Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Ivan Kolář

Symetrie systémů v prostorech příbuzných prostoročasu vícedimenzionální černé díry

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce:	doc. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.
Studijní program:	Fyzika
Studijní obor:	Teoretická fyzika

Praha 2014

Rád bych poděkoval vedoucímu práce doc. RNDr. Pavlu Krtoušovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a připomínky.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 23. července 2014 Podpis autora

Název práce: Symetrie systémů v prostorech příbuzných prostoročasu vícedimenzionální černé díry
Autor: Ivan Kolář
Katedra: Ústav teoretické fyziky
Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

Abstrakt: V této práci studujeme vlastnosti prostoročasu vícerozměrné obecně rotující černé díry tzv. Kerr–NUT–(A)dS a příbuzných prostorů, které mají stejné explicitní i skryté symetrie jako Kerr–NUT–(A)dS. Hledáme nejprve obecné podmínky vzájemné komutativity (nabitých) klasických pozorovatelných i jejich operátorových analogií a poté zkoumáme, kdy jsou tyto podmínky splněny ve zmiňovaných prostorech. Spočteme křivost těchto prostorů a po nalezení elektromagnetického pole, zachovávajícího integrabilitu pohybu nabité částice i vzájemnou komutativitu odpovídajících operátorů, vyřešíme nabitou Hamilton–Jacobiho a Klein–Gordonovu rovnici separací proměnných.

Klíčová slova: Obecná teorie relativity, černé díry, vyšší dimenze, symetrie, Killingovy tenzory, Poissonovy závorky, algebra operátorů

Title: Symmetries of systems in spaces related to high-dimensional black hole spacetime
Author: Ivan Kolář
Department: Institute of Theoretical Physics
Supervisor: doc. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

Abstract: In this work we study properties of the higher-dimensional generally rotating black hole space-time so-called Kerr–NUT–(A)dS and the related spaces with the same explicit and hidden symetries as the Kerr–NUT–(A)dS spacetime. First, we search commutativity conditions for classical (charged) observables and their operator analogues, then we investigate a fulfilment of these conditions in the metioned spaces. We calculate the curvature of these spaces and solve the charged Hamilton–Jacobi and Klein–Gordon equations by the separation of the variables for an electromagnetic field, which preserves integrability of motion of a charged particle and mutual commutativity of the corresponding operators.

Keywords: General relativity, black holes, higher dimensions, symmetries, Killing tensors, Poisson brackets, operator algebra

Obsah

Úvod

Studium prostoročasů vícerozměrných černých děr přitáhlo značnou pozornost nejenom v souvislosti s teorií strun [1]. Metriky popisující vícerozměrné černé díry byly objeveny v článcích [2]–[6] v pořadí s jejich rostoucí obecností. Nejobecnější dosud známá metrika odpovídá vícerozměrné obecně rotující (nenabité a neurychlené) černé díře s NUT parametry a libovolnou kosmologickou konstantou (dále jen Kerr–NUT–(A)dS). Tato metrika byla nalezena v [7] ve tvaru, který zobecňuje čtyřrozměrnou metriku [8], [9].

Prostoročas Kerr–NUT–(A)dS má řadu zajímavých vlastností. V dimenzi $2n$ má tato metrika explicitní i skryté symetrie popsané n Killingovými vektory a n Killingovými tenzory.[1] Killingovy tenzory jsou navíc generovány z tzv. hlavního Killing–Yanova tenzoru [10]. Bylo dokonce dokázáno [11]–[13], že off-shell Kerr–NUT–(A)dS metrika[2] je jediná metrika s hlavním Killing–Yanovým tenzorem.

Symetrie Kerr–NUT–(A)dS umožňují definovat kompletní sadu n kvadratických a n lineárních veličin zachovávajících se podél geodetik. Tyto veličiny jsou funkcionálně nezávislé a jejich Poissonovy závorky komutují [14], [15], a zajišťují tak úplnou integrabilitu geodetického pohybu. Existence těchto integrálů pohybu a jejich komutujících operátorových analogií [16] navíc úzce souvisí se separabilitou Hamilton–Jacobiho a Klein–Gordonovy rovnice, neboť zajišťují tzv. separabilní strukturu [17]. Explicitně byla separabilita těchto rovnic v Kerr–NUT–(A)dS prostoročase ukázána v [18].

Vzhledem k tomu, že vícerozměrné zobecnění nabité černé díry nebylo dosud nalezeno, bylo jisté úsilí věnováno také studiu slabě nabité vícerozměrné černé díry [19]–[21], tj. prostoročasu Kerr–NUT–(A)dS s testovacím elektromagnetickým polem, které neovlivňuje geometrii. Díky velkému poměru nábojů k hmotnostem známých částic může být pohyb nabitých častic, i pro takto slabé elektromagnetické pole, značně odlišný od geodetického pohybu. V [20] bylo ukázáno zachování úplné integrability i separability nabité Hamilton–Jacobiho a Klein–Gordonovy rovnice ve speciálním případě elektromagnetického pole úměrného jednomu vyjímečnému Killingovu vektoru.

V této práci nejprve soustředíme svou pozornost na studium obecné problematiky komutativity klasických pozorovatelných a operátorů na skalárních funkcích. Poté ukážeme, že některé tyto podmínky jsou splněny v prostoročase Kerr–NUT–(A)dS a jemu příbuzných prostorech, které sdílejí stejné explicitní i skryté symetrie. Je známo, že komutace klasických pozorovatelných vede na Schouten–Nijenhousovy závorky [22]–[24], zatímco jejich operátorové verze dávají už při komutaci s d'Alembertovým operátorem dodatečné podmínky na křivost kovariantní derivace [25].

Práce je uspořádána následujícím způsobem: V kapitole 1 zkoumáme obecné podmínky komutativity sady klasických kvadratických a lineárních pozorovatelných, speciálně tedy i podmínky, za nichž je systém popsaný hamiltoniánem plně integrabilní. Kapitolu 2 věnujeme podobné diskuzi, kde klasické pozorovatelné nahradíme operátory na skalárních funkcích. V kapitole 3 určíme podmínky na elektromagnetické pole zachovávající komutativitu klasických pozorovatelných i operátorů. V kapitole 4 zavádíme prostoročas Kerr–NUT–(A)dS a jemu příbuzné prostory, které mají stejnou sadu Killingových tenzorů a vektorů jako prostoročas Kerr–NUT–(A)dS. Dále zde s využitím 1-forem konexe spočteme křivost těchto prostorů. Nakonec v kapitole 5 zjistíme, kdy jsou podmínky z kapitol 1–3 splněny pro případ Kerr–NUT–(A)dS prostoročasu a jemu příbuzných prostorů. Po nalezení elektromagnetického pole, zachovávajícího integrabilitu pohybu nabité částice i vzájemnou komutativitu příslušných operátorů, vyřešíme

[1] Pro jednoduchost se zde soustředíme na sudou dimenzi. Většina zmiňovaných výsledků však platí stejně i v liché dimenzi, případně je lze poměrně přímočaře zobecnit.

[2] Tato metrika tvaru (4.1), kde X_μ jsou libovolné funkce jedné proměnné x_μ.

nabitou Hamilton–Jacobiho a Klein–Gordonovu rovnici separací proměnných.

Poznámky k použité notaci

Tečný, kotečný a tenzorový prostor typu (p,q) v bodě $x \in M$ variety M budeme značit $\boldsymbol{T}_x M$, $\boldsymbol{T}^*_x M$ a $\boldsymbol{T}_{x\,q}^{\,p} M$. Pro jejich příslušné bundle (tečný, kotečný a tenzorový) budeme používat značení $\boldsymbol{T}M$, $\boldsymbol{T}^*M$ a $\boldsymbol{T}^p_q M$.

Prostory skalárních funkcí, polí (tj. hladkých řezů příslušného bundle) tečných vektorů, 1-forem a tenzorů označíme $\mathfrak{F}M$, $\mathfrak{T}M$, $\mathfrak{T}^*M$ a $\mathfrak{T}^p_q M$. Pro stručnost je budeme nazývat jen „skaláry“, „vektory“, „1-formy“ a „tenzory“.

Prostor polí integrovatelných hustot (tj. funkcí přiřazujících bodu variety M hustotu váhy 1) budeme značit $\tilde{\mathfrak{F}}M$. Prostory polí integrovatelných vektorových, 1-formových a tenzorových hustot[3] označíme analogicky $\tilde{\mathfrak{T}}M$, $\tilde{\mathfrak{T}}^*M$ a $\tilde{\mathfrak{T}}^p_q M$. Dále je budeme nazývat pouze „hustoty“, „vektorové hustoty“, „1-formové hustoty“ a „tenzorové hustoty“.

Tenzory budeme značit tučným písmem a to včetně jejich abstraktních indexů. Pro skaláry a složky tenzorů použijeme klasické netučné písmo. Symetrizace resp. antisymetrizace budeme vymezovat kulatými resp. hranatými závorkami a vynechané indexy ohraničíme svislými čarami.

V jednoduchých případech, kdy nemůže dojít k nejasnostem, budeme používat rovněž bezindexovou notaci. Symetrizace a antisymetrizace ve všech indexech pak budeme značit $\mathcal{S}$ a $\mathcal{A}$. Symbolem $\cdot$ budeme znázorňovat kontrakci mezi dvěma tenzory v posledním indexu prvního tenzoru a prvním indexu druhého tenzoru. Pro symetrické tenzory budeme pro zúžení všech dostupných indexů používat symbol $\bullet$. Symetrizovaný tenzorový součin stejných objektů budeme značit jako mocninu, např. $\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{3}} = \mathcal{S}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}$.

Pro antisymetrickou p-formu $\boldsymbol{a}$ a q-formu $\boldsymbol{b}$ definujeme antisymetrický součin vztahem $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \equiv \frac{(p+q)!}{p!q!}\mathcal{A}\big(\boldsymbol{ab}\big)$. Podobně pro symetrické tenzory $\boldsymbol{c}$ a $\boldsymbol{d}$ typu $(p,0)$ a $(q,0)$ definujeme symetrický součin vztahem $\boldsymbol{c} \vee \boldsymbol{d} \equiv \frac{(p+q)!}{p!q!}\mathcal{S}\big(\boldsymbol{cd}\big)$.

[3] Přesněji se jedná o řezy fíbrovaného bundle tenzorového součinu prostoru hustot a tečného tenzorového prostoru.

1. Klasické komutující pozorovatelné

V této kapitole prozkoumáme tvar kvadratických pozorovatelných na fázovém prostoru klasické (nerelativické i relativistické) částice na varietě. Určíme podmínky komutace sady čistě kvadratických a lineárních pozorovatelných. Speciálně pro případ, kdy je jednou z těchto pozorovatelných i hamiltonián nerelativistické nebo relativistické volné částice získáme podmínky, za kterých je systém popsaný tímto hamiltoniánem plně integrabilní.

1.1 Klasické pozorovatelné

Pohyb částice po varietě M dimenze D lze popsat v rámci hamiltonovské mechaniky, kde fázovým prostorem S je kotečný bundle $\boldsymbol{T}^*M$. Bod ve fázovém prostoru je popsán dvojicí $[x, \boldsymbol{p}]$, kde $x \in M$ a $\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{T}^*_x M$.[1] Varieta M může být jednak vícerozměrným zobecněním třírozměrného prostoru v nerelativistickém případě, ale také čtyřrozměrného prostoročasu v případě relativistické částice.

Obecná pozorovatelná na fázovém prostoru $Q \in \mathfrak{F}S$ kvadratická v hybnostech $\boldsymbol{p}$ má tvar

$$\begin{aligned} Q &\equiv \boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ab}} \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{a}} + v \\ &= \boldsymbol{k} \bullet \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{p} + v, \end{aligned} \tag{1.1}$$

kde $\boldsymbol{k} \in \mathfrak{T}^2_0 M$ je symetrický tenzor, $\boldsymbol{l} \in \mathfrak{T}M$ a $v \in \mathfrak{F}M$.

Označme si zvlášť čistě kvadratické, lineární a konstantní pozorovatelné

$$\begin{aligned} K &\equiv \boldsymbol{k} \bullet \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{2}}, \\ L &\equiv \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{p}, \\ V &\equiv v, \end{aligned} \tag{1.2}$$

a tedy platí $Q = K + L + V$.

1.2 Poissonovy závorky

Fázový prostor S je obdařen symplektickou strukturou $\boldsymbol{\omega}$. Ta lze v libovolných souřadnicích x^a na M a kanonicky sdružených souřadnicích p_a (složky 1-formy hybnosti v bázi $\mathbf{d}x^a$) zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{d}x^a \wedge \mathbf{d}p_a. \tag{1.3}$$

Inverze symplektické struktury[2] zúžená s gradienty dvou pozorovatelných je pak známá jako Poissonova závorka

$$\{F, G\} \equiv \mathbf{d}F \cdot \boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{-1}} \cdot \mathbf{d}G = \frac{\partial F}{\partial x^a} \frac{\partial G}{\partial p_a} - \frac{\partial F}{\partial p_a} \frac{\partial G}{\partial x^a}. \tag{1.4}$$

[1] Ve skutečnosti je veškerá informace již v samotném $\boldsymbol{p}$.

[2] Inverze symplektické struktury je dána vztahem $\boldsymbol{\omega}^{\boldsymbol{-1}\boldsymbol{an}} \boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{bn}} = \boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{b}}$.

S přidáním dodatečné struktury — beztorzní kovariantní derivace na varietě M — lze Poissonovy závorky zapsat čistě geometricky bez odkazu na konkrétní souřadnice (viz [26])

$$\{F\,,G\} = \frac{\nabla_{\!\boldsymbol{n}}F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{n}}} - \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{n}}}\frac{\nabla_{\!\boldsymbol{n}}G}{\partial x}. \tag{1.5}$$

Lze ukázat, že tento vztah nezávisí na volbě beztorzní kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$. Objekty $\frac{\nabla_{\boldsymbol{n}}}{\partial x}$ a $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{n}}}$ jsou geometrickými zobecněními parciálních derivací ve směrech x a $\boldsymbol{p}$ na fázovém prostoru.

Derivování ve směrech $\boldsymbol{p}$ při konstantním x je jednoduché, neboť kotečný prostor T_x^*M v pevném x je lineární. Můžeme tedy definovat derivaci v kotečném prostoru ve směru $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{T}_x^*M$ vztahem

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n}}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{n}}} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}F(x, \boldsymbol{p} + \epsilon \boldsymbol{f})\Big|_{\epsilon=0}. \tag{1.6}$$

Pro derivování ve směrech x (tj. podél variety) je třeba přesněji specifikovat, co to znamená „konstantní $\boldsymbol{p}$“, neboť každému x přísluší jiný kotečný prostor $\boldsymbol{T}_x^*M$. S dodatečnou strukturou kovariantní derivace můžeme specifikovat „konstantní $\boldsymbol{p}$“ jako paralelně přenášené. Derivaci ve směru $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{T}_xM$ tedy definujeme vztahem

$$\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{n}}\frac{\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{n}}F}{\partial x} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}F(x_\epsilon, \bar{\boldsymbol{p}}_\epsilon)\Big|_{\epsilon=0}, \tag{1.7}$$

kde x_ϵ je křivka v M ve směru $\boldsymbol{u}$ a $\bar{\boldsymbol{p}}_\epsilon$ je paralelně přenášený vektor $\boldsymbol{p}$ po křivce x_ϵ.

Po „odtržení“ $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{u}$ ve vztazích (1.6) a (1.7) získáme derivace $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{n}}}$ a $\frac{\nabla_{\boldsymbol{n}}}{\partial x}$ vystupující v kovariantním zápisu Poissonovy závorky (1.5). Na pozorovatelné polynomiální v $\boldsymbol{p}$ působí derivace $\frac{\nabla_{\boldsymbol{n}}}{\partial x}$ jako obyčejná kovariantní derivace ignorující $\boldsymbol{p}$, zatímco derivace $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{n}}}$ naopak derivuje pouze mocniny $\boldsymbol{p}$.

Pro Poissonovu závorku dvou různých pozorovatelných Q_1, Q_2 kvadratických v $\boldsymbol{p}$ platí

$$\begin{aligned}\{Q_1\,,Q_2\} = \{K_1\,,K_2\} + \{L_1\,,L_2\}&\\ +\big(\{L_1\,,K_2\} + \{V_1\,,K_2\} + \{V_1\,,L_2\} - (1 \leftrightarrow 2)\big),&\end{aligned} \tag{1.8}$$

přičemž

$$\begin{aligned}\{K_1\,,K_2\} &= 2\big({}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{a}}\nabla_{\!\boldsymbol{n}}\,{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{bc})} - (1 \leftrightarrow 2)\big)\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{c}} = [{}^{(2)}\boldsymbol{k}\,,{}^{(1)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} \bullet \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{3}},\\ \{L_1\,,L_2\} &= \big({}^{(2)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{n}}\nabla_{\!\boldsymbol{n}}\,{}^{(1)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}} - (1 \leftrightarrow 2)\big)\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{a}} = [{}^{(2)}\boldsymbol{l}\,,{}^{(1)}\boldsymbol{l}]_{\mathrm{SN}} \cdot \boldsymbol{p},\\ \{L\,,K\} &= \big(2\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{a}}\nabla_{\!\boldsymbol{n}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{b})} - \boldsymbol{l}^{\boldsymbol{n}}\nabla_{\!\boldsymbol{n}}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ab}}\big)\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{b}} = [\boldsymbol{k}\,,\boldsymbol{l}]_{\mathrm{SN}} \bullet \boldsymbol{p}^{\boldsymbol{2}},\\ \{V\,,K\} &= 2\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{na}}\big(\nabla_{\!\boldsymbol{n}}v\big)\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{a}} = [\boldsymbol{k}\,,v]_{\mathrm{SN}} \cdot \boldsymbol{p},\\ \{V\,,L\} &= \boldsymbol{l}^{\boldsymbol{n}}\nabla_{\!\boldsymbol{n}}v = [\boldsymbol{l}\,,v]_{\mathrm{SN}}.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Symbol $(1 \leftrightarrow 2)$ značí vše, co je před ním (v rámci závorek) s těmito prohozenými indexy. Koeficienty u mocnin $\boldsymbol{p}$ v (1.9) jsou Schouten–Nijenhuisovy závorky, které jsou obecně definovány vztahem (viz [22]–[24])

$$[\boldsymbol{A}\,,\boldsymbol{B}]_{\mathrm{SN}}^{\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_{p+q-1}} \equiv p\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_{p-1}}\nabla_{\!\boldsymbol{n}}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{a}_p\ldots\boldsymbol{a}_{p+q-1})} - q\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{a}_1\ldots\boldsymbol{a}_{q-1}}\nabla_{\!\boldsymbol{n}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{a}_q\ldots\boldsymbol{a}_{p+q-1})}, \tag{1.10}$$

kde $\boldsymbol{A} \in \mathfrak{T}^p M$ a $\boldsymbol{B} \in \mathfrak{T}^q M$ jsou symetrické tenzory stupně p a q. Pravá strana (1.10) navíc nezávisí na volbě beztorzní kovariantní derivace. Schouten–Nijenhuisova závorka vektoru $\boldsymbol{a} \in \mathfrak{T}M$ se symetrickým tenzorem $\boldsymbol{B}$ se redukuje na Lieovu derivaci

$$[\boldsymbol{a}\,, \boldsymbol{B}]_{\mathrm{SN}} = \pounds_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{B}. \tag{1.11}$$

Speciálně pro dva vektory je pak Schouten–Nijenhuisova závorka zjevně ekvivalentní obyčejné Lieově závorce. Díky vztahu (1.11) pro obecnou pozorovatelnou P polynomiální v $\boldsymbol{p}$ a lineární pozorovatelnu L platí

$$\{L\,, P\} = \tilde{\pounds}_{\boldsymbol{l}} P, \tag{1.12}$$

kde $\tilde{\pounds}$ je Lieova derivace ignorující $\boldsymbol{p}$.

1.3 Vzájemně komutující pozorovatelné

Pro jednoduchost uvažujme dále varietu dimenze $D = 2n$ a mějme sadu pozorovatelných K_i a L_i, kde $i = 0, \dots, n-1$ tvaru (1.2). Z (1.9) vidíme, že tyto pozorovatelné spolu komutují (jsou v involuci) právě tehdy, když vymizí tyto Schouten–Nijenhuisovy závorky

$$\big[{}^{(i)}\boldsymbol{k}\,, {}^{(j)}\boldsymbol{k}\big]_{\mathrm{SN}} = 0, \tag{1.13}$$

$$\big[{}^{(i)}\boldsymbol{l}\,, {}^{(j)}\boldsymbol{k}\big]_{\mathrm{SN}} = 0, \tag{1.14}$$

$$\big[{}^{(i)}\boldsymbol{l}\,, {}^{(j)}\boldsymbol{l}\big]_{\mathrm{SN}} = 0, \tag{1.15}$$

pro $i, j = 0, \dots, n-1$.

Předpokládejme nyní, že na varietě máme zadanou metriku[3] $\boldsymbol{g}$ a $\boldsymbol{\nabla}$ je metrická kovariantní derivace této metriky, tzn. platí $\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{g} = 0$.

Pohyb volné nerelativistické částice o hmostnosti m je popsán kvadratickým hamiltoniánem

$$H_{\text{nerel.}} \equiv \frac{1}{2m}\, \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{g}^{\mathbf{-1}} \cdot \boldsymbol{p}. \tag{1.16}$$

Prostor $(M, \boldsymbol{g})$ je zde vícerozměrným zobecněním třírozměrného (obecně zakřiveného) prostoru. Pohyb částice je měřen vzhledem k absolutnímu času. Systém má D stupňů volnosti.

Pohyb relativistické částice o hmostnosti m lze také popsat kvadratickým hamiltoniánem, a sice[4]

$$H_{\text{rel.}} \equiv \frac{1}{2} \nu \big(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{g}^{\mathbf{-1}} \cdot \boldsymbol{p} + m^2 \big) + \kappa \pi, \tag{1.17}$$

s vazbou $\pi = 0$, která generuje druhotnou vazbu $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{g}^{\mathbf{-1}} \cdot \boldsymbol{p} = -m^2$, tj. normalizaci hybnosti $\boldsymbol{p}$. Funkce κ představuje Lagrangeův multiplikátor, ν je zobecněná souřadnice související s volností v parametrizaci světočáry[5] a π je k ní kanonicky sdružená hybnost. Prostor $(M, \boldsymbol{g})$ zde (na rozdíl od nerelativistického případu) představuje vícerozměrné

[3] Metrikou nazýváme symetrický nedegenerovaný tenzor typu $(0, 2)$.

[4] Tento hamiltonián lze odvodit z Polyakovovy akce pro relativistickou částici.

[5] Funkce ν je složkou míry $\nu \mathbf{d}\eta$ na světočáře s metrikou $\boldsymbol{g_0} = -\nu^2 (\mathbf{d}\eta)^{\mathbf{2}}$, kde η je časový parametr světočáry.

zobecnění čtyřrozměrného prostoročasu. Pohyb částice je měřen vzhledem k libovolnému časovému parametru η. Díky vazbám $\pi = 0$ a $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{g^{-1}} \cdot \boldsymbol{p} = -m^2$ a fixování kalibrační volnosti v parametrizaci světočáry má redukovaný fázový prostor dimenzi $2(D-1)$. Jednou z možných kalibrací je volba $\nu = 1$ zajišťující parametrizaci pomocí afinního parametru a podmínka fixující aditivní volnost v tomto parametru. Systém relativistické částice má tak $D-1$ fyzikálních stupňů volnosti.

Přestože fyzikálně jsou popisy nerelativistické a relativistické částice značně odlišné, jejich hamiltoniány (1.16) a (1.17) jsou velmi podobné (liší se pouze o multiplikativní a aditivní konstantu). Pro úvahy týkající se integrability zachovávajících se veličin nám postačí fakt, že hamiltonián je pro oba systémy kvadratický v $\boldsymbol{p}$ a bez újmy na obecnosti budeme uvažovat

$$H \equiv \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{g^{-1}} \cdot \boldsymbol{p}. \tag{1.18}$$

Ze vztahů (1.9) vyplývá, že pozorovatelné K_i a L_i jsou integrály tohoto pohybu (komutují s H) právě tehdy, když

$$\mathcal{S}\big(\boldsymbol{g^{-1}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\, {}^{(i)}\!\boldsymbol{k}\big) = 0, \tag{1.19}$$

$$\mathcal{S}\big(\boldsymbol{g^{-1}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\, {}^{(i)}\boldsymbol{l}\big) = 0, \tag{1.20}$$

tj. jestliže ${}^{(i)}\boldsymbol{k}$ a ${}^{(i)}\boldsymbol{l}$ jsou Killingovy tenzory[6] a Killingovy vektory metriky $\boldsymbol{g}$.

