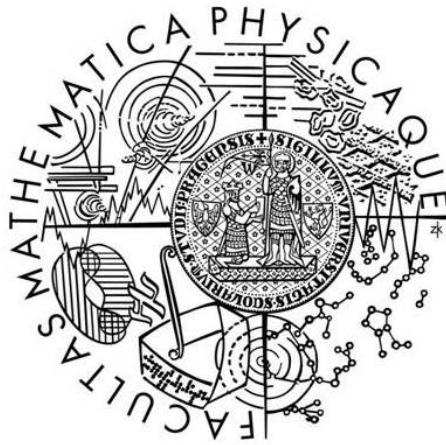


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Adam Geri

Dynkinovy diagramy komplexních polojednoduchých Lieových algeber

Matematický ústav UK

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Lukáš Krump, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Učitelství fyziky-matematiky
pro střední školy

Praha 2015

Na tomto místě bych rád poděkoval panu Mgr. Lukášovi Krumpovi, Ph. D. za odborné rady a náměty po čas psaní této diplomové práce. Děkuji také za trpělivost, s jakou vedl konzultace, neboť tyto konzultace velmi pomohly mému pochopení Lieových algeber.

Také děkuji svým rodičům za podporu při studiu.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 5. 5. 2015

Adam Geri

Název práce: Dynkinovy diagramy komplexních polojednoduchých Lieových algeber

Autor: Adam Geri

Katedra: Matematický ústav UK

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Lukáš Krump, Ph.D., Matematický ústav Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulta UK v Praze, Sokolovská 83, Praha 8

Abstrakt: Dynkinovy diagramy jsou nástrojem pro přehledné znázornění metrických vlastností kořenové mříže Lieovy algebry. Abychom mohli provést jejich klasifikaci, zkoumáme působení reprezentace $\text{ad}(\mathfrak{h})$ na podalgebry $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ a nacházíme jejich kořeny, z nichž vybíráme podmnožinu sestávající z tzv. jednoduchých kořenů. Uspořádání na množině všech kořenů ztotožňujeme s působením jistého lineárního funkcionálu na \mathfrak{h}^* . Po zavedení Killingovy formy identifikujeme prostor \mathfrak{h}^* s euklidovským prostorem a ukazujeme dále, že geometrie na tomto prostoru je značně omezena obecnými vlastnostmi kořenových mříží. Diskutujeme jednotlivá uspořádání mezi dvojicemi jednoduchých kořenů a zavádíme notaci pro konstrukci Dynkinových diagramů. Nakonec dokazujeme hlavní klasifikační větu a zobecňujeme některé úvahy, obsažené v jejím důkazu.

Klíčová slova: Lieova grupa, Lieova algebra, reprezentace, kořenový systém, Dynkinův diagram

Title: Dynkin diagrams of complex semisimple Lie algebras

Author: Adam Geri

Department: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: Mgr. Lukáš Krump, Ph.D., Mathematical Institute of the Charles University, Faculty of Mathematics and Physics UK in Prague, Sokolovská 83, Prague 8

Abstract: Dynkin diagrams are a useful tool for the representation of metric qualities of a root lattice relevant to some Lie algebra. We study an action of $\text{ad}(\mathfrak{h})$ on the subalgebras of $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ to find their roots and to manage their classification. We are focused on so-called simple roots. We introduce a certain linear functional to make an ordering of the set of the roots. Also we define the Killing form and we identify \mathfrak{h}^* to a Euclidian space. It is shown that the geometry on this space is strongly restricted by the general characteristics of the root lattices. We discuss all the settings between couples of the simple roots and we introduce a notation for the construction of Dynkin diagrams. Finally, we prove the main classification theorem and we generalize some ideas of its proof.

Keywords: Lie group, Lie algebra, representation, root system, Dynkin diagram

Obsah

Úvod	1
1.Úvodní poznámky	3
1.1. Lieova algebra	3
2.Klasické Lieovy algebry	9
2.1. Algebra $\mathfrak{sl}_{n+1}\mathbb{C}$	9
2.2. Algebra $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$	17
2.3. Algebra $\mathfrak{so}_{2n}\mathbb{C}$ a $\mathfrak{so}_{2n+1}\mathbb{C}$	21
3.Dynkinovy diagramy	27
3.1. Killingova forma	27
3.2. Formální kořenová mříž	32
3.3. Klasifikace Dynkinových diagramů	38
3.4. Trojné uzly Dynkinova diagramu	48
Závěr	53
Literatura	55

Úvod

Cílem této práce je podrobná klasifikace komplexních polojednoduchých Lieových algeber. Klasifikace samotná se opírá o pojem Dynkinova diagramu, který vypovídá o geometrickém uspořádání jednoduchých kořenů dané Lieovy algebry. Vyjma podkapitol **3.3.** a **3.4.** tak celý text pokládá teoretický základ právě pojmu Dynkinova diagramu.

První dvě kapitoly se týkají klasických Lieových algeber a dávají je do souvislosti se stejnojmennými Lieovými grupami. Na začátku jsou definovány klíčové pojmy Lieova algebra a adjungovaná reprezentace, o které se zbytek textu nadále opírá. Následně jsou jednotlivé Lieovy algebry odvozeny na základě jim odpovídajících Lieových grup a studiem těchto algeber pak sledujeme nalezení odpovídajících jednoduchých kořenů.

