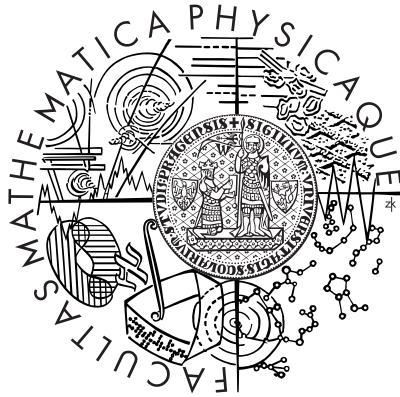


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Petra Maierová

Vliv slapového zahřívání na děje v nitrech ledových měsíců

Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.

Studijní program: Fyzika, obecná fyzika

2006

Ráda bych poděkovala doc. Ondřeji Čadkovi za pečlivé vedení a velikou podporu během tvorby této práce. Dále bych ráda poděkovala všem, kteří se účastnili debat nad tématy týkajícími se této práce, a tím mi pomohli si mnohé ujasnit.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a s jejím zveřejněním.

V Praze dne 29. 5. 2006

Petra Maierová

Obsah

1	Úvod	5
2	Ledové měsíce planet	6
2.1	Příklady ledových měsíců – Europa, Io a Titan	6
2.2	Enceladus	7
3	Matematická formulace	11
3.1	Zákony zachování	11
3.2	Hraniční podmínky	11
3.3	Měsíc jako viskoelastické těleso	12
3.4	Metoda výpočtu, použitý program	13
4	Slapový potenciál	14
4.1	Obecný případ	14
4.2	Satelit na eliptické dráze	15
4.3	Axisymetrická aproximace	18
5	Výsledky	20
5.1	Použité parametry	20
5.2	Dvojvrstvý model	20
5.3	Model s nízkoviskózní vrstvou	21
6	Diskuze výsledků	27
7	Závěr	28

Název práce: Vliv slapového zahřívání na děje v nitrech ledových měsíců
Autor: Petra Maierová
Katedra: Katedra geofyziky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.
e-mail vedoucího: oc@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci zkoumáme tepelný výkon v nitru ledového měsíce v důsledku slapového působení. K výpočtu tepelného výkonu používáme program pro deformaci radiálně symetrického viskoelastického tělesa z nestlačitelného materiálu, na které působí síla odpovídající axisymetrické části slapové síly. Pro výpočet jsme znovu odvodili vzorec pro axisymetrickou část slapové síly působící na satelit s vázanou rotací obíhající po eliptické dráze. Rozměry a vnitřní stavba modelového satelitu odpovídají měsíci Enceladu, u nějž byl pozorován výjimečně vysoký tepelný výkon $5,8 \pm 1,9$ GW. Celkový výkon jsme zkoumali pro různé hodnoty materiálových parametrů jádra a pláště. Ukázalo se, že celková disipovaná energie nejvíce závisí na viskozitě pláště – s klesající viskozitou pláště roste jako mocninná funkce. Pozorovaný výkon se podařilo predikovat pro viskozitu pláště $6 \cdot 10^{12}$ Pa s a nižší. Pokud navíc snížíme viskozitu ve spodní vrstvě pláště, výkon se dále zvýší.

Klíčová slova: slapy, disipace, ledový měsíc, Enceladus

Title: The role of tidal heating in the dynamics of icy satellites
Author: Petra Maierová
Department: Department of Geophysics
Supervisor: Doc. RNDr. Ondřej Čadek, CSc.
Supervisor's e-mail address: oc@karel.troja.mff.cuni.cz

Abstract: In this work we study the tidal dissipation rate in an icy satellite. The icy satellite is modelled as a viscoelastic radially symmetrical body made of incompressible material, which is subjected to an axially symmetrical force – a part of the tidal force. We rederive an expression for the tidal potential on the satellite on a synchronous eccentric orbit. The model satellite's properties are similar to those of Enceladus, which has an exceptionally high rate of heating (5.8 ± 1.9 GW). We study the total dissipation rate for mantle viscosity ranging from 10^{11} to 10^{17} Pa s and the influence of a low-viscosity layer in the innermost part of the mantle. For the model without the low-viscosity layer the tidal dissipation rate appears to be mainly a function of the mantle viscosity. For this model, an observed dissipation rate is reached for mantle viscosity of $6 \cdot 10^{12}$ Pa s or lower. The low-viscosity layer increases the dissipation rate especially in case of high mantle viscosity and makes it less sensitive to variations of mantle viscosity.

Keywords: tides, dissipation, icy satellite, Enceladus

1 Úvod

Vesmírné sondy během posledních desetiletí umožnily poznávání vzdálených částí Sluneční soustavy, které jsou pro pozorování ze Země nedosažitelné. Můžeme tak mimo jiné objevovat překvapivě rozmanitý svět měsíců velkých planet – Jupiteru, Saturnu, Uranu a Neptunu.

První zprávy o charakteru těchto měsíců přinesly v sedmdesátých letech sondy Pioneer a v osmdesátých letech sondy Voyager 1 a 2. V letech 1989 až 2003 zkoumala sonda Galileo Jupiterovy měsíce, sonda Cassini se od roku 1997 zaměřuje na planetu Saturn, její měsíce a prstence. Zájem o měsíce velkých planet vzrostl v důsledku zjištění, že uvnitř některých z nich by mohly být podmínky vhodné pro rozvoj života na mikrobiální úrovni.

Měsíce velkých planet jsou složeny z velké části z vodního ledu, proto se také nazývají ledové měsíce. Přestože jejich povrchové teploty jsou hluboko pod bodem mrazu, v nitru některých z nich se pravděpodobně vyskytuje vrstva kapalné vody, která je jednou z podmínek nezbytných pro život. Existence vodní vrstvy je umožněna díky silným slapům působícím na materiál měsíce při jeho oběhu kolem planety [1]. Slapová síla periodicky deformuje měsíc, přičemž se uvolňuje energie ve formě tepla. Toto teplo zřejmě v případě některých velkých měsíců, jako je Jupiterův měsíc Europa, stačí k udržení vodní vrstvy. Uvolněné teplo také pohání konvekci v ledovém plášti měsíce a na povrch se pak může vylévat voda při tzv. ledovém vulkanismu.

V poslední době se díky pozorování sondou Cassini dostává do popředí zájmu Saturnův měsíc Enceladus. Je více než šestkrát menší než Io nebo Europa a slapová síla na jeho povrchu je proto mnohokrát slabší. Z toho důvodu se na Enceladu nečekala žádná pozorovatelná aktivita, podobně jako na ostatních měsících srovnatelných rozměrů. Při prvních průletech kolem Enceladu sondy podle očekávání zaznamenaly starý povrch pokrytý krátery. Když v roce 2005 studovala sonda Cassini povrch Enceladu detailněji, našla v okolí jeho jižního pólu rozsáhlou planinu s hladkým povrchem, který je výrazně mladší a teplejší než zbylý povrch pokrytý krátery. Na této planině se nacházejí desítky kilometrů dlouhé praskliny, kterými se pravděpodobně dostává na povrch teplejší materiál z vnitřku měsíce.

Neobvyklé je, že zatímco část Enceladu je aktivní, zbytek se nezměnil za posledních několik miliard let. Zdrojem pozorované aktivity může být slapová síla nebo radioaktivní rozpady v jeho nitru, ale jisté je, že podmínky pod jižním pólem měsíce musí být jiné než ve zbytku tělesa. Pokud jako zdroj energie uvažujeme slapovou sílu, mohlo by k vysvětlení pozorované teploty povrchu vést nerovnoměrné rozložení viskozity v ledovém plášti Enceladu.

Cílem této práce je určit, nakolik může disipace v důsledku působení slapové síly vysvětlit pozorovanou tepelnou bilanci Enceladu. Budeme zkoumat energii disipovanou v radiálně symetrickém satelitu složeném ze silikátového jádra a ledového pláště. Dále se budeme zabývat vlivem vrstvy se sníženou viskozitou mezi jádrem a pláštěm, která by představovala vrstvu nataveného ledu. Vypočtený disipační výkon srovnáme s pozorovaným, abychom mohli posoudit, nakolik použité parametry odpovídají skutečnosti.

2 Ledové měsíce planet

2.1 Příklady ledových měsíců – Europa, Io a Titan

Mezi ledové měsíce patří například měsíce Jupiteru Europa, Io, Ganymed a Callisto, měsíce Saturnu Titan, Mimas a Enceladus a mnohé další. Jsou charakteristické vysokým obsahem ledu ve svém nitru. Některé z nich jsou vnitřně diferencované, takže čistý led tvoří svrchní vrstvu měsíce, v jiných je led promíchán s dalšími horninami. Průměrné hustoty jsou velmi nízké a pohybují se přibližně mezi 1000 kg m^{-3} a 3500 kg m^{-3} .

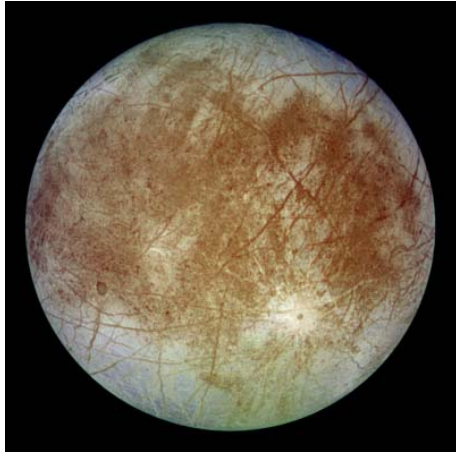
Charakter povrchu ledových měsíců je různorodý. Některé jsou pokryté krátery starými miliardy let, jiné jsou naopak zcela bez kráterů a jejich povrch je mladý, protože se neustále obnovuje. Toto rozdělení vyplývá z odlišného složení, rozměrů a drah měsíců, protože tyto faktory určují míru slapového působení na daný měsíc. Slapy jsou pro ledové měsíce hlavním zdrojem energie a teplo uvolněné slapovou disipací může způsobit zmíněné omlazování povrchu. Slapová síla rychle roste s rostoucí rychlostí oběhu měsíce, jeho velikostí a excentricitou (viz kapitola 4). Proto mezi aktivní měsíce s významným vnitřním zdrojem energie patří hlavně velké měsíce Jupitera jako jsou Europa a Io.

V případě Europy z modelů vyplývá existence vodní vrstvy (tedy vrstvy s velmi nízkou viskozitou) pod ledovou kůrou [2], která umožňuje větší deformaci ledové kůry a tím i více disipovaného tepla. Na Europě najdeme projevy ledového vulkanismu – utuhlé výlevy ledové „lávy“ a množství prasklin připomínajících pozemské oceánské hřbety, svědčící o termální konvekci v ledové vrstvě. Nejvíce je slapovými silami namáhán měsíc Io, který obíhá kolem Jupitera po nejbližší dráze. Silné slapy se na něm projevují vulkanickou činností, při které sopky chrlí sloučeniny síry. Díky slapům je Io nejvíce vulkanicky aktivní těleso ve Sluneční soustavě. Dalším výjimečným měsícem je Titan. Obíhá kolem Saturnu a jako jediný z ledových měsíců má hustou atmosféru. Také v případě Titanu se uvažuje o vodní vrstvě pod svrchní ledovou kůrou [3].