Pokud H je roven jedné z pozorovatelných K_i, potom systém s takovouto sadou $2n$ navzájem komutujících nezávislých integrálů pohybu K_i a L_i se nazývá úplně integrabilní.[7] Pro naši částici na varietě to znamená, že výsledný pohyb bude regulární (nebude chaotický). Znalost integrálů pohybu může navíc pomoci při vlastním řešení pohybových rovnic, konkrétně při separaci Hamilton–Jacobiho rovnice. V [17] bylo ukázáno, že přítomnost těchto integrálů pohybu dokonce zajišťuje tzv. separabilní strukturu, a tedy nutnou existenci souřadnic, v nichž lze Hamilton–Jacobiho rovnici separovat.

[6] Zavádíme zde Killingovy tenzory s indexy nahoře.

[7] Přesněji zde mluvíme o Liovillově integrabilitě.

2. Komutující operátory

V této kapitole provedeme podobnou diskuzi jako v kapitole předchozí, avšak namísto klasických pozorovatelných na fázovém prostoru částice budeme studovat operátory na skalárních funkcích. Ty představují jednak kvantové verze klasických veličin, studovaných v kapitole 1, ale rovněž je můžeme chápat jako klasické pozorovatelné v polních teoriích, které mohou sloužit jako vhodné veličiny ke kvantování v kvantových teoriích pole na křivém pozadí.

Motivováni standardním postupem při nerelativistickém kvantování budeme operátory na skalárních funkcích konstruovat nahrazením $\boldsymbol{p} \to -\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla}$ a budeme požadovat, aby výsledné operátory byly hermitovské. Prozkoumáme tedy hermitovské operátory druhého řádu v $\boldsymbol{\nabla}$ a identifikujeme v nich analogie klasických pozorovatelných (1.2).

Výpočtem komutátorů těchto operátorů získáme kromě klasických podmínek (nulovost Schouten–Nijenhuisových závorek a Killingovy rovnice) další netriviální podmínky, které odrážejí obecný problém při kvantování na varietě. Při přechodu od klasických veličin k operátorovým máme kromě volnosti v uspořádání operátorů také volnost ve volbě kovariantní derivace, kterou právě specifikují naše dodatečné anomální podmínky.[1]

2.1 Bilineární formy na funkcích

Zobrazení $\mathcal{P} : \mathfrak{F}M^{\mathbb{C}} \to \tilde{\mathfrak{F}}M^{\mathbb{C}}$ budeme nazývát bilineární formy na funkcích, neboť zprostředkovávají bilineární zobrazení

$$\int\limits_M \_\mathcal{P}\_ \; : \; \mathfrak{F}M^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{F}M^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

Symbolem $^{\mathbb{C}}$ zde zdůrazňujeme, že obecně pracujeme s komplexifikovanými prostory.

Reálná symetrická bilineární forma $\mathcal{G}$ daná násobením hustotou $\mu \in \tilde{\mathfrak{F}}M$ nám indukuje skalární součin na $\mathfrak{F}M^{\mathbb{C}}$, který navíc komplexně druží v prvním (levém) argumentu

$$\langle \psi \,, \phi \rangle \equiv \int\limits_M \psi^* \mathcal{G} \phi = \int\limits_M \psi^* \phi \mu. \tag{2.2}$$

Pro nesymetrické bilineární formy $\overrightarrow{\mathcal{P}} \equiv \mathcal{P}$ zavedeme i jejich působení na funkce v opačném pořadí (tj. transpozici) $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Platí tedy

$$\int\limits_M \psi \overrightarrow{\mathcal{P}} \phi = \int\limits_M \psi \mathcal{P} \phi = \int\limits_M \phi \overleftarrow{\mathcal{P}} \psi, \tag{2.3}$$

kde $\psi, \phi \in \mathfrak{F}M^{\mathbb{C}}$. Šipka bude navíc pro případ bilineárních diferenciálních forem obvykle naznačovat směr působení derivací.

[1] Volnost ve volbě kovariantní derivace souvisí rovněž s volbou skalárního součinu na prostoru skalárních funkcí. Kvantování fyzikálních veličin lze provést i nezávisle na volbě kovariantní derivace pomocí tzv. geometrického kvantování, které však namísto skalárních funkcí pracuje s hustotami váhy $\frac{1}{2}$. Při přechodu zpět ke skalárním funkcím potřebujeme kovariantně konstantní integrovatelnou hustotu, která nám definuje skalární součin.

Mějme beztorzní (obecně nemetrickou) kovariantní derivaci $\boldsymbol{\nabla}$ rozšířenou na tenzorové hustoty. Obecná bilineární forma na funkcích kvadratická v $\boldsymbol{\nabla}$ lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{D}} &= -\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{ab}} \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}^{\mathbf{2}}_{\boldsymbol{ab}} + \boldsymbol{\beta}^{\boldsymbol{a}} \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}_{\boldsymbol{a}} + \gamma \\ &= -\boldsymbol{\alpha} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{\beta} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} + \gamma, \end{aligned} \tag{2.4}$$

kde $\boldsymbol{\alpha} \in \tilde{\mathfrak{T}}^2_0 M^{\mathbb{C}}$, $\boldsymbol{\beta} \in \tilde{\mathfrak{T}} M^{\mathbb{C}}$ a $\gamma \in \tilde{\mathfrak{F}} M^{\mathbb{C}}$ (komplexní tenzorové hustoty). Díky nulovosti torze $\boldsymbol{\nabla}$ jsou druhé kovariantní derivace skaláru symetrické a můžeme tedy předpokládat, že $\boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{ab}} = \boldsymbol{\alpha}^{\boldsymbol{(ab)}}$.

Pro hermitovsky sdruženou (komplexně sdruženou a transponovanou) bilineární formu platí

$$\overrightarrow{\mathcal{D}}^{\dagger} = \overleftarrow{\mathcal{D}}^{*} = -\overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}}^{\mathbf{2}} \bullet \boldsymbol{\alpha}^* + \overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \boldsymbol{\beta}^* + \gamma^*. \tag{2.5}$$

S využitím Leibnizova pravidla, Gaussovy věty a nulovosti okrajového členu[2] dostáváme vztah mezi bilineárními formami

$$\int\limits_M \psi \boldsymbol{\beta} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} \phi = \int\limits_{\partial M} \psi \phi \boldsymbol{\beta} - \int\limits_M \big(\boldsymbol{\nabla} \cdot (\psi \boldsymbol{\beta})\big) \phi = - \int\limits_M \psi \boldsymbol{\beta} \cdot \overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}} \phi, \tag{2.6}$$

který můžeme formálně psát jako

$$\boldsymbol{\beta} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} = -\boldsymbol{\beta} \cdot \overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}}. \tag{2.7}$$

Opakovaným použitím Leibnizova pravidla získáme podobně

$$\boldsymbol{\alpha} \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}^{\mathbf{2}} = \boldsymbol{\alpha} \bullet \overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}}^{\mathbf{2}}. \tag{2.8}$$

S využitím hermitovsky sdružených variant vztahů (2.7), (2.8) a rozderivováním dostaneme

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\dagger} &= -\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}^{\mathbf{2}} \bullet \boldsymbol{\alpha}^* - \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \boldsymbol{\beta}^* + \gamma^* \\ &= -\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \boldsymbol{\alpha}^* \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} - \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\alpha}^* + \boldsymbol{\beta}^*\big) + \gamma^* \\ &= -\boldsymbol{\alpha}^* \bullet \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}}^{\mathbf{2}} - \big(2\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\alpha}^* + \boldsymbol{\beta}^*\big) \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} - \Big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\alpha}^* + \boldsymbol{\beta}^*\big)\Big) + \gamma^*. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Porovnáním (2.4) s (2.9) obdržíme podmínky hermiticity

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \boldsymbol{\alpha} &= 0, \\ \operatorname{Re} \boldsymbol{\beta} &= -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\alpha}, \\ \operatorname{Im} \gamma &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\nabla} \cdot \operatorname{Im} \boldsymbol{\beta}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Dosazením (2.10) do (2.9) získáme tvar obecné hermitovské bilineární formy kvadratické v $\boldsymbol{\nabla}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{Q}} &= -\overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} + \mathrm{i} \boldsymbol{\beta} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} + \frac{\mathrm{i}}{2} \big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\beta}\big) + \gamma \\ &= \overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} + \frac{\mathrm{i}}{2} \boldsymbol{\beta} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\nabla}} - \frac{\mathrm{i}}{2} \overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \boldsymbol{\beta} + \gamma, \end{aligned} \tag{2.11}$$

[2]Okrajový člen vymizí pro kompaktní variety M nebo pro dostatečně rychle klesající funkce ψ, ϕ.

kde $\boldsymbol{\alpha} \in \tilde{\mathfrak{T}}^2_0 M$ je symetrická tenzorová hustota, $\boldsymbol{\beta} \in \tilde{\mathfrak{T}} M$ a $\gamma \in \tilde{\mathfrak{F}} M$. Tyto tenzorové hustoty jsou již reálné.

2.2 Hermitovské operátory

Předpokládejme nyní existenci zachovávající se integrovatelné hustoty $\mu \in \tilde{\mathfrak{F}} M$ kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$, tj. $\boldsymbol{\nabla}\mu = 0$. Existence této hustoty je ekvivalentní nulovosti stopy Riemannova tenzoru $\mathbf{TrR}_{\boldsymbol{ab}} = \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{ab}}{}^{\boldsymbol{c}}{}_{\boldsymbol{c}}$. Neboli $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{ab}} = \mathbf{TrR}_{\boldsymbol{ab}} = 0$, kde $\boldsymbol{r}$ je tenzor křivosti $\boldsymbol{\nabla}$ na hustotách. Předpokládejme tedy, že $\boldsymbol{\nabla}$ je plochá derivace na hustotách. Díky obecnému vztahu (zúžení první Bianchiho identity (A.4))

$$2\mathbf{Ric}_{[\boldsymbol{ab}]} + \mathbf{TrR}_{\boldsymbol{ab}} = 0 \tag{2.12}$$

je Ricciho tenzor nutně symetrický

$$\mathbf{Ric}_{\boldsymbol{ab}} = \mathbf{Ric}_{(\boldsymbol{ab})}. \tag{2.13}$$

Právě takovouto zachovávající se hustotu μ budeme používat v definici skalárního součinu (2.2) a s jeho pomocí nyní zavedeme hermitovské operátory.

Zobrazení $\mathsf{P} : \mathfrak{F} M^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{F} M^{\mathbb{C}}$ budeme nazývat operátory. V operátorových rovnostech budeme používat konvenci, že pouze kulaté závorky končí akci operátoru (zejména operátoru kovariantní derivace), zatímco hranaté závorky nebrání působení operátoru doprava.[3] Rovnosti operátorů budou vždy snadno identifikovatelné, neboť je budeme psát ve tvaru, který obsahuje alespoň jeden jednoznačně operátorový člen (např. osamocená derivace nebo dříve definovaný operátor).

Operátor P je hermitovský vzhledem ke skalárnímu součinu právě tehdy, když operátorem indukovaná bilineární forma $\mathcal{P}_{\mathcal{G}} \equiv \mathcal{G}\mathsf{P}$ je hermitovská, neboť

$$\int_M \psi^* \mathcal{G}\big(\mathsf{P}\phi\big) = \int_M \psi^* \overrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathcal{G}} \phi = \int_M \psi^* \overleftarrow{\mathcal{P}}^*_{\mathcal{G}} \phi = \int_M \big(\mathsf{P}\psi\big)^* \mathcal{G}\phi. \tag{2.14}$$

Označíme-li nyní

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k} &\equiv \mu^{-1}\boldsymbol{\alpha}, \\ \boldsymbol{l} &\equiv -\mu^{-1}\boldsymbol{\beta}, \\ v &\equiv \mu^{-1}\gamma \end{aligned} \tag{2.15}$$

a přejdeme-li od bilineární formy (2.11) k operátoru $\mathsf{Q} = \mathcal{G}^{-1}\overrightarrow{\mathcal{Q}}$, získáme vztah pro obecný hermitovský operátor kvadratický v $\boldsymbol{\nabla}$

$$\begin{aligned} \mathsf{Q} &\equiv -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla} - \frac{\mathrm{i}}{2}\big[\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{l}\big] + \gamma \\ &= -\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{\nabla^2} - \big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{k} + \mathrm{i}\boldsymbol{l}\big)\cdot\boldsymbol{\nabla} - \frac{\mathrm{i}}{2}\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{l}\big) + v, \end{aligned} \tag{2.16}$$

kde $\boldsymbol{k} \in \mathfrak{T}^2_0 M$ je symetrický tenzor, $\boldsymbol{l} \in \mathfrak{T} M$ a $v \in \mathfrak{F} M$. Operátor v (2.16) je vyjádřen jednak v symetrickém uspořádání a jednak v uspořádání po úplném rozderivování. Poznamenejme, že obecný kvadratický antihermitovský operátor má podobný tvar, a sice $\mathrm{i}\mathsf{Q}$.

[3] Výrazy $\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\big)$ a $\big[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\big]$ reprezentují různé operátory $\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\big) \neq \big[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\big]$. První působí násobením funkcí $\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\big)$, zatímco druhý je diferenciálním operátorem prvního řádu $\big[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\big] = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\big)$.

Označme si navíc zvlášť tyto hermitovské operátory

$$
\begin{aligned}
\mathsf{K} &\equiv -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla} = -\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{\nabla}^{\mathbf{2}} - \big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{k}\big)\cdot\boldsymbol{\nabla},\\
\mathsf{L} &\equiv -\frac{\mathrm{i}}{2}\big[\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{l}\big] = -\mathrm{i}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\nabla} - \frac{\mathrm{i}}{2}\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{l}\big),\\
\mathsf{V} &\equiv v,
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

a tedy platí $\mathsf{Q} = \mathsf{K} + \mathsf{L} + \mathsf{V}$. Tyto operátory jsou polními analogiemi klasických pozorovatelných (1.2), které lze rovněž získat nahrazením $\boldsymbol{p} \rightarrow -\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla}$ se symetrickým operátorovým uspořádáním.

2.3 Komutátory

Komutátor dvou operátorů definujeme vztahem[4]

$$
[\![\mathsf{F}\,,\mathsf{G}]\!] \equiv \mathsf{FG} - \mathsf{GF}. \tag{2.18}
$$

Pro komutátory dvou různých hermitovských kvadratických operátorů Q_1, Q_2 platí

$$
\begin{aligned}
[\![\mathsf{Q}_1\,,\mathsf{Q}_2]\!] = [\![\mathsf{K}_1\,,\mathsf{K}_2]\!] + [\![\mathsf{L}_1\,,\mathsf{L}_2]\!]&\\
+\big([\![\mathsf{L}_1\,,\mathsf{K}_2]\!] + [\![\mathsf{V}_1\,,\mathsf{K}_2]\!] + [\![\mathsf{V}_1\,,\mathsf{L}_2]\!] - (1\leftrightarrow 2)\big)&.
\end{aligned} \tag{2.19}
$$

Nyní postupně vypočteme všechny tyto komutátory. Výsledky jsou shrnuty v (2.34), resp. (2.35). Začneme komutacemi s operátorem V

$$
[\![\mathsf{V}\,,\mathsf{L}]\!] = -\mathrm{i}v\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{a}} + \mathrm{i}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{a}}v = \mathrm{i}\big(\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{n}}v\big), \tag{2.20}
$$

$$
\begin{aligned}
[\![\mathsf{V}\,,\mathsf{K}]\!] &= -v\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{a}}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ab}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{a}}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ab}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{b}}v\\
&= 2\big(\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{n}}v\big)\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{na}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{a}} + \Big(\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{n}}\big(\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{nk}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{k}}v\big)\Big).
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

Při komutaci lineárních operátorů využijeme (2.20) a symetrie druhých kovariantních derivací skaláru

$$
\begin{aligned}
[\![\mathsf{L}_1\,,\mathsf{L}_2]\!] &= [\![-\mathrm{i}\,{}^{(1)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{a}}\,,-\mathrm{i}\,{}^{(2)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{b}}]\!] + \left[\left[\!\!\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{a}}{}^{(1)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}}\big)\,,-\mathrm{i}\,{}^{(2)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{b}}\right]\!\!\right] - (1\leftrightarrow 2)\right]\\
&= \left[-\,{}^{(1)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{a}}{}^{(2)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{b}} + \frac{1}{2}{}^{(2)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{k}}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{n}}{}^{(1)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{n}}\big) - (1\leftrightarrow 2)\right]\\
&= \big({}^{(2)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{n}}{}^{(1)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}} - (1\leftrightarrow 2)\big)\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{a}} + \frac{1}{2}\big({}^{(2)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{n}}{}^{(1)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{n}} - (1\leftrightarrow 2)\big).
\end{aligned} \tag{2.22}
$$

Díky symetrii Ricciho tenzoru můžeme ještě výraz v poslední závorce po prohození kovariantních derivací napsat jako divergenci

$$
\begin{aligned}
[\![\mathsf{L}_1\,,\mathsf{L}_2]\!] &= \big({}^{(2)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{n}}{}^{(1)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}} - (1\leftrightarrow 2)\big)\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{a}} + \frac{1}{2}\big({}^{(2)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{k}}{}^{(1)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{n}} + \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{kn}}{}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{l}}\,{}^{(2)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{k}}\,{}^{(1)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{l}} - (1\leftrightarrow 2)\big)\\
&= \big({}^{(2)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{n}}{}^{(1)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}} - (1\leftrightarrow 2)\big)\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{a}} + \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{n}}\big({}^{(2)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{k}}{}^{(1)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{n}}\big) - (1\leftrightarrow 2)\Big)
\end{aligned} \tag{2.23}
$$

[4]Používáme zde méně obvyklé dvojité hranaté závorky, abychom předešli záměně s prostými hranatými závorkami v operátorových rovnostech.

K výpočtu komutátoru lineárního a kvadratického operátoru uplatníme (2.21) a zbytek plně rozderivujeme

$$\begin{aligned}
[\![\mathsf{L}\,,\mathsf{K}]\!] &= [\![-\mathrm{i}\boldsymbol{l}^a\boldsymbol{\nabla}_a\,,\mathsf{K}]\!] + \left[\!\!\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(\boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{l}^a)\,,\mathsf{K}\right]\!\!\right]\\
&= \mathrm{i}\big(\boldsymbol{l}^a\boldsymbol{k}^{bc} - \boldsymbol{l}^c\boldsymbol{k}^{ab}\big)\boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{\nabla}_b\boldsymbol{\nabla}_c\\
&\quad +\mathrm{i}\big(\boldsymbol{l}^n\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{k}^{ab} + \boldsymbol{l}^a\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{k}^{nb} - \boldsymbol{l}^b\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{k}^{na} - 2\boldsymbol{k}^{an}\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{l}^b\big)\boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{\nabla}_b\\
&\quad +\mathrm{i}\Big(\boldsymbol{l}^n\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{\nabla}_k\boldsymbol{k}^{ka} - (\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{k}^{nk})\boldsymbol{\nabla}_k\boldsymbol{l}^a - \boldsymbol{k}^{nk}\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{\nabla}_k\boldsymbol{l}^a\\
&\quad -\boldsymbol{k}^{na}\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{\nabla}_k\boldsymbol{l}^k\Big)\boldsymbol{\nabla}_a - \frac{\mathrm{i}}{2}\Big(\boldsymbol{\nabla}_l\big(\boldsymbol{k}^{ln}\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{\nabla}_k\boldsymbol{l}^k\big)\Big).
\end{aligned}\tag{2.24}$$

V následujících úpravách se snažíme tento operátor převést do tvaru, ve kterém působí pouze pomocí symetrizovaných kovariantních derivací, neboť jen členy se symetrizovanými kovariantními derivacemi mají jednoznačný tvar, nelze je přepsat na členy nižšího řádu v $\boldsymbol{\nabla}$, a jsou tedy funkcionálně nezávislé. Využijeme symetrie druhých kovariantních derivací skaláru, identity (A.2) a antisymetrie Riemannova tenzoru v prvních dvou indexech

$$\begin{aligned}
[\![\mathsf{L}\,,\mathsf{K}]\!] &= \mathrm{i}\big(\boldsymbol{l}^n\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{k}^{ab} - 2\boldsymbol{k}^{n(a}\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{l}^{b)}\big)\boldsymbol{\nabla}^2_{ab}\\
&\quad + \mathrm{i}\Big(\boldsymbol{l}^n\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{\nabla}_k\boldsymbol{k}^{ka} - (\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{k}^{nk})\boldsymbol{\nabla}_k\boldsymbol{l}^a - \boldsymbol{k}^{nk}\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{\nabla}_k\boldsymbol{l}^a - \boldsymbol{k}^{na}\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{\nabla}_k\boldsymbol{l}^k + \boldsymbol{R}_{nk}{}^a{}_l\boldsymbol{l}^k\boldsymbol{k}^{nl}\Big)\boldsymbol{\nabla}_a\\
&\quad - \frac{\mathrm{i}}{2}\Big(\boldsymbol{\nabla}_l\big(\boldsymbol{k}^{ln}\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{\nabla}_k\boldsymbol{l}^k\big)\Big).
\end{aligned}\tag{2.25}$$

Díky symetrii Ricciho tenzoru můžeme napsat Riemannův tenzor pomocí kovariantních derivací $\boldsymbol{R}_{nk}{}^a{}_l\boldsymbol{l}^k\boldsymbol{k}^{nl} = 2\boldsymbol{\nabla}_{[n}\boldsymbol{\nabla}_{k]}\boldsymbol{l}^k\boldsymbol{k}^{na}$ a po snadné úpravě nakonec dostaneme

$$\begin{aligned}
[\![\mathsf{L}\,,\mathsf{K}]\!] &= \mathrm{i}\big(\boldsymbol{l}^n\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{k}^{ab} - 2\boldsymbol{k}^{n(a}\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{l}^{b)}\big)\boldsymbol{\nabla}^2_{ab}\\
&\quad +\mathrm{i}\Big(\boldsymbol{\nabla}_k\big(\boldsymbol{l}^n\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{k}^{ka} - 2\boldsymbol{k}^{n(k}\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{l}^{a)}\big)\Big)\boldsymbol{\nabla}_a\\
&\quad -\frac{\mathrm{i}}{2}\Big(\boldsymbol{\nabla}_m\big(\boldsymbol{k}^{mk}\boldsymbol{\nabla}_k\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{l}^n\big)\Big).
\end{aligned}\tag{2.26}$$

Na závěr spočítáme komutátor kvadratických operátorů. Vše rozderivujeme a využijeme symetrie druhých kovariantních derivací skaláru

$$\begin{aligned}
[\![\mathsf{K}_1\,,\mathsf{K}_2]\!] &= \big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{ab}\,{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{cd} - (1\leftrightarrow 2)\big)\boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{\nabla}_b\boldsymbol{\nabla}_c\boldsymbol{\nabla}_d\\
&\quad +\big({}^{(2)}\boldsymbol{k}^{bc}\boldsymbol{\nabla}_k\,{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{ka} + {}^{(1)}\boldsymbol{k}^{ab}\boldsymbol{\nabla}_k\,{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{ck}\\
&\quad +2\,{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{ka}\boldsymbol{\nabla}_k\,{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{bc} - (1\leftrightarrow 2)\big)\boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{\nabla}_b\boldsymbol{\nabla}_c\\
&\quad +\Big(\boldsymbol{\nabla}_k\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{kn}\boldsymbol{\nabla}_n\,{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{ab}\big) + 2\,{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{ka}\boldsymbol{\nabla}_k\boldsymbol{\nabla}_n\,{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{bn} - (1\leftrightarrow 2)\Big)\boldsymbol{\nabla}_a\boldsymbol{\nabla}_b\\
&\quad +\Big(\boldsymbol{\nabla}_k\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{km}\boldsymbol{\nabla}_m\boldsymbol{\nabla}_n\,{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{na}\big) - (1\leftrightarrow 2)\Big)\boldsymbol{\nabla}_a.
\end{aligned}\tag{2.27}$$

Po aplikaci identit (A.2) a (A.7) s využitím antisymetrie Riemannova tenzoru v prvních dvou indexech dostáváme

$$
\begin{aligned}
[\![\mathsf{K}_1\,,\mathsf{K}_2]\!] = {} & 2\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{k(a}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{bc)}} - (1\leftrightarrow 2)\big)\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{3}}_{\boldsymbol{abc}} \\
& +\Big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{kn}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ab}}\big) + 2\,{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ka}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{bn}} \\
& +2\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{km}}{}^{\boldsymbol{a}}{}_{\boldsymbol{n}}\,{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{mn}}\,{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{kb}} - (1\leftrightarrow 2)\Big)\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{2}}_{\boldsymbol{ab}} \\
& +\bigg(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{km}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{na}}\big) - \big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{lk}}{}^{\boldsymbol{a}}{}_{\boldsymbol{n}}\big)\,{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ml}}\,{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{kn}} \\
& -\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{lk}}{}^{\boldsymbol{a}}{}_{\boldsymbol{n}}\,{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{kn}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ml}} - \frac{4}{3}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{lk}}{}^{\boldsymbol{a}}{}_{\boldsymbol{n}}\,{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ml}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{kn}} - (1\leftrightarrow 2)\bigg)\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}.
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