Poslední kapitola zprvu pojednává o Killingově formě, která na množině všech kořenů, jež jsou prvky duálu \mathfrak{h}^* Cartanovy podalgebry, zavádí skalární součin. Definována je pak tzv. formální kořenová mříž a na základě obsahu její definice jsou odvozeny různé vlastnosti kořenů. Tato část textu již vyústí v zavedení Dynkinových diagramů.

Celá podkapitola **3.3.** je věnována samotné klasifikaci Dynkinových diagramů. Formulována je tedy tzv. hlavní klasifikační věta, jejíž důkaz je pro přehlednost rozdělen do několika dílčích tvrzení. Závěrečná podkapitola **3.4.** zobecňuje jistou úvahu, užitou v části důkazu hlavní klasifikační věty. Toto zobecnění nakonec vede k větě, která umožňuje elegantním způsobem rozhodnout, zda je daný Dynkinův diagram, obsahující trojný uzel, přípustný či nepřípustný.

V první kapitole se opíráme zejména o publikace [ZM03], [KST97] a [FH91]. Rovněž také o zdroj [MB13]. Pro zbytek textu byla mým hlavním zdrojem informací kniha [FH91], zejména její část nacházející se na stranách 105-330. Začátek druhé kapitoly byl pak inspirován rovněž texty [KST97] a [VS02], kde je velmi podrobně rozepsán případ algebry $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$.

1. Úvodní poznámky

1.1. Lieova algebra

V rámci úvodní kapitoly definujeme základní pojmy, které jsou důležité pro pochopení dalšího textu. Definujeme zde klíčový pojem Lieova algebra a nastíníme její vztah k Lieově grupě. Dále definujeme pojem reprezentace algebry. Důležitá pro nás bude zejména tzv. adjungovaná reprezentace. Všechny algebry uvažujeme nad tělesem komplexních čísel. Stejně tak uvažujeme jen konečně dimenzionální reprezentace.

Definice: Vektorový prostor \mathfrak{g} , na němž je vedle operace sčítání definována další bilineární operace $[A, B]$ zvaná Lieova závorka nebo komutátor, splňující pro každé $A, B, C \in \mathfrak{g}$ vztahy:

1. $[A, B] = -[B, A]$,
2. $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$,

nazveme Lieovou algebrou.

Druhému vztahu uvedenému v definici se říká Jacobiho identita.

Věta: Mějme Lieovu algebru matic s komutátorem definovaným vztahem $[A, B] = AB - BA$. Potom je splněn vztah $[A, B] = -[B, A]$ a také Jacobiho identita.

Důkaz: Do obou zmíněných vztahů stačí dosadit naše vyjádření komutátoru $[A, B]$. První vztah je triviální a pro Jacobiho identitu dostaneme:

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] &= A(BC - CB) - (BC - CB)A \\ &+ B(CA - AC) - (CA - AC)B + C(AB - BA) - (AB - BA)C = 0. \end{aligned}$$

Tím je věta dokázána. □

Nyní definujeme tzv. polojednoduché Lieovy algebry. Poznamenejme, že jinými než polojednoduchými Lieovými algebrami se v tomto textu nezabýváme.

Definice: Komutant Lieovy algebry \mathfrak{g} je

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \{[A, B] \in \mathfrak{g}, A, B \in \mathfrak{g}\}$$

Definice: Ideál Lieovy algebry je podprostor \mathbb{I} takový, že

$$\forall A \in \mathbb{I} \forall B \in \mathfrak{g} : [A, B] \in \mathbb{I}.$$

Příkladem ideálu Lieovy algebry je právě její komutant, neboť máme-li $[A, C] \in \mathbb{I} \equiv [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ a $B \in \mathfrak{g}$, je $[[A, C], B]$ tvaru komutátoru dvou prvků, a tedy patří do \mathbb{I} .

Definice: Pro Lieovu algebru \mathfrak{g} uvažujme posloupnost jejích ideálů

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supseteq \mathfrak{g}^1 \supseteq \mathfrak{g}^2 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}^i \supseteq \mathfrak{g}^{i+1},$$

kde $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\mathfrak{g}^2 = [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]$, \dots , $\mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^i]$. Algebra \mathfrak{g} se nazývá řešitelná Lieova algebra, pokud existuje k , pro které $\mathfrak{g}^k = 0$.

Definice: Lieovu algebru \mathfrak{g} nazveme polojednoduchou, pokud neobsahuje žádný netriviální řešitelný ideál.

Podívejme se na některé příklady Lieových algeber. Algebry pod čísla **1.** - **4.** jsou příklady tzv. klasických maticových Lieových algeber. Algebry **2.** - **4.** jsou zároveň příklady polojednoduchých Lieových algeber.

1. Obecná lineární algebra $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ je nejobecnější příklad Lieovy algebry.

Jde o množinu všech komplexních čtvercových matic $n \times n$.

2. Speciální lineární algebra $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C} = \{X \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{C}, \text{Tr}X = 0\}$

je množinou čtvercových matic s nulovou stopou.

3. Speciální ortogonální algebra $\mathfrak{so}_n\mathbb{C} = \{X \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{C}, X^T A = -AX\}$,

kde A je symetrická regulární matice $n \times n$.

4. Symplektická algebra $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C} = \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}\mathbb{C}, X^T A = -AX\}$,

kde A je antisymetrická regulární matice $2n \times 2n$.