Hledání vnitřní struktury měsíců pomocí numerických modelů je ztížené omezenou znalostí hodnot základních parametrů popisujících materiály jednotlivých vrstev, ze kterých je daný měsíc složen. Například viskozita ledu silně závisí na příměsích, jejichž obsah přesně neznáme. Existence vodní vrstvy může být proto v některých případech sporná.

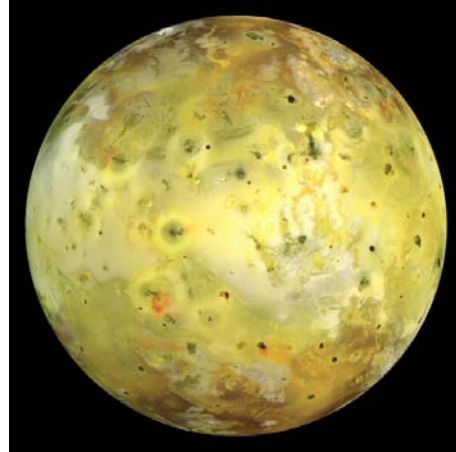
Tabulka 1: *Europa, Io a Titan, [1]*

	poloměr [km]	hustota [kg.m^{-3}]	perioda oběhu [dny]	excentricita dráhy
Io	1882	3528	1,77	0,0041
Europa	1569	2970	3,55	0,0094
Titan	2575	1881	15,95	0,029



Obrázek 1: *Europa*

Stovky kilometrů dlouhé praskliny v ledové kůře Europy. Všechny obrázky v této kapitole jsou převzaty z <http://www.jpl.nasa.gov>



Obrázek 2: *Io*

Žlutá a červená jsou barvy sloučenin síry, které chrlí vulkány na měsíci *Io*.

2.2 Enceladus

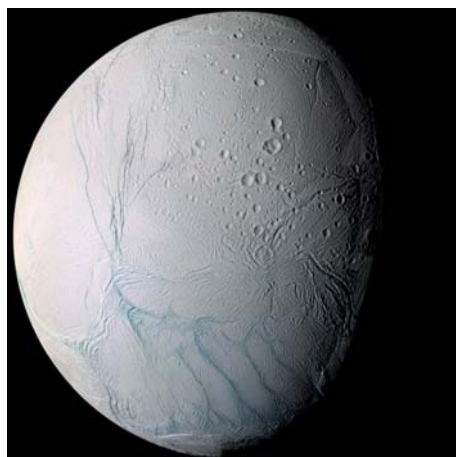
V roce 2005 se sonda Cassini zaměřila také na Saturnův měsíc Enceladus. Rovníkový poloměr Enceladu je $a = 256$ km, jeho hmotnost $M = 84 \cdot 10^{18}$ kg a střední hustota $\bar{\rho} = 1240$ kg m⁻³.¹ Z momentu setrvačnosti kolem rotační osy $C = 0,37 Ma^2$ plyne, že Enceladus je vnitřně diferencovaný. Vnější plášť tvoří led, pod kterým je patrně silikátové jádro. Nelze vyloučit, že led obsahuje příměsi (například amoniak), ale spektrální metody je zatím neprokázaly. Enceladus má tzv. vázanou rotaci, tj. perioda oběhu T je stejná jako perioda rotace kolem vlastní osy. Parametry jeho dráhy kolem Saturnu shrnuje tabulka 2.

Tabulka 2: *Parametry dráhy Enceladu*

Hlavní poloosa a	238,02 km
Perioda oběhu T	1,370218 dne
Excentricita dráhy e	0,0045

Enceladus se rozměry podobá měsíci Mimas a některým dalším Saturnovým měsícům. Je výjimečný vysokou odrazivostí povrchu. Je pokryt ledem, který odráží téměř 100% dopadajícího slunečního záření. Najdeme na něm několik různých typů povrchu, což je mezi tělesy srovnatelných rozměrů ojedinělé. Na většině povrchu jsou krátery vzniklé při dopadech meteoritů, ale v okolí jižního pólu krátery chybí nebo jsou značně zahlazené, což svědčí o nízkém stáří povrchu v této oblasti.

¹Udávaná hodnota střední hustoty se pohybuje mezi 1240 kg m⁻³ a 1600 kg m⁻³.



Obrázek 3: *Enceladus*

V rovníkových oblastech je viditelné množství kráterů, poblíž jižního pólu (na obrázku dole uprostřed) krátery chybí. Soustava prasklin, která se zde nachází, je pro svoji pravidelnost nazývaná „tygří pruhy“. Modrá barva prasklin je zvýrazněna, ve skutečnosti je měsíc téměř dokonale bílý.

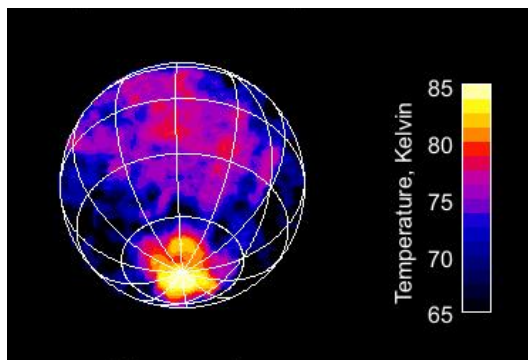
Fotografie ze sondy Cassini v oblasti jižního pólu zachytily desítky kilometrů dlouhé a několik kilometrů široké praskliny a rýhy. Několik prasklin tvoří pravidelnou strukturu, která byla podle svého vzhledu pojmenovaná „tygří pruhy“. Tyto praskliny nejsou jen povrchové, ale zřejmě přímo souvisí s ději probíhajícími uvnitř měsíce. Spektroskopickou analýzou byl zjištěn rozdíl mezi materiálem v prasklinách a v jejich okolí. Praskliny zřejmě odkrývají hlubší vrstvy měsíce, které mají jinou strukturu (například velikost zrn ledu) nebo jiné složení než materiál na povrchu. Na fotografiích pořízených přes monochromatické filtry je vidět modravé zbarvení prasklin obdobné jako u silné vrstvy ledu v pozemských ledovcích.

Velké vzdálenosti od Slunce a téměř 100% odrazivosti povrchu odpovídá velmi nízká povrchová teplota. Při průletu sondy kolem Enceladu bylo měřeno vyzařování jeho povrchu v infračervené oblasti spektra. V rovníkových oblastech byla takto naměřena teplota 70 až 80 K. V okolí pólů byla vzhledem k menší intenzitě světla dopadajícího od Slunce předpokládána teplota ještě nižší, což se potvrdilo u severního pólu, ale v okolí jižního pólu byla naměřena teplota 85 K, tedy naopak vyšší. Není známý mechanismus, kterým by se mohla tato oblast ohřát slunečním zářením na tak vysokou teplotu. Zdá se tedy, že pozorované teplo přichází k povrchu zevnitř měsíce. Měření s vysokým rozlišením navíc ukázala, že i v celkově teplejší oblasti kolem jižního pólu je teplota nerovnoměrná, většina povrchu tam má teplotu kolem 80 K, ale v prasklinách dosahuje 90 K. Celkový tepelný výkon jižní polární oblasti je $5,8 \pm 1,9$ GW. Tuto hodnotu lze považovat za spodní mez pro celkový tepelný výkon Enceladu. Průměrný tepelný tok povrchem jižní polární oblasti je $0,25 \text{ W m}^{-2}$, tedy přibližně desetkrát menší než na měsíci Io [4].

Sonda Cassini několika různými metodami zaznamenala atmosféru Enceladu.

Magnetometrická měření zjistila deformaci magnetického pole Saturnu v okolí Enceladu, což ukazuje na přítomnost vodivých částic. Dále sonda pozorovala přechod Enceladu přes hvězdu γ -Orionis v ultrafialové části spektra. Než byla hvězda zcela zakryta měsícem, světlo přicházející od ní postupně sláblo, jak bylo stíněno atmosférou. Průchod atmosférou také změnil spektrum procházejícího světla a změny je možné vysvětlit přítomností vodní páry v atmosféře měsíce. Některá další pozorování zákrytů hvězd potvrdila přítomnost atmosféry, při jiných se naopak atmosféra neprojevila, nebo se projevila jen při některé fázi zákrytu. Lze tedy soudit, že atmosféra neobklopuje celý měsíc, ale je pouze nad některými oblastmi. Konečným potvrzením existence atmosféry jsou fotografie oblaku materiálu nad jižním pólem měsíce, viz obr. 6. Vzhledem k malé hmotnosti Enceladu nemůže být atmosféra stabilní a musí být neustále doplňována. Jejím zdrojem je pravděpodobně teplý materiál v prasklinách, ze kterého se vodní pára uvolňuje sublimací, nebo vypařováním, pokud by v prasklinách byla kapalná voda.

Existence atmosféry, vysoká teplota, nepřítomnost kráterů a neobvyklé praskliny v okolí jižního pólu ukazují, že Enceladus je aktivní těleso uvolňující energii vnitřními procesy, jehož povrch se v některých místech stále obměňuje. Uvažuje se o dvou typech procesů, při kterých dochází k uvolňování energie a které by mohly probíhat v Enceladu: radioaktivní rozpad prvků v jádře a disipace tepla vzniklého při deformaci slapovou silou. Pokud není zastoupení radioaktivních izotopů v jádře Enceladu anomálně vysoké, lze radioaktivními rozpady vysvětlit výkon maximálně 0,1 GW, tedy mnohem menší, než je výkon pozorovaný [4]. Disipace tepla při slapové deformaci je na některých měsících významná, ale Enceladus je ve srovnání s těmito měsíci malý a proto na něj působí menší slapová síla (v případě Evropy je slapová síla na povrchu dvanáctkrát větší než u Enceladu, v případě Ia třicetkrát větší). Aktivní oblast kolem jižního pólu Enceladu je proto překvapivá a je otázkou, jestli je možné její existenci vysvětlit pouze slapovou disipací, nebo jestli je nutné hledat jiná vysvětlení.



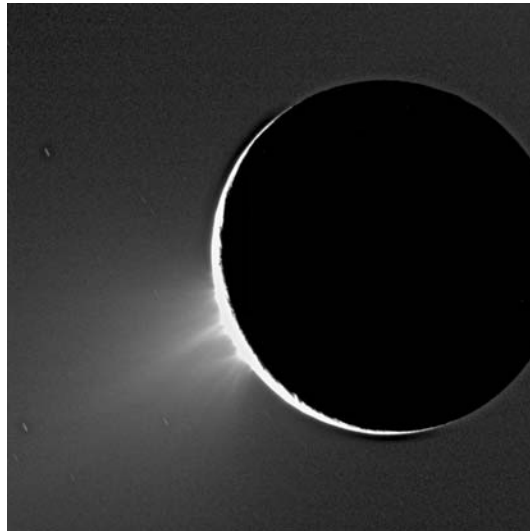
Obrázek 4: Mapa povrchové teploty Enceladu

V okolí jižního pólu teplota přesahuje 80 K. V rovníkové oblasti přibližně ve středu snímku dopadají sluneční paprsky nejvíce – pozorovaná teplota je kolem 75 K .