Snadnou úpravou přepíšeme vztah na tvar

$$
\begin{aligned}
[\![\mathsf{K}_1\,,\mathsf{K}_2]\!] = {} & 2\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{k(a}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{bc)}} - (1\leftrightarrow 2)\big)\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{3}}_{\boldsymbol{abc}} \\
& +\Big(3\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n(k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ab)}}\big) - 2\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{na}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{bk}}\big) \\
& +2\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ka}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{bn}}\big) + 2\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{km}}{}^{\boldsymbol{a}}{}_{\boldsymbol{n}}\,{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{mn}}\,{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{kb}} - (1\leftrightarrow 2)\Big)\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{2}}_{\boldsymbol{ab}} \\
& +\bigg(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{km}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{na}}\big) - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{lk}}{}^{\boldsymbol{a}}{}_{\boldsymbol{n}}\,{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ml}}\,{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{kn}} \\
& -\frac{1}{3}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{lk}}{}^{\boldsymbol{a}}{}_{\boldsymbol{n}}\,{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ml}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{kn}} - (1\leftrightarrow 2)\bigg)\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}.
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

Dále prokomutujeme kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}$ v prvním členu lineární části operátoru a na poslední členy lineární a kvadratické části použijeme následující úpravy (platné pro symetrický Ricciho tenzor)

$$
\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{km}}{}^{\boldsymbol{(a|}}{}_{\boldsymbol{n}}\,{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{mn}}\,{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{k|b)}} - (1\leftrightarrow 2) = 2\,{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{k(a}}\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}]}{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{b)m}} - (1\leftrightarrow 2), \tag{2.30}
$$

$$
\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{lk}}{}^{\boldsymbol{a}}{}_{\boldsymbol{n}}\,{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ml}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{kn}} = 2\boldsymbol{\nabla}_{[\boldsymbol{l}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}]}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ml}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ka}}\big). \tag{2.31}
$$

Po zjednodušení získáme

$$
\begin{aligned}
[\![\mathsf{K}_1\,,\mathsf{K}_2]\!] = {} & 2\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{k(a}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{bc)}} - (1\leftrightarrow 2)\big)\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{3}}_{\boldsymbol{abc}} \\
& +3\Big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n(k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ab)}}\big) - (1\leftrightarrow 2)\Big)\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{2}}_{\boldsymbol{ab}} \\
& +\Big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{mk}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{an}}\big) - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\Big(\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{mk}}\big)\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{an}}\big)\Big) \\
& -\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{mk}}\mathbf{Ric}_{\boldsymbol{ml}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{al}}\big) - \frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{m[k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n]a}}\big) - (1\leftrightarrow 2)\Big)\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}.
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

Použitím vztahu (A.1) na výraz ${}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{mk}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{an}}$ konečně dostáváme

$$
\begin{aligned}
[\![\mathsf{K}_1\,,\mathsf{K}_2]\!] = {} & 2\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{k(a}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{bc)}} - (1\leftrightarrow 2)\big)\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{3}}_{\boldsymbol{abc}} \\
& +3\Big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n(k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ab)}}\big) - (1\leftrightarrow 2)\Big)\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{2}}_{\boldsymbol{ab}} \\
& +\Big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{m(k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{an)}}\big) + \frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{m[k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{a]n}}\big) \\
& -\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\Big(\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{m[k}}\big)\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{a]n}}\big)\Big) - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{m[k}}\mathbf{Ric}_{\boldsymbol{ml}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{a]l}}\big) - (1\leftrightarrow 2)\Big)\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}.
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Pro přehlednost zde shrneme výsledky všech komutátorů v tenzorovém zápisu

$$
\begin{aligned}
[\![\mathsf{K}_1\,,\mathsf{K}_2]\!] &= 2\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{bc})} - (1\leftrightarrow 2)\big)\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{3}}_{\boldsymbol{abc}}\\
&+3\Big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ab})}\big) - (1\leftrightarrow 2)\Big)\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{2}}_{\boldsymbol{ab}}\\
&+\bigg(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{an})}\big) + \frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{m}[\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{a}]\boldsymbol{n}}\big)\\
&-\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\Big(\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{m}[\boldsymbol{k}}\big)\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{a}]\boldsymbol{n}}\big)\Big) - \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{m}[\boldsymbol{k}}\mathbf{Ric}_{\boldsymbol{ml}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{a}]\boldsymbol{l}}\big) - (1\leftrightarrow 2)\bigg)\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}},\\
[\![\mathsf{L}\,,\mathsf{K}]\!] &= \mathrm{i}\big(\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ab}} - 2\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{b})}\big)\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{2}}_{\boldsymbol{ab}} + \mathrm{i}\Big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\big(\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ka}} - 2\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a})}\big)\Big)\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}}\\
&-\frac{\mathrm{i}}{2}\Big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}\big(\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{mk}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{n}}\big)\Big),\\
[\![\mathsf{L}_1\,,\mathsf{L}_2]\!] &= \big({}^{(2)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}{}^{(1)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{a}} - (1\leftrightarrow 2)\big)\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} + \frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\big({}^{(2)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}{}^{(1)}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{n}}\big) - (1\leftrightarrow 2)\Big),\\
[\![\mathsf{V}\,,\mathsf{K}]\!] &= 2\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{na}}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}v\big)\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}} + \Big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{k}}\big(\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{kn}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}v\big)\Big),\\
[\![\mathsf{V}\,,\mathsf{L}]\!] &= \mathrm{i}\boldsymbol{l}^{\boldsymbol{n}}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}v\big)
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

i v úspornějším zápisu pomocí Schouten–Nijenhuisových závorek

$$
\begin{aligned}
[\![\mathsf{K}_1\,,\mathsf{K}_2]\!] &= [{}^{(1)}\boldsymbol{k}\,,{}^{(2)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}}\bullet\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{3}} + \frac{3}{2}\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot[{}^{(1)}\boldsymbol{k}\,,{}^{(2)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}}\big)\bullet\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{2}}\\
&+\frac{1}{2}\Big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot[{}^{(1)}\boldsymbol{k}\,,{}^{(2)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} + {}^{(12)}\boldsymbol{m}\big)\Big)\cdot\boldsymbol{\nabla}\\
[\![\mathsf{L}\,,\mathsf{K}]\!] &= \mathrm{i}[\boldsymbol{l}\,,\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}}\bullet\boldsymbol{\nabla}^{\boldsymbol{2}} + \mathrm{i}\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot[\boldsymbol{l}\,,\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}}\big)\cdot\boldsymbol{\nabla} - \frac{\mathrm{i}}{2}\Big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\big(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{l})\big)\Big),\\
[\![\mathsf{L}_1\,,\mathsf{L}_2]\!] &= [{}^{(2)}\boldsymbol{l}\,,{}^{(1)}\boldsymbol{l}]_{\mathrm{SN}}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot[{}^{(2)}\boldsymbol{l}\,,{}^{(1)}\boldsymbol{l}]_{\mathrm{SN}}\big),\\
[\![\mathsf{V}\,,\mathsf{K}]\!] &= [\boldsymbol{k}\,,v]_{\mathrm{SN}}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot[\boldsymbol{k}\,,v]_{\mathrm{SN}}\big),\\
[\![\mathsf{V}\,,\mathsf{L}]\!] &= \mathrm{i}[\boldsymbol{l}\,,v]_{\mathrm{SN}},
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

kde jsme označili antisymetrický tenzor

$$
\begin{aligned}
{}^{(12)}\boldsymbol{m}^{\boldsymbol{ab}} \equiv{}& \frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{m}[\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{b}]\boldsymbol{n}}\big) - \big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{m}[\boldsymbol{a}}\big)\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{m}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{b}]\boldsymbol{n}}\big)\\
&-{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{m}[\boldsymbol{a}}\mathbf{Ric}_{\boldsymbol{mn}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{b}]\boldsymbol{n}} - (1\leftrightarrow 2).
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

Komutátory hermitovských operátorů jsou antihermitovské. Operátory v (2.35) mají tedy tvar $\mathrm{i}\mathsf{Q}$, kde Q je definováno vztahem (2.16).

2.4 Vzájemně komutující operátory

Uvažujme sadu operátorů K_i a L_i, kde $i = 0, \dots, n-1$ tvaru (2.17). Z (2.35) vidíme, že tyto pozorovatelné spolu komutují právě tehdy, když

$$[{}^{(i)}\boldsymbol{k}\,,{}^{(j)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} = 0, \tag{2.37}$$

$$[{}^{(i)}\boldsymbol{l}\,,{}^{(j)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} = 0, \tag{2.38}$$

$$[{}^{(i)}\boldsymbol{l}\,,{}^{(j)}\boldsymbol{l}]_{\mathrm{SN}} = 0, \tag{2.39}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\big({}^{(i)}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot{}^{(j)}\boldsymbol{l})\big) = 0, \tag{2.40}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot{}^{(ij)}\boldsymbol{m} = 0 \tag{2.41}$$

pro $i, j = 0, \dots, n-1$. Porovnáním (1.13)–(1.15) a (2.37)–(2.41) vidíme, že záměnou $\boldsymbol{p} \to -\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla}$ a symetrickým uspořádáním operátorů získáme z poissonovsky komutujících pozorovatelných sadu obecně nekomutujících operátorů. Tyto operátory komutují, jestliže jsou navíc splněny anomální podmínky (2.40) a (2.41). Obě tyto podmínky závisejí na volbě kovariantní derivace. První z nich je splněna například tehdy, když $\boldsymbol{\nabla} \cdot {}^{(j)}\boldsymbol{l} = 0$, což je ekvivalentní s podmínkou $\pounds_{{}^{(j)}\boldsymbol{l}}\mu = 0$, kde μ je zachovávající hustota kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla}$.[5] Geometricky to znamená, že se μ nemění podél $\boldsymbol{l}$.

Předpokládejme nyní, že $\boldsymbol{\nabla}$ je metrická kovariantní derivace metriky $\boldsymbol{g}$ a označme příslušný d'Alembertův operátor

$$\Box \equiv -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{g}^{-1} \cdot \boldsymbol{\nabla}. \tag{2.42}$$

V analogii ke kapitole 1.3 budeme nyní zkoumat podmínky na objekty komutující s tímto operátorem. Nejprve však odvodíme užitečný vztah (2.45).

Díky symetrii Riemannova tenzoru (prohození první a druhé dvojice indexů) platí

$$\boldsymbol{g}^{-1\boldsymbol{n}[\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{n}}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{b}]\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{g}^{-1\boldsymbol{n}[\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{n}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{b}]\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{g}^{-1\boldsymbol{n}[\boldsymbol{a}}\mathbf{Ric}_{\boldsymbol{nk}}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{b}]\boldsymbol{k}}. \tag{2.43}$$

Divergenci tenzoru $\boldsymbol{k}$ lze dále upravit na tvar

$$\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{bk}} = \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{kl}}\boldsymbol{g}^{-1\boldsymbol{ml}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{m}}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{bk}} = \frac{3}{2}\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{kl}}\boldsymbol{g}^{-1\boldsymbol{m}(\boldsymbol{l}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{m}}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{bk})} - \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{-1\boldsymbol{mb}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{m}}\big(\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{kl}}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{kl}}\big). \tag{2.44}$$

Dosazením tohoto vyjádření do (2.43) a využitím nulovosti torze dostáváme

$$\boldsymbol{g}^{-1\boldsymbol{n}[\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{k}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{n}}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{b}]\boldsymbol{k}} = \frac{3}{2}\boldsymbol{g}^{-1\boldsymbol{n}[\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\nabla}_{\!\boldsymbol{n}}\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{b}]} + \boldsymbol{g}^{-1\boldsymbol{n}[\boldsymbol{a}}\mathbf{Ric}_{\boldsymbol{nk}}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{b}]\boldsymbol{k}}, \tag{2.45}$$

kde jsme označili vektor $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{g} \bullet \mathcal{S}\big(\boldsymbol{g}^{-1} \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{k}\big)$.

Ze vztahů (2.35) a (2.45) vyplývá, že operátory L_i a K_i komutují s d'Alembertovým operátorem $\Box$ právě tehdy, když

$$\mathcal{S}\big(\boldsymbol{g}^{-1} \cdot \boldsymbol{\nabla}\,{}^{(i)}\boldsymbol{k}\big) = 0, \tag{2.46}$$

$$\mathcal{S}\big(\boldsymbol{g}^{-1} \cdot \boldsymbol{\nabla}\,{}^{(i)}\boldsymbol{l}\big) = 0, \tag{2.47}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathcal{A}\big(\boldsymbol{g}^{-1} \cdot \mathbf{Ric} \cdot {}^{(i)}\boldsymbol{k}\big) = 0, \tag{2.48}$$

tj. jestliže ${}^{(i)}\boldsymbol{k}$ a ${}^{(i)}\boldsymbol{l}$ jsou Killingovy tenzory a Killingovy vektory metriky $\boldsymbol{g}$ a navíc platí podmínka (2.48). Tato dodatečná podmínka byla odvozena již v článku [25] a je splněna například tehdy, když Ricciho a Killingův tenzor jsou diagonální ve společné ortogonální bázi metriky $\boldsymbol{g}$, neboť pak je

$$\mathcal{A}\big(\boldsymbol{g}^{-1} \cdot \mathbf{Ric} \cdot {}^{(i)}\boldsymbol{k}\big) = 0, \tag{2.49}$$

neboli v notaci se zvedáním a snižováním indexů pomocí metriky $\boldsymbol{g}$

$$\mathbf{Ric}^{\boldsymbol{a}}{}_{\boldsymbol{n}}\,{}^{(i)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{b}} - {}^{(i)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{a}}{}_{\boldsymbol{n}}\mathbf{Ric}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{b}} = 0. \tag{2.50}$$

Podmínka (2.49) tedy říká, že tenzory $\mathbf{Ric}$ a ${}^{(i)}\boldsymbol{k}$ spolu maticově komutují, a mají tak společnou sadu vlastních vektorů.

[5] Lieovu derivaci jsme zde přirozeně rozšířili na tenzorové hustoty.

Jestliže $\Box$ je jedním z operátorů K_i, potom systém s takovouto sadou $2n$ navzájem komutujících nezávislých hermitovských operátorů K_i a L_i má společnou sadu vlastních funkcí, které řeší Klein–Gordonovu rovnici. Znalost sady komutujících hermitovských operátorů může pomoci při samotném hledání řešení Klein–Gordonovy rovnice (zejména v separovaném tvaru).

Závěrem ještě poznamenejme, že podmínka (2.47) ($\boldsymbol{l}$ je Killingův vektor) implikuje nulovost nediferenciálního členu $\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{l}\right)$ operátoru L (poslední člen druhého řádku (2.17)).

3. Elektromagnetické pole

V kapitole 1 jsme uvažovali pohyb nenabité částice a zkoumali jsme sady vzájemně komutujících kvadratických pozorovatelných/integrálů pohybu. V této kapitole se pokusíme tyto klasické pozorovatelné zobecnit přidáním testovacího elektromagnetického pole a budeme opět zkoumat případy, kdy pozorovatelné vzájemně komutují a kdy, při zadané metrice, tvoří sadu nezávislých integrálů pohybu nabité částice v elektromagnetickém poli $\boldsymbol{A}$. Omezíme se přitom pouze na relativistický případ, kdy pole $\boldsymbol{A}$ je vícerozměrným zobecněním elektromagnetického čtyřpotenciálu. Podobně jako v kapitole 2 budeme studovat rovněž komutace operátorových analogií těchto nabitých pozorovatelných získaných pomocí standardního nahrazení $\boldsymbol{p} \to -\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla}$ se symetrickým operátorovým uspořádáním.

3.1 Nabité klasické pozorovatelné

Definujme nabité pozorovatelné

$$\begin{aligned} {}^{e}\!K &\equiv (\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}) = K - 2q\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{p} + q^2 \boldsymbol{A^2} \bullet \boldsymbol{k}, \\ {}^{e}\!L &\equiv L, \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde K a L jsou nenabité pozorovatelné (1.2).

Pro usnadnění výpočtů si dále označme tyto pomocné pozorovatelné

$$\begin{aligned} {}^{A}\!L &\equiv -2q\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{p}, \\ {}^{A}V &\equiv q^2 \boldsymbol{A^2} \bullet \boldsymbol{k}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

a tedy platí ${}^{e}\!K = K + {}^{A}\!L + {}^{A}V$.

3.2 Poissonovy závorky

Pro Poissonovy závorky nabitých pozorovatelných (3.1) platí

$$\begin{aligned} \{{}^{e}\!K_1\,, {}^{e}\!K_2\} &= \{K_1\,, K_2\} + \{{}^{A}\!L_1\,, {}^{A}\!L_2\} \\ &\quad + \big(\{{}^{A}\!L_1\,, K_2\} + \{{}^{A}V_1\,, K_2\} + \{{}^{A}V_1\,, {}^{A}\!L_2\} - (1 \leftrightarrow 2)\big), \\ \{{}^{e}\!L_1\,, {}^{e}\!K_2\} &= \{L_1\,, K_2\} + \{L_1\,, {}^{A}\!L_2\} + \{L_1\,, {}^{A}V_2\}, \\ \{{}^{e}\!L_1\,, {}^{e}\!L_2\} &= \{L_1\,, L_2\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

S využitím (1.9) lze jednotlivé Poissonovy závorky napsat jako

$$\begin{aligned} \{{}^{A}\!L_1\,, K_2\} &= 2q[\boldsymbol{A} \cdot {}^{(1)}\boldsymbol{k}\,, {}^{(2)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} \bullet \boldsymbol{p^2}, \\ \{L_1\,, {}^{A}\!L_2\} &= 2q[{}^{(1)}\boldsymbol{l}\,, \boldsymbol{A} \cdot {}^{(2)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} \cdot \boldsymbol{p}, \\ \{{}^{A}\!L_1\,, {}^{A}\!L_2\} &= 4q^2[\boldsymbol{A} \cdot {}^{(2)}\boldsymbol{k}\,, \boldsymbol{A} \cdot {}^{(1)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} \cdot \boldsymbol{p}, \\ \{{}^{A}V_1\,, K_2\} &= q^2[{}^{(2)}\boldsymbol{k}\,, \boldsymbol{A^2} \bullet {}^{(1)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} \cdot \boldsymbol{p}, \\ \{L_1\,, {}^{A}V_2\} &= q^2[\boldsymbol{A^2} \bullet {}^{(2)}\boldsymbol{k}\,, {}^{(1)}\boldsymbol{l}]_{\mathrm{SN}}, \\ \{{}^{A}V_1\,, {}^{A}\!L_2\} &= 2q^3[\boldsymbol{A^2} \bullet {}^{(1)}\boldsymbol{k}\,, \boldsymbol{A} \cdot {}^{(2)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Díky identitám

$$
\begin{aligned}
&[{}^{(1)}\boldsymbol{l}\,, \boldsymbol{A}\cdot{}^{(2)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} = \boldsymbol{A}\cdot[{}^{(1)}\boldsymbol{l}\,,{}^{(2)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} + \big(\pounds_{{}^{(1)}\boldsymbol{l}}\boldsymbol{A}\big)\cdot{}^{(2)}\boldsymbol{k},\\
&[\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}}\bullet{}^{(2)}\boldsymbol{k}\,,{}^{(1)}\boldsymbol{l}]_{\mathrm{SN}} = \boldsymbol{A}^{\mathbf{2}}\bullet[{}^{(2)}\boldsymbol{k}\,,{}^{(1)}\boldsymbol{l}]_{\mathrm{SN}} - 2\big(\pounds_{{}^{(1)}\boldsymbol{l}}\boldsymbol{A}\big)\cdot{}^{(2)}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A},\\
&2[\boldsymbol{A}\cdot{}^{(2)}\boldsymbol{k}\,,\boldsymbol{A}\cdot{}^{(1)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}}^{\boldsymbol{a}} + \frac{1}{2}\big([{}^{(2)}\boldsymbol{k}\,,\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}}\bullet{}^{(1)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}}^{\boldsymbol{a}} - (1\leftrightarrow 2)\big)\\
&\quad = \Big(2\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{nl}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{l}}\big(\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ka}}\big) + {}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{al}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{l}}\big(\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}}{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{nk}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}\big) - (1\leftrightarrow 2)\Big)\\
&\quad = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}\big(2{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ln}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{l}}{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ka}} + {}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{la}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{l}}{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{nk}} - (1\leftrightarrow 2)\big)\\
&\qquad -2\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}\big)\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{la}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{nk}} - {}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ka}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{nl}} - (1\leftrightarrow 2)\big)\\
&\quad = 3\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}\big({}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{l(a}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{l}}{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{nk)}} - (1\leftrightarrow 2)\big) - 4\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}}\big(\mathbf{d}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}\big){}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{l(a}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n)k}}\\
&\quad = \frac{3}{2}\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}}\bullet[{}^{(2)}\boldsymbol{k}\,,{}^{(1)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}}^{\boldsymbol{a}} - 4\boldsymbol{A}\cdot\mathcal{S}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}\cdot(\mathbf{d}\boldsymbol{A})\cdot{}^{(2)}\boldsymbol{k}\big)^{\boldsymbol{a}},\\
&\big([\boldsymbol{A}\cdot{}^{(1)}\boldsymbol{k}\,,{}^{(2)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}}^{\boldsymbol{ab}} - (1\leftrightarrow 2)\big)\\
&\quad = \Big(\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{kn}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ab}} - 2{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n(a}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\big(\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{b)k}}\big) - (1\leftrightarrow 2)\Big)\\
&\quad = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{kn}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ab}} + 2{}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n(a}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{b)k}} - (1\leftrightarrow 2)\big)\\
&\qquad +2\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}\big)\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n(a}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{b)k}} - (1\leftrightarrow 2)\big)\\
&\quad = 3\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n(k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{ab)}} - (1\leftrightarrow 2)\big) + 2\big(\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}\big){}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n(a}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{b)k}}\\
&\quad = \frac{3}{2}\boldsymbol{A}\cdot[{}^{(1)}\boldsymbol{k}\,,{}^{(2)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}}^{\boldsymbol{ab}} + 2\mathcal{S}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}\cdot(\mathbf{d}\boldsymbol{A})\cdot{}^{(2)}\boldsymbol{k}\big)^{\boldsymbol{ab}},\\
&\big([\boldsymbol{A}\cdot{}^{(1)}\boldsymbol{k}\,,\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}}\bullet{}^{(2)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} - (1\leftrightarrow 2)\big)\\
&\quad = \Big(\boldsymbol{A}\cdot{}^{(1)}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}\big(\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}}\bullet{}^{(2)}\boldsymbol{k}\big) - (1\leftrightarrow 2)\Big)\\
&\quad = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{m}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{nk}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{lm}} - (1\leftrightarrow 2)\big)\\
&\qquad +2\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{l}}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{m}}\big)\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{kn}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{lm}} - (1\leftrightarrow 2)\big)\\
&\quad = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{m}}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n(k}}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{lm)}} - (1\leftrightarrow 2)\big) + 2\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{l}}\big(\mathbf{d}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{m}}\big){}^{(1)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n(k}}{}^{(2)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{l)m}}\\
&\quad = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{\mathbf{3}}\bullet[{}^{(1)}\boldsymbol{k}\,,{}^{(2)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} + 2\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}}\bullet\mathcal{S}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}\cdot(\mathbf{d}\boldsymbol{A})\cdot{}^{(2)}\boldsymbol{k}\big),
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

nakonec pro Poissonovy závorky nabitých pozorovatelných dostáváme

$$
\begin{aligned}
\{{}^{e}\!K_1\,,{}^{e}\!K_2\} &= \{K_1\,,K_2\}\\
&\quad + q\Big(3\boldsymbol{A}\cdot[{}^{(1)}\boldsymbol{k}\,,{}^{(2)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} + 4\mathcal{S}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}\cdot(\mathbf{d}\boldsymbol{A})\cdot{}^{(2)}\boldsymbol{k}\big)\Big)\bullet\boldsymbol{p}^{\mathbf{2}}\\
&\quad + q^2\Big(3\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}}\bullet[{}^{(2)}\boldsymbol{k}\,,{}^{(1)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} - 8\boldsymbol{A}\cdot\mathcal{S}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}\cdot(\mathbf{d}\boldsymbol{A})\cdot{}^{(2)}\boldsymbol{k}\big)\Big)\cdot\boldsymbol{p}\\
&\quad + q^3\Big(\boldsymbol{A}^{\mathbf{3}}\bullet[{}^{(1)}\boldsymbol{k}\,,{}^{(2)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} + 4\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}}\bullet\mathcal{S}\big({}^{(1)}\boldsymbol{k}\cdot(\mathbf{d}\boldsymbol{A})\cdot{}^{(2)}\boldsymbol{k}\big)\Big),\\
\{{}^{e}\!L_1\,,{}^{e}\!K_2\} &= \{L_1\,,K_2\} + 2q\Big(\boldsymbol{A}\cdot[{}^{(1)}\boldsymbol{l}\,,{}^{(2)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} + \big(\pounds_{{}^{(1)}\boldsymbol{l}}\boldsymbol{A}\big)\cdot{}^{(2)}\boldsymbol{k}\Big)\cdot\boldsymbol{p}\\
&\qquad + q^2\Big(\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}}\bullet[{}^{(2)}\boldsymbol{k}\,,{}^{(1)}\boldsymbol{l}]_{\mathrm{SN}} - 2\big(\pounds_{{}^{(1)}\boldsymbol{l}}\boldsymbol{A}\big)\cdot{}^{(2)}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}\Big),\\
\{{}^{e}\!L_1\,,{}^{e}\!L_2\} &= \{L_1\,,L_2\}.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

3.3 Vzájemně komutující nabité pozorovatelné

Uvažujme sadu pozorovatelných ${}^{e}K_i$ a ${}^{e}L_i$, kde $i = 0, \dots, n-1$. Z (1.9) a (3.6) vidíme, že tyto pozorovatelné spolu komutují právě tehdy, když platí (1.13)–(1.15) a zároveň pole $\boldsymbol{A}$ splňuje

$$\pounds_{{}^{(i)}\boldsymbol{l}}\boldsymbol{A} = 0, \tag{3.7}$$

$$\mathcal{S}\big({}^{(i)}\boldsymbol{k} \cdot (\mathbf{d}\boldsymbol{A}) \cdot {}^{(j)}\boldsymbol{k}\big) = 0 \tag{3.8}$$

pro $i, j = 0, \dots, n-1$.