Definice: Reprezentace Lieovy algebry \mathfrak{g} na vektorovém prostoru V je dvojice (V, φ) , kde zobrazení φ je homomorfismus

$$\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V) = \text{End}(V),$$

který pro každé $A, B \in \mathfrak{g}$ zachovává komutátor

$$\varphi([A, B]) = [\varphi(A), \varphi(B)].$$

Přitom v $\text{End}(V)$ pro libovolné dva homomorfismy φ_1 a φ_2 definujeme komutátor

$$[\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_1 \circ \varphi_2 - \varphi_2 \circ \varphi_1$$

ve smyslu skládání zobrazení.

V teorii Lieových algeber pak mají zvláštní postavení tzv. ireducibilní reprezentace. K definici ireducibilní reprezentace je však třeba nejprve říci, co je to invariantní podprostor reprezentace V . Proto bude mít následující definice dvě části.

Definice: Necht' φ je reprezentace Lieovy algebry \mathfrak{g} na vektorovém prostoru V .

1. Řekneme, že podprostor W je invariantní podprostor V , pokud pro všechna $X \in \mathfrak{g}$ platí $\varphi(X)(W) \subset W$.
2. Řekneme, že reprezentace V je ireducibilní, pokud V nemá žádné netriviální invariantní podprostory (tj. jiné, než O a V).

Příkladem reprezentace algebry $\mathfrak{gl}_n \mathbb{C}$ je dvojice (\mathbb{C}^n, φ) , kde

$$\varphi : \mathfrak{gl}_n \mathbb{C} \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^n).$$

Působení algebry $\mathfrak{gl}_n \mathbb{C}$ na prostoru \mathbb{C}^n je vyjádřeno maticovým násobením

$$\varphi(A)(v) = Av \in \mathbb{C}^n.$$

Tuto reprezentaci nazýváme základní reprezentací algebry \mathfrak{g} .

Nyní zavedeme reprezentaci, kterou budeme značit $\text{ad}(X)$, a kterou nazýváme adjungovaná reprezentace.

Věta: Endomorfismus

$$\mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{g})$$

daný předpisem

$$\text{ad}(A)(X) = [A, X]$$

je reprezentace Lieovy algebry \mathfrak{g} .

Důkaz: Je třeba dokázat, že takto definované zobrazení zachovává komutátor. V následujícím výpočtu použijeme ve druhém kroku Jacobiho identitu:

$$\begin{aligned} \text{ad}[A, B](C) &= [[A, B], C] = [A, [B, C]] + [B, [C, A]] \\ &= [A, [B, C]] - [B, [A, C]] = \text{ad}(A)(\text{ad}(B)(C)) - \text{ad}(B)(\text{ad}(A)(C)) \\ &= (\text{ad}(A) \circ \text{ad}(B) - \text{ad}(B) \circ \text{ad}(A))(C) = [\text{ad}(A), \text{ad}(B)](C). \end{aligned}$$

□

Geometricky nahlíženo, Lieovy algebry jsou tečné prostory k Lieovým grupám v jednotce \mathbb{E} . Lieova grupa je hladká varieta se strukturou grupy taková, že algebraické operace součinu a inverzního prvku jsou hladké. Uveďme příklady maticových Lieových grup v pořadí, jež odpovídá výčtu výše uvedených algeber:

1. Obecná lineární grupa

$$\text{GL}_n \mathbb{C} = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \det A \neq 0\},$$

2. Speciální lineární grupa

$$\text{SL}_n \mathbb{C} = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \det A = 1\},$$

3. Speciální ortogonální grupa

$$\mathrm{SO}_n \mathbb{C} = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n}, M = A^T \cdot M \cdot A\},$$

kde M je symetrická matice $n \times n$,

4. Symplektická grupa

$$\mathrm{Sp}_{2n} \mathbb{C} = \{A \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}, M = A^T \cdot M \cdot A\},$$

kde M je antisymetrická matice $n \times n$.

V dalším textu budeme při odvozování jednotlivých Lieových algeber sledovat tento geometrický přístup. Necht' tedy $A(t)$, kde t je reálný parametr, je diferencovatelná křivka v Lieově grupě G . Neboli pro $t \in \mathbb{R}$ je $A(t) \in G$. Položme dále $A(0) = \mathbb{E}$. Prvky $A'(0)$ budeme nazývat tečnými vektory ke G v \mathbb{E} a odpovídající Lieova algebra \mathfrak{g} , jakožto množina všech těchto $A'(0)$, je tečným prostorem ke grupě G v jednotce \mathbb{E} .

Pojem reprezentace lze analogicky definovat také pro grupy. Máme-li reprezentaci (φ, V) Lieovy grupy G , pak homomorfismus φ přiřazuje prvku obecné lineární grupy $\mathrm{GL}_n \mathbb{C}$ automorfismus na prostoru V :

$$\varphi : G \rightarrow \mathrm{GL}(V) \equiv \mathrm{Aut}(V).$$

Pokud nás zajímá, jak vypadá reprezentace na duálním prostoru V^* , pak pro zobrazení

$$\varphi^* : G \rightarrow \mathrm{Aut}(V^*)$$

platí podmínka

$$\underline{\forall g \in G : \varphi^*(g) = \varphi(g^{-1})}.$$

Proč bereme v argumentu zobrazení φ , na pravé straně rovnosti, právě prvek g^{-1} a nikoli pouze g ? Důvodem je požadavek, aby zobrazení φ^* byl homomorfismus.