Obrázek 5: Tygří pruhy – teplota

I v okolí jižního pólu jsou značné teplotní rozdíly. Zatímco většina povrchu má teplotu kolem 80 K, v „tygřích pruzích“ teplota dosahuje 90 K.



Obrázek 6: Oblak nad jižním pólem

Při podsvícení slunečním světlem je nad jižním pólem viditelný oblak tvořený pravděpodobně vodními párami.

3 Matematická formulace

3.1 Zákony zachování

Pomocí vektorů posunutí \vec{u} a rychlosti deformace \vec{v} popisujeme deformaci materiálu, na který působí vnější objemová síla \vec{f} . Měsíc Enceladus popisujeme vrstevnatým modelem charakterizovaným konstantní hustotou ρ , viskozitou η a modulem torze μ v každé z vrstev. Materiál považujeme za nestlačitelný. Používáme eulerovskou formulaci problému.

Ze zákona zachování hmoty plyne rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0, \quad (1)$$

která se pro nestlačitelný materiál redukuje na tvar

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (2)$$

Ze zákona zachování hybnosti vyplývá pohybová rovnice pro kontinuum

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \vec{f} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}, \quad (3)$$

kde $\boldsymbol{\sigma}$ je Cauchyův tenzor napětí a $\frac{D}{Dt}$ značí materiálovou časovou derivaci. Vzhledem k malé rychlosti deformace lze setrvačný člen na pravé straně zanedbat,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \vec{f} = 0. \quad (4)$$

V našem případě je objemová síla gradientem slapového potenciálu V

$$\vec{f} = -\nabla V. \quad (5)$$

Zákon zachování energie má v eulerovské formulaci tvar

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \vec{v} - \nabla \cdot \vec{q} + \rho h, \quad (6)$$

kde ϵ je hustota vnitřní energie, \vec{q} je tepelný tok jednotkovou plochou a h udává teplo uvolněné vnitřními zdroji (například radioaktivním rozpadem) na jednotku hmotnosti. Tuto rovnici nezahrnujeme do řešené soustavy rovnic. Člen $\boldsymbol{\sigma} : \nabla \vec{v}$ určuje množství disipované energie. Disipovaná energie je horním odhadem disipovaného tepla – ukládání energie například do fázových přechodů není bráno v úvahu. Stejně tak není uvažováno teplo vznikající radioaktivními rozpady.

3.2 Hraniční podmínky

Hraniční podmínky je potřeba určit na povrchu měsíce. V kulové slupce pod povrchem je průmět tenzoru napětí do radiálního směru roven tlaku hmoty vyzdvižené nad tuto kulovou slupku

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{e}_r = u_r \rho \vec{g}, \quad (7)$$

kde \vec{e}_r je jednotkový radiální vektor a index r značí radiální složku vektoru a \vec{g} je gravitační zrychlení na povrchu bez deformace.

3.3 Měsíc jako viskoelastické těleso

Volba reologie pro popis deformace materiálu namáhaného silou působící po určitou dobu T , případně periodickou silou s periodou T , je závislá na tzv. relaxačním čase τ

$$\tau = \frac{\eta}{\mu}. \quad (8)$$

Pokud je relaxační čas výrazně větší než čas T , materiál reaguje na působící sílu okamžitou deformací. Jeho chování lze přirovnat k pružině, jejíž výchylka je lineárně závislá na působící síle – jedná se o elastickou deformaci. Veličiny příslušející elastické deformaci jsou označeny indexem E. Pro izotropní materiál lze zapsat závislost deformace ϵ_E na napětí σ_E jako

$$\sigma_E = \lambda \nabla \cdot \vec{u} + 2\mu \epsilon_E, \quad (9)$$

kde λ je Laméova konstanta. Rovnice (9) má pro nestlačitelný materiál tvar

$$\sigma_E = -p \mathbf{I} + 2\mu \epsilon_E, \quad (10)$$

kde p je tlak. Tenzor ϵ_E vyjádříme jako

$$\epsilon_E = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}), \quad (11)$$

přičemž \vec{u} je posunutí vzniklé elastickou deformací.

Naopak pro $\tau \ll T$ lze reakci materiálu přirovnat k chování pístu. Jedná se o viskózní deformaci popsatelnou v jednoduchém případě nestlačitelné newtonovské tekutiny rovnicí

$$\sigma_V = -p \mathbf{I} + 2\eta \dot{\epsilon}_V. \quad (12)$$

Index V označuje veličiny příslušející viskózní deformaci. Tenzor ϵ_V je

$$\epsilon_V = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u}), \quad (13)$$

\vec{u} je tentokrát posunutí vzniklé viskózní deformací.

V případě Enceladu je perioda působící síly, tj. doba oběhu kolem Saturnu, $T = 1,37$ dne $\approx 10^5$ s. Viskozita ledu η je přibližně 10^{12} až 10^{15} Pa s a modul torze $\mu \approx 10^9$ Pa. Pro viskozitu $\eta = 10^{14}$ Pa s je relaxační čas $\tau \approx 10^5$ s tedy srovnatelný s periodou T . V tomto případě je nutné použít viskoelastickou reologii, jejíž nejjednodušší variantou je maxwellovská reologie. V maxwellovské reologii předpokládáme, že chování materiálu lze vyjádřit kombinací elastického a viskózního chování, přičemž elastické a viskózní napětí jsou identická a deformace se sčítají

$$\epsilon = \epsilon_E + \epsilon_V. \quad (14)$$

Pokud tenzor napětí σ rozložíme na stopovou část $-p \mathbf{I}$ a deviatorickou část \mathbf{D}

$$\sigma = -p \mathbf{I} + \mathbf{D}, \quad (15)$$

lze závislost deformace na napětí pro viskoelastický nestlačitelný izotropní materiál vyjádřit ve tvaru [5]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(t) &= -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}(t) - \int_0^t \frac{\mu}{\eta}\mathbf{D}(\tau)d\tau \text{ neboli} \\ \mathbf{D}(t) &= \mu(\nabla\vec{u}(t) + \nabla^T\vec{u}(t)) - \int_0^t \frac{\mu}{\eta}\mathbf{D}(\tau)d\tau.\end{aligned}\quad (16)$$

Disipační člen v rovnici (6) je pro viskoelastickou deformaci rovný

$$\boldsymbol{\sigma} : \nabla\vec{v} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}}{2\eta} + \frac{\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{2\mu}.\quad (17)$$

Celkový výkon P energie disipované v tělese G je rovný objemovému integrálu

$$P = \int_G \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV.\quad (18)$$

Pokud se navíc jedná o deformaci způsobenou periodickou silou, vypadne při výpočtu výkonu průměrovaného přes celou periodu T člen $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}/(2\mu)$

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{T} \int_0^T \int_G \frac{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}}{2\eta} dV dt.\quad (19)$$

3.4 Metoda výpočtu, použitý program

Soustavu rovnic (2), (4), (7) a (16) řeší program ENCL vyvinutý O. Čadkem na Katedře geofyziky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. V daném programu uvažujeme osově symetrické rozložení viskozity a vnějších sil a sféricky symetrické rozložení modulů torze a hustoty. Výsledné deformace a napětí jsou také osově symetrické.

Tento program používá spektrální metodu ve sférických proměnných θ a ϕ . Všechny veličiny v řešených rovnicích jsou vyjádřeny formou rozvoju do zobecněných sférických harmonických funkcí zavedených v [6, 7, 8]. Takto vznikne soustava obyčejných diferenciálních rovnic v proměnné r , jejíž konkrétní tvar je uveden v [8]. Pro diskretizaci těchto rovnic je použita metoda posunutých sítí. Na rozhraní mezi vrstvami předepisujeme koeficienty rozvoje tenzoru napětí a na středech vrstev zadáváme koeficienty rozvoje objemové síly a posunutí (podrobněji v [9]).

V každém kroku je napočítáván celkový výkon disipované energie \bar{P} dle vzorce (19). Hodnota \bar{P} ustálená po mnoha periodách působící síly je výstupem programu.

4 Slapový potenciál

4.1 Obecný případ

Nejprve odvodíme slapový potenciál působící na satelit obíhající kolem planety. Podrobné odvození je například v [10].

Potenciál konzervativní síly F definujeme jako

$$F = -\nabla V. \quad (20)$$

Vzhledem k tomu, že gravitační pole planety lze aproximovat gravitačním polem hmotného bodu, platí pro gravitační potenciál planety v bodě A

$$V_g(A) = -\frac{GM}{\rho}, \quad (21)$$

kde M je hmotnost planety, G gravitační konstanta a ρ vzdálenost středu planety od bodu A . Na satelit obíhající kolem planety kromě gravitační síly F_g působí také odstředivá síla F_c , jejíž velikost je ve všech bodech satelitu rovna velikosti gravitační síly ve středu satelitu

$$F_c = F_g(0) = \frac{GM}{R^2}, \quad (22)$$

kde R je vzdálenost středů obou těles. Směr odstředivé síly je rovnoběžný se spojnicí středů obou těles. Pokud tuto spojnici označíme jako osu z , $z = 0$ ve středu satelitu, je příslušný potenciál

$$V_c = \frac{GM}{R^2} z = \frac{GM}{R^2} r \sin \theta \cos \tilde{\phi}, \quad (23)$$

kde r je vzdálenost od středu satelitu, θ zeměpisná šířka, $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$, a $\tilde{\phi}$ je úhel mezi průvodičem bodu a rovinou protínající obě tělesa v severojižním směru, $\tilde{\phi} \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Slapový potenciál V je tedy

$$V = V_g + V_c + \text{konst} = -\frac{GM}{\rho} + \frac{GM}{R^2} r \sin \theta \cos \tilde{\phi} + K, \quad (24)$$

kde $K = GM/R$, pokud zvolíme $V = 0$ ve středu planety. Použitím kosinové věty

$$\rho^2 = R^2 - 2Rr \sin \theta \cos \tilde{\phi} + r^2 \quad (25)$$

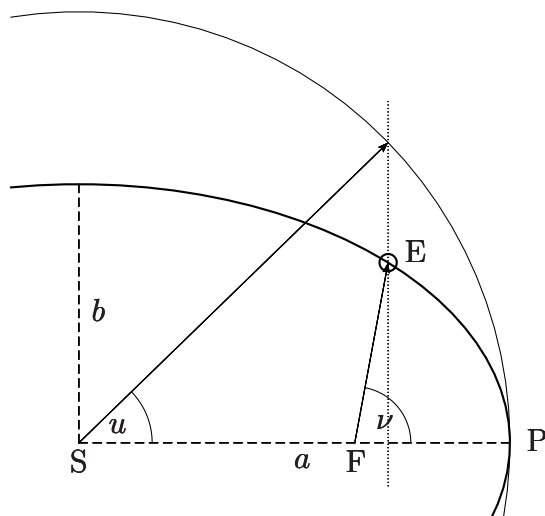
lze člen $1/\rho$ upravit na tvar

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r}{R} \sin \theta \cos \tilde{\phi} + \frac{r^2}{R^2}}} \\ &= \frac{1}{R} \left[1 + \frac{r}{R} \sin \theta \cos \tilde{\phi} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} (3 \sin^2 \theta \cos^2 \tilde{\phi} - 1) + o(r^2/R^2) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Dosažením do rovnice (24) získáme první nenulový člen slapového potenciálu

$$\begin{aligned} V &= -\frac{GM}{R} \left[1 + \frac{r}{R} \sin \theta \cos \tilde{\phi} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} (3 \sin^2 \theta \cos^2 \tilde{\phi} - 1) \right] + \frac{GM}{R^2} r \sin \theta \cos \tilde{\phi} + \frac{GM}{R} \\ &= -\frac{GM r^2}{2R^3} (3 \sin^2 \theta \cos^2 \tilde{\phi} - 1). \end{aligned} \quad (27)$$

4.2 Satelit na eliptické dráze



Obrázek 7: Parametry dráhy satelitu

Satelit E obíhá po eliptické dráze s excentricitou $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$, ν je pravá anomálie, u je excentrická anomálie, P je pericentrum, F je ohnisko elipsy, ve kterém je planeta, a S je střed elipsy.