Předpokládejme, že pohyb nabité relativistické částice na varietě s metrikou $\boldsymbol{g}$ je popsán hamiltoniánem (až na aditivní a multiplikativní konstanty, viz (1.18))

$${}^{e}H \equiv \big(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}\big) \cdot \boldsymbol{g}^{-\mathbf{1}} \cdot \big(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}\big). \tag{3.9}$$

Ze vztahů (1.9) a (3.6) rovněž vyplývá, že pozorovatelné ${}^{e}K_i$ a ${}^{e}L_i$ jsou integrály tohoto pohybu právě tehdy, když kromě dřívějších podmínek (1.19) a (1.20) je navíc splněna i podmínka

$$\mathcal{S}\big(\boldsymbol{g}^{-\mathbf{1}} \cdot (\mathbf{d}\boldsymbol{A}) \cdot {}^{(i)}\boldsymbol{k}\big) = 0. \tag{3.10}$$

Jestliže ${}^{e}H$ je roven jedné z pozorovatelných ${}^{e}K_i$, potom je systém nabité částice s tímto hamiltoniánem opět úplně integrabilní. V notaci se zvedáním indexů pomocí metriky $\boldsymbol{g}$ lze vztah (3.10) zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{a}}{}_{\boldsymbol{n}}\, {}^{(i)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{b}} - {}^{(i)}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{a}}{}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{b}} = 0, \tag{3.11}$$

kde $\boldsymbol{F} \equiv \mathbf{d}\boldsymbol{A}$ je tenzor elektromagnetického pole. Jak je vidět, tenzory $\boldsymbol{F}$ a ${}^{(i)}\boldsymbol{k}$ spolu musejí maticově komutovat, a musí tedy existovat společná sada obecně komplexních vlastních vektorů. Vlastní vektory se zde vyskytují ve dvojicích s komplexně sdruženými ryze imaginárními vlastními čísly antisymetrické matice $\boldsymbol{F}$. Z těchto komplexních dvojic vektorů lze sestavit reálné dvojice vektorů, které představují společné reálné 2-roviny zachovávané jak akcí matice $\boldsymbol{F}$, tak matice ${}^{(i)}\boldsymbol{k}$.

3.4 Nabité operátory

Podobně jako v nenabitém případě můžeme zavést operátorové analogie nabitých pozorovatelných (3.1) standardní záměnou $\boldsymbol{p} \to -\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla}$ s přihlédnutím k symetrickému pořadí operátorů

$$\begin{aligned} {}^{e}\mathsf{K} &\equiv -\big[\boldsymbol{\nabla} - \mathrm{i}q\boldsymbol{A}\big] \cdot \boldsymbol{k} \cdot \big[\boldsymbol{\nabla} - \mathrm{i}q\boldsymbol{A}\big] \\ &= \mathsf{K} + 2\mathrm{i}q\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \mathrm{i}q\big(\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{A})\big) + q^2\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}} \bullet \boldsymbol{k}, \\ {}^{e}\mathsf{L} &\equiv \mathsf{L}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

kde K a L jsou nenabité operátory (2.17).

Poznamenejme, že v řeči kalibrační teorie je operátor $\mathbf{D} = \boldsymbol{\nabla} - \mathrm{i}q\boldsymbol{A}$ kalibračním polem, tj. kovariantní derivací na fibrovaném bundle, kterým je však v tomto jednoduchém případě pouze jednorozměrný komplexní vektorový prostor se strukturní grupou

$U(1)$. Pole $\boldsymbol{A}$ je zde rozdílovým tenzorem kalibračního pole $\mathbf{D}$ a trivializace $\boldsymbol{\nabla}$. Tenzor křivosti kovariantní derivace na fíbrovaném bundle představuje kalibračně invariantní intenzitu kalibračního pole a je roven tenzoru elektromagnetického pole $\boldsymbol{F}$.

Pro usnadnění výpočtů si dále označme tyto pomocné operátory

$$\begin{aligned} {}^{A}\mathsf{L} &\equiv 2\mathrm{i}q\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \mathrm{i}q\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A})\big) \\ &= \mathrm{i}q\big[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}\big], \\ {}^{A}\mathsf{V} &\equiv q^2\boldsymbol{A^2}\bullet\boldsymbol{k}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

a tedy platí ${}^{e}\mathsf{K} = \mathsf{K} + {}^{A}\mathsf{L} + {}^{A}\mathsf{V}$.

3.5 Komutátory

Pro komutátory nabitých operátorů (3.12) platí

$$\begin{aligned} [\![{}^{e}\mathsf{K}_1\,, {}^{e}\mathsf{K}_2]\!] &= [\![\mathsf{K}_1\,,\mathsf{K}_2]\!] + [\![{}^{A}\mathsf{L}_1\,, {}^{A}\mathsf{L}_2]\!] \\ &\quad + \big[[\![{}^{A}\mathsf{L}_1\,,\mathsf{K}_2]\!] + [\![{}^{A}\mathsf{V}_1\,,\mathsf{K}_2]\!] + [\![{}^{A}\mathsf{V}_1\,, {}^{A}\mathsf{L}_2]\!] - (1\leftrightarrow 2)\big], \\ [\![{}^{e}\mathsf{L}_1\,, {}^{e}\mathsf{K}_2]\!] &= [\![\mathsf{L}_1\,,\mathsf{K}_2]\!] + [\![\mathsf{L}_1\,, {}^{A}\mathsf{L}_2]\!] + [\![\mathsf{L}_1\,, {}^{A}\mathsf{V}_2]\!], \\ [\![{}^{e}\mathsf{L}_1\,, {}^{e}\mathsf{L}_2]\!] &= [\![\mathsf{L}_1\,,\mathsf{L}_2]\!]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

S využitím (2.35) lze jednotlivé komutátory napsat jako

$$\begin{aligned} [\![{}^{A}\mathsf{L}_1\,,\mathsf{K}_2]\!] &= 2\mathrm{i}q[{}^{(2)}\boldsymbol{k}\,,\boldsymbol{A}\cdot{}^{(1)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}}\bullet\boldsymbol{\nabla^2} + 2\mathrm{i}q\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot[{}^{(2)}\boldsymbol{k}\,,\boldsymbol{A}\cdot{}^{(1)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}}\big)\cdot\boldsymbol{\nabla} \\ &\quad + \mathrm{i}q\Big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\big({}^{(2)}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot({}^{(1)}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A})\big)\big)\Big), \\ [\![\mathsf{L}_1\,, {}^{A}\mathsf{L}_2]\!] &= 2q[{}^{(1)}\boldsymbol{l}\,,\boldsymbol{A}\cdot{}^{(2)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}}\cdot\boldsymbol{\nabla} + q\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot[{}^{(1)}\boldsymbol{l}\,,\boldsymbol{A}\cdot{}^{(2)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}}\big), \\ [\![{}^{A}\mathsf{L}_1\,, {}^{A}\mathsf{L}_2]\!] &= 4q^2[\boldsymbol{A}\cdot{}^{(2)}\boldsymbol{k}\,,\boldsymbol{A}\cdot{}^{(1)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}}\cdot\boldsymbol{\nabla} + 2q^2\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot[\boldsymbol{A}\cdot{}^{(2)}\boldsymbol{k}\,,\boldsymbol{A}\cdot{}^{(1)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}}\big), \\ [\![{}^{A}\mathsf{V}_1\,,\mathsf{K}_2]\!] &= q^2[{}^{(2)}\boldsymbol{k}\,,\boldsymbol{A^2}\bullet{}^{(1)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \frac{1}{2}q^2\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot[{}^{(2)}\boldsymbol{k}\,,\boldsymbol{A^2}\bullet{}^{(1)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}}\big), \\ [\![\mathsf{L}_1\,, {}^{A}\mathsf{V}_2]\!] &= \mathrm{i}q^2[\boldsymbol{A^2}\bullet{}^{(2)}\boldsymbol{k}\,,{}^{(1)}\boldsymbol{l}]_{\mathrm{SN}}, \\ [\![{}^{A}\mathsf{V}_1\,, {}^{A}\mathsf{L}_2]\!] &= 2\mathrm{i}q^3[\boldsymbol{A^2}\bullet{}^{(1)}\boldsymbol{k}\,,\boldsymbol{A}\cdot{}^{(2)}\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Díky identitám (3.5) pro komutátory nabitých operátorů nakonec dostáváme

$$
\begin{aligned}
[\![{}^e\mathsf{K}_1\,,{}^e\mathsf{K}_2]\!] &= [\![\mathsf{K}_1\,,\mathsf{K}_2]\!]\\
&\quad + \mathrm{i}q\Big(3\boldsymbol{A}\cdot[{}^{(2)}\!\boldsymbol{k}\,,{}^{(1)}\!\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} - 4\mathcal{S}\big({}^{(1)}\!\boldsymbol{k}\cdot(\mathbf{d}\boldsymbol{A})\cdot{}^{(2)}\!\boldsymbol{k}\big)\Big)\bullet\boldsymbol{\nabla}^{\mathbf{2}}\\
&\quad + \bigg(\mathrm{i}q\boldsymbol{\nabla}\cdot\Big(3\boldsymbol{A}\cdot[{}^{(2)}\!\boldsymbol{k}\,,{}^{(1)}\!\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} - 4\mathcal{S}\big({}^{(1)}\!\boldsymbol{k}\cdot(\mathbf{d}\boldsymbol{A})\cdot{}^{(2)}\!\boldsymbol{k}\big)\Big)\\
&\quad + q^2\Big(3\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}}\bullet[{}^{(2)}\!\boldsymbol{k}\,,{}^{(1)}\!\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} - 8\boldsymbol{A}\cdot\mathcal{S}\big({}^{(1)}\!\boldsymbol{k}\cdot(\mathbf{d}\boldsymbol{A})\cdot{}^{(2)}\!\boldsymbol{k}\big)\Big)\bigg)\cdot\boldsymbol{\nabla}\\
&\quad + \bigg(\mathrm{i}q^3\Big(\boldsymbol{A}^{\mathbf{3}}\bullet[{}^{(1)}\!\boldsymbol{k}\,,{}^{(2)}\!\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} + 4\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}}\bullet\mathcal{S}\big({}^{(1)}\!\boldsymbol{k}\cdot(\mathbf{d}\boldsymbol{A})\cdot{}^{(2)}\!\boldsymbol{k}\big)\Big)\\
&\quad + \frac{1}{2}q^2\boldsymbol{\nabla}\cdot\Big(3\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}}\bullet[{}^{(2)}\!\boldsymbol{k}\,,{}^{(1)}\!\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} - 8\boldsymbol{A}\cdot\mathcal{S}\big({}^{(1)}\!\boldsymbol{k}\cdot(\mathbf{d}\boldsymbol{A})\cdot{}^{(2)}\!\boldsymbol{k}\big)\Big)\\
&\quad + \mathrm{i}q\boldsymbol{\nabla}\cdot\Big({}^{(2)}\!\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot({}^{(1)}\!\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A})\big) - (1\leftrightarrow 2)\Big)\bigg),\\
[\![{}^e\mathsf{L}_1\,,{}^e\mathsf{K}_2]\!] &= [\![\mathsf{L}_1\,,\mathsf{K}_2]\!] + 2q\big(\boldsymbol{A}\cdot[{}^{(1)}\!\boldsymbol{l}\,,{}^{(2)}\!\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} + \big(\pounds_{{}^{(1)}\!\boldsymbol{l}}\boldsymbol{A}\big)\cdot{}^{(2)}\!\boldsymbol{k}\big)\cdot\boldsymbol{\nabla}\\
&\qquad + \Big(q\boldsymbol{\nabla}\cdot\big(\boldsymbol{A}\cdot[{}^{(1)}\!\boldsymbol{l}\,,{}^{(2)}\!\boldsymbol{k}]_{\mathrm{SN}} + \big(\pounds_{{}^{(1)}\!\boldsymbol{l}}\boldsymbol{A}\big)\cdot{}^{(2)}\!\boldsymbol{k}\big)\\
&\qquad + \mathrm{i}q^2\big(\boldsymbol{A}^{\mathbf{2}}\bullet[{}^{(2)}\!\boldsymbol{k}\,,{}^{(1)}\!\boldsymbol{l}]_{\mathrm{SN}} - 2\big(\pounds_{{}^{(1)}\!\boldsymbol{l}}\boldsymbol{A}\big)\cdot{}^{(2)}\!\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}\big)\Big),\\
[\![{}^e\mathsf{L}_1\,,{}^e\mathsf{L}_2]\!] &= [\![\mathsf{L}_1\,,\mathsf{L}_2]\!].
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

3.6 Vzájemně komutující nabité operátory

Uvažujme sadu pozorovatelných ${}^e\mathsf{K}_i$ a ${}^e\mathsf{L}_i$, kde $i = 0, \ldots, n-1$. Z (2.35) a (3.16) vidíme, že tyto pozorovatelné spolu komutují právě tehdy, když platí (2.37)–(2.41) a zároveň pole $\boldsymbol{A}$ splňuje

$$\pounds_{{}^{(i)}\!\boldsymbol{l}}\boldsymbol{A} = 0, \tag{3.17}$$

$$\mathcal{S}\big({}^{(i)}\!\boldsymbol{k}\cdot(\mathbf{d}\boldsymbol{A})\cdot{}^{(j)}\!\boldsymbol{k}\big) = 0, \tag{3.18}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\Big({}^{(i)}\!\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot({}^{(j)}\!\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A})\big) - (i\leftrightarrow j)\Big) = 0 \tag{3.19}$$

pro $i, j = 0, \ldots, n-1$. Porovnáním vztahů (3.7)–(3.8) a (3.17)–(3.19) vidíme, že narozdíl od poissonovsky komutujících pozorovatelných musí jejich operátorové analogie splňovat dodatečnou anomální podmínku (3.19), která již závisí na volbě kovariantní derivace.

Předpokládejme nyní, že $\boldsymbol{\nabla}$ je metrická kovariantní derivace metriky $\boldsymbol{g}$ a definujme operátor

$${}^e\Box \equiv -\big[\boldsymbol{\nabla} - \mathrm{i}q\boldsymbol{A}\big]\cdot\boldsymbol{g}^{\mathbf{-1}}\cdot\big[\boldsymbol{\nabla} - \mathrm{i}q\boldsymbol{A}\big]. \tag{3.20}$$

Ze vztahů (2.35) a (3.16) také vyplývá, že operátory ${}^e\mathsf{K}_i$ a ${}^e\mathsf{L}_i$ komutují s operátorem ${}^e\Box$ právě tehdy, když kromě dřívějších podmínek (2.46)–(2.48) platí navíc i podmínky

$$\mathcal{S}\big(\boldsymbol{g}^{\mathbf{-1}}\cdot(\mathbf{d}\boldsymbol{A})\cdot{}^{(i)}\!\boldsymbol{k}\big) = 0, \tag{3.21}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\Big(\boldsymbol{g}^{\mathbf{-1}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot({}^{(i)}\!\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A})\big) - {}^{(i)}\!\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{g}^{\mathbf{-1}}\cdot\boldsymbol{A})\big)\Big) = 0. \tag{3.22}$$

Jestliže ${}^e\Box$ je jedním z operátorů ${}^e\mathsf{K}_i$, potom mají tyto operátory opět společnou sadu vlastních funkcí, které řeší nabitou Klein–Gordonovu rovnici. Konkrétní příklad pole splňujícího podmínky (3.21) a (3.22) nalezneme v kapitole 5.

4. Kerr–NUT–(A)dS a příbuzné prostory

V této kapitole se seznámíme s metrikou Kerr–NUT–(A)dS prostoročasu vícerozměrné rotující černé díry a zavedeme metriky příbuzných prostorů, které mají stejné skryté i explicitní symetrie jako prostoročas Kerr–NUT–(A)dS. Dále za pomoci 1-forem konexe spočteme křivosti všech těchto metrik.

4.1 Prostory se symetriemi Kerr–NUT–(A)dS

Uvažujme $2n$-rozměrný Kerr–NUT–(A)dS prostoročas rotující černé díry. Metrika tohoto prostoročasu má v souřadnicích $x^a \equiv \{x_1, \dots, x_n, \psi_0, \dots, \psi_{n-1}\}$ tvar (viz [7])

$$\boldsymbol{g} = \sum_\mu \left[\frac{U_\mu}{X_\mu} (\mathbf{d}x_\mu)^{\mathbf{2}} + \frac{X_\mu}{U_\mu} \Big(\sum_j A_\mu^{(j)} \mathbf{d}\psi_j \Big)^{\mathbf{2}} \right], \tag{4.1}$$

kde používáme konvenci, že indexy $\mu, \nu, \dots$, psané řeckou abecedou, nabývají hodnot $1, \dots, n$ zatímco indexy $i, j, \dots$, psané latinkou, nabývají hodnot $0, \dots, n-1$. Dále používáme zkrácené zápisy pro sčítání

$$\sum_\mu \equiv \sum_{\mu=1}^{n}, \quad \sum_i \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \tag{4.2}$$

a podobně i pro násobení

$$\prod_\mu \equiv \prod_{\mu=1}^{n}, \quad \prod_i \equiv \prod_{i=0}^{n-1}. \tag{4.3}$$

Souřadnice x_μ odpovídají radiálnímu a azimutálním směrům, zatímco souřadnice ψ_k časovému a longitudinálním směrům. Radiální souřadnice a některé další veličiny však byly kvůli symetričtějšímu zápisu metriky přenásobeny imaginární jednotkou i. Metrika je však reálná a má při vhodné volbě mezí souřadnic lorentzovskou signaturu $(-,+,+,+)$, viz [7]. Uvažujeme-li namísto tohoto x_μ a ψ_k jako reálné souřadnice, lze vhodnou volbou mezí souřadnic nastavit metrice i riemannovskou signaturu $(+,+,+,+)$. Funkce U_μ a $A_\mu^{(i)}$ jsou definovány vztahy

$$\begin{aligned} U_\mu &\equiv \prod_{\substack{\nu \\ \nu \neq \mu}} (x_\nu^2 - x_\mu^2), \\ A_\mu^{(i)} &\equiv \sum_{\substack{\nu_1, \dots, \nu_k \\ \nu_1 < \dots < \nu_k \\ \nu_i \neq \mu}} x_{\nu_1}^2 \dots x_{\nu_k}^2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Pro případ, kdy metrika (4.1) splňuje vakuové Einsteinovy rovnice (tzv. on-shell) má funkce X_μ tvar

$$X_\mu = b_\mu x_\mu + \sum_{k=0}^{n} c_k x_\mu^{2k}, \tag{4.5}$$

kde konstanty c_k a b_μ souvisejí s kosmologickou konstantou, momentem hybnosti, hmotností a NUT náboji [7]. My zde však budeme uvažovat tzv. off-shell metriku s obecnou funkcí $X_\mu = X_\mu(x_\mu)$ závisející pouze na souřadnici x_μ. Na jejím konkrétním tvaru naše další výpočty nebudou záviset. Elektromagnetické pole budeme vždy zahrnovat pouze jako slabé testovací pole, které může významně ovlivnit například trajektorie nabitých částic, ale nikoli geometrii samotnou (tzv. slabě nabitá černá díra). Ta bude stále dána off-shell metrikou ve tvaru (4.1).

Zaveďme ortonormální bázi 1-forem a s využitím (B.1) také duální bázi vektorů

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}^{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{Q_\mu}}\mathbf{d}x_\mu, \\
\boldsymbol{e}^{\hat{\mu}} &= \sqrt{Q_\mu}\sum_k A_\mu^{(k)}\mathbf{d}\psi_k, \\
\boldsymbol{e}_{\mu} &= \sqrt{Q_\mu}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x_\mu}, \\
\boldsymbol{e}_{\hat{\mu}} &= \frac{1}{\sqrt{Q_\mu}}\sum_k \frac{\left(-x_\mu^2\right)^{n-1-k}}{U_\mu}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\psi_k},
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

kde jsme označili

$$
Q_\mu \equiv \frac{X_\mu}{U_\mu}. \tag{4.7}
$$

Díky identitě (B.1) můžeme napsat rovněž inverzní vztahy

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d}x_\mu &= \sqrt{Q_\mu}\boldsymbol{e}^{\mu}, \\
\mathbf{d}\psi_k &= \sum_\mu \frac{\left(-x_\mu^2\right)^{n-1-k}}{U_\mu}\frac{1}{\sqrt{Q_\mu}}\boldsymbol{e}^{\hat{\mu}}, \\
\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x_\mu} &= \frac{1}{\sqrt{Q_\mu}}\boldsymbol{e}_{\mu}, \\
\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\psi_k} &= \sum_\mu A_\mu^{(k)}\sqrt{Q_\mu}\boldsymbol{e}_{\hat{\mu}}.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Killingovy tenzory a Killingovy vektory metriky $\boldsymbol{g}$ jsou dle [10] rovny

$$
\begin{aligned}
{}^{(i)}\boldsymbol{k} &\equiv \sum_\mu A_\mu^{(i)}\left[Q_\mu\left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x_\mu}\right)^{\mathbf{2}} + \frac{1}{Q_\mu}\left(\sum_k \frac{\left(-x_\mu^2\right)^{n-1-k}}{U_\mu}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\psi_k}\right)^{\mathbf{2}}\right] \\
&= \sum_\mu A_\mu^{(i)}\left(\boldsymbol{e}_{\mu}\boldsymbol{e}_{\mu} + \boldsymbol{e}_{\hat{\mu}}\boldsymbol{e}_{\hat{\mu}}\right), \\
{}^{(i)}\boldsymbol{l} &\equiv \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\psi_i} = \sum_\mu A_\mu^{(i)}\sqrt{Q_\mu}\boldsymbol{e}_{\hat{\mu}}.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Příslušné klasické pozorovatelné

$$
\begin{aligned}
K_i &= \boldsymbol{p}\cdot{}^{(i)}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p}, \\
L_i &= {}^{(i)}\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{p}
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

vzájemně komutují (viz [15]), a tedy dle kapitoly 1.3 veličiny ${}^{(i)}\boldsymbol{k}$ a ${}^{(i)}\boldsymbol{l}$ splňují (1.13)–(1.15).

Definujme nyní sadu metrik vztahem

$$
{}^{(i)}\boldsymbol{g} \equiv {}^{(i)}\boldsymbol{k}^{\mathbf{-1}} = \sum_\mu \frac{1}{A_\mu^{(i)}}\left(\boldsymbol{e}^{\mu}\boldsymbol{e}^{\mu} + \boldsymbol{e}^{\hat{\mu}}\boldsymbol{e}^{\hat{\mu}}\right) \tag{4.11}
$$

a označme dále příslušné metrické kovariantní derivace ${}^{(i)}\boldsymbol{\nabla}$, tzn. ${}^{(i)}\boldsymbol{\nabla}$ splňující podmínku metricity ${}^{(i)}\boldsymbol{\nabla}\,{}^{(i)}\boldsymbol{g} = 0$ a nulové torze ${}^{(i)}\boldsymbol{T} = 0$. Metrika ${}^{(0)}\boldsymbol{g}$ je metrikou původního Kerr–NUT–(A)dS prostoročasu. Poznamenejme ještě, že pro reálné souřadnice x_μ a ψ_k ve vhodných mezích mají všechny metriky ${}^{(i)}\boldsymbol{g}$ riemannovskou signaturu $(+,+,+,+)$.

Volbou kovariantní derivace $\boldsymbol{\nabla} = {}^{(i)}\boldsymbol{\nabla}$ při vyjádření Schouten–Nijenhuisových závorek v (1.13) a (1.14) pro všechna $i, j = 0, \dots, n-1$ dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\big({}^{(i)}\boldsymbol{g}^{-1} \cdot {}^{(i)}\boldsymbol{\nabla}\,{}^{(j)}\boldsymbol{k}\big) &= 0, \\ \mathcal{S}\big({}^{(i)}\boldsymbol{g}^{-1} \cdot {}^{(i)}\boldsymbol{\nabla}\,{}^{(j)}\boldsymbol{l}\big) &= 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Z (4.12) vidíme, že veličiny ${}^{(j)}\boldsymbol{k}$ a ${}^{(j)}\boldsymbol{l}$ jsou Killingovy tenzory a Killingovy vektory všech metrik ${}^{(i)}\boldsymbol{g}$. Jinými slovy prostory s metrikami (4.11) mají stejné symetrie jako původní prostoročas Kerr–NUT–(A)dS.