Připomeňme z lineární algebry, že pokud máme homomorfismus

$$f : V \rightarrow W,$$

pak zobrazení

$$f^* : W^* \rightarrow V^*$$

je k němu duální, když

$$\forall \beta \in W^* \forall v \in V : (f^*(\beta), v) = (\beta, f(v)).$$

Analogicky pak pro duální reprezentaci grupy G platí podmínka:

$$\forall v^* \in V^* \forall w \in V \forall g \in G : (\varphi^*(g)(v^*), w) = (v^*, \varphi(g^{-1})(w)).$$

Pokud se tedy přikloníme k výše uvedené volbě prvku g^{-1} , bude skutečně

$$\begin{aligned}
([\varphi^*(gh)](v^*), w) &= (v^*, [\varphi((gh)^{-1})](w)) = (v^*, [\varphi(h^{-1}g^{-1})](w)) \\
&= (v^*, [\varphi(h^{-1})\varphi(g^{-1})](w)) = ([\varphi^*(h)](v^*), [\varphi(g^{-1})](w)) \\
&= ([\varphi^*(g)\varphi^*(h)](v^*), w) \Rightarrow \underline{\varphi^*(gh) = \varphi^*(g)\varphi^*(h)}.
\end{aligned}$$

Nyní také lze ukázat, jak vypadá duální reprezentace pro Lieovy algebry. Pokud je tedy φ' reprezentace odpovídající Lieovy algebry \mathfrak{g} na prostoru V , pak

$$(\varphi')^* : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V^*).$$

Protože duální reprezentace grupy G vyhovuje pro každé $g \in G$ podmínce

$$\varphi^*(g) = \varphi(g^{-1}),$$

je třeba pro vyjádření duální reprezentace Lieovy algebry najít prvek $X \in \mathfrak{g}$, který by odpovídal $g^{-1} \in G$. Označme tedy g jako $A(t)$ a spočteme derivaci matice $A^{-1}(t)$. Vyjdeme ze vztahu

$$(AA^{-1}) = \mathbb{E}$$

a derivujeme obě jeho strany podle parametru $t \in \mathbb{R}$. Potom

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (A^{-1}(t)) A(0) + A^{-1}(0) \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (A(t)) = \mathbb{O},$$

a tak

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (A^{-1}(t)) &= -A^{-1}(0) \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (A(t)) A^{-1}(0) \\
&= -A^{-1}(0) A'(0) A^{-1}(0) = -\mathbb{E}X\mathbb{E} = -X.
\end{aligned}$$

Pokud je tedy

$$\varphi' : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

reprezentace Lieovy algebry \mathfrak{g} , pak duální reprezentace téže algebry na prostoru V^* je dána podmínkou

$$\underline{(\varphi')^*(X) = \varphi'(-X) = -\varphi'(X)}.$$

Nakonec poznamenejme, že duální reprezentaci se říká též kontrgradientní.

2. Klasické Lieovy algebry

2.1. Algebra $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$

V této kapitole se budeme zabývat klasickými Lieovými algebry. Začneme od jednoduchého případu, kterým je algebra $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$. Uvidíme, že každou z algeber, uvedených v minulé kapitole, lze rozložit na součet podalgeber, z nich každá je izomorfní $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$. Naším cílem bude především zkoumání kořenů těchto algeber.

Podívejme se nejprve na obecnou lineární grupu $GL_n\mathbb{C}$ a ukažme, že jde vskutku o Lieovu grupu. Zkraje kapitoly tedy formulujeme větu:

Věta: Množina čtvercových regulárních matic

$$GL_n\mathbb{C} = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \det A \neq 0\} \subset \mathbb{C}^{n^2}$$

je Lieova grupa.

Důkaz: Je třeba zjistit, zda jde o varietu. Ukážeme tedy, že $GL_n\mathbb{C}$ je otevřená podmnožina v \mathbb{C}^{n^2} . Postupujme tak, že se podíváme na její doplněk. Tím je množina čtvercových singulárních matic, jejíž obraz při zobrazení

$$\det : \mathbb{C}^{n^2} \rightarrow \mathbb{C}$$

bude jednoprvková množina $\{0\} \subset \mathbb{C}$, která je jistě uzavřená. Již víme, že vzor uzavřené množiny při spojitým zobrazení je uzavřená množina. To však znamená, že $\det^{-1}(0)$ je uzavřená podmnožina v \mathbb{C}^{n^2} a její doplněk tedy musí být otevřená množina, což je varieta.

Tato varieta je také grupa. Jsou-li A, B dvě regulární matice, pak

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \neq 0,$$

což znamená, že rovněž jejich součin je regulární matice. Množina $GL_n\mathbb{C}$ je tedy uzavřená na operaci násobení matic a je též uzavřená na operaci inverze, neboť

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Jednotkovým prvkem v $GL_n\mathbb{C}$ je jednotková matice \mathbb{E}_n , pro kterou $\det \mathbb{E}_n = 1$.

Dále operace násobení

$$GL_n\mathbb{C} \times GL_n\mathbb{C} \rightarrow GL_n\mathbb{C}, \quad (A, B) \mapsto A \cdot B,$$

stejně tak jako operace inverze

$$GL_n\mathbb{C} \rightarrow GL_n\mathbb{C}, \quad A \mapsto A^{-1}$$

jsou hladká zobrazení. V prvním případě je tomu tak proto, že sčítání a násobení v \mathbb{C}^n jsou hladké operace. V druhém případě uvažme, že matici A^{-1} lze vyjádřit jako součin $(\det A)^{-1} \cdot A_{\text{rec}}$, kde A_{rec} je tzv. reciproká matice, viz [JB05]. Proto je třeba si navíc uvědomit, že rovněž dělení je hladká operace na \mathbb{C}^n . Uvažovaná

množina je tedy Lieova grupa. \square

Připomeňme si také, že odpovídající Lieova algebra $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ je prostorem všech regulárních čtvercových matic.