Vzdálenost satelitu obíhajícího kolem planety po eliptické dráze s excentricitou e a hlavní poloosou a lze podle prvního Keplerova zákona vyjádřit jako

$$R = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}, \quad (28)$$

kde ν je pravá anomálie, tedy úhel mezi satelitem, planetou a pericentrem, viz obr. 7. Hledání závislosti R , případně ν , na čase vede integrací druhého Keplerova zákona

$$R^2 \dot{\nu} = C \quad (29)$$

na integrál

$$\int_0^\nu \frac{a^2(1 - e^2)^2 d\nu}{(1 + e \cos \nu)^2} = C(t - t_0). \quad (30)$$

Integrační konstanta t_0 je čas průchodu pericentrem, který zvolíme nulový. Konstantu C vypočteme z integrálu přes jeden oběh satelitu:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} R^2 d\nu &= C \int_0^T dt, \\ 2\pi ab &= CT, \\ C &= \frac{2\pi ab}{T} = \omega ab, \end{aligned} \quad (31)$$

kde b je vedlejší poloosa elipsy $b = a\sqrt{1 - e^2}$, T je perioda oběhu satelitu a ω střední úhlová rychlost oběhu. Pro výpočet integrálu (30) zavedeme tzv. excentrickou anomálii u . Její zavedení je zřejmé z obr. 7. Z geometrie platí

$$R = a(1 - e \cos u). \quad (32)$$

Substitucí přejde integrál (30) na tvar

$$\int_0^u ab(1 - e \cos u)du = \omega abt, \quad (33)$$

který po integraci vede na tzv. Keplerovu rovnici

$$\omega t = u - e \sin u. \quad (34)$$

Keplerova rovnice je transcendentní rovnice, jejíž řešení lze najít rozvojem $\sin u$ do Fourierovy řady

$$\sin u = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \sin(kl), \quad (35)$$

kde koeficienty s_k lze vyjádřit pomocí Besselovy funkce $J_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(k\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$ jako

$$s_k = \frac{2}{ke} J_k(ke). \quad (36)$$

Toto řešení je podrobně odvozeno například v [11].

Řešení pro excentrickou anomálii u a vzdálenost satelitu R do druhého řádu v excentricitě je

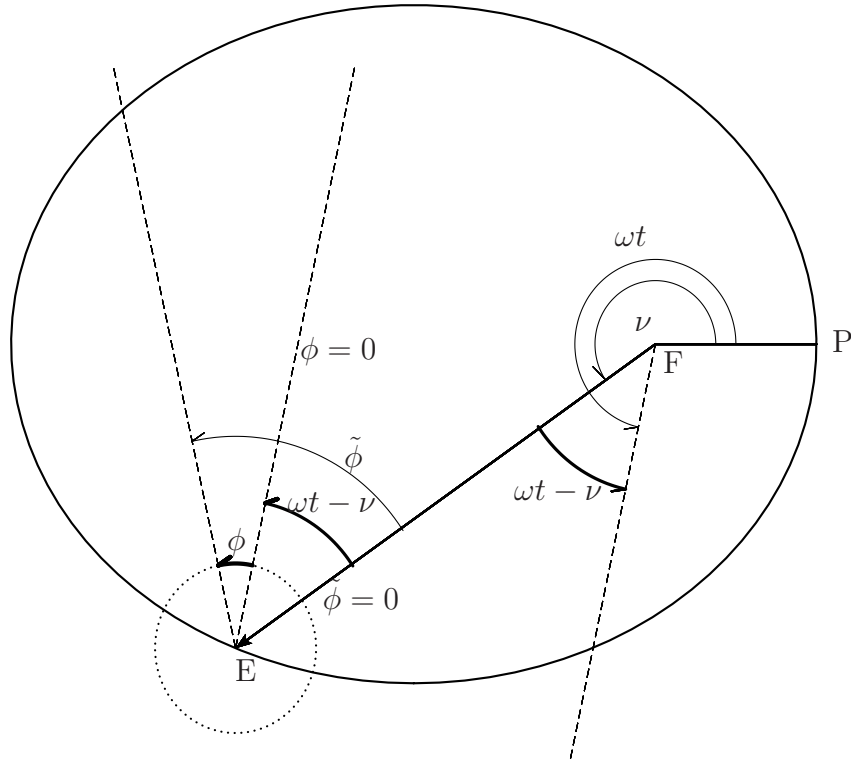
$$\begin{aligned} u &= \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} J_k(ke) \sin(kl) = \omega t + e \sin \omega t + \frac{e^2}{2} \sin 2\omega t + o(e^2), \\ \frac{R}{a} &= 1 - e \cos \omega t + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} \cos 2\omega t + o(e^2). \end{aligned} \quad (37)$$

Tímto jsme zjistili závislost vzdálenosti satelitu od planety na čase. Navíc při oběhu satelitu s vázanou rotací dochází kvůli nestejnomyšlné rychlosti oběhu k tzv. libraci. Souřadnice $\tilde{\phi}$ použitá ve vyjádření slapového potenciálu (27) je závislá na čase a liší se od zeměpisné délky ϕ podle vztahu

$$\tilde{\phi} = \phi + \omega t - \nu, \quad (38)$$

kde $\phi = 0$ na poledníku, na kterém je $\tilde{\phi} = 0$ při průchodu pericentrem, viz obr. 8. Pro výpočet členu $\cos^2 \tilde{\phi}$ v rovnici (27) vyjádříme $\cos \nu$ a $\sin \nu$

$$\begin{aligned} \cos \nu &= -\frac{1}{e} + \frac{1 - e}{e} \frac{a}{R} = \cos \omega t - 2e \sin^2 \omega t + o(e), \\ \sin \nu &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin u}{1 - e \cos u} = \sin \omega t + e \sin 2\omega t + o(e). \end{aligned} \quad (39)$$



Obrázek 8: Zeměpisná délka ϕ

Satelit E obíhá po eliptické dráze kolem planety v ohnisku elipsy F . Zároveň rotuje kolem vlastní osy úhlovou rychlostí ω , přičemž má vázanou rotaci $-2\pi/\omega = T$, kde T je perioda oběhu satelitu kolem planety. Zeměpisnou délku ϕ lze potom vyjádřit pomocí souřadnice $\tilde{\phi}$ jako $\tilde{\phi} = \phi + \omega t - \nu$.

Ze součtových vzorců pro goniometrické funkce plyne

$$\cos^2 \tilde{\phi} = \cos^2(\phi + \omega t - \nu) = \cos^2 \phi + 2e \sin \omega t \sin 2\phi + o(e). \quad (40)$$

Po zavedení těchto aproximací je slapový potenciál do prvního řádu v excentricitě a do nejnižšího řádu v R/ρ

$$V = \frac{GMr^2}{2a^3} \left[1 - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + e(3 \cos \omega t - 9 \cos \omega t \sin^2 \theta \cos^2 \phi - 6 \sin \omega t \sin^2 \theta \sin 2\phi) \right]. \quad (41)$$

Navíc podle třetího Keplerova zákona

$$\omega^2 = GM/a^3, \quad (42)$$

takže lze potenciál psát ve tvaru

$$V = \omega^2 r^2 \frac{1}{2} \left[1 - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + e(3 \cos \omega t - 9 \cos \omega t \sin^2 \theta \cos^2 \phi - 6 \sin \omega t \sin^2 \theta \sin 2\phi) \right]. \quad (43)$$

Pro výpočet disipačního tepla stačí uvažovat pouze část potenciálu V_t proměnnou v čase. Pomocí přidružených Legendrových funkcí $P_j^m(\cos \theta)$ lze V_t vyjádřit jako

$$V_t = \omega^2 r^2 e \left[\frac{3}{2} P_2^0(\cos \theta) \cos \omega t - \frac{1}{4} P_2^2(\cos \theta) (3 \cos \omega t \cos 2\phi + 4 \sin \omega t \sin 2\phi) \right]. \quad (44)$$

Přidružené Legendrovy funkce $P_j^m(\cos \theta)$ jsou definované pomocí Legendrových polynomů $P_j(\cos \theta)$

$$\begin{aligned} P_j(x) &= \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1)^j, \\ P_j^m(x) &= (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_j(x)}{dx^m}. \end{aligned} \quad (45)$$

Pro $P_2^0(\cos \theta)$ a $P_2^2(\cos \theta)$ tedy platí

$$\begin{aligned} P_2^0(\cos \theta) &= \frac{3}{2} \cos^2(\theta) - \frac{1}{2}, \\ P_2^2(\cos \theta) &= 3 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (46)$$

4.3 Axisymetrická aproximace

Pro další výpočet používáme potenciál nezávislý na ϕ , čímž se třírozměrná úloha mění na dvourozměrnou. Část potenciálu (44) nezávislá na ϕ je

$$V_{2D} = \omega^2 r^2 e \left[\frac{3}{2} P_2^0(\cos \theta) \cos \omega t \right]. \quad (47)$$

Tato aproximace je symetrická vůči rotační ose satelitu.² V axisymetrické aproximaci zanedbáváme značnou část potenciálu. Vliv tohoto zanedbání na celkový výkon disipované energie daný rovnicí (19) lze určit z alternativního vztahu pro průměrný výkon uvedeného v [2]

$$\bar{P} = -\frac{5Im(k_2)}{8\pi^2 G r_s} \int_0^T \int_{\partial G} \left(\frac{\partial V(r_s)}{\partial t} \right)^2 dS dt, \quad (48)$$

kde $Im(k_2)$ je imaginární část Loveova čísla k_2 , zavedeného například v [12], r_s je poloměr satelitu. Integrujeme přes hranici tělesa G , tedy přes povrch satelitu. Pro

²Obdobně lze nalézt aproximaci symetrickou kolem spojnice satelit-planeta, ale pomocí ní by nebylo možné hledat model vysvětlující teplotu oblast kolem pólu Enceladu.

radiálně symetrické těleso zůstává faktor před integrálem stejný pro potenciál V_t i V_{2D} . Poměr výkonů je tedy

$$\frac{\bar{P}_{2D}}{\bar{P}_{3D}} = \frac{\int_0^T \int_{\partial G} \left(\frac{\partial V_{2D}(r_s)}{\partial t} \right)^2 dS dt}{\int_0^T \int_{\partial G} \left(\frac{\partial V_t(r_s)}{\partial t} \right)^2 dS dt} = \frac{3}{28}. \quad (49)$$

Pro určení výkonu \bar{P}_{3D} lze tedy výkon vypočtený pro axisymetrickou část potenciálu přenásobit faktorem $28/3$.