4.2 Křivost

Prostory s metrikami ${}^{(i)}\boldsymbol{g}$ tvoří skupinu prostorů, které jsou spojeny vyjímečnou vlastností, a sice stejnou sadou Killingových tenzorů a vektorů. Pro bližší seznámení s těmito prostory, spočteme křivosti příslušných kovariantních derivací ${}^{(i)}\boldsymbol{\nabla}$ a porovnáme ji s křivostí Kerr–NUT–(A)dS prostoročasu ($i = 0$).

Budeme pracovat v bázi (4.6), která je ortogonální (nikoli však ortonormální) vůči všem metrikám ${}^{(i)}\boldsymbol{g}$, viz (4.11). Složky všech tenzorů budeme vyjadřovat vzhledem k této bázi.

4.2.1 1-formy konexe

1-formy konexe[1] ${}^{(i)}\boldsymbol{\omega}^a{}_b$ vzhledem k bázi (4.6) určíme z prvních rovnic struktury

$$\mathbf{d}\boldsymbol{e}^a = -{}^{(i)}\boldsymbol{\omega}^a{}_b \wedge \boldsymbol{e}^b, \tag{4.13}$$

$$\mathbf{d}\,{}^{(i)}g_{ab} = 2\,{}^{(i)}\boldsymbol{\omega}_{(ab)}, \tag{4.14}$$

kde 1-formy ${}^{(i)}\boldsymbol{\omega}_{ab} \equiv {}^{(i)}g_{ac}\,{}^{(i)}\boldsymbol{\omega}^c{}_b$. Ze vztahů (4.13) a (4.14) lze snadno vyjádřit podmínky pro složky ${}^{(i)}\omega_{nab}$ 1-forem ${}^{(i)}\boldsymbol{\omega}_{ab}$

$$ {}^{(i)}\omega_{[n|a|b]} = -\frac{1}{2}\,{}^{(i)}g_{ac}\,\boldsymbol{e}_n \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{e}^c \cdot \boldsymbol{e}_b, \tag{4.15}$$

$$ {}^{(i)}\omega_{n(ab)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_n \cdot \mathbf{d}\,{}^{(i)}g_{ab}. \tag{4.16}$$

Jednotlivé komponenty získáme z rozkladu ${}^{(i)}\omega_{nab}$ do symetrizací a antisymetrizací dvojic indexů

$$\begin{aligned} {}^{(i)}\omega_{nab} = {}&{}^{(i)}\omega_{n(ab)} + {}^{(i)}\omega_{b(na)} - {}^{(i)}\omega_{a(bn)} \\ &+ {}^{(i)}\omega_{[n|a|b]} - {}^{(i)}\omega_{[b|n|a]} + {}^{(i)}\omega_{[a|b|n]}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

[1] Složky 1-forem konexe derivace ${}^{(i)}\boldsymbol{\nabla}$ odpovídají složkám rozdílového tenzoru ${}^{(i)}\gamma$ n-ádové derivace $\boldsymbol{\eth}$ báze (4.6) a derivace ${}^{(i)}\boldsymbol{\nabla}$, tzn. ${}^{(i)}\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{e}^a_{\boldsymbol{b}} = -{}^{(i)}\boldsymbol{\gamma}^{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{nb}}\boldsymbol{e}^a_{\boldsymbol{a}} = -{}^{(i)}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{n}}{}^a{}_b\boldsymbol{e}^b_{\boldsymbol{b}}$. Jedná se tedy o Ricciho rotační koeficienty. Poznamenejme ale, že díky nenormovanosti báze (4.6) je $\mathbf{d}\,{}^{(i)}g_{ab} \neq 0$ a 1-formy konexe nejsou antisymetrické ve svých indexech, viz (4.14).

Metriky ${}^{(i)}\boldsymbol{g}$ mají dle (4.11) nenulové pouze diagonální složky

$$ {}^{(i)}g_{\mu\mu} = {}^{(i)}g_{\hat{\mu}\hat{\mu}} = \frac{1}{A_\mu^{(i)}}. \tag{4.18} $$

Po dosazení (4.18) a vztahů[2]

$$ \begin{aligned} \mathbf{d}\boldsymbol{e}^\mu &= \sum_{\substack{\nu \\ \nu\neq\mu}} \sqrt{Q_\nu} \frac{x_\nu}{x_\nu^2 - x_\mu^2} \boldsymbol{e}^\nu \wedge \boldsymbol{e}^\mu, \\ \mathbf{d}\boldsymbol{e}^{\hat{\mu}} &= \big(\sqrt{Q_\mu}\big)_{,\mu} \boldsymbol{e}^\mu \wedge \boldsymbol{e}^{\hat{\mu}} + \sum_{\substack{\nu \\ \nu\neq\mu}} \frac{x_\nu}{x_\nu^2 - x_\mu^2} \big(\sqrt{Q_\nu} \boldsymbol{e}^\nu \wedge \boldsymbol{e}^{\hat{\mu}} - 2\sqrt{Q_\mu} \boldsymbol{e}^\nu \wedge \boldsymbol{e}^{\hat{\nu}}\big) \end{aligned} \tag{4.19} $$

do (4.15) dostáváme

$$ \begin{aligned} {}^{(i)}\omega_{[\rho|\mu|\nu]} &= \frac{1}{2} \frac{1}{A_\mu^{(i)}} \left(\delta_{\mu\nu}(1-\delta_{\mu\rho}) \frac{x_\rho}{x_\mu^2 - x_\rho^2} \sqrt{Q_\rho} + \delta_{\mu\rho}(1-\delta_{\mu\nu}) \frac{x_\nu}{x_\nu^2 - x_\mu^2} \sqrt{Q_\nu} \right), \\ {}^{(i)}\omega_{[\rho|\hat{\mu}|\hat{\nu}]} &= \frac{1}{2} \frac{1}{A_\mu^{(i)}} \Bigg(- \delta_{\mu\nu}\delta_{\mu\rho} \big(\sqrt{Q_\mu}\big)_{,\mu} + \delta_{\mu\nu}(1-\delta_{\mu\rho}) \frac{x_\rho}{x_\mu^2 - x_\rho^2} \sqrt{Q_\rho} \\ &\qquad + \delta_{\nu\rho}(1-\delta_{\mu\nu}) \frac{2x_\nu}{x_\nu^2 - x_\mu^2} \sqrt{Q_\mu} \Bigg), \\ {}^{(i)}\omega_{[\rho|\mu|\hat{\nu}]} &= {}^{(i)}\omega_{[\rho|\hat{\mu}|\nu]} = {}^{(i)}\omega_{[\hat{\rho}|\mu|\hat{\nu}]} = {}^{(i)}\omega_{[\hat{\rho}|\hat{\mu}|\hat{\nu}]} = 0. \end{aligned} \tag{4.20} $$

Ve výrazech tohoto typu používáme zjednodušující konvenci, kde Kroneckerovy δ mají přednost při vyhodnocování. Tím máme na mysli, že je-li část členu s δ nulová (jako např. v prvním členu první rovnice pro $\mu = \rho$), je nulový i celý člen.

Dosazením (4.18) do (4.16) s využitím (B.2) dostáváme

$$ \begin{aligned} {}^{(i)}\omega_{\rho(\mu\nu)} &= {}^{(i)}\omega_{\rho(\hat{\mu}\hat{\nu})} = \delta_{\mu\nu}(1-\delta_{\mu\rho}) \frac{x_\rho}{x_\mu^2 - x_\rho^2} \sqrt{Q_\rho} \frac{A_\mu^{(i)} - A_\rho^{(i)}}{A_\mu^{(i)2}}, \\ {}^{(i)}\omega_{\rho(\mu\hat{\nu})} &= {}^{(i)}\omega_{\hat{\rho}(\mu\nu)} = {}^{(i)}\omega_{\hat{\rho}(\mu\hat{\nu})} = {}^{(i)}\omega_{\hat{\rho}(\hat{\mu}\hat{\nu})} = 0. \end{aligned} \tag{4.21} $$

[2] Tyto vztahy lze odvodit vnější derivací (4.6), zpětným dosazením (4.8) a využitím identit (B.1)–(B.3).

Nakonec ze vztahu (4.17), (4.20) a (4.21) získáme jednotlivé složky ${}^{(i)}\omega_{nab}$

$$
\begin{aligned}
{}^{(i)}\omega_{\rho\mu\nu} &= {}^{(i)}\omega_{\rho(\mu\nu)} + {}^{(i)}\omega_{\nu(\rho\mu)} - {}^{(i)}\omega_{\mu(\nu\rho)} + {}^{(i)}\omega_{[\rho|\mu|\nu]} - {}^{(i)}\omega_{[\nu|\rho|\mu]} + {}^{(i)}\omega_{[\mu|\nu|\rho]} \\
&= \delta_{\mu\nu}(1-\delta_{\mu\rho})\frac{x_\rho}{x_\mu^2 - x_\rho^2}\sqrt{Q_\rho}\frac{A_\mu^{(i)} - A_\rho^{(i)}}{A_\mu^{(i)2}} \\
&\quad +(1-\delta_{\mu\nu})\Big(\delta_{\mu\rho}\frac{x_\nu}{x_\nu^2 - x_\mu^2}\sqrt{Q_\nu}\frac{A_\nu^{(i)}}{A_\mu^{(i)2}} - (\mu \leftrightarrow \nu)\Big), \\
{}^{(i)}\omega_{\rho\hat{\mu}\hat{\nu}} &= {}^{(i)}\omega_{\rho(\hat{\mu}\hat{\nu})} + {}^{(i)}\omega_{[\rho|\hat{\mu}|\hat{\nu}]} + {}^{(i)}\omega_{[\hat{\mu}|\hat{\nu}|\rho]} \\
&= \delta_{\mu\nu}(1-\delta_{\mu\rho})\frac{x_\rho}{x_\mu^2 - x_\rho^2}\sqrt{Q_\rho}\frac{A_\mu^{(i)} - A_\rho^{(i)}}{A_\mu^{(i)2}} \\
&\quad +(1-\delta_{\mu\nu})\Big(\delta_{\mu\rho}\frac{x_\mu}{x_\nu^2 - x_\mu^2}\sqrt{Q_\nu}\frac{1}{A_\nu^{(i)}} - (\mu \leftrightarrow \nu)\Big), \\
{}^{(i)}\omega_{\hat{\rho}\mu\hat{\nu}} &= -{}^{(i)}\omega_{\mu(\hat{\nu}\hat{\rho})} - {}^{(i)}\omega_{[\hat{\nu}|\hat{\rho}|\mu]} + {}^{(i)}\omega_{[\mu|\hat{\nu}|\hat{\rho}]} \\
&= \delta_{\mu\nu}\Big(-\delta_{\mu\rho}(\sqrt{Q_\mu})_{,\mu}\frac{1}{A_\mu^{(i)}} + (1-\delta_{\mu\rho})\frac{x_\mu}{x_\mu^2 - x_\rho^2}\sqrt{Q_\rho}\frac{1}{A_\rho^{(i)}}\Big) \\
&\quad +(1-\delta_{\mu\nu})\Big(\delta_{\mu\rho}\frac{x_\mu}{x_\mu^2 - x_\nu^2}\sqrt{Q_\nu}\frac{1}{A_\nu^{(i)}} + \delta_{\nu\rho}\frac{x_\mu}{x_\nu^2 - x_\mu^2}\sqrt{Q_\mu}\frac{A_\mu^{(i)}}{A_\nu^{(i)2}}\Big), \\
{}^{(i)}\omega_{\hat{\rho}\hat{\mu}\nu} &= -{}^{(i)}\omega_{\hat{\rho}\nu\hat{\mu}}.
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

1-formy ${}^{(i)}\boldsymbol{\omega}_{ab}$ jsou tedy rovny

$$
\begin{aligned}
{}^{(i)}\boldsymbol{\omega}_{\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu}\sum_{\substack{\rho \\ \rho\neq\mu}}\frac{x_\rho}{x_\mu^2 - x_\rho^2}\sqrt{Q_\rho}\frac{A_\mu^{(i)} - A_\rho^{(i)}}{A_\mu^{(i)2}}\boldsymbol{e}^\rho \\
&\quad +(1-\delta_{\mu\nu})\Big(\frac{x_\nu}{x_\nu^2 - x_\mu^2}\sqrt{Q_\nu}\frac{A_\nu^{(i)}}{A_\mu^{(i)2}}\boldsymbol{e}^\mu - (\mu \leftrightarrow \nu)\Big), \\
{}^{(i)}\boldsymbol{\omega}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= \delta_{\mu\nu}\sum_{\substack{\rho \\ \rho\neq\mu}}\frac{x_\rho}{x_\mu^2 - x_\rho^2}\sqrt{Q_\rho}\frac{A_\mu^{(i)} - A_\rho^{(i)}}{A_\mu^{(i)2}}\boldsymbol{e}^\rho \\
&\quad +(1-\delta_{\mu\nu})\Big(\frac{x_\mu}{x_\nu^2 - x_\mu^2}\sqrt{Q_\nu}\frac{1}{A_\nu^{(i)}}\boldsymbol{e}^\mu - (\mu \leftrightarrow \nu)\Big), \\
{}^{(i)}\boldsymbol{\omega}_{\mu\hat{\nu}} &= \delta_{\mu\nu}\Big(-(\sqrt{Q_\mu})_{,\mu}\frac{1}{A_\mu^{(i)}}\boldsymbol{e}^{\hat{\mu}} + \sum_{\substack{\rho \\ \rho\neq\mu}}\frac{x_\mu}{x_\mu^2 - x_\rho^2}\sqrt{Q_\rho}\frac{1}{A_\rho^{(i)}}\boldsymbol{e}^{\hat{\rho}}\Big) \\
&\quad +(1-\delta_{\mu\nu})\Big(\frac{x_\mu}{x_\mu^2 - x_\nu^2}\sqrt{Q_\nu}\frac{1}{A_\nu^{(i)}}\boldsymbol{e}^{\hat{\mu}} + \frac{x_\mu}{x_\nu^2 - x_\mu^2}\sqrt{Q_\mu}\frac{A_\mu^{(i)}}{A_\nu^{(i)2}}\boldsymbol{e}^{\hat{\nu}}\Big), \\
{}^{(i)}\boldsymbol{\omega}_{\hat{\mu}\nu} &= -{}^{(i)}\boldsymbol{\omega}_{\nu\hat{\mu}}.
\end{aligned} \tag{4.23}
$$

Všimněme si, že tyto 1-formy lze rozdělit na části antisymetrické v μ, ν a na části úměrné $\delta_{\mu\nu}$.

4.2.2 2-formy křivosti

2-formy křivosti ${}^{(i)}\boldsymbol{\Omega}^{a}{}_{b}$ (tj. 2-formy splňující ${}^{(i)}\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{mn}}{}^{\boldsymbol{k}}{}_{\boldsymbol{l}} = {}^{(i)}\boldsymbol{\Omega}_{\boldsymbol{mn}}{}^{a}{}_{b}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{k}}_{a}\boldsymbol{e}^{b}_{\boldsymbol{l}}$) určíme z druhých rovnic struktury

$$ {}^{(i)}\boldsymbol{\Omega}^{a}{}_{b} = \mathbf{d}\,{}^{(i)}\boldsymbol{\omega}^{a}{}_{b} + {}^{(i)}\boldsymbol{\omega}^{a}{}_{c} \wedge {}^{(i)}\boldsymbol{\omega}^{c}{}_{b}. \tag{4.24} $$

Lze navíc ukázat, že pro 2-formy ${}^{(i)}\boldsymbol{\Omega}_{ab} \equiv {}^{(i)}g_{ac}\,{}^{(i)}\boldsymbol{\Omega}^{c}{}_{b}$ platí

$$ {}^{(i)}\boldsymbol{\Omega}_{ab} = {}^{(i)}\boldsymbol{\Omega}_{[ab]}. \tag{4.25} $$

Po delším (avšak přímočarém) výpočtu 2-forem ${}^{(i)}\boldsymbol{\Omega}_{ab}$ ze vztahu (4.24) s využitím identit (B.2) a (B.6) nakonec dostáváme pro $\mu \neq \nu$

$$ \begin{aligned} {}^{(i)}\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu} = {} & \Bigg[\frac{1}{2}\frac{x_\mu}{x_\nu^2 - x_\mu^2}Q_{\mu,\mu}\frac{A_\mu^{(i)}}{A_\nu^{(i)2}} + \frac{x_\nu^2}{(x_\mu^2 - x_\nu^2)^2}Q_\mu\frac{A_\mu^{(i)}}{A_\nu^{(i)2}} + \frac{3x_\mu^2}{(x_\mu^2 - x_\nu^2)^2}Q_\mu\frac{\big(A_\nu^{(i)} - A_\mu^{(i)}\big)A_\mu^{(i)}}{A_\nu^{(i)3}} \\ & + \frac{1}{2}\sum_{\substack{\gamma \\ \gamma\neq\mu,\nu}}\frac{x_\gamma^2}{(x_\mu^2 - x_\gamma^2)(x_\gamma^2 - x_\nu^2)}Q_\gamma\frac{A_\gamma^{(i)3}}{A_\mu^{(i)2}A_\nu^{(i)2}} + (\mu \leftrightarrow \nu)\Bigg]\boldsymbol{e}^{\mu}\wedge\boldsymbol{e}^{\nu} \\ & + \sum_{\substack{\gamma \\ \gamma\neq\mu,\nu}}\Bigg\{\Bigg[\frac{3x_\nu x_\gamma}{(x_\mu^2 - x_\nu^2)(x_\gamma^2 - x_\nu^2)}\sqrt{Q_\nu Q_\gamma}\frac{A_\nu^{(i)} - A_\gamma^{(i)}}{A_\mu^{(i)2}} \\ & + \frac{3x_\nu x_\gamma}{(x_\mu^2 - x_\nu^2)(x_\mu^2 - x_\gamma^2)}\sqrt{Q_\nu Q_\gamma}\frac{\big(A_\mu^{(i)} - A_\gamma^{(i)}\big)A_\nu^{(i)}}{A_\mu^{(i)3}}\Bigg]\boldsymbol{e}^{\mu}\wedge\boldsymbol{e}^{\gamma} - (\mu \leftrightarrow \nu)\Bigg\} \\ & + \Bigg[\frac{1}{2}\frac{x_\nu}{x_\nu^2 - x_\mu^2}Q_{\mu,\mu}\frac{1}{A_\mu^{(i)}} + \frac{x_\mu x_\nu}{(x_\mu^2 - x_\nu^2)^2}Q_\mu\frac{1}{A_\nu^{(i)}} \\ & + \frac{1}{2}\sum_{\substack{\gamma \\ \gamma\neq\mu,\nu}}\frac{x_\mu x_\nu}{(x_\mu^2 - x_\gamma^2)(x_\gamma^2 - x_\nu^2)}Q_\gamma\frac{1}{A_\gamma^{(i)}} + (\mu \leftrightarrow \nu)\Bigg]\boldsymbol{e}^{\hat{\mu}}\wedge\boldsymbol{e}^{\hat{\nu}} \\ & + \sum_{\substack{\gamma \\ \gamma\neq\mu,\nu}}\Bigg\{\Bigg[\frac{x_\mu x_\nu}{(x_\mu^2 - x_\gamma^2)(x_\nu^2 - x_\gamma^2)}\sqrt{Q_\nu Q_\gamma}\frac{A_\nu^{(i)}}{A_\gamma^{(i)2}} + \frac{x_\mu x_\nu}{(x_\mu^2 - x_\nu^2)(x_\gamma^2 - x_\nu^2)}\sqrt{Q_\nu Q_\gamma}\frac{1}{A_\gamma^{(i)}} \\ & + \frac{x_\mu x_\nu}{(x_\mu^2 - x_\nu^2)(x_\mu^2 - x_\gamma^2)}\sqrt{Q_\nu Q_\gamma}\frac{A_\nu^{(i)}}{A_\gamma^{(i)}A_\mu^{(i)}}\Bigg]\boldsymbol{e}^{\hat{\mu}}\wedge\boldsymbol{e}^{\hat{\gamma}} - (\mu \leftrightarrow \nu)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{4.26} $$