Dále zdůvodníme, proč je $SL_n\mathbb{C}$ Lieova grupa. K tomu je třeba následující věty.

Věta: Je-li $F : \mathbb{C}^{n+k} \rightarrow \mathbb{C}^n$ hladké zobrazení, je-li pro nějaké $q \in \mathbb{C}^n$ množina $M = \{x \in \mathbb{C}^{n+k}, F(x) = q\}$ neprázdná a má-li diferenciál $DF(x)$ hodnotu n pro všechna $x \in M$, potom M je podvarieta dimenze k v \mathbb{C}^{n+k} .

Důkaz: viz [KST97], str. 80.

V kontextu Lieových grup tato věta říká, že je-li podgrupa $G \subset GL_n\mathbb{C}$ zadána regulárními rovnicí, pak G je Lieova podgrupa. Tento argument se chystáme použít v důkazu následující věty.

Věta: Množina

$$SL_n\mathbb{C} = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \det A = 1.\}$$

je Lieova grupa.

Důkaz: Lze snadno nahlédnout, že tato množina je podgrupou $GL_n\mathbb{C}$. Pokud jsou matice $A, B \in SL_n\mathbb{C}$, je

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 1 \cdot 1 = 1,$$

takže uvažovaná množina je uzavřená na operaci násobení matic. Je také uzavřená na operaci inverze, neboť

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = 1.$$

Jednotkovým prvkem je zde jednotková matice \mathbb{E}_n , pro kterou je $\det \mathbb{E}_n = 1$.

Nyní je třeba ukázat, že rovnice $\det A = 1$ je regulární, a tedy je třeba spočítat diferenciál zobrazení

$$\det : \mathbb{C}^{n^2} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Podívejme se tedy na jeho ij -tou složku¹

$$\frac{d(\det(A + tX_{ij}))}{dt}(0), \quad \hat{A} = A + tX_{ij}$$

a $X_{i,j}$ jsou matice, které mají na místě i, j číslo 1 a na ostatních místech číslo 0. Pro přehlednost spočtěme zvlášť determinant této matice:

$$\begin{aligned} \det \hat{A} &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det \tilde{A}_{ij} = \\ &(-1)^{1+j} a_{1j} \det \tilde{A}_{1j} + \dots + (-1)^{i+j} (a_{ij} + t) \det \tilde{A}_{ij} + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det \tilde{A}_{nj} = \\ &(-1)^{1+j} a_{1j} \det \tilde{A}_{1j} + \dots + (-1)^{i+j} a_{ij} \det \tilde{A}_{ij} + (-1)^{i+j} t \det \tilde{A}_{ij} + \dots + \\ &+ (-1)^{n+j} a_{nj} \det \tilde{A}_{nj} = \det A + (-1)^{i+j} t \det \tilde{A}_{ij}. \end{aligned}$$

Máme tedy

$$\det(A + tX_{ij}) = \det A + (-1)^{i+j} t \det \tilde{A}_{ij},$$

¹počítáme tedy parciální derivaci ve směru matice X_{ij}

a proto

$$\begin{aligned} \frac{d[\det(A + tX_{ij})]}{dt}(0) &= \frac{d[\det A + (-1)^{i+j} t \det \tilde{A}_{ij}]}{dt}(0) = \\ &= \frac{d[1 + (-1)^{i+j} t \det \tilde{A}_{ij}]}{dt}(0) = \underline{(-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij}}. \end{aligned}$$

Protože $\det A = 1$, je matice A regulární. Odtud plyne, že existuje nenulový subdeterminant řádu o 1 menšího, než je rozměr matice A . Existuje tak dvojice indexů ij , pro které je determinant matice \tilde{A}_{ij} různý od nuly, a tedy existuje nenulová složka diferenciálu zobrazení \det . Toto zobrazení má tedy hodnotu 1 a $\mathrm{SL}_n\mathbb{C}$ je tím pádem varieta dimenze $n^2 - 1$.

Nakonec grupové operace součinu a inverzního prvku jsou jistě hladké na $\mathrm{SL}_n\mathbb{C}$, neboť tato grupa je zároveň podvarieta $\mathrm{GL}_n\mathbb{C}$. \square

Uvažujme tedy Lieovu grupu $\mathrm{SL}_n\mathbb{C}$. Podíváme se nyní, jaká vlastnost je společná maticím, které náleží do odpovídající speciální lineární Lieovy algebry $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$.