5 Výsledky

5.1 Použité parametry

Modelujeme kulový satelit o poloměru $r_s = 252$ km složený z vodního pláště o hustotě $\rho_{\text{ice}} = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ a silikátového jádra o hustotě $\rho_{\text{sil}} = 3000 \text{ kg m}^{-3}$ [13]. Hodnota modulu torze silikátů je přibližně $\mu_{\text{sil}} = 6 \cdot 10^{10}$ Pa, modul torze ledu je $\mu_{\text{ice}} = 3,3 \cdot 10^9$ Pa [3, 14]. Viskozita ledu η_{ice} se pohybuje mezi 10^{13} a 10^{15} Pa s v závislosti na teplotě a příměsích, například vzrůst koncentrace amoniaku v ledu o 5% způsobí pokles viskozity o řád [1]. Pro natavený led může být viskozita ještě nižší. Viskozita η_{sil} silikátů je o několik řádů vyšší, pohybuje se okolo 10^{20} Pa s [15].

Celkový výkon \bar{P}_{3D} , tedy 28/3 výkonu \bar{P}_{2D} vypočteného programem ENCL, je vyneseno v grafech uvedených níže pro dva základní modelové satelity. Oba modelové satelity mají silikátové jádro. Zatímco plášť prvního z nich je složen pouze z ledu, u druhého je navíc předepsána mezi pláštěm a jádrem vrstva s viskozitou nižší než je viskozita pláště. Viskozita pláště se ukázala jako nejvýznamnější parametr určující celkový výkon disipované energie, proto všechny níže uvedené grafy ukazují závislost výkonu \bar{P}_{3D} na viskozitě η_{ice} . Vzhledem k charakteru této závislosti jsme pro obě osy zvolili logaritmickou škálu. Zkoumali jsme výkon při viskozitě pláště v rozmezí 10^{11} a 10^{17} Pa s. V grafech je trojicí šedých čar vyznačen pozorovaný výkon 5,8 GW (plná čára) a krajní hodnoty intervalu přesnosti (3,9 GW a 7,7 GW).

5.2 Dvojvrstvý model

Nejjednodušší model je radiálně symetrický složený z vnitřní silikátové a vnější ledové vrstvy. Pro tento model lze volit různou velikost jádra v závislosti na průměrné hustotě satelitu a různou viskozitou a modul torze materiálů.

Změna viskozity jádra se na výkonu prakticky neprojeví. I poměrně nízká viskozita pro silikáty 10^{18} Pa s je o několik řádů vyšší než viskozita ledu, tj. 10^{13} až 10^{15} Pa s, takže naprostá většina energie se disipuje v ledové vrstvě. Proto je ve všech výpočtech použita viskozita jádra 10^{20} Pa s. Pokud není uvedeno jinak, je počítáno s modulem torze ledu $3,3 \cdot 10^9$ Pa a modulem torze silikátů $6 \cdot 10^{10}$ Pa.

Poloměr rozhraní jádra a pláště r_{CMB} v satelitu s průměrnou hustotou $\bar{\rho}$ je

$$r_{\text{CMB}} = \left(\frac{\bar{\rho} - \rho_{\text{ice}}}{\rho_{\text{sil}} - \rho_{\text{ice}}} \right)^{1/3} r_s. \quad (50)$$

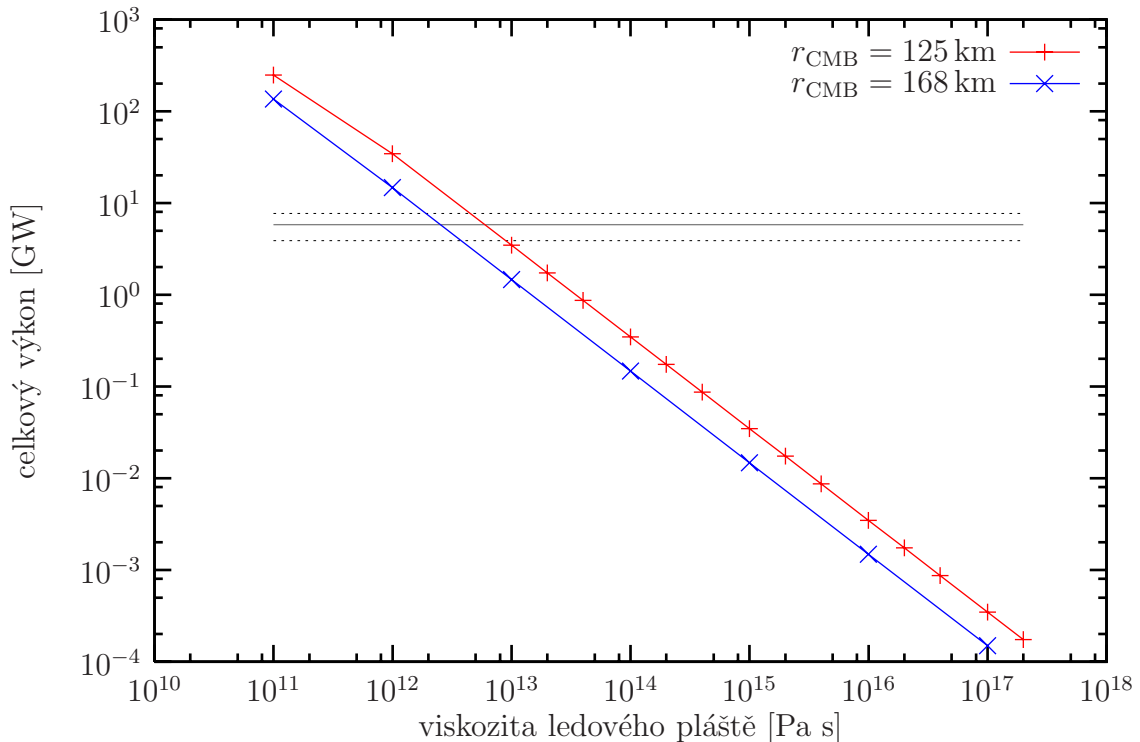
Pokud uvažujeme přesnější hodnotu hustoty ledu $\rho_{\text{ice}} = 920 \text{ kg m}^{-3}$ a hustotu jádra $\rho_{\text{sil}} = 3000 \text{ kg m}^{-3}$, je rozhraní jádra a pláště v 125 km pro střední hustotu $\bar{\rho} = 1240 \text{ kg m}^{-3}$ a v 168 km pro střední hustotu $\bar{\rho} = 1600 \text{ kg m}^{-3}$.

Celkový tepelný výkon \bar{P}_{3D} v závislosti na viskozitě ledového pláště pro tyto dvě mezní hodnoty r_{CMB} je v grafu 1. Pro oba poloměry jádra výkon výrazně roste s klesající viskozitou pláště. Závislost výkonu na viskozitě pláště je mocninná, čemuž v log-log škále odpovídá lineární pokles. Pro menší jádro je výkon přibližně dvakrát větší, protože v ledu se díky větší deformaci disipuje více energie než v silikátech.

Nízká viskozita a modul torze ledu navíc umožňuje větší deformaci vnějších vrstev, které jsou tvořeny ledem pro oba poloměry jádra, čímž opět vzroste disipace. Pro $r_{\text{CMB}} = 125$ km dosáhneme spodní hranice pozorovaného výkonu při $\eta_{\text{ice}} = 10^{13}$ Pa s, pro $r_{\text{CMB}} = 168$ km až při $\eta_{\text{ice}} = 4 \cdot 10^{12}$ Pa s. V dalších výpočtech uvažujeme poloměr jádra $r_{\text{CMB}} = 125$ km, získáme tedy horní odhad tepelného výkonu.

Vliv změny modulu torze jádra μ_{sil} ukazuje graf 2. Zatímco zvýšení μ_{sil} naměřenou křivku výkonu téměř nemění, jeho snížením o několik řádů oproti standardní hodnotě $\mu_{\text{sil}} = 6 \cdot 10^{10}$ Pa lze dosáhnout několikanásobného vzrůstu výkonu (pro $\mu_{\text{sil}} = 10^7$ Pa, tedy snížení o téměř čtyři řády, výkon vzroste více než čtyřikrát). K tomuto nárůstu dochází jen při dostatečně vysoké viskozitě pláště, přičemž viskozita, při které se křivka začne přiklánět ke křivce pro $\mu_{\text{sil}} = 6 \cdot 10^{10}$ Pa klesá s klesajícím μ_{sil} . Například křivka výkonu pro $\mu_{\text{sil}} = 10^9$ Pa je pro η_{ice} od 10^{14} do 10^{17} Pa s lineární v log-log škále, pro $\eta_{\text{ice}} = 10^{14}$ Pa s se začíná přiklánět ke křivce $\mu_{\text{sil}} = 6 \cdot 10^{10}$ Pa, se kterou pro $\eta_{\text{ice}} = 2 \cdot 10^{12}$ Pa s splývá. Pro $\mu_{\text{sil}} = 10^8$ Pa, resp. 10^7 Pa, je průběh křivky výkonu obdobný, ale hodnota η_{ice} , pro kterou přestává být závislost v log-log škále lineární, je $\eta_{\text{ice}} \approx 3 \cdot 10^{13}$ Pa s, resp. $3 \cdot 10^{12}$ Pa s.