$$
\begin{aligned}
{}^{(i)}\boldsymbol{\Omega}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = & \Bigg[\frac{1}{2}\frac{x_\mu}{x_\nu^2 - x_\mu^2} Q_{\mu,\mu}\frac{1}{A_\mu^{(i)}} + \frac{x_\mu x_\nu}{(x_\mu^2 - x_\nu^2)^2} Q_\mu \frac{1}{A_\nu^{(i)}} \\
& + \frac{1}{2}\sum_{\substack{\gamma \\ \gamma\neq\mu,\nu}} \frac{x_\mu x_\nu}{(x_\mu^2 - x_\gamma^2)(x_\gamma^2 - x_\nu^2)} Q_\gamma \frac{1}{A_\gamma^{(i)}} + (\mu \leftrightarrow \nu)\Bigg] \boldsymbol{e}^\mu \wedge \boldsymbol{e}^\nu \\
& + \sum_{\substack{\gamma \\ \gamma\neq\mu,\nu}} \Bigg\{ \Bigg[\frac{x_\mu x_\gamma}{(x_\nu^2 - x_\mu^2)(x_\gamma^2 - x_\nu^2)} \sqrt{Q_\nu Q_\gamma} \frac{A_\nu^{(i)} - A_\gamma^{(i)}}{{A_\nu^{(i)}}^2} \\
& + \frac{x_\mu x_\gamma}{(x_\mu^2 - x_\gamma^2)(x_\nu^2 - x_\mu^2)} \sqrt{Q_\nu Q_\gamma} \frac{A_\mu^{(i)} - A_\gamma^{(i)}}{A_\mu^{(i)} A_\nu^{(i)}} \Bigg] \boldsymbol{e}^\mu \wedge \boldsymbol{e}^\gamma - (\mu \leftrightarrow \nu) \Bigg\} \\
& + \Bigg[\frac{1}{2}\frac{x_\mu}{x_\nu^2 - x_\mu^2} Q_{\mu,\mu}\frac{A_\mu^{(i)}}{{A_\nu^{(i)}}^2} + \frac{x_\nu^2}{(x_\mu^2 - x_\nu^2)^2} Q_\mu \frac{A_\nu^{(i)}}{{A_\mu^{(i)}}^2} \\
& + \frac{1}{2}\sum_{\substack{\gamma \\ \gamma\neq\mu,\nu}} \frac{x_\gamma^2}{(x_\mu^2 - x_\gamma^2)(x_\gamma^2 - x_\nu^2)} Q_\gamma \frac{{A_\gamma^{(i)}}^3}{{A_\mu^{(i)}}^2 {A_\nu^{(i)}}^2} + (\mu \leftrightarrow \nu)\Bigg] \boldsymbol{e}^{\hat{\mu}} \wedge \boldsymbol{e}^{\hat{\nu}} \\
& + \sum_{\substack{\gamma \\ \gamma\neq\mu,\nu}} \Bigg\{ \Bigg[\frac{x_\gamma^2}{(x_\mu^2 - x_\gamma^2)(x_\nu^2 - x_\gamma^2)} \sqrt{Q_\nu Q_\gamma} \frac{{A_\gamma^{(i)}}^2}{A_\nu^{(i)} {A_\mu^{(i)}}^2} \\
& + \frac{x_\nu^2}{(x_\mu^2 - x_\nu^2)(x_\gamma^2 - x_\nu^2)} \sqrt{Q_\nu Q_\gamma} \frac{{A_\nu^{(i)}}^2}{A_\gamma^{(i)} {A_\mu^{(i)}}^2} \\
& + \frac{x_\mu^2}{(x_\mu^2 - x_\nu^2)(x_\mu^2 - x_\gamma^2)} \sqrt{Q_\nu Q_\gamma} \frac{A_\mu^{(i)}}{A_\gamma^{(i)} A_\nu^{(i)}} \Bigg] \boldsymbol{e}^{\hat{\mu}} \wedge \boldsymbol{e}^{\hat{\gamma}} - (\mu \leftrightarrow \nu) \Bigg\}, \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{(i)}\boldsymbol{\Omega}_{\mu\hat{\nu}} = & \left[\frac{x_\nu^2}{(x_\mu^2-x_\nu^2)^2}\sqrt{Q_\mu Q_\nu}\frac{{A_\nu^{(i)}}^3-{A_\mu^{(i)}}^3}{A_\nu^{(i)}{A_\mu^{(i)}}^3}+\frac{3x_\mu^2}{(x_\mu^2-x_\nu^2)^2}\sqrt{Q_\mu Q_\nu}\frac{A_\mu^{(i)}-A_\nu^{(i)}}{{A_\nu^{(i)}}^2}\right]\boldsymbol{e}^\mu\wedge\boldsymbol{e}^{\hat{\mu}} \\
& +\left[\left(\frac{1}{2}\frac{x_\mu}{x_\nu^2-x_\mu^2}Q_{\mu,\mu}\frac{A_\mu^{(i)}}{{A_\nu^{(i)}}^2}+\frac{x_\nu^2}{(x_\mu^2-x_\nu^2)^2}Q_\mu\frac{A_\mu^{(i)}}{{A_\nu^{(i)}}^2}\right.\right. \\
& \left.+\frac{1}{2}\sum_{\substack{\gamma\\ \gamma\neq\mu,\nu}}\frac{x_\gamma^2}{(x_\mu^2-x_\gamma^2)(x_\gamma^2-x_\nu^2)}Q_\gamma\frac{{A_\gamma^{(i)}}^3}{{A_\mu^{(i)}}^2{A_\nu^{(i)}}^2}+(\mu\leftrightarrow\nu)\right) \\
& \left.+\frac{3x_\mu^2}{(x_\mu^2-x_\nu^2)^2}Q_\mu\frac{(A_\nu^{(i)}-A_\mu^{(i)})A_\mu^{(i)}}{{A_\nu^{(i)}}^3}\right]\boldsymbol{e}^\mu\wedge\boldsymbol{e}^{\hat{\nu}} \\
& +\left[\frac{1}{2}\frac{x_\nu}{x_\nu^2-x_\mu^2}Q_{\mu,\mu}\frac{1}{A_\mu^{(i)}}+\frac{x_\mu x_\nu}{(x_\mu^2-x_\nu^2)^2}Q_\mu\frac{1}{A_\nu^{(i)}}\right. \\
& \left.+\frac{1}{2}\sum_{\substack{\gamma\\ \gamma\neq\mu,\nu}}\frac{x_\mu x_\nu}{(x_\mu^2-x_\gamma^2)(x_\gamma^2-x_\nu^2)}Q_\gamma\frac{1}{A_\gamma^{(i)}}+(\mu\leftrightarrow\nu)\right]\boldsymbol{e}^\nu\wedge\boldsymbol{e}^{\hat{\mu}} \\
& +\sum_{\substack{\gamma\\ \gamma\neq\mu,\nu}}\left[\frac{x_\mu x_\gamma}{(x_\mu^2-x_\gamma^2)(x_\nu^2-x_\gamma^2)}\sqrt{Q_\nu Q_\gamma}\frac{1}{A_\nu^{(i)}}+\frac{x_\mu x_\gamma}{(x_\mu^2-x_\gamma^2)(x_\mu^2-x_\nu^2)}\sqrt{Q_\nu Q_\gamma}\frac{A_\gamma^{(i)}}{A_\mu^{(i)}A_\nu^{(i)}}\right. \\
& \left.+\frac{x_\mu x_\gamma}{(x_\mu^2-x_\nu^2)(x_\gamma^2-x_\nu^2)}\sqrt{Q_\nu Q_\gamma}\frac{A_\gamma^{(i)}}{{A_\nu^{(i)}}^2}\right]\boldsymbol{e}^\gamma\wedge\boldsymbol{e}^{\hat{\mu}} \\
& +\sum_{\substack{\gamma\\ \gamma\neq\mu,\nu}}\left[\frac{3x_\mu x_\gamma}{(x_\mu^2-x_\gamma^2)(x_\gamma^2-x_\nu^2)}\sqrt{Q_\mu Q_\gamma}\frac{A_\mu^{(i)}}{{A_\nu^{(i)}}^2}+\frac{3x_\mu x_\gamma}{(x_\mu^2-x_\nu^2)(x_\gamma^2-x_\mu^2)}\sqrt{Q_\mu Q_\gamma}\frac{A_\gamma^{(i)}}{{A_\nu^{(i)}}^2}\right. \\
& \left.+\frac{3x_\mu x_\gamma}{(x_\gamma^2-x_\nu^2)(x_\nu^2-x_\mu^2)}\sqrt{Q_\mu Q_\gamma}\frac{A_\mu^{(i)}A_\gamma^{(i)}}{{A_\nu^{(i)}}^3}\right]\boldsymbol{e}^\gamma\wedge\boldsymbol{e}^{\hat{\nu}} \\
& +\sum_{\substack{\gamma\\ \gamma\neq\mu,\nu}}\left[\frac{x_\gamma^2}{(x_\mu^2-x_\gamma^2)(x_\nu^2-x_\gamma^2)}\sqrt{Q_\nu Q_\gamma}\frac{{A_\gamma^{(i)}}^2}{A_\nu^{(i)}{A_\mu^{(i)}}^2}+\frac{x_\nu^2}{(x_\mu^2-x_\nu^2)(x_\gamma^2-x_\nu^2)}\sqrt{Q_\nu Q_\gamma}\frac{{A_\nu^{(i)}}^2}{A_\gamma^{(i)}{A_\mu^{(i)}}^2}\right. \\
& \left.+\frac{x_\mu^2}{(x_\mu^2-x_\nu^2)(x_\mu^2-x_\gamma^2)}\sqrt{Q_\nu Q_\gamma}\frac{A_\mu^{(i)}}{A_\gamma^{(i)}A_\nu^{(i)}}\right]\boldsymbol{e}^\mu\wedge\boldsymbol{e}^{\hat{\gamma}} \\
& +\sum_{\substack{\gamma\\ \gamma\neq\mu,\nu}}\left[\frac{x_\mu x_\nu}{(x_\mu^2-x_\gamma^2)(x_\nu^2-x_\gamma^2)}\sqrt{Q_\mu Q_\gamma}\frac{A_\mu^{(i)}}{{A_\gamma^{(i)}}^2}+\frac{x_\mu x_\nu}{(x_\mu^2-x_\nu^2)(x_\mu^2-x_\gamma^2)}\sqrt{Q_\mu Q_\gamma}\frac{1}{A_\gamma^{(i)}}\right. \\
& \left.+\frac{x_\mu x_\nu}{(x_\mu^2-x_\nu^2)(x_\gamma^2-x_\nu^2)}\sqrt{Q_\mu Q_\gamma}\frac{A_\mu^{(i)}}{A_\gamma^{(i)}A_\nu^{(i)}}\right]\boldsymbol{e}^\nu\wedge\boldsymbol{e}^{\hat{\gamma}} \\
& +\sum_{\substack{\gamma\\ \gamma\neq\mu,\nu}}\left[\frac{2x_\mu x_\gamma}{(x_\nu^2-x_\mu^2)(x_\nu^2-x_\gamma^2)}\sqrt{Q_\mu Q_\nu}\frac{A_\mu^{(i)}}{{A_\nu^{(i)}}^2}+\frac{2x_\mu x_\gamma}{(x_\mu^2-x_\nu^2)(x_\mu^2-x_\gamma^2)}\sqrt{Q_\mu Q_\nu}\frac{1}{A_\nu^{(i)}}\right. \\
& \left.+\frac{2x_\mu x_\gamma}{(x_\mu^2-x_\gamma^2)(x_\nu^2-x_\gamma^2)}\sqrt{Q_\mu Q_\nu}\frac{A_\mu^{(i)}}{A_\gamma^{(i)}A_\nu^{(i)}}\right]\boldsymbol{e}^\gamma\wedge\boldsymbol{e}^{\hat{\gamma}}, \qquad (4.28)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{(i)}\boldsymbol{\Omega}_{\mu\hat{\mu}} = & \Bigg[-\frac{1}{2} Q_{\mu,\mu\mu} \frac{1}{A^{(i)}_{\mu}} - \sum_{\substack{\gamma \\ \gamma \neq \mu}} \left(\frac{3x_\mu^2}{(x_\mu^2 - x_\gamma^2)^2} Q_\gamma \frac{1}{A^{(i)}_\gamma} + \frac{x_\gamma^2}{(x_\mu^2 - x_\gamma^2)^2} Q_\gamma \frac{{A^{(i)}_\gamma}^3}{{A^{(i)}_\mu}^4} \right) \Bigg] \boldsymbol{e}^{\mu} \wedge \boldsymbol{e}^{\hat{\mu}} \\
& + \sum_{\substack{\gamma \\ \gamma \neq \mu}} \Bigg[-\frac{x_\gamma^2}{(x_\mu^2 - x_\gamma^2)^2} \sqrt{Q_\mu Q_\gamma} \frac{1}{A^{(i)}_\gamma} + \frac{3x_\mu^2}{(x_\mu^2 - x_\gamma^2)^2} \sqrt{Q_\mu Q_\gamma} \frac{A^{(i)}_\mu - A^{(i)}_\gamma}{{A^{(i)}_\gamma}^2} \\
& + \frac{x_\gamma^2}{(x_\mu^2 - x_\gamma^2)^2} \sqrt{Q_\mu Q_\gamma} \frac{{A^{(i)}_\gamma}^2}{{A^{(i)}_\mu}^3} \Bigg] \boldsymbol{e}^{\mu} \wedge \boldsymbol{e}^{\hat{\gamma}} \\
& + \sum_{\substack{\gamma \\ \gamma \neq \mu}} \Bigg[\frac{x_\gamma}{x_\gamma^2 - x_\mu^2} Q_{\mu,\mu} \frac{1}{A^{(i)}_\mu} + \frac{2x_\mu x_\gamma}{(x_\mu^2 - x_\gamma^2)^2} Q_\mu \frac{1}{A^{(i)}_\gamma} \\
& + \sum_{\substack{\rho \\ \rho \neq \mu,\gamma}} \frac{x_\mu x_\gamma}{(x_\mu^2 - x_\rho^2)(x_\rho^2 - x_\gamma^2)} Q_\rho \frac{1}{A^{(i)}_\rho} + (\mu \leftrightarrow \gamma) \Bigg] \boldsymbol{e}^{\gamma} \wedge \boldsymbol{e}^{\hat{\gamma}} \\
& + \sum_{\substack{\gamma,\rho \\ \gamma \neq \mu \\ \rho \neq \mu,\gamma}} \Bigg[\frac{2x_\mu x_\gamma}{(x_\gamma^2 - x_\mu^2)(x_\mu^2 - x_\rho^2)} \sqrt{Q_\gamma Q_\rho} \frac{A^{(i)}_\mu - A^{(i)}_\gamma}{A^{(i)}_\mu A^{(i)}_\rho} \\
& + \frac{2x_\mu x_\gamma}{(x_\mu^2 - x_\rho^2)(x_\rho^2 - x_\gamma^2)} \sqrt{Q_\gamma Q_\rho} \frac{A^{(i)}_\rho - A^{(i)}_\gamma}{{A^{(i)}_\rho}^2} \Bigg] \boldsymbol{e}^{\gamma} \wedge \boldsymbol{e}^{\hat{\rho}}.
\end{aligned} \tag{4.29}
$$

Speciálně pro případ $i = 0$ se (ve shodě s [27]) 2-formy křivosti redukují na tvar

$$
\begin{aligned}
{}^{(0)}\boldsymbol{\Omega}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2(x_\nu^2 - x_\mu^2)} \left(x_\mu \frac{\partial Q_T}{\partial x_\mu} - x_\nu \frac{\partial Q_T}{\partial x_\nu} \right) \boldsymbol{e}^{\mu} \wedge \boldsymbol{e}^{\nu} \\
& + \frac{1}{2(x_\nu^2 - x_\mu^2)} \left(x_\nu \frac{\partial Q_T}{\partial x_\mu} - x_\mu \frac{\partial Q_T}{\partial x_\nu} \right) \boldsymbol{e}^{\hat{\mu}} \wedge \boldsymbol{e}^{\hat{\nu}}, \\
{}^{(0)}\boldsymbol{\Omega}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} &= \frac{1}{2(x_\nu^2 - x_\mu^2)} \left(x_\nu \frac{\partial Q_T}{\partial x_\mu} - x_\mu \frac{\partial Q_T}{\partial x_\nu} \right) \boldsymbol{e}^{\mu} \wedge \boldsymbol{e}^{\nu} \\
& + \frac{1}{2(x_\nu^2 - x_\mu^2)} \left(x_\mu \frac{\partial Q_T}{\partial x_\mu} - x_\nu \frac{\partial Q_T}{\partial x_\nu} \right) \boldsymbol{e}^{\hat{\mu}} \wedge \boldsymbol{e}^{\hat{\nu}}, \\
{}^{(0)}\boldsymbol{\Omega}_{\mu\hat{\nu}} &= \frac{1}{2(x_\nu^2 - x_\mu^2)} \left(x_\mu \frac{\partial Q_T}{\partial x_\mu} - x_\nu \frac{\partial Q_T}{\partial x_\nu} \right) \boldsymbol{e}^{\mu} \wedge \boldsymbol{e}^{\hat{\nu}} \\
& + \frac{1}{2(x_\mu^2 - x_\nu^2)} \left(x_\mu \frac{\partial Q_T}{\partial x_\nu} - x_\nu \frac{\partial Q_T}{\partial x_\mu} \right) \boldsymbol{e}^{\nu} \wedge \boldsymbol{e}^{\hat{\mu}}, \\
{}^{(0)}\boldsymbol{\Omega}_{\mu\hat{\mu}} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q_T}{\partial x_\mu^2} \boldsymbol{e}^{\mu} \wedge \boldsymbol{e}^{\hat{\mu}} \\
& + \sum_{\substack{\gamma \\ \gamma \neq \mu}} \frac{1}{x_\mu^2 - x_\gamma^2} \left(x_\mu \frac{\partial Q_T}{\partial x_\gamma} - x_\gamma \frac{\partial Q_T}{\partial x_\mu} \right) \boldsymbol{e}^{\gamma} \wedge \boldsymbol{e}^{\hat{\gamma}},
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

kde funkce $Q_T \equiv \sum_\mu Q_\mu$.

4.2.3 Ricciho tenzor

Ricciho tenzor je dán vztahem

$$ {}^{(i)}\mathbf{Ric} = {}^{(i)}\Omega_{mn}{}^{m}{}_{k}\boldsymbol{e}^{n}\boldsymbol{e}^{k}. \tag{4.31} $$

Jeho nenulové komponenty jsou pro $\mu \neq \nu$ rovny

$$ \begin{aligned} {}^{(i)}\mathrm{Ric}_{\mu\nu} = &\sum_{\substack{\rho \\ \rho\neq\mu,\nu}} \frac{3x_\mu x_\nu}{(x_\mu^2 - x_\rho^2)(x_\nu^2 - x_\rho^2)} \sqrt{Q_\mu Q_\nu} \frac{A_\rho^{(i)}\big(A_\mu^{(i)} + A_\nu^{(i)}\big) - 2A_\mu^{(i)}A_\nu^{(i)}}{{A_\rho^{(i)}}^2} \\ &+ \sum_{\substack{\rho \\ \rho\neq\mu,\nu}} \frac{3x_\mu x_\nu(2x_\rho^2 - x_\mu^2 - x_\nu^2)}{(x_\mu^2 - x_\rho^2)(x_\nu^2 - x_\rho^2)} \sqrt{Q_\mu Q_\nu} \frac{A_{\mu\nu}^{(i-1)}}{A_\rho^{(i)}}, \end{aligned} \tag{4.32} $$

$$ \begin{aligned} {}^{(i)}\mathrm{Ric}_{\hat\mu\hat\nu} = &\frac{x_\mu^2}{(x_\mu^2 - x_\nu^2)^2} \sqrt{Q_\mu Q_\nu} \frac{4{A_\mu^{(i)}}^3 - 3A_\nu^{(i)}{A_\mu^{(i)}}^2 - {A_\nu^{(i)}}^3}{A_\mu^{(i)}{A_\nu^{(i)}}^2} \\ &+ \frac{x_\nu^2}{(x_\mu^2 - x_\nu^2)^2} \sqrt{Q_\mu Q_\nu} \frac{4{A_\nu^{(i)}}^3 - 3A_\mu^{(i)}{A_\nu^{(i)}}^2 - {A_\mu^{(i)}}^3}{A_\nu^{(i)}{A_\mu^{(i)}}^2} \\ &+ \sum_{\substack{\rho \\ \rho\neq\mu,\nu}} \frac{2x_\mu^2}{(x_\mu^2 - x_\rho^2)(x_\mu^2 - x_\nu^2)} \sqrt{Q_\mu Q_\nu} \frac{{A_\mu^{(i)}}^3 - {A_\rho^{(i)}}^3}{A_\mu^{(i)}A_\nu^{(i)}A_\rho^{(i)}} \\ &+ \sum_{\substack{\rho \\ \rho\neq\mu,\nu}} \frac{2x_\nu^2}{(x_\nu^2 - x_\rho^2)(x_\nu^2 - x_\mu^2)} \sqrt{Q_\mu Q_\nu} \frac{{A_\nu^{(i)}}^3 - {A_\rho^{(i)}}^3}{A_\mu^{(i)}A_\nu^{(i)}A_\rho^{(i)}}, \end{aligned} \tag{4.33} $$

$$ \begin{aligned} {}^{(i)}\mathrm{Ric}_{\mu\mu} = &-\frac{1}{2}Q_{\mu,\mu\mu} - \sum_{\substack{\rho \\ \rho\neq\mu}} \left[\frac{3x_\mu^2}{(x_\mu^2 - x_\rho^2)^2} Q_\rho \frac{A_\mu^{(i)}}{A_\rho^{(i)}} + \frac{x_\rho^2}{(x_\mu^2 - x_\rho^2)^2} Q_\rho \frac{{A_\rho^{(i)}}^3}{{A_\mu^{(i)}}^3}\right] \\ &+ \sum_{\substack{\rho \\ \rho\neq\mu}} \left[\frac{x_\mu}{x_\rho^2 - x_\mu^2} Q_{\mu,\mu} \frac{A_\mu^{(i)}}{A_\rho^{(i)}} + \frac{x_\rho}{x_\mu^2 - x_\rho^2} Q_{\rho,\rho} \frac{{A_\rho^{(i)}}^2}{{A_\mu^{(i)}}^2}\right] \\ &+ \sum_{\substack{\rho \\ \rho\neq\mu}} \left[\frac{x_\mu^2}{(x_\mu^2 - x_\rho^2)^2} Q_\rho \left(\frac{{A_\rho^{(i)}}^2}{{A_\mu^{(i)}}^2} + \frac{A_\mu^{(i)}}{A_\rho^{(i)}}\right) + \frac{2x_\rho^2}{(x_\mu^2 - x_\rho^2)^2} Q_\mu \frac{A_\mu^{(i)}}{A_\rho^{(i)}}\right] \\ &+ \sum_{\substack{\rho \\ \rho\neq\mu}} \left[\frac{6x_\mu^2}{(x_\mu^2 - x_\rho^2)^2} Q_\mu \frac{A_\mu^{(i)}}{{A_\rho^{(i)}}^2}\big(A_\rho^{(i)} - A_\mu^{(i)}\big)\right. \\ &\left.+ \frac{3x_\rho^2}{(x_\mu^2 - x_\rho^2)^2} Q_\rho \frac{{A_\rho^{(i)}}^2}{{A_\mu^{(i)}}^3}\big(A_\mu^{(i)} - A_\rho^{(i)}\big)\right] \\ &+ \sum_{\substack{\rho,\gamma \\ \rho\neq\mu \\ \gamma\neq\mu,\rho}} \frac{2x_\gamma^2}{(x_\rho^2 - x_\gamma^2)(x_\gamma^2 - x_\mu^2)} Q_\gamma \frac{{A_\gamma^{(i)}}^3}{A_\rho^{(i)}{A_\mu^{(i)}}^2}, \end{aligned} \tag{4.34} $$

$$
\begin{aligned}
{}^{(i)}\mathrm{Ric}_{\hat\mu\hat\mu} = & -\frac{1}{2}Q_{\mu,\mu\mu} - \sum_{\substack{\rho\\ \rho\neq\mu}}\left[\frac{3x_\mu^2}{(x_\mu^2-x_\rho^2)^2}Q_\rho\frac{A_\mu^{(i)}}{A_\rho^{(i)}} + \frac{x_\rho^2}{(x_\mu^2-x_\rho^2)^2}Q_\rho\frac{{A_\rho^{(i)}}^3}{{A_\mu^{(i)}}^3}\right] \\
& + \sum_{\substack{\rho\\ \rho\neq\mu}}\left[\frac{x_\mu}{x_\rho^2-x_\mu^2}Q_{\mu,\mu}\frac{A_\mu^{(i)}}{A_\rho^{(i)}} + \frac{x_\rho}{x_\mu^2-x_\rho^2}Q_{\rho,\rho}\frac{{A_\rho^{(i)}}^2}{{A_\mu^{(i)}}^2}\right] \\
& + \sum_{\substack{\rho\\ \rho\neq\mu}}\left[\frac{x_\mu^2}{(x_\mu^2-x_\rho^2)^2}Q_\rho\left(\frac{{A_\rho^{(i)}}^2}{{A_\mu^{(i)}}^2} + \frac{A_\mu^{(i)}}{A_\rho^{(i)}}\right) + \frac{2x_\rho^2}{(x_\mu^2-x_\rho^2)^2}Q_\mu\frac{{A_\rho^{(i)}}^2}{{A_\mu^{(i)}}^2}\right] \\
& + \sum_{\substack{\rho\\ \rho\neq\mu}}\frac{3x_\rho^2}{(x_\mu^2-x_\rho^2)^2}Q_\rho\frac{{A_\rho^{(i)}}^2}{{A_\mu^{(i)}}^3}\left(A_\mu^{(i)}-A_\rho^{(i)}\right) \\
& + \sum_{\substack{\rho,\gamma\\ \rho\neq\mu\\ \gamma\neq\mu,\rho}}\frac{2x_\gamma^2}{(x_\rho^2-x_\gamma^2)(x_\gamma^2-x_\mu^2)}Q_\gamma\frac{{A_\gamma^{(i)}}^3}{A_\rho^{(i)}{A_\mu^{(i)}}^2},
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

kde jsme pro $\mu\neq\nu$ označili funkci

$$
A_{\mu\nu}^{(i-1)} \equiv \sum_{\substack{\nu_1,\dots,\nu_i\\ \nu_1<\dots<\nu_i\\ \nu_j\neq\mu,\nu}} x_{\nu_1}^2\dots x_{\nu_i}^2 = \frac{A_\mu^{(i)}-A_\nu^{(i)}}{x_\nu^2-x_\mu^2}. \tag{4.36}
$$

Ricciho skalár ${}^{(i)}\mathcal{R} = {}^{(i)}\mathbf{Ric}^{\boldsymbol{n}}{}_{\boldsymbol{n}}$ je roven

$$
\begin{aligned}
{}^{(i)}\mathcal{R} = \sum_{\mu}\Bigg\{ & -Q_{\mu,\mu\mu}A_\mu^{(i)} - \sum_{\substack{\rho\\ \rho\neq\mu}}\left[\frac{6x_\mu^2}{(x_\mu^2-x_\rho^2)^2}Q_\rho\frac{{A_\mu^{(i)}}^2}{A_\rho^{(i)}} + \frac{2x_\rho^2}{(x_\mu^2-x_\rho^2)^2}Q_\rho\frac{{A_\rho^{(i)}}^3}{{A_\mu^{(i)}}^2}\right] \\
& + \sum_{\substack{\rho\\ \rho\neq\mu}}\left[\frac{2x_\mu}{x_\rho^2-x_\mu^2}Q_{\mu,\mu}\frac{{A_\mu^{(i)}}^2}{A_\rho^{(i)}} + \frac{2x_\rho}{x_\mu^2-x_\rho^2}Q_{\rho,\rho}\frac{{A_\rho^{(i)}}^2}{A_\mu^{(i)}}\right] \\
& + \sum_{\substack{\rho\\ \rho\neq\mu}}\left[\frac{2x_\mu^2}{(x_\mu^2-x_\rho^2)^2}Q_\rho\left(\frac{{A_\mu^{(i)}}^2}{A_\rho^{(i)}} + \frac{{A_\rho^{(i)}}^2}{A_\mu^{(i)}}\right) + \frac{2x_\rho^2}{(x_\mu^2-x_\rho^2)^2}Q_\mu\left(\frac{{A_\mu^{(i)}}^2}{A_\rho^{(i)}} + \frac{{A_\rho^{(i)}}^2}{A_\mu^{(i)}}\right)\right] \\
& + \sum_{\substack{\rho\\ \rho\neq\mu}}\left[\frac{6x_\mu^2}{(x_\mu^2-x_\rho^2)^2}Q_\mu\frac{{A_\mu^{(i)}}^2}{{A_\rho^{(i)}}^2}\left(A_\rho^{(i)}-A_\mu^{(i)}\right) + \frac{6x_\rho^2}{(x_\mu^2-x_\rho^2)^2}Q_\rho\frac{{A_\rho^{(i)}}^2}{{A_\mu^{(i)}}^2}\left(A_\mu^{(i)}-A_\rho^{(i)}\right)\right] \\
& + \sum_{\substack{\rho,\gamma\\ \rho\neq\mu\\ \gamma\neq\mu,\rho}}\frac{4x_\gamma^2}{(x_\rho^2-x_\gamma^2)(x_\gamma^2-x_\mu^2)}Q_\gamma\frac{{A_\gamma^{(i)}}^3}{A_\mu^{(i)}A_\rho^{(i)}}\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

Pro případ $i=0$ má, ve shodě s [27], Ricciho tenzor pouze diagonální komponenty

$$
{}^{(0)}\mathrm{Ric}_{\mu\mu} = {}^{(0)}\mathrm{Ric}_{\hat\mu\hat\mu} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 Q_T}{\partial x_\mu^2} + \sum_{\substack{\gamma\\ \gamma\neq\mu}}\frac{1}{x_\gamma^2-x_\mu^2}\left(x_\gamma\frac{\partial Q_T}{\partial x_\gamma} - x_\mu\frac{\partial Q_T}{\partial x_\mu}\right) \tag{4.38}
$$

a Ricciho skálár má rovněž jednoduchý tvar

$$
{}^{(0)}\mathcal{R} = -\sum_\mu \frac{X_\mu''}{U_\mu}. \tag{4.39}
$$

Jak vidíme, všechny vztahy pro obecné i jsou velmi komplikované a významně se redukují pouze v případě Kerr–NUT–AdS prostoročasu $i = 0$, kdy jedině má Ricciho tenzor pouze diagonální komponenty ve společné ortogonální bázi všech metrik. Vyšší metriky tuto vlastnost nemají.