Nechť tedy $\gamma(t)$ je diferencovatelná křivka v grupě $\mathrm{SL}_n\mathbb{C}$. Označíme-li $\gamma(t) = A_t$, bude $\gamma(0) = A_0 = \mathbb{E}$ a $\gamma'(0) = A'_0 = X$. Je-li $A_t \in \mathrm{SL}_n\mathbb{R}$ matice přechodu od báze e_1, \dots, e_n k bázi v_1, \dots, v_n prostoru $V = \mathbb{C}^n$ taková, že $v_i = \sum_{j=1}^n a_i^j e_j$, pak platí

$$A_t(e_1) \wedge \dots \wedge A_t(e_n) = v_1 \wedge \dots \wedge v_n = \det A_t \cdot e_1 \wedge \dots \wedge e_n = e_1 \wedge \dots \wedge e_n.$$

Derivováním uvedeného n -vektoru v bodě $t = 0$ dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (A_t(e_1) \wedge \dots \wedge A_t(e_n)) = \sum_{i=1}^n A_0(e_1) \wedge \dots \wedge A'_0(e_i) \wedge \dots \wedge A_0(e_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(e_1) \wedge \dots \wedge X(e_i) \wedge \dots \wedge \mathbb{E}(e_n) = \sum_{i=1}^n e_1 \wedge \dots \wedge X(e_i) \wedge \dots \wedge e_n \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^i e_1 \wedge \dots \wedge e_i \wedge \dots \wedge e_n = \mathrm{Tr}(X) e_1 \wedge \dots \wedge e_n. \end{aligned}$$

To znamená, že prvky Lieovy algebry $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$ jsou matice s nulovou stopou. V řeči diferenciální geometrie jsou to vektory tečné ke grupě $\mathrm{SL}_n\mathbb{C}$ v její jednotce \mathbb{E} .

V úvodu tedy začněme s nejjednodušší algebrou, kterou je $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$. Bázi této algebry zvolíme takto:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tyto matice splňují následující komutační relace:

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Mějme reprezentaci (V, φ) . Podívejme se, jak tato algebra působí na vektorový prostor V a definujme jeho vektorový podprostor

$$V_\alpha = \{v \in V; H(v) = \alpha v\},$$

který je invariantní při působení H . Učiňme ještě dohodu, že pro jednoduchost zápisu budeme nadále psát místo $\varphi(X)(v)$ přímo $X(v)$. Výpočet

$$H(X(v)) = X(H(v)) + [H, X](v) = X(\alpha v) + 2X(v) = (\alpha + 2)X(v)$$

a stejně tak

$$H(Y(v)) = Y(H(v)) + [H, Y](v) = Y(\alpha v) - 2Y(v) = (\alpha - 2)Y(v)$$

nám ukazují, že matice X posouvá vektor $v \in V_\alpha$ z podprostoru V_α do podprostoru $V_{\alpha+2}$ a matice Y naopak z podprostoru V_α do podprostoru $V_{\alpha-2}$.

Odtud je vidět, že tyto tři bazové operátory mají různou roli, když působí na vektorový prostor V . Vezmeme-li nějaký vektor v reprezentace V , pak operátor X jej zobrazuje vždy do podprostoru V_α s indexem menším o dva. Podobně pro operátor Y . Ten má navíc tu vlastnost, že vybereme-li vektor ireducibilní reprezentace V , pro který bude $X(v) = 0$, budou obrazy $Y^n(v)$, $n \in \mathbb{N}_0$, generovat prostor V . Toto tvrzení si nyní dokážeme.

Věta: Nechť V je ireducibilní reprezentace algebry $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$. Pak existuje vektor $v \in V$ takový, že $X(v) = 0$ a zároveň vektory $v, Y(v), Y^2(v), \dots, Y^n(v)$ generují reprezentaci V .

Důkaz: Vezměme lineární zobrazení reprezentující prvek H . Na komplexním vektorovém prostoru má jeho charakteristická rovnice

$$\det(H - \lambda\mathbb{E}) = 0$$

alespoň jeden komplexní kořen². To znamená, že existuje alespoň jedno vlastní číslo $\alpha \in \mathbb{C}$, pro které je podprostor V_α netriviální³. Zvolme $v' \in V_\alpha$ pevně a podívejme se na jeho obrazy $X^j(v')$. Již víme, že tyto obrazy leží v podprostorech $V_{\alpha+2j}$. Obrazy $X^j(v')$ jsou tedy vlastními vektory H a náleží do podprostorů indexovaných různými vlastními čísly. Jsou tedy lineárně nezávislé, a protože V má konečnou dimenzi, bude jich jen konečně mnoho nenulových. Existuje tedy $\mu \in \mathbb{C}$ a nenulový vektor $v \in V_\mu$ ležící v jádru zobrazení X . Dále budeme postupovat sporem. Předpokládáme tak, že vektory $v, Y(v), Y^2(v), \dots, Y^n(v)$ generují vlastní podprostor ve V . Podívejme se, zda je tento podprostor invariantní vůči $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$. Označme jej třeba W . Z definice tohoto podprostoru lze hned říci, že W je invariantní vůči Y a vzhledem k tomu, jak působí zobrazení H a Y na vektory z V_α , je W invariantní také vůči H . Zbývá ověřit, že je invariantní také vůči X . Podívejme se na následující výpočty:

$$X(Y(v)) = [X, Y](v) + Y(X(v)) = H(v) + Y(o) = \mu v.$$

²podle základní věty algebry

³ V_α je generován odpovídajícím vlastním vektorem

Dále

$$X(Y^2(v)) = [X, Y](Y(v)) + Y(X(Y(v))) = H(Y(v)) + Y(\mu v) = (\mu - 2)Y(v) + \mu Y(v)$$

a obecně lze ukázat, že

$$X(Y^j(v)) = j(\mu - j + 1)Y^{j-1}(v).$$

Zjistili jsme tedy, že W je invariantní podprostor ve V vůči akci prvků z $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$. To je však spor, neboť V je ireducibilní reprezentace. Tedy $W = V$ a vektory $v, Y(v), Y^2(v), \dots, Y^n(v)$ generují V .