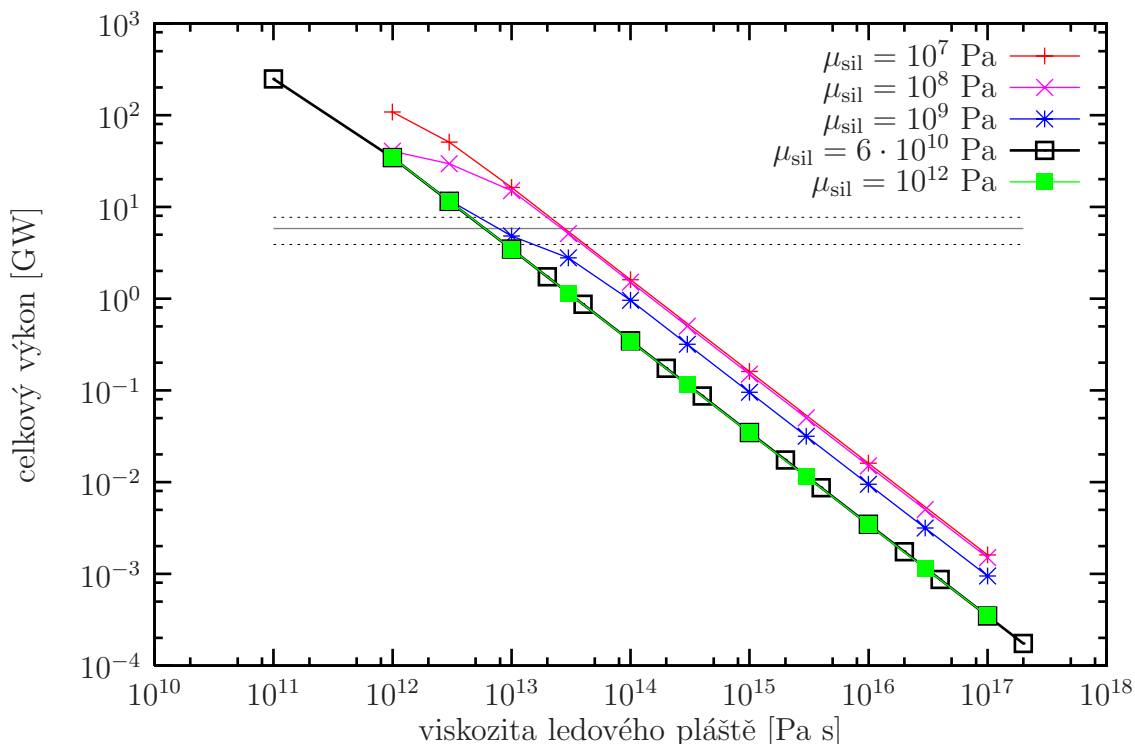
Graf 1: Výkon v závislosti na poloměru rozhraní jádra a pláště



5.3 Model s nízkoviskózní vrstvou

Druhý modelový satelit je složen se silikátového jádra o průměru 125 km, dále z vrstvy o tloušťce d od 5 do 20 km s viskozitou η_d od 10^{10} do 10^{13} Pa s a z pláště

Graf 2: Výkon v závislosti na modulu torze jádra



s vyšší viskozitou. Nízkoviskózní vrstva mezi jádrem a ledovým pláštěm představuje led o teplotě blízké teplotě tání. Pro výpočty jsou použity hodnoty parametrů $\mu_{\text{sil}} = 6 \cdot 10^{10}$ Pa, $\mu_{\text{ice}} = 3,3 \cdot 10^9$ Pa a $\eta_{\text{sil}} = 10^{20}$ Pa.s. V grafech jsou pro srovnání černou barvou vyneseny hodnoty výkonu pro satelit bez nízkoviskózní vrstvy.

Deformace vrstvy s nižší viskozitou je méně svázaná s deformací jádra. Proto umožní větší deformaci celého ledového pláště a i pro vysokou viskozitu pláště je celkový výkon poměrně vysoký – místy o několik řádů vyšší než bez nízkoviskózní vrstvy, viz grafy 3 až 6. Celkový výkon v tomto modelu významně závisí na viskozitě vrstvy a její tloušťce a samozřejmě na viskozitě pláště η_{ice} . Pro snižující se viskozitu pláště se výkon pro model s nízkoviskózní vrstvou blíží výkonu pro dvojrvtvý model, pro $\eta_d = \eta_{\text{ice}}$ je výkon totožný.

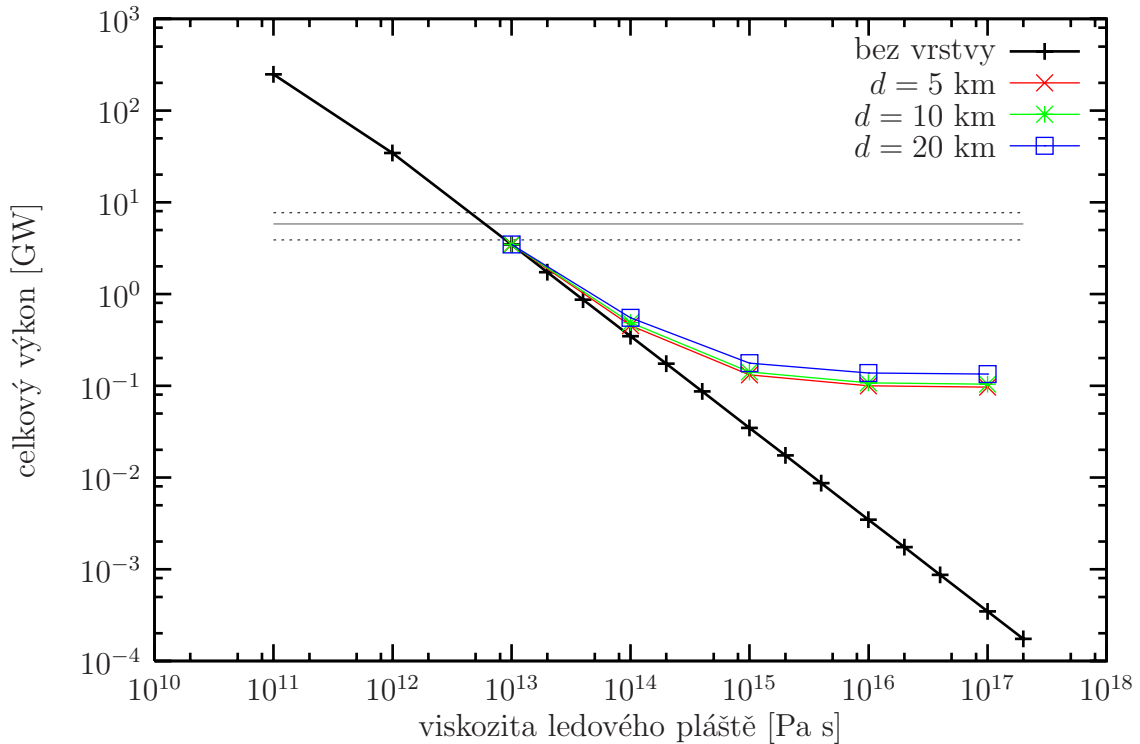
Grafy 3 až 6 ukazují výkon pro viskozitu vrstvy 10^{13} , 10^{12} , 10^{11} a 10^{10} Pa.s. V každém z grafů jsou vyneseny křivky závislosti výkonu na viskozitě pláště pro tloušťku vrstvy 5, 10 a 20 km. Graf 3 ukazuje výkon pro viskozitu vrstvy 10^{13} Pa.s. Pro tuto viskozitu vrstvy je výkon vyšší pro větší tloušťku vrstvy, ale rozdíl není příliš významný. Pro $\eta_d = 10^{12}$ Pa.s a 10^{11} Pa.s (graf 4 a 5) je závislost obdobná, ale rozdíl výkonu pro různé d je větší. Graf 6 ukazuje výkon pro viskozitu vrstvy 10^{10} Pa.s. Narozdíl od předchozích případů už nelze říct, že výkon roste s rostoucí tloušťkou vrstvy. Pro $\eta_{\text{ice}} > 10^{15}$ Pa.s je tomu přesně naopak – nejvyšší výkon odpovídá nejtenčí vrstvě. V tomto případě se zřejmě začíná projevovat malá disipace v nízkoviskózní vrstvě, která není vyrovnána ani disipací v plášti zvýšenou díky větší

deformaci.

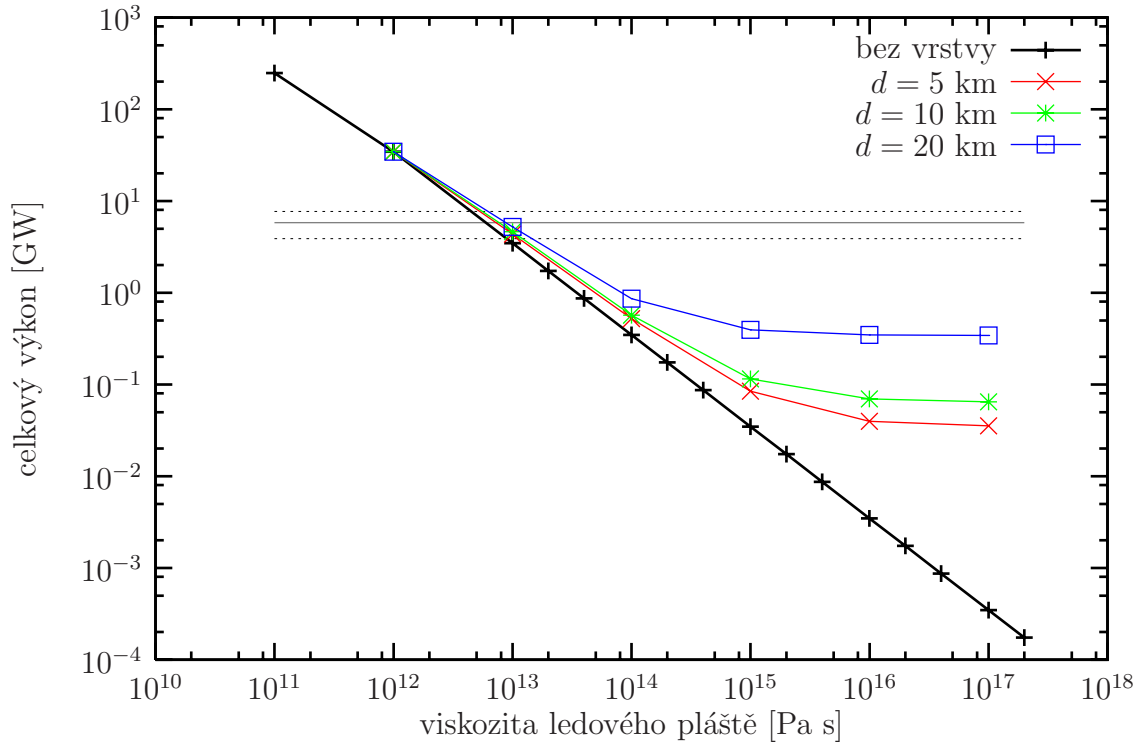
Grafy 7, 8 a 9 ukazují srovnání výkonu pro vrstvu tloušťky 5, 10 a 20 km. V každém z grafů jsou vyneseny křivky závislosti výkonu na viskozitě pláště pro viskozitu vrstvy 10^{10} , 10^{11} , 10^{12} a 10^{13} Pa.s. Výsledné závislosti nelze jednoduše vystihnout, uplatňuje se jednak zvýšení disipace v plášti, a naproti tomu snížení disipace ve vrstvě, pro nižší η_d a větší d . Dále je z každého z grafů 7 až 9 patrné, že pokud chceme dosáhnout významného zvýšení výkonu pro viskozitu pláště $\eta_{ice} \approx 10^{13}$ až 10^{14} Pa.s, je nutné předepsat viskozitu vrstvy o několik řádů nižší než toto η_{ice} .