5. Separabilita fyzikálních rovnic v Kerr–NUT–(A)dS a příbuzných prostorech

V této kapitole ukážeme, že obecné podmínky z kapitol 1–3 mohou být splněny v Kerr–NUT–(A)dS prostoročase vícedimenzionální černé díry a jemu příbuzných prostorech zavedených v kapitole 4. Nalezneme explicitní tvar elektromagnetického pole, které zachovává integrabilitu pohybu nabité částice. Dále ověříme, že pouze v případě Kerr–NUT-(A)dS prostoročasu spolu všechny nabité operátorové pozorovatelné komutují a zjistíme, že tvar příslušného elektromagnetického pole je stejný, jako tvar pole zachovávajícího komutativitu klasických nabitých pozorovatelných. Pro toto pole nalezneme řešení nabité Hamilton–Jacobiho a Klein–Gordonovy rovnice v separovaném tvaru.

5.1 Elektromagnetické pole z podmínek komutace klasických pozorovatelných

Studujme nyní podmínky komutace nabitých klasických pozorovatelných ${}^{e}K_j$ a ${}^{e}L_j$ tvaru (3.1) s Killingovými tenzory ${}^{(j)}\boldsymbol{k}$ a Killingovými vektory ${}^{(j)}\boldsymbol{l}$ metrik ${}^{(i)}\boldsymbol{g}$ tvaru (4.11). Vzhledem k tomu, že nenabité pozorovatelné K_j a L_j vzájemně komutují (viz kapitola 4.1), musí dle kapitoly 3.3 pole $\boldsymbol{A}$ splňovat podmínky (3.7) a (3.8).

Definujme pomocnou nenormovanou bázi 1-forem a duální bázi vektorů

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon}^{\mu} &= \sqrt{Q_\mu}\,\boldsymbol{e}^{\mu} = \mathbf{d}x_\mu, \\
\boldsymbol{\epsilon}^{\hat{\mu}} &= \frac{1}{\sqrt{Q_\mu}}\boldsymbol{e}^{\hat{\mu}} = \sum_k A_\mu^{(k)}\mathbf{d}\psi_k, \\
\boldsymbol{\epsilon}_{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{Q_\mu}}\boldsymbol{e}_{\mu} = \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x_\mu}, \\
\boldsymbol{\epsilon}_{\hat{\mu}} &= \sqrt{Q_\mu}\,\boldsymbol{e}_{\hat{\mu}} = \sum_k \frac{\left(-x_\mu^2\right)^{n-1-k}}{U_\mu}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\psi_k}.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Díky (4.8) můžeme napsat rovněž inverzní vztahy

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d}x_\mu &= \boldsymbol{\epsilon}^{\mu}, \\
\mathbf{d}\psi_k &= \sum_\mu \frac{\left(-x_\mu^2\right)^{n-1-k}}{U_\mu}\boldsymbol{\epsilon}^{\hat{\mu}}, \\
\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial} x_\mu} &= \boldsymbol{\epsilon}_{\mu}, \\
\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\psi_k} &= \sum_\mu A_\mu^{(k)}\boldsymbol{\epsilon}_{\hat{\mu}}.
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Označme A_μ, $A_{\hat{\mu}}$ složky pole $\boldsymbol{A}$ vzhledem k této bázi, tj.

$$
\boldsymbol{A} = \sum_\mu \left(A_\mu\boldsymbol{\epsilon}^{\mu} + A_{\hat{\mu}}\boldsymbol{\epsilon}^{\hat{\mu}}\right).
\tag{5.3}
$$

Killingovy tenzory a vektory mají v této bázi tvar

$$
\begin{aligned}
{}^{(j)}\boldsymbol{k} &= \sum_{\mu} A_{\mu}^{(j)}\Big(Q_\mu \boldsymbol{\epsilon}_\mu \boldsymbol{\epsilon}_\mu + \frac{1}{Q_\mu}\boldsymbol{\epsilon}_{\hat{\mu}}\boldsymbol{\epsilon}_{\hat{\mu}}\Big),\\
{}^{(j)}\boldsymbol{l} &= \sum_{\mu} A_{\mu}^{(j)}\boldsymbol{\epsilon}_{\hat{\mu}}.
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Podmínka $\pounds_{{}^{(j)}\boldsymbol{l}}\boldsymbol{A} = 0$ je ekvivalentní nezávislosti složek A_μ a $A_{\hat{\mu}}$ na ψ_j, viz (4.9). Předpokládejme tedy závislost pouze na souřadnicích $x_1,\ldots,x_n$ a hledejme, co dále platí pro pole $\boldsymbol{A}$ z podmínek $\mathcal{S}\big({}^{(j)}\boldsymbol{k}\cdot(\mathbf{d}\boldsymbol{A})\cdot{}^{(k)}\boldsymbol{k}\big) = 0$. Pro vnější derivaci pole $\boldsymbol{A}$ dostáváme

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d}\boldsymbol{A} &= \sum_{\mu,\nu} A_{\mu,\nu}\boldsymbol{\epsilon}^\nu\wedge\boldsymbol{\epsilon}^\mu + \sum_{\mu,\nu} A_{\hat{\mu},\nu}\boldsymbol{\epsilon}^\nu\wedge\boldsymbol{\epsilon}^{\hat{\mu}} + \sum_{\mu} A_{\hat{\mu}}\mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}^{\hat{\mu}}\\
&= \sum_{\mu,\nu} A_{\mu,\nu}\boldsymbol{\epsilon}^\nu\wedge\boldsymbol{\epsilon}^\mu + \sum_{\substack{\mu,\nu\\ \nu\neq\mu}}\bigg(A_{\hat{\mu},\nu} + A_{\hat{\mu}}\frac{2x_\nu}{x_\nu^2 - x_\mu^2}\bigg)\boldsymbol{\epsilon}^\nu\wedge\boldsymbol{\epsilon}^{\hat{\mu}}\\
&\quad + \sum_{\nu}\bigg(A_{\hat{\nu},\nu} - \sum_{\substack{\mu\\ \mu\neq\nu}} A_{\hat{\mu}}\frac{2x_\nu}{x_\nu^2 - x_\mu^2}\bigg)\boldsymbol{\epsilon}^\nu\wedge\boldsymbol{\epsilon}^{\hat{\nu}},
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

kde jsem dosadili[1]

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}^\mu &= 0,\\
\mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon}^{\hat{\mu}} &= \sum_{\substack{\nu\\ \nu\neq\mu}}\frac{2x_\nu}{x_\nu^2 - x_\mu^2}\big(\boldsymbol{\epsilon}^\nu\wedge\boldsymbol{\epsilon}^{\hat{\mu}} - \boldsymbol{\epsilon}^\nu\wedge\boldsymbol{\epsilon}^{\hat{\nu}}\big).
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

S využitím (5.5) a vztahů

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}\big({}^{(j)}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^\nu\wedge\boldsymbol{\epsilon}^\mu\cdot{}^{(k)}\boldsymbol{k}\big) &= \frac{1}{2}Q_\mu Q_\nu\big(A_\nu^{(j)}A_\mu^{(k)} - A_\mu^{(j)}A_\nu^{(k)}\big)\boldsymbol{\epsilon}_\nu\vee\boldsymbol{\epsilon}_\mu,\\
\mathcal{S}\big({}^{(j)}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^\nu\wedge\boldsymbol{\epsilon}^{\hat{\mu}}\cdot{}^{(k)}\boldsymbol{k}\big) &= \frac{1}{2}\frac{Q_\nu}{Q_\mu}\big(A_\nu^{(j)}A_\mu^{(k)} - A_\mu^{(j)}A_\nu^{(k)}\big)\boldsymbol{\epsilon}_\nu\vee\boldsymbol{\epsilon}_{\hat{\mu}},\\
\mathcal{S}\big({}^{(j)}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^\nu\wedge\boldsymbol{\epsilon}^{\hat{\nu}}\cdot{}^{(k)}\boldsymbol{k}\big) &= 0
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

můžeme podmínku $\mathcal{S}\big({}^{(j)}\boldsymbol{k}\cdot(\mathrm{d}\boldsymbol{A})\cdot{}^{(k)}\boldsymbol{k}\big) = 0$ pro všechna $j,k = 0,\ldots,n-1$ přepsat na

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{\substack{\mu,\nu\\ \nu\neq\mu}}\frac{1}{2}Q_\mu Q_\nu\big(A_\nu^{(j)}A_\mu^{(k)} - A_\mu^{(j)}A_\nu^{(k)}\big)A_{\mu,\nu}\boldsymbol{\epsilon}_\nu\vee\boldsymbol{\epsilon}_\mu\\
&\quad + \sum_{\substack{\mu,\nu\\ \nu\neq\mu}}\frac{1}{2}\frac{Q_\nu}{Q_\mu}\big(A_\nu^{(j)}A_\mu^{(k)} - A_\mu^{(j)}A_\nu^{(k)}\big)\bigg(A_{\hat{\mu},\nu} + A_{\hat{\mu}}\frac{2x_\nu}{x_\nu^2 - x_\mu^2}\bigg)\boldsymbol{\epsilon}_\nu\vee\boldsymbol{\epsilon}_{\hat{\mu}},
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

nebo ekvivalentně jako[2]

$$
A_{[\mu,\nu]} = 0, \tag{5.9}
$$

$$
\big(A_{\hat{\mu}}(x_\mu^2 - x_\nu^2)\big)_{,\nu} = 0 \tag{5.10}
$$

[1] Tyto vztahy lze odvodit vnější derivací (5.1), zpětným dosazením (5.2) a využitím identit (B.3).

[2] Jak lze snadno ověřit např. speciální volbou $j = 0$, $k = 1$.

pro všechna $\mu, \nu = 1, \dots, n$.

Rovnice (5.9) znamená, že vnější derivace 1-formy $\sum_\mu A_\mu \boldsymbol{\epsilon}^\mu$ vymizí, a tedy k ní lokálně existuje potenciál $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_n)$

$$\sum_\mu A_\mu \boldsymbol{\epsilon}^\mu = \mathbf{d}\varphi. \tag{5.11}$$

Pro pevné μ vyřešíme rovnice (5.10) postupným dosazováním řešení rovnice pro $\nu = 1$ do rovnice pro $\nu = 2$ atd. až do $\nu = n$ (rovnice $\nu = \mu$ je splněna triviálně). Dostaneme tak

$$A_{\hat{\mu}} = \frac{f_\mu(x_\mu)}{U_\mu}. \tag{5.12}$$

Celkem tedy podmínky (3.7)–(3.8) omezují pole $\boldsymbol{A}$ na tvar

$$\boldsymbol{A} = \mathbf{d}\varphi + \sum_\mu \frac{f_\mu(x_\mu)}{U_\mu} \boldsymbol{\epsilon}^{\hat{\mu}}, \tag{5.13}$$

kde funkce f_μ závisí pouze na souřadnici x_μ. Funkce φ je kalibračně triviální. Pole (5.13) je tedy nejobecnější elektromagnetické pole zachovávajicí úplnou integrabilitu systému nabité částice na varietě s metrikou ${}^{(i)}\boldsymbol{g}$.

Tenzor elektromagnetického pole $\boldsymbol{F} \equiv \mathbf{d}\boldsymbol{A}$ odpovídající tomuto poli $\boldsymbol{A}$ získáme snadno s využitím (5.5) a identit (B.2), (B.5)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \sum_\nu \Bigg(A_{\hat{\nu},\nu} - \sum_{\substack{\mu \\ \mu \neq \nu}} A_{\hat{\mu}} \frac{2x_\nu}{x_\nu^2 - x_\mu^2} \Bigg) \boldsymbol{\epsilon}^\nu \wedge \boldsymbol{\epsilon}^{\hat{\nu}} \\
&= \sum_\nu \Bigg(\frac{f'_\nu}{U_\nu} + \left(\frac{1}{U_\nu} \right)_{,\nu} f_\nu - \sum_{\substack{\mu \\ \mu \neq \nu}} \frac{f_\mu}{U_\mu} \frac{2x_\nu}{x_\nu^2 - x_\mu^2} \Bigg) \boldsymbol{\epsilon}^\nu \wedge \boldsymbol{\epsilon}^{\hat{\nu}} \\
&= \sum_\nu \Bigg(\frac{f'_\nu}{U_\nu} + 2x_\nu \sum_{\substack{\mu \\ \mu \neq \nu}} \frac{1}{U_\mu} \frac{f_\mu - f_\nu}{x_\mu^2 - x_\nu^2} \Bigg) \boldsymbol{\epsilon}^\nu \wedge \boldsymbol{\epsilon}^{\hat{\nu}}.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Poznamenejme, že tenzor elektromagnetického pole (5.14) má stejnou algebraickou strukturu jako uzavřený konformní Killing–Yanův tenzor (nazývaný též hlavní Killing–Yanův tenzor) kovariantní derivace ${}^{(0)}\boldsymbol{\nabla}$, který generuje všechny skryté symetrie (Killingovy tenzory všech řádů) Kerr–NUT–(A)dS prostoročasu. Hlavní Killing–Yanův tenzor lze v této bázi vyjádřit jako $\boldsymbol{h} = \sum_\nu x_\nu \boldsymbol{\epsilon}^\nu \wedge \boldsymbol{\epsilon}^{\hat{\nu}}$, viz [10]. Pod stejnou algebraickou strukturou míníme, že $\boldsymbol{h}$ má stejné vlastní prostory jako tenzor elektromagnetického pole (5.14). Dle [19] je navíc $\boldsymbol{A}$ tvaru (5.13) jediné pole, které připouští ${}^{(j)}\boldsymbol{l}$-symetrický (tj. ψ_j nezávislý) tenzor $\boldsymbol{F}$ s algebraickou strukturou hlavního Killing–Yanova tenzoru.

Všimněme si, že pro pole $\boldsymbol{A}$ tvaru (5.13), kovariantní derivaci ${}^{(i)}\boldsymbol{\nabla}$ a Killingův tenzor ${}^{(j)}\boldsymbol{k}$ je třetí člen v druhém vyjádření operátoru ${}^{e}\mathsf{K}$ v (3.12) čistě kalibrační, neboť

$${}^{(i)}\boldsymbol{\nabla} \cdot \big({}^{(j)}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{A} \big) = {}^{(i)}\mathsf{K}_j \varphi + {}^{(i)}\mathfrak{g}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\partial} \cdot \left({}^{(i)}\mathfrak{g}^{\frac{1}{2}} \sum_\mu \frac{f_\mu}{U_\mu} {}^{(j)}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{\hat{\mu}} \right) = {}^{(i)}\mathsf{K}_j \varphi, \tag{5.15}$$

kde ${}^{(i)}\mathfrak{g}^{\frac{1}{2}}$ je objemový element metriky ${}^{(i)}\boldsymbol{g}$ v bázi $\mathbf{d}x^a$, $\boldsymbol{\partial}$ je souřadnicová kovariantní derivace[3] spojená se souřadnicemi x^a a operátor ${}^{(i)}\mathsf{K}_j$ je definován vztahem (5.25). V první rovnosti jsme využili nezávislosti divergence vektorové hustoty na volbě beztorzní kovariantní derivace a v druhé faktu, že obsah závorky je pouze lineární kombinací vektorů $\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}\psi_k}$ s koeficienty nezávislými na souřadnicích ψ_l.

Speciálním případem (5.13) je pole

$$\boldsymbol{A} = \frac{e}{q}\boldsymbol{\xi}, \tag{5.16}$$

kde 1-forma $\boldsymbol{\xi} \equiv {}^{(i)}\boldsymbol{g} \cdot {}^{(i)}\boldsymbol{l} = \sum_\mu Q_\mu \boldsymbol{\epsilon}^{\hat{\mu}}$ pro libovolné $i = 0, \ldots, n-1$. Složky $A_{\hat{\mu}}$ jsou tedy dány funkcemi (viz (5.12))

$$f_\mu = \frac{e}{q} X_\mu. \tag{5.17}$$

Komutace pozorovatelných a separabilita fyzikálních rovnic pro toto killingovské pole $\boldsymbol{A}$ byla detailněji studována v [20] a [21].

Dalším speciálním případem (5.13) je pole splňující vakuové Maxwellovy rovnice ${}^{(i)}\boldsymbol{\nabla} \cdot \big({}^{(i)}\boldsymbol{g}^{\mathbf{-1}} \cdot \boldsymbol{F}\big) = 0$. Pro případ $i = 0$ má dle [19] pole $\boldsymbol{A}$ tvar

$$\boldsymbol{A} = \sum_\mu \frac{1}{U_\mu}\bigg(e_\mu x_\mu + \sum_k a_k \big(-x_\mu^2\big)^{n-1-k}\bigg)\boldsymbol{\epsilon}^{\hat{\mu}}, \tag{5.18}$$

kde a e_μ a a_k jsou konstanty. Druhý člen v závorce však přispívá k $\boldsymbol{A}$ pouze gradientem, a konstanty a_k jsou tedy kalibračně triviální. Netriviální část odpovídá volbě

$$f_\mu = e_\mu x_\mu. \tag{5.19}$$

5.2 Separace nabité Hamilton–Jacobiho rovnice

Uvažujme pole $\boldsymbol{A}$ ve tvaru (5.13) s kalibrací $\varphi = 0$. Pohyb nabité částice v tomto poli můžeme vyšetřovat současně pro všechny metriky ${}^{(i)}\boldsymbol{g}$ ze sady metrik (4.11), neboť nabité pozorovatelné ${}^{e}K_j$ a ${}^{e}L_j$ jsou vzájemně komutující nezávislé integrály pohybu ve všech prostorech ${}^{(i)}\boldsymbol{g}$ a příslušný hamiltonián ${}^{e}H_i$ je vždy roven některé pozorovatelných ${}^{e}K_j$ (konkrétně ${}^{e}K_i$).

V následující části se pokusíme řešit rovnice ${}^{e}K_j = \Xi_j$ a ${}^{e}L_j = \Psi_j$, kde Ξ_j a Ψ_j jsou konstanty pohybu. Nahradíme-li v těchto rovnicích $\boldsymbol{p} \equiv \mathbf{d}S$, dostaneme

$$\big(\mathbf{d}S - q\boldsymbol{A}\big) \cdot {}^{(j)}\boldsymbol{k} \cdot \big(\mathbf{d}S - q\boldsymbol{A}\big) = \Xi_j, \tag{5.20}$$

$${}^{(j)}\boldsymbol{l} \cdot \mathbf{d}S = \Psi_j. \tag{5.21}$$

Rovnice (5.20) pro $j = i$ je přímo Hamilton–Jacobiho rovnice pro časově nezávislý hamiltonián ${}^{e}H_i$, kde časem máme na mysli parametr světočáry částice. Tvar těchto rovnic připouští separaci proměnných. Použijme následující ansatz pro akci

$$S = \sum_\mu S_\mu(x_\mu) + \sum_k \Psi_k \psi_k, \tag{5.22}$$

[3] Souřadnicová kovariantní derivace je definována vztahy $\boldsymbol{\partial}\mathbf{d}x^a = 0$ a $\boldsymbol{\partial}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial}x^a} = 0$.

kde S_μ jsou funkce pouze proměnné x_μ. Tento tvar akce již automaticky zajišťuje splnění rovnice (5.21). Dosazením (5.4), (5.13) pro $\varphi = 0$ a (5.22) do (5.20) dostaneme

$$\sum_\mu \frac{A_\mu^{(j)}}{U_\mu}\Big[\big(S'_\mu\big)^2 + \frac{1}{X_\mu}\big(\tilde{\Psi}_\mu - qf_\mu\big)^2\Big] = \Xi_j, \tag{5.23}$$

kde jsme označili $\tilde{\Psi}_\mu \equiv \sum_k \Psi_k\big(-x_\mu^2\big)^{n-1-k}$. S využitím (B.1) můžeme rovnici přepsat na obyčejné diferenciální rovnice pro funkce S_μ

$$\big(S'_\mu\big)^2 = \frac{\tilde{\Xi}_\mu}{X_\mu} - \frac{1}{X_\mu^2}\big(\tilde{\Psi}_\mu - qf_\mu\big)^2, \tag{5.24}$$

kde jsme označili $\tilde{\Xi}_\mu \equiv \sum_k \Xi_k\big(-x_\mu^2\big)^{n-1-k}$. Funkce S_μ jsou vztahem (5.24) určeny až na integrační konstantu. Výsledná akce S je shodná pro všechny metriky ${}^{(i)}\boldsymbol{g}$.

Pro $i = 0$ a killingovské pole $\boldsymbol{A} = \frac{e}{q}\boldsymbol{\xi}$ (tj. $f_\mu = \frac{e}{q}X_\mu$) byla rovnice (5.24) odvozena v [20]. My jsme však separaci provedli pro nejobecnější elektromagnetické pole (5.13) zachovávající úplnou integrabilitu.

5.3 Závislost operátorů na volbě kovariantní derivace

Zatímco klasické pozorovatelné K_j, L_j obsahují pouze Killingovy tenzory ${}^{(j)}\boldsymbol{k}$ a vektory ${}^{(j)}\boldsymbol{l}$, které jsou stejné pro všechny prostory ${}^{(i)}\boldsymbol{g}$ (viz kapitola 4.1), jejich operátorové analogie tvaru (2.17) závisejí navíc na konkrétní volbě kovariantní derivace. Uvažujme tedy pro prostory s metrikami ${}^{(i)}\boldsymbol{g}$ operátory

$$\begin{aligned}{}^{(i)}\mathsf{K}_j &\equiv -{}^{(i)}\boldsymbol{\nabla}\cdot{}^{(j)}\boldsymbol{k}\cdot{}^{(i)}\boldsymbol{\nabla},\\ {}^{(i)}\mathsf{L}_j &\equiv -\frac{\mathrm{i}}{2}\big[{}^{(j)}\boldsymbol{l}\cdot{}^{(i)}\boldsymbol{\nabla} + {}^{(i)}\boldsymbol{\nabla}\cdot{}^{(j)}\boldsymbol{l}\big].\end{aligned} \tag{5.25}$$

Vzájemné komutátory $[\![{}^{(i)}\mathsf{L}_j\,,\,{}^{(i)}\mathsf{L}_k]\!]$ a $[\![{}^{(i)}\mathsf{L}_j\,,\,{}^{(i)}\mathsf{K}_k]\!]$ jsou nulové pro libovolný index $i = 0,\dots,n-1$, viz kapitola 2.4. Komutátory $[\![{}^{(i)}\mathsf{K}_j\,,\,{}^{(i)}\mathsf{K}_k]\!]$ jsou však pro $i \neq 0$ obecně nenulové, jak se lze přesvědčit přímým ověřením neplatnosti podmínky (2.41) v nízkých dimenzích (bylo provedeno za pomoci počítače a softwaru pro algebraické manipulace). V obecné dimenzi jsou všechny tyto komutátory nulové pouze v případě $i = 0$ (Kerr–NUT–(A)dS prostoročas), viz explicitní výpočet v [16]. Speciálně je pak nulový i komutátor ${}^{(0)}\mathsf{K}_j$ s d'Alembertovým operátorem ${}^{(0)}\Box = {}^{(0)}\mathsf{K}_0$, což je zřejmé i z faktu, že pouze v tomto případě ($i = 0$) je Ricciho tenzor diagonální ve stejné bázi jako Killingovy tenzory ${}^{(j)}\boldsymbol{k}$ (viz kapitola 4.2.3), a platí tak postačující podmínka komutativity (2.49).