Protože $v \in V_\mu$, je $Y(v) \in V_{\mu-2}$ a $Y^2(v) \in V_{\mu-4}$. Tímto způsobem nakonec dojdeme k relaci $Y^n(v) \in V_{\mu-2n}$, což dohromady znamená, že V_α jsou netriviální právě pro α z množiny $\{\mu, \mu-2, \mu-4, \dots, \mu-2n\}$ a jsou jednodimenzionální. \square

Tato věta má velmi důležitý důsledek, který v tomto textu formulujeme jako větu o celých číslech.

Věta o celých číslech: Matici H náleží pouze celá vlastní čísla od $-n$ do n s krokem 2.

Důkaz: Do rovnice

$$X(Y^j(v)) = j(\mu - j + 1)Y^{j-1}(v)$$

stačí za j dosadit $n + 1$. Dostaneme

$$0 = X(0) = X(Y^{n+1}(v)) = (n + 1)(\mu - n)Y^n(v).$$

Protože $Y^n(v) \neq 0$, musí být $\mu - n = 0$. \square

Všimněme si rovněž důležité skutečnosti, že

tato množina vlastních čísel je symetrická podle počátku v množině \mathbb{Z} .

Uvidíme, že tento poznatek je klíčový pro klasifikaci Lieových algeber a dále jej budeme diskutovat v kapitole o Killingově formě.

Přejděme ke složitější situaci. V případě algebry $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ byly našimi význačnými prvky matice H, X a Y . Nyní se pokusíme najít k těmto prvkům nějakou analogii, která by nám umožnila dozvědět se o struktuře algebry $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ nějaké informace.

První změnu dozná prvek H , který určoval rozklad reprezentace $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ do direktního součtu podprostorů V_α . Mohli jsme tak psát

$$V = \bigoplus_\alpha V_\alpha.$$

Ke stejné relaci nás přivede následující postup. Místo jednoho prvku H však vybereme dvoudimenzionální podalgebru $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ diagonálních matic s nulovou stopou. Řekněme, že její báze je složena z prvků

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diagonální matice však spolu navzájem komutují, což znamená, že všechny matice z \mathfrak{h} mají společnou množinu vlastních vektorů. Jinými slovy vlastní vektor v zobrazení $H \in \mathfrak{h}$ je vlastním vektorem celé podalgebry \mathfrak{h} . Pro takový vektor v pak můžeme napsat

$$\forall H \in \mathfrak{h} : H(v) = \alpha(H)v,$$

kde $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ je lineární forma na \mathfrak{h} , kterou nazýváme váhou reprezentace V . Obvykle se maximální komutativní podalgebry nazývají Cartanovými podalgebry. Tyto myšlenky motivují následující definici

Definice: Pro libovolné $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ definujeme podprostor

$$V_\alpha = \{v \in V, H(v) = \alpha(H)v, \forall H \in \mathfrak{h}\}.$$

Je-li V_α neprázdný pro nějaké $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, řekneme, že α je váha reprezentace V , nenulový vektor $v \in V_\alpha$ nazveme váhový vektor a V_α váhový podprostor.

Relace

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y,$$

lze interpretovat tak, že X a Y jsou vlastními vektory zobrazení

$$[H, \bullet] \equiv \text{ad}(H)(\bullet)$$

s vlastními čísly 2, resp. -2 .

Pro $H \in \mathfrak{h}$ bychom tedy chtěli psát

$$[H, Y] = \text{ad}(H)(Y) = \alpha(H) \cdot Y.$$

Je však třeba najít takovou náhradu za matice X a Y , aby uvedený vztah platil v případě $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$. Víme, že $H = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$. Vezměme tedy libovolnou matici M a spočtěme jejich komutátor. Postup je uvedený níže, uvádíme pořadě oba sčítance:

$$HM = \begin{pmatrix} a_1 m_{11} & a_1 m_{12} & a_1 m_{13} \\ a_2 m_{21} & a_2 m_{22} & a_2 m_{23} \\ a_3 m_{31} & a_3 m_{32} & a_3 m_{33} \end{pmatrix}, \quad MH = \begin{pmatrix} a_1 m_{11} & a_2 m_{12} & a_3 m_{13} \\ a_1 m_{21} & a_2 m_{22} & a_3 m_{23} \\ a_1 m_{31} & a_2 m_{32} & a_3 m_{33} \end{pmatrix}$$

a komutátor je tak

$$[H, M] = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} m_{12} & a_{1,3} m_{13} \\ a_{2,1} m_{21} & 0 & a_{2,3} m_{23} \\ a_{3,1} m_{31} & a_{3,2} m_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

kde

$$a_{i,j} \equiv a_i - a_j.$$

Náš komutátor tak bude násobkem M pro všechna H právě tehdy, když všechny prvky m_{ij} s výjimkou jednoho budou nula. Tomuto nenulovému prvku pak pro jednoduchost přiřadíme hodnotu 1. Tyto matice, jejichž prvek na místě (i, j) je 1 a ostatní jsou nula, označíme $E_{i,j}$. Těchto matic je celkem šest.

Následující definice platí nejen pro algebru $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$, ale obecně pro libovolnou polojednoduchou Lieovu algebru.

Definice: Nenulové váhy reprezentace $\text{ad}(H)$ nazvme kořeny Lieovy algebry.