Ani v jednom případě nedosáhl vypočtený výkon hranice 3,9 GW pro viskozitu pláště 10^{14} Pa.s a vyšší. Zatímco pro dvojvrstvý model lze tuto hranici dosáhnout při viskozitě pláště 10^{13} Pa.s, s nízkoviskózní vrstvou ji lze dosáhnout při viskozitě pláště nejvýše $4 \cdot 10^{13}$ Pa.s (pro $d = 20$ km a $\eta_d = 10^{10}$ Pa.s).

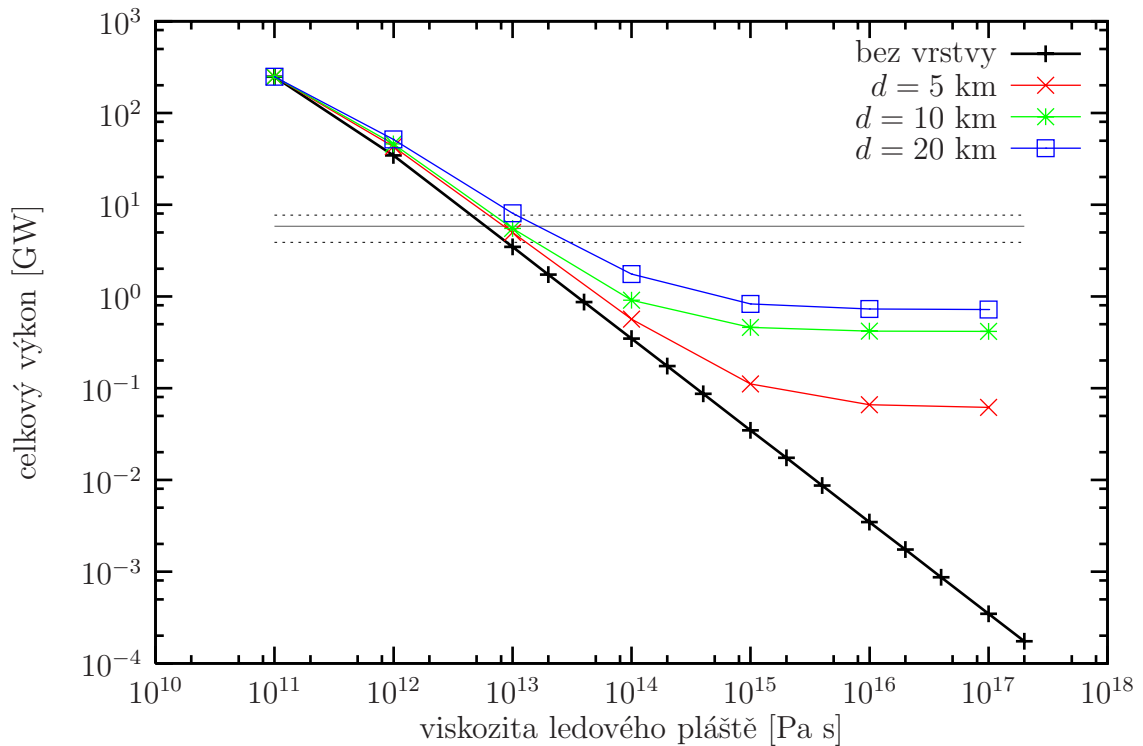
Graf 3: Viskozita vrstvy 10^{13} Pa.s



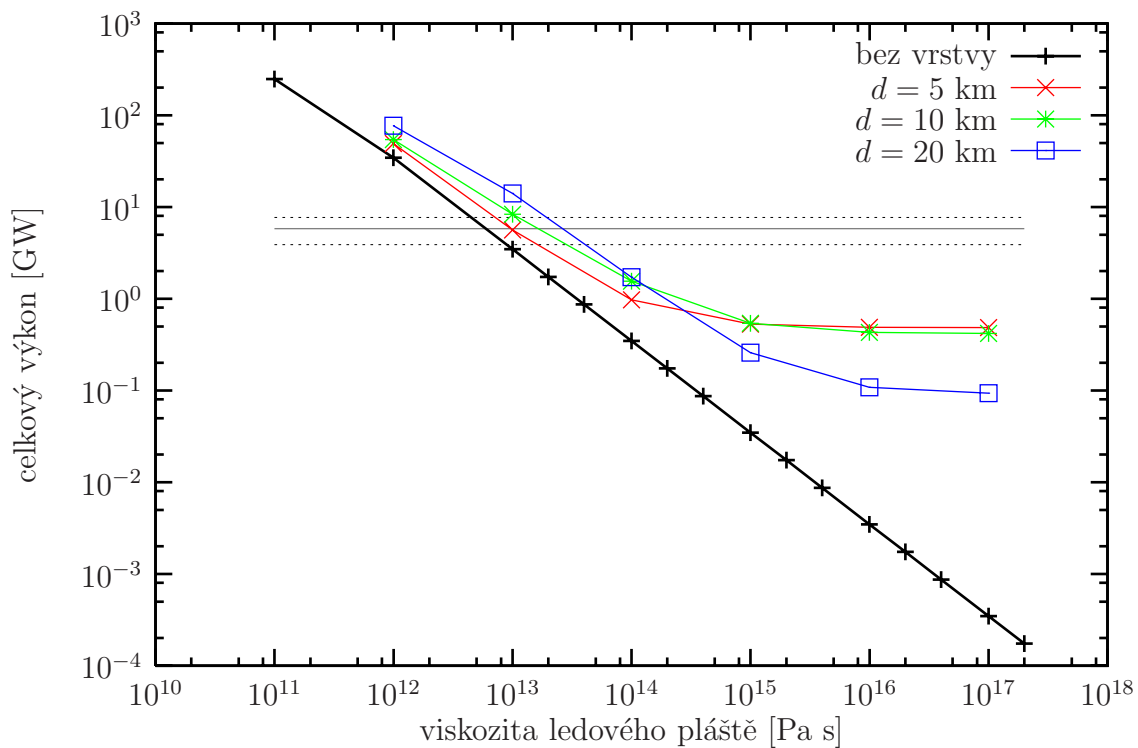
Graf 4: Viskozita vrstvy 10^{12} Pa s



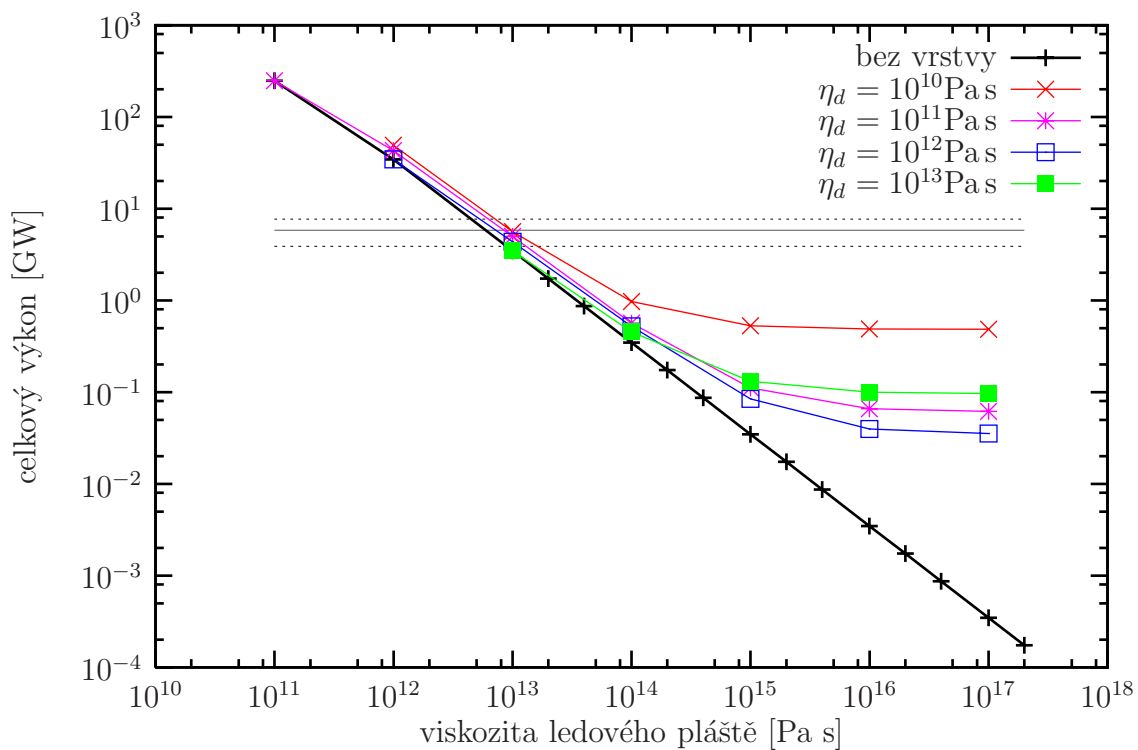
Graf 5: Viskozita vrstvy 10^{11} Pa s



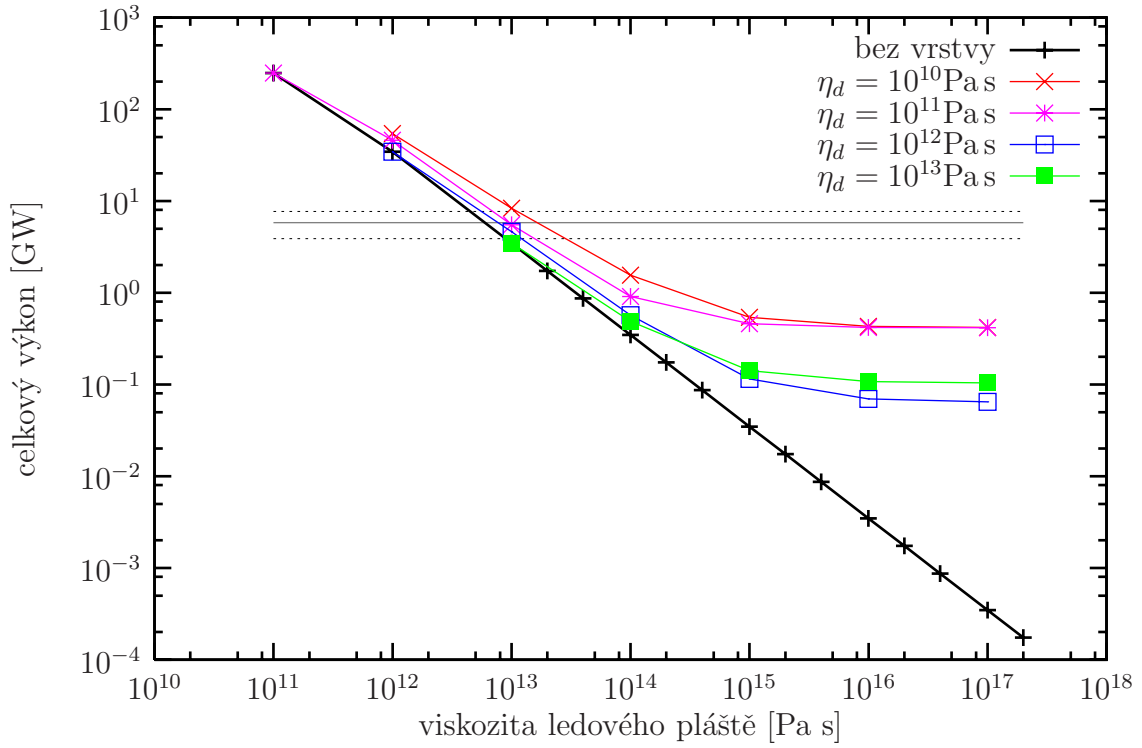
Graf 6: Viskozita vrstvy 10^{10} Pa s



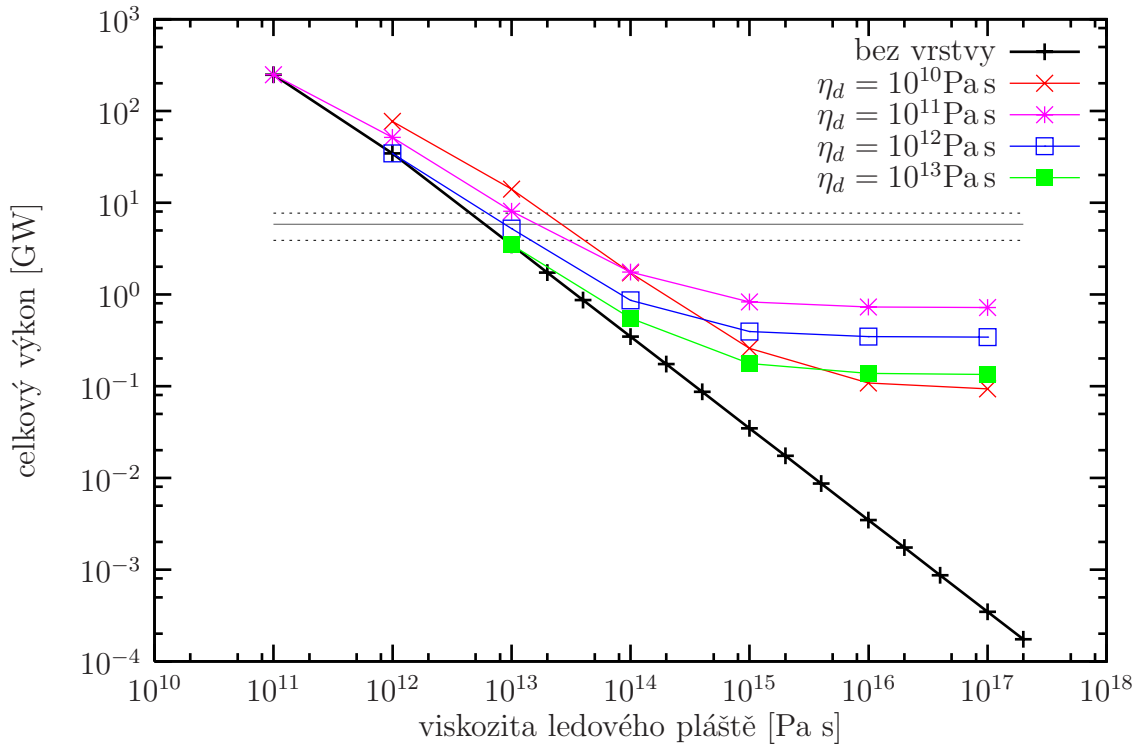
Graf 7: Tloušťka vrstvy 5 km



Graf 8: *Tloušťka vrstvy 10 km*



Graf 9: *Tloušťka vrstvy 20 km*



6 Diskuze výsledků

Zkoumali jsem závislost celkového disipačního výkonu na parametrech popisujících modelový satelit – poloměru jádra, viskozitě a modulu torze pláště a jádra. Výsledný výkon jsme srovnávali s naměřeným výkonem 5,8 GW a hledali jsme parametry, při kterých by bylo možné naměřeného výkonu dosáhnout. Jako nejvýznamnější se ukázala závislost na viskozitě ledového pláště. V rozmezí $\eta_{\text{ice}} \in \langle 10^{11}, 10^{17} \rangle \text{Pa s}$ výkon rychle klesá s rostoucí viskozitou, přičemž tento pokles je lineární v log-log škále. Při poloměru jádra 125 km lze pro dvojvrstvý model dosáhnout pozorovaný výkon 5,8 GW pro viskozitu pláště $6 \cdot 10^{12} \text{Pa s}$ a výkon 3,9 GW pro viskozitu pláště 10^{13}Pa s . Pro jádro s poloměrem 168 km je pro dosažení $\bar{P}_{3D} = 5,8 \text{ GW}$, resp. 3,9 GW, nutné předepsat $\eta_{\text{ice}} = 2,5 \cdot 10^{12} \text{Pa s}$, resp. $\eta_{\text{ice}} = 4 \cdot 10^{12} \text{Pa s}$. V další diskuzi se zaměřujeme na výsledky získané pro poloměr jádra 125 km, ale lze předpokládat, že zvětšení jádra nijak nezmění charakter výsledků a výkon se pouze sníží. I pro malé jádro není snadné dosáhnout pozorovanou hodnotu výkonu bez značného snížení viskozity celého pláště. Viskozita pláště 10^{13}Pa s je spodní hranicí přípustných hodnot viskozity ledu. Zvýšení výkonu lze dosáhnout snížením modulu torze jádra, ale tento efekt je významný pouze pro vysoké viskozity pláště, jak dokládá graf 2. Pro významné zvýšení výkonu je nutné snížit modul torze jádra o několik řádů, čímž se přesuneme do hodnot odpovídajících směsi ledu a silikátů.

Model s nízkoviskózní vrstvou mezi jádrem a pláštěm dává větší výkon pro všechny viskozity pláště v důsledku uvolnění mechanické vazby mezi jádrem a pláštěm. Nejvýraznějšího rozdílu dosáhneme pro vysoké viskozity pláště 10^{15} až 10^{17}Pa s , kde dochází ke vzrůstu výkonu o několik řádů. Pro realistickou viskozitu pláště od 10^{13} do 10^{15}Pa s se výkon nejvýrazněji změní při předepsání vrstvy s velmi nízkou viskozitou 10^{10}Pa s . Tím se mezní viskozita potřebná pro dosažení výkonu $\bar{P}_{3D} = 5,8 \text{ GW}$, resp. 3,9 GW, zvýší na $\eta_{\text{ice}} = 3 \cdot 10^{13} \text{Pa s}$, resp. $\eta_{\text{ice}} = 4 \cdot 10^{13} \text{Pa s}$. Pozorovaného výkonu lze tedy dosáhnout i při viskozitě pláště, která je v souladu s běžně udávanou hodnotou viskozity ledu.

