nebo X.
34) To lexikografické uspořádání je zdá se zbytečné, v každé příslušné subfázi lze přidávat body v libovolném pořadí.
35) Oceňuji snahu o hyperkorektnost, ale zdá se, že neustálé používání operátorů ρ a τ je spíše přítěží a zhoršuje čitelnost. Možná by to šlo celé rovnou dělat vnořené v ℓ_1 a těchto operátorů se zbavit. Každopádně tato snaha stejně není dotažená, často se mluví o „tiling F_n“, ale tam chybí ta informace o délce hrany, kterou je třeba asi stejně domyslet z kontextu.

36) str. 36: Definice ℓ_∞^n je absurdně překombinovaná.
37) str. 38: Není dokázáno, že g je $\mathcal{C}^{1,+}$-hladká a Df má modul spojitosti $C\omega$. (Na hranici nelze používat větu o skládání derivací a je třeba se k tomu nějak vyjádřit.)
38) str. 39: Bylo by vhodné předem napsat, že konstruujeme posloupnost $\{A^l\}$ s danými vlastnostmi.
39) str. 39 dole: Má tam být, že existuje *rostoucí* posloupnost (j_m).
40) Důkaz Tvrzení 3.2.2: Asi by bylo vhodnější udělat oba kroky indukce (první a indukční) najednou – jsou oba stejné, a ušetřila by se značná část důkazu.
41) str. 41: Přechází se nejen k podposloupnosti (e_k), ale zároveň i k podposloupnosti (φ_k).
42) str. 42: Formule se mi zdají bezdůvodně překomplikované, proč v těch argumentech není jen $x - x_k e_k + t e_k$?

43) str. 42: Neznamená náhodou (3.8), že $\varphi_k(Df(x)[e_k]) \geq \frac{3}{4}$ pro každé $x \in B^+_{\ell^n_\infty}$ splňující $x_k \in [a, b]$?
44) str. 42: Na co je to y a proč je třeba $y(t)_i \in [a, b]$ pro každé $i \in \mathbb{N}$?
45) str. 43, Věta 3.2.3: Proč je třeba předpokládat, že Y je separabilní?
46) str. 44: Věta „Since the mappings f_n are equi-Lipschitz, f is well-defined.“ nedává smysl.
47) str. 44 nahoře: Na co je potřeba $f_n(0) = 0$?
48) str. 45 dole: Myslím, že $C(\omega, L, \varepsilon)$ nezávisí na ω.

16.8.2014
Michal Johanis