Pokud tedy definujeme

$$L_i \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = a_i,$$

lze říci, že kořeny algebry $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ jsou právě rozdíly

$$L_i - L_j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Množinu všech kořenů dané algebry budeme značit R a mříž $\Lambda_R \subset \mathfrak{h}^*$ generovaná kořeny α se nazývá kořenová mříž. Poznamenejme, že uvažujeme celočíselné lineární kombinace. V případě algebry $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ je tedy R šestiprvková množina a kořenovou mříž Λ_R lze vyjádřit jako

$$\Lambda_R = \{\alpha, \alpha = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Matice $E_{i,j}$ generují jednotlivé podalgebry $\mathfrak{g}_{L_i - L_j}$, které nazýváme kořenovými podprostory algebry $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$. Již nyní lze předeslat, že podalgebry \mathfrak{g}_α a $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ spolu s komutátorem $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ budou generovat podalgebru

$$\mathfrak{s}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$$

izomorfní $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$. Tuto skutečnost rozebereme podrobněji v obecném případě algebry $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$. Vidíme také, že adjungovaná reprezentace zachovává jednotlivé podprostory \mathfrak{g}_α . Myšlenky tohoto odstavce lze opět shrnout do následující definice.

Definice: Mějme Lieovu algebru \mathfrak{g} . Definujeme lineární podprostory $\mathfrak{g}_\alpha, \alpha \in \mathfrak{h}^*$ takto:

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}, [H, X] = \alpha(H) \cdot X, H \in \mathfrak{h}^*\}.$$

Je-li $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ kořen Lieovy algebry \mathfrak{g} , pak odpovídající \mathfrak{g}_α nazveme kořenový podprostor \mathfrak{g} .

Pro budoucí účely je třeba zavést uspořádání na množině všech kořenů. Toto uspořádání je dáno lineární formou

$$l : \Lambda_R \rightarrow \mathbb{R}.$$

Tato forma je definována tak, že

$$l(a_1L_1 + a_2L_2 + a_3L_3) = aa_1 + ba_2 + ca_3,$$

pro nějaká vhodná $a, b, c \in \mathbb{R}$. V tomto textu si vybereme uspořádání, které je dáno volbou $a > b > c$, přičemž platí $L_1 + L_2 + L_3 = 0$, neboť formy $L_i, i = 1, 2, 3$, působí na prostoru diagonálních matic s nulovou stopou. Získali jsme tedy rozklad

$$R = R^+ \cup R^-,$$

kde $R^+ = \{\alpha, l(\alpha) > 0\}$. Prvky této množiny nazýváme kladné kořeny. Obdobně je pak $R^- = \{\alpha, l(\alpha) < 0\}$ množinou záporných kořenů. Vidíme, že pro $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ je

$$R^+ = \{L_1 - L_2, L_2 - L_3, L_1 - L_3\}.$$

a

$$R^- = \{L_2 - L_1, L_3 - L_2, L_3 - L_1\}.$$

Dostáváme se nyní k obecnému případu algebry $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$. Jak vypadá množina kořenů v tomto případě? Vezměme matici $H = \text{diag}(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$ s nulovou stopou a spočtěme její komutátor s maticí $E_{i,j}$. Vyjde

$$[H, E_{i,j}] = HE_{i,j} - E_{i,j}H = (a_i - a_j) E_{i,j}.$$

Kořeny algebry $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$ jsou tak opět rozdíly $\underline{L_i - L_j, i, j = 1, \dots, n}$.

V dalším kroku najdeme podalgebry $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$ izomorfní $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$. Stačí se skupit matice generující podprostory $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$ indexované navzájem opačnými kořeny. Podalgebra $\mathfrak{g}_{L_i - L_j}$ je tak generovaná prvky $E_{i,j}, E_{j,i}$ a jejich komutátorem $[E_{i,j}, E_{j,i}] = H_i - H_j$. Můžeme ověřit, že $H_i - H_j$ je skutečně vhodnou analogií za prvek H v případě algebry $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \text{ad}(H_i - H_j)(E_{i,j}) &= (H_i - H_j)E_{i,j} - E_{i,j}(H_i - H_j) = H_i E_{i,j} - H_j E_{i,j} - E_{i,j} H_i \\ &\quad + E_{i,j} H_j = E_{i,j} - \mathbb{O} - \mathbb{O} + E_{i,j} = 2E_{i,j} = (L_i - L_j)(H_i - H_j)E_{i,j}. \end{aligned}$$

Odpovídajícím prvkem k $H = \text{diag}(1, -1)$ v $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ je tedy $\underline{H_{L_i - L_j} = H_i - H_j}$.

Dostali jsme tak rozklad algebry $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$, vyjádřený jako přímý součet

$$\mathfrak{sl}_n\mathbb{C} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R^+} (\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}) \right).$$

Nakonec zobecníme uspořádání na množině všech kořenů. Pro účely budoucího textu nás budou již zajímat pouze kladné kořeny, zejména pak jistá jejich podmnožina.

Definice: Řekneme, že kořen $\alpha \in R^+$ je jednoduchý kořen⁴, pokud se nedá napsat jako součet dvou kladných kořenů.

Působení lineární formy l na R definujeme jako

$$l\left(\sum a_i L_i\right) = \sum c_i a_i,$$

kde $\sum L_i = 0$. Pokud předpokládáme, že $c_1 > c_2 > \dots > c_n$, pak

$$R^+ = \{L_i - L_j, i < j, i, j = 1, \dots, n\}