Problémem však zůstává, jak tento výkon, rozptýlený po celém objemu ledového pláště, soustředit do jedné z polárních oblastí. Cílem další práce by proto mělo být zobecnění stávajícího modelu o anomální oblast pod jižním pólem, ve které by byla například nižší viskozita, a výpočet tepelného toku v různých místech povrchu. Dále by bylo vhodné počítat s celým, tedy třírozměrným, slapovým potenciálem, a nikoliv jen s jeho osově symetrickou částí. Pro model bez radiální symetrie už nelze aplikovat jednoduchý vzorec (49) a získat tak celkový výkon \bar{P}_{3D} . Připomeňme také, že při matematické formulaci problému byla použita řada zanedbání. Například jsme neuvažovali šíření tepla dané rovnicí (6) a není proto jasné, jestli jsou zkoumané modely stabilní vzhledem k možnostem přenosu tepla v jejich nitru.

7 Závěr

Dosažené výsledky lze shrnout do následujících bodů:

1. Znovu jsme odvodili vzorec pro výpočet slapové síly působící na satelit s vázanou rotací obíhající po eliptické dráze.
2. Vypočetli jsme disipační výkon vzniklý v důsledku slapové síly pro radiálně symetrický model tvořený silikátovým jádrem a ledovým pláštěm. Ukázali jsme, že pozorovaný tepelný výkon Enceladu je pro tento model dosažitelný, ale pouze pro viskozitu pláště na spodní hranici přípustných hodnot viskozity ledu.
3. Dále jsme studovali vliv vrstvy mezi jádrem a pláštěm s nízkou viskozitou odpovídající natavenému ledu. Tato nízkoviskózní vrstva umožní větší deformaci pláště, a tedy zvýšení disipačního výkonu.

Vhodným rozšířením práce by bylo zobecnění modelu na osově symetrický satelit deformovaný celou, tj. třírozměrnou, slapovou silou.

Literatura

- [1] Sotin Ch., Tobie G.: *Internal Structure and Dynamics of the Large Icy Satellites*, C. R. Physique, 5, 769-780, 2004
- [2] Tobie G.: *Impact du chauffage de marée sur l'évolution géodynamique d'Europe et de Titan*, doktorská disertační práce, Université Paris 7, 2003
- [3] Tobie G., Mocquet A., Sotin Ch.: *Tidal Dissipation within Large Icy Satellites: Application to Europa and Titan*, Icarus, 177, 534-549, 2005
- [4] Spencer J. R. et al.: *The South Polar Hot Spot on Enceladus*, Lunar and Planetary Science XXXVII, 2006
- [5] Cathles L. M.: *The Viscosity of the Earth's Mantle*, Princeton Univ. Press, 1975
- [6] Jones M. N.: *Spherical Harmonics and Tensors for Classical Field Theory*, Research Studies Press Ltd., 1985
- [7] Varshalovich D. A., Moskalev A. N., Khersonski V. K.: *Quantum Theory of Angular Momentum*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1989
- [8] Matas J.: *Mantle Viscosity and Density Structure*, diplomová práce, MFF UK, Praha 1995
- [9] Čadek O.: *Spherical tensor approach to the solution of the mantle stress problem*, Stud. geod. geoph., 33, 177-197, 1989
- [10] Novotný O.: *Motions, Gravity Field and Figure of the Earth*, Instituto de Física, Instituto de Geociencias, Salvador, Bahia, 72-75, 1998
- [11] Šidlichovský M., *Nebeská mechanika*, skripta pro MFF UK, dostupná na <http://astro.mff.cuni.cz/predmety.html>, 45-55
- [12] Melchior P.: *The Tides of the Planet Earth*, Pergamon Press, Oxford, 57-80, 1978
- [13] Kirk R. L., Stevenson D. J.: *Thermal Evolution of a Differentiated Ganymede and Implications for Surface Features*, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1985
- [14] Segatz M., Spohn T.: *Tidal Dissipation, Surface Heat Flow and Figure of Viscoelastic Models of Io*, Icarus 75, 187-206, 1988
- [15] Dziewonski A. M., Anderson D. L.: *Preliminary Reference Earth Model*, Phys. Earth Planet, Inter. 25, 297-356, 1981