5.4 Elektromagnetické pole z podmínek komutace operátorů

Vzhledem k tomu, že nenabité operátory druhého řádu sestavené z Killingových tenzorů vzájemně komutují v obecné dimenzi pouze pro případ s kovariantní derivací ${}^{(0)}\boldsymbol{\nabla}$ (viz kapitola 5.3), budeme dále uvažovat pouze tuto derivaci a značení ${}^{(0)}$ pro stručnost zápisu vynecháme. Z komutace nabitých operátorů ${}^{e}\mathsf{K}_j$, ${}^{e}\mathsf{L}_j$ vyplývají dle kapitoly 3.6 pro pole $\boldsymbol{A}$ podmínky (3.17)–(3.19). První dvě z nich jsme již vyšetřovali v kapitole 5.1, omezují tvar pole $\boldsymbol{A}$ na (5.13). Podmínka (3.19) je již tímto polem automaticky splněna, jak lze ověřit s využitím (5.15) i bez uvážení kalibrační triviality φ

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\Big({}^{(j)}\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{d}\big(\boldsymbol{\nabla}\cdot\big(\boldsymbol{A}\cdot{}^{(k)}\boldsymbol{k}\big)\big)-(j\leftrightarrow k)\Big)=[\![\mathsf{K}_j\,,\mathsf{K}_k]\!]\varphi=0. \tag{5.26}$$

Pole (5.13)

$$\boldsymbol{A}=\mathbf{d}\varphi+\sum_\mu\frac{f_\mu(x_\mu)}{U_\mu}\boldsymbol{\epsilon}^{\hat\mu}$$

je tedy rovněž nejobecnější elektromagnetické pole, pro něž nabité operátory (3.12) s Killingovými tenzory ${}^{(j)}\boldsymbol{k}$, Killingovými vektory ${}^{(j)}\boldsymbol{l}$ a metrickou kovariantní derivací Kerr–NUT–(A)dS prostoročasu navzájem komutují.

5.5 Separace nabité Klein–Gordonovy rovnice

Uvažujme pole ve tvaru (5.13) s kalibrací $\varphi=0$. Nabité operátory ${}^{e}\mathsf{K}_j$, ${}^{e}\mathsf{L}_j$ spolu navzájem komutují a mají tedy společný systém vlastních funkcí ϕ, které splňují

$$^{e}\mathsf{K}_j\phi=\Xi_j\phi, \tag{5.27}$$

$$^{e}\mathsf{L}_j\phi=\Psi_j\phi, \tag{5.28}$$

kde Ξ_j a Ψ_j jsou vlastní čísla. Rovnice (5.27) pro $j=0$ je Klein–Gordonova rovnice, neboť ${}^{e}\mathsf{K}_0={}^{e}\Box$. Vlastní funkce ϕ budeme hledat v separovaném tvaru

$$\phi=\prod_\mu R_\mu(x_\mu)\prod_k\exp\big(\mathrm{i}\Psi_k\psi_k\big), \tag{5.29}$$

kde R_μ jsou funkce pouze proměnné x_μ. Tento tvar ϕ již automaticky splňuje (5.28).

Abychom nalezli funkce R_μ z rovnice (5.27), vyjádříme nejprve operátory ${}^{e}\mathsf{K}_j$ v souřadnicích x^a. Při výpočtu vyjdeme z druhého tvaru operátoru ${}^{e}\mathsf{K}$ v (3.12). Díky (5.15) a kalibraci $\varphi=0$ je třetí člen tohoto operátoru nulový. Zbylé členy operátoru spočteme dosazením (5.4) a (5.13)

$$\begin{aligned}
-\boldsymbol{\nabla}\cdot{}^{(j)}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}&=-\mathfrak{g}^{-\frac12}\boldsymbol{\partial}\cdot\mathfrak{g}^{\frac12}\,{}^{(j)}\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{d}\\
&=-\sum_\mu\frac{A^{(j)}_\mu}{U_\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x_\mu}X_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\left[\sum_k\big(-x_\mu^2\big)^{n-1-k}\frac{\partial}{\partial\psi_k}\right]^2\right],\\
2\mathrm{i}q\boldsymbol{A}\cdot{}^{(j)}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}&=2\mathrm{i}q\sum_\mu\frac{A^{(j)}_\mu}{U_\mu}\frac{f_\mu}{X_\mu}\sum_k\big(-x_\mu^2\big)^{n-1-k}\frac{\partial}{\partial\psi_k},\\
q^2\boldsymbol{A^2}\bullet{}^{(j)}\boldsymbol{k}&=q^2\sum_\mu\frac{A^{(j)}_\mu}{U_\mu}\frac{f_\mu^2}{X_\mu},
\end{aligned} \tag{5.30}$$

kde $\boldsymbol{\partial}$ je souřadnicová kovariantní derivace spojená se souřadnicemi x^a a $\mathfrak{g}^{\frac12}$ je objemový element metriky ${}^{(0)}\boldsymbol{g}$ v bázi $\mathbf{d}x^a$, který je dle [16] roven funkci U definované vztahem (B.7). Při výpočtu prvního členu jsme využili nezávislosti divergence vektorové hustoty na volbě beztorzní kovariantní derivace a identity (B.4). Celkový operátor můžeme zapsat ve tvaru

$$^{e}\mathsf{K}_j=\sum_\mu\frac{A^{(j)}_\mu}{U_\mu}\left[-\frac{\partial}{\partial x_\mu}X_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+\frac{1}{X_\mu}\left[-\mathrm{i}\sum_k\big(-x_\mu^2\big)^{n-1-k}\frac{\partial}{\partial\psi_k}-qf_\mu\right]^2\right]. \tag{5.31}$$

S využitím (5.29) a (5.31) lze rovnici (5.27) přepsat do tvaru

$$\sum_\mu \frac{A_\mu^{(j)}}{U_\mu}\left[-\left(X_\mu R_\mu'\right)' + \frac{1}{X_\mu}\left(\tilde{\Psi}_\mu - q f_\mu\right)^2 R_\mu\right] \prod_{\substack{\nu \\ \nu\neq\mu}} R_\nu = \Xi_j \prod_\nu R_\nu, \tag{5.32}$$

kde jsme označili $\tilde{\Psi}_\mu \equiv \sum_k \Psi_k \left(-x_\mu^2\right)^{n-1-k}$. Díky identitě (B.1) můžeme z této rovnice získat obyčejné diferenciální rovnice pro funkce R_μ

$$\left(X_\mu R_\mu'\right)' + \left(\tilde{\Xi}_\mu - \frac{1}{X_\mu}\left(\tilde{\Psi}_\mu - q f_\mu\right)^2\right) R_\mu = 0, \tag{5.33}$$

kde jsme označili $\tilde{\Xi}_\mu \equiv \sum_k \Xi_k \left(-x_\mu^2\right)^{n-1-k}$. Pro killingovské pole $\boldsymbol{A} = \frac{e}{q}\boldsymbol{\xi}$ (tj. $f_\mu = \frac{e}{q} X_\mu$) byl tento vztah odvozen v [20]. My jsme separabilitu zobecnili pro nejobecnější elektromagnetické pole zachovávající komutativitu celé sady nabitých operátorů.

Závěr

V této práci jsme odvodili podmínky zajišťující úplnou integrabilitu geodetického pohybu (1.13)–(1.15), (1.19)–(1.20) a ekvivalenty těchto podmínek pro operátorové pozorovatelné na skalárních funkcích (2.37)–(2.41), (2.46)–(2.48). Dále jsme stanovili podmínky na přidané testovací elektromagnetické pole zachovávající úplnou integrabilitu (3.7), (3.8), (3.10) a obdobné podmínky pro operátorové pozorovatelné (3.17)–(3.19), (3.21), (3.22). Zjistili jsme, že při přechodu od klasických pozorovatelných k jejich operátorovým analogiím je zachování vzájemné komutativity spojeno se splněním jistých anomálních podmínek (konkrétně (2.40)–(2.41), (3.19)), které závisejí na volbě kovariantní derivace.

Dále jsme pro prostročas Kerr–NUT–(A)dS a jemu příbuzné prostory nalezli explicitní tvar elektromagnetického pole (5.13), které zachovává integrabilitu pohybu nabité částice a pro toto pole jsme separací proměnných vyřešili příslušnou Hamilton–Jacobiho rovnici, viz (5.24). Z výpočtů křivostí těchto prostorů jsme zjistili, že pouze v případě Kerr–NUT–(A)dS prostoročasu spolu všechny nabité operátorové pozorovatelné komutují a přípustné elektromagnetické pole má stejný tvar jako pole zachovávající komutativitu klasických nabitých pozorovatelných. Pro toto pole jsme nalezli také řešení nabité Klein–Gordonovy rovnice v separovaném tvaru. Zobecnili jsme tak zejména výsledky v [20].

V návaznosti na toto téma by bylo možné hledat obecné elektromagnetické pole, které zachovává komutativitu diracovských operátorů a umožňuje separovatelnost nabité Diracovy rovnice a pokusit se tak zobecněnit výsledky z [21]. Druhou možností by bylo zabývat se obecnou otázkou struktury algebry operátorů vytvořených z poissonovsky komutujících klasických pozorovatelných (kapitola 2).

Seznam použité literatury

[1] R. Emparan and H. S. Reall, Black Holes in Higher Dimensions, *Living Rev. Relativity* **11**, 6 (2008).

[2] F. R. Tangherlini, Schwarzschild field in n dimensions and the dimensionality of space problem, *Nuovo Cimento* **27**, 636 (1963).

[3] R. C. Myers and M. J. Perry, Black holes in higher dimensional space-times, *Ann. Phys. (N.Y.)* **172**, 304 (1986).

[4] S. W. Hawking, C. J. Hunter and M. M. Taylor-Robinson, Rotation and the AdS/CFT correspondence, *Phys. Rev. D* **59**, 064005 (1999).

[5] G. W. Gibbons, H. Lü, D. N. Page and C. N. Pope, Rotating Black Holes in Higher Dimensions with a Cosmological Constant, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 171102 (2004).

[6] G. W. Gibbons, H. Lü, D. N. Page and C. N. Pope The General Kerr–de Sitter Metrics in All Dimensions, *J. Geom. Phys.* **53**, 49 (2005).

[7] W. Chen, H. Lü and C. N. Pope, General Kerr–NUT–AdS Metrics in All Dimensions, *Class. Quantum Grav.* **23**, 5323 (2006).

[8] B. Carter, A new family of Einstein spaces, *Phys. Lett. A* **26**, 399 (1968).

[9] B. Carter, Hamilton–Jacobi and Schrödinger separable solutions of Einstein's equations, *Commun. Math. Phys.* **10**, 280 (1968).

[10] P. Krtouš, D. Kubizňák, D. N. Page and V. P. Frolov, Killing–Yano tensors, rank-2 Killing tensors, and conserved quantities in higher dimensions, *J. High Energy Phys.*, JHEP02 (2007) 004.

[11] T. Houri, T. Oota, and Y. Yasui, Closed conformal Killing–Yano tensor and geodesic integrability, *J. Phys.* **A 41**, 025204 (2008).

[12] T. Houri, T. Oota, and Y. Yasui, Closed conformal Killing–Yano tensor and Kerr–NUT–de Sitter spacetime uniqueness, *Phys. Lett.* **B 656**, 214 (2007).

[13] P. Krtouš, V. P. Frolov, and D. Kubizňák, Hidden Symmetries of Higher Dimensional Black Holes and Uniqueness of the Kerr-NUT-(A)dS spacetime, *Phys. Rev. D* **78**, 064022 (2008).

[14] D. N. Page, D. Kubizňák, M. Vasudevan, and P. Krtouš, Complete Integrability of Geodesic Motion in General Higher-Dimensional Rotating Black Hole Spacetimes, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 061102 (2007).

[15] P. Krtouš, D. Kubizňák, D. N. Page and M. Vasudevan, Constants of geodesic motion in higher-dimensional black-hole spacetimes, *Phys. Rev. D* **76**, 084034 (2007).

[16] A. Sergyeyev and P. Krtouš, Complete set of commuting symmetry operators for the Klein–Gordon equation in generalized higher-dimensional Kerr–NUT–(A)dS spacetimes, *Phys. Rev. D* **77**, 044033 (2008).

[17] S. Benenti and M. Francaviglia, Remarks on certain separability structures and their applications to general relativity, *Gen. Rel. Grav.* **10**, 79 (1979).

[18] V. P. Frolov, P. Krtouš, and D. Kubizňák, Separability of Hamilton–Jacobi and Klein–Gordon equations in general Kerr–NUT–AdS spacetimes, *J. High Energy Phys.* **0702**, 005 (2007).

[19] P. Krtouš, Electromagnetic field in higher-dimensional black-hole spacetime, *Phys. Rev. D* **76**, 084035 (2007).

[20] V. P. Frolov and P. Krtouš, Charged particle in higher dimensional weakly charged rotating black hole spacetime, *Phys. Rev. D* **83**, 024016 (2011).

[21] M. Cariglia, V. P. Frolov, P. Krtouš and D. Kubizňák, Electron in higher-dimensional weakly charged rotating black hole spacetimes, *Phys. Rev. D* **87**, 064003 (2013).

[22] J. A. Schouten, Ueber differentialkomitanten zweier kontravarianter Grössen, *Nederl. Akad. Wetensch., Proc.* **43**, 449–452 (1940).

[23] J. A. Schouten, On the differential operators of first order in tensor calculus, in *Convegno Internazionale di Geometria Differenziale*, (Roma, Italia), 1954.

[24] A. Nijenhuis, Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields. i., ii., *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **58**, 390–397, 398–403 (1955).

[25] B. Carter, Killing tensor quantum numbers and conserved currents in curved space, *Phys. Rev. D* **16**, 3395–3414 (1977).

[26] M. Cariglia, V. P. Frolov, P. Krtouš, and D. Kubizňák, Geometry of Lax pairs: particle motion and Killing–Yano tensors, *Phys. Rev. D* **87**, 024002 (2013).

[27] N. Hamamoto, T.Houri, T. Oota and Y. Yasui, Kerr–NUT–de Sitter curvature in all dimensions, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, F177 (2007).

A. Symetrizace kovariantních derivací

Druhé beztorzní kovariantní derivace skaláru jsou symetrické, a tedy při působení na skalár platí $\boldsymbol{\nabla}_{\!a}\boldsymbol{\nabla}_{\!b} = \boldsymbol{\nabla}^{2}_{\!ab}$. Kovariantní derivace vyšších řádů již takovou vlastnost nemají, ale lze je vždy rozložit na symetrizovaný tvar a derivace nižších řádů. Odvodíme zde takovéto rozklady pro třetí a čtvrtou kovariantní derivaci a pro komutátor druhých symetrizovaných derivací.

Mějme obecný tenzor $\boldsymbol{T}_{abc}$ splňující $\boldsymbol{T}_{abc} = \boldsymbol{T}_{a(bc)}$. Tento tenzor lze rozložit na dvě části

$$\boldsymbol{T}_{abc} = {}^{\mathcal{S}}\boldsymbol{T}_{abc} + \frac{4}{3}\,{}^{\mathcal{A}}\boldsymbol{T}_{a(bc)}\,, \tag{A.1}$$

kde ${}^{\mathcal{S}}\boldsymbol{T}_{abc} \equiv \boldsymbol{T}_{(abc)}$, ${}^{\mathcal{A}}\boldsymbol{T}_{abc} \equiv \boldsymbol{T}_{[ab]c}$. Přímou aplikací tohoto vztahu na $\boldsymbol{\nabla}_{\!a}\boldsymbol{\nabla}_{\!b}\boldsymbol{\nabla}_{\!c}$ získáme rozklad třetích kovariantních derivací působících na skalár

$$\boldsymbol{\nabla}_{\!a}\boldsymbol{\nabla}_{\!b}\boldsymbol{\nabla}_{\!c} = \boldsymbol{\nabla}^{3}_{\!abc} - \frac{2}{3}\boldsymbol{R}_{a(b}{}^{n}{}_{c)}\boldsymbol{\nabla}_{\!n}. \tag{A.2}$$

Tenzor $\boldsymbol{T}_{abcd}$, splňující $\boldsymbol{T}_{abcd} = \boldsymbol{T}_{a(bcd)}$, lze rovněž rozložit

$$\boldsymbol{T}_{abcd} = {}^{\mathcal{S}}\boldsymbol{T}_{abcd} + \frac{3}{2}\,{}^{\mathcal{A}}\boldsymbol{T}_{a(bcd)}\,, \tag{A.3}$$

kde ${}^{\mathcal{S}}\boldsymbol{T}_{abcd} \equiv \boldsymbol{T}_{(abcd)}$, ${}^{\mathcal{A}}\boldsymbol{T}_{abcd} \equiv \boldsymbol{T}_{[ab]cd}$. Použijeme-li postupně (A.2) a (A.1) můžeme s využitím Bianchiho identit

$$\boldsymbol{R}_{[ab}{}^{n}{}_{c]} = 0, \tag{A.4}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_{\![a}\boldsymbol{R}_{bc]}{}^{m}{}_{n} = 0 \tag{A.5}$$

upravit čtvrtou kovariantní derivaci působící na skalár do tvaru

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}_{\!a}\boldsymbol{\nabla}_{\!b}\boldsymbol{\nabla}_{\!c}\boldsymbol{\nabla}_{\!d} &= \boldsymbol{\nabla}_{\!a}\boldsymbol{\nabla}^{3}_{\!bcd} - \frac{2}{3}\boldsymbol{\nabla}_{\!a}\boldsymbol{R}_{b(c}{}^{n}{}_{d)}\boldsymbol{\nabla}_{\!n}\\
&= \boldsymbol{\nabla}^{4}_{\!abcd} - 2\boldsymbol{R}_{a(b}{}^{n}{}_{c}\boldsymbol{\nabla}_{\!d)}\boldsymbol{\nabla}_{\!n} - \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\!(b}\boldsymbol{R}_{|a|(c}{}^{n}{}_{d))}\big)\boldsymbol{\nabla}_{\!n}\\
&\quad -\frac{2}{3}\boldsymbol{R}_{b(c}{}^{n}{}_{d)}\boldsymbol{\nabla}_{\!a}\boldsymbol{\nabla}_{\!n} - \frac{2}{3}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\!a}\boldsymbol{R}_{b(c}{}^{n}{}_{d)}\big)\boldsymbol{\nabla}_{\!n}\\
&= \boldsymbol{\nabla}^{4}_{\!abcd} - \boldsymbol{R}_{ab}{}^{n}{}_{(c}\boldsymbol{\nabla}_{\!d)}\boldsymbol{\nabla}_{\!n}\\
&\quad +\big[\boldsymbol{R}_{(c|(a}{}^{n}{}_{b))|}\boldsymbol{\nabla}_{\!d)}\boldsymbol{\nabla}_{\!n} - \boldsymbol{R}_{(a|(c}{}^{n}{}_{d)|}\boldsymbol{\nabla}_{\!b)}\boldsymbol{\nabla}_{\!n}\big] - \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\!(a}\boldsymbol{R}_{b)(c}{}^{n}{}_{d)}\boldsymbol{\nabla}_{\!n} - \boldsymbol{\nabla}_{\!(c}\boldsymbol{R}_{d)(a}{}^{n}{}_{b)}\big)\boldsymbol{\nabla}_{\!n}\\
&\quad -\frac{1}{3}\big[\boldsymbol{R}_{(c|(a}{}^{n}{}_{b))|}\boldsymbol{\nabla}_{\!d)}\boldsymbol{\nabla}_{\!n} + \boldsymbol{R}_{(a|(c}{}^{n}{}_{d)|}\boldsymbol{\nabla}_{\!b)}\boldsymbol{\nabla}_{\!n}\big] - \frac{1}{3}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\!(a}\boldsymbol{R}_{b)(c}{}^{n}{}_{d)}\boldsymbol{\nabla}_{\!n} + \boldsymbol{\nabla}_{\!(c}\boldsymbol{R}_{d)(a}{}^{n}{}_{b)}\big)\boldsymbol{\nabla}_{\!n}.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Z posledního vyjádření v (A.6) můžeme symetrizacemi přes indexy a, b a c, d snadno spočíst komutátor druhých symetrizovaných kovariantních derivací působících na skalár (první a poslední řádek se neuplatní)

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}^{2}_{\!ab}\boldsymbol{\nabla}^{2}_{\!cd} - \boldsymbol{\nabla}^{2}_{\!cd}\boldsymbol{\nabla}^{2}_{\!ab} = 2\big[&\boldsymbol{R}_{(c|(a}{}^{n}{}_{b)}\boldsymbol{\nabla}_{\!|d)}\boldsymbol{\nabla}_{\!n} - \boldsymbol{R}_{(a|(c}{}^{n}{}_{d)}\boldsymbol{\nabla}_{\!|b)}\boldsymbol{\nabla}_{\!n}\big]\\
&-\big(\boldsymbol{\nabla}_{\!(a}\boldsymbol{R}_{b)(c}{}^{n}{}_{d)} - \boldsymbol{\nabla}_{\!(c}\boldsymbol{R}_{d)(a}{}^{n}{}_{b)}\big)\boldsymbol{\nabla}_{\!n}.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

B. Užitečné identity

V této části se pokusíme shrnout některé užitečné identity týkající se zejména funkcí $A_\mu^{(i)}$, U_μ a Q_μ (viz (4.4) a (4.7)). Nejčastěji používané relace mezi $A_\mu^{(i)}$ a U_μ

$$\begin{aligned} \sum_\mu A_\mu^{(i)} \frac{\left(-x_\mu^2\right)^{n-1-j}}{U_\mu} &= \delta_{ij}, \\ \sum_i A_\mu^{(i)} \frac{\left(-x_\nu^2\right)^{n-1-i}}{U_\nu} &= \delta_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{B.1}$$

vlastně říkají, že inverzní matice k $A_\mu^{(i)}$ je matice $\left(-x_\mu^2\right)^{n-1-i}/U_\mu$.

Často používané jsou rovněž vztahy pro derivace funkcí $A_\mu^{(i)}$, U_μ a Q_μ

$$\begin{aligned} A^{(i)}_{\mu,\nu} &= 2x_\nu A^{(i-1)}_{\mu\nu} = (1-\delta_{\mu\nu})\frac{2x_\nu}{x_\nu^2 - x_\mu^2}\left(A_\mu^{(i)} - A_\nu^{(i)}\right), \\ U_{\mu,\nu} &= \delta_{\mu\nu} \sum_{\substack{\rho \\ \rho\neq\mu}} \frac{2x_\mu}{x_\mu^2 - x_\rho^2} U_\mu + (1-\delta_{\mu\nu})\frac{2x_\nu}{x_\nu^2 - x_\mu^2} U_\mu, \\ Q_{\mu,\nu} &= \delta_{\mu\nu}\left(\frac{X'_\mu}{X_\mu} + \sum_{\substack{\rho \\ \rho\neq\mu}} \frac{2x_\nu}{x_\mu^2 - x_\nu^2}\right) Q_\mu + (1-\delta_{\mu\nu})\frac{2x_\mu}{x_\nu^2 - x_\mu^2} Q_\mu, \end{aligned} \tag{B.2}$$

kde funkce $A^{(i-1)}_{\mu\nu}$ je definována vztahem (4.36).

Derivací vztahů (B.1) s využitím (B.2) lze odvodit identity

$$\begin{aligned} \sum_i (n-1-i) A_\mu^{(i)} \frac{\left(-x_\nu^2\right)^{n-1-i}}{U_\nu} &= \delta_{\mu\nu} \sum_{\substack{\rho \\ \rho\neq\mu}} \frac{x_\mu^2}{x_\mu^2 - x_\rho^2} + (1-\delta_{\mu\nu})\frac{x_\nu^2}{x_\nu^2 - x_\mu^2}, \\ \sum_i A^{(i)}_{\mu,\alpha} \frac{\left(-x_\nu^2\right)^{n-1-i}}{U_\nu} &= (1-\delta_{\mu\alpha})(\delta_{\mu\nu} - \delta_{\alpha\nu})\frac{2x_\alpha}{x_\alpha^2 - x_\mu^2}. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Mimo těcho vztahů využíváme dále tyto snadno odvoditelné identity a rozpisy

$$\left(\frac{U}{U_\mu}\right)_{,\mu} = 0, \tag{B.4}$$

$$\frac{1}{U_\nu} \sum_{\substack{\mu \\ \mu\neq\nu}} \frac{1}{x_\mu^2 - x_\nu^2} = \sum_{\substack{\mu \\ \mu\neq\nu}} \frac{1}{U_\mu} \frac{1}{x_\nu^2 - x_\mu^2}, \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned} \frac{x_\gamma^2}{(x_\mu^2 - x_\gamma^2)(x_\gamma^2 - x_\nu^2)} &= \frac{1}{x_\mu^2 - x_\nu^2}\left(\frac{x_\mu^2}{x_\mu^2 - x_\gamma^2} + \frac{x_\nu^2}{x_\gamma^2 - x_\nu^2}\right), \\ \frac{1}{(x_\mu^2 - x_\gamma^2)(x_\gamma^2 - x_\nu^2)} &= \frac{1}{x_\mu^2 - x_\nu^2}\left(\frac{1}{x_\mu^2 - x_\gamma^2} + \frac{1}{x_\gamma^2 - x_\nu^2}\right), \end{aligned} \tag{B.6}$$

kde jsme zavedli funkci

$$U \equiv \sum_{\substack{\mu,\nu \\ \mu<\nu}} \left(x_\mu^2 - x_\nu^2\right). \tag{B.7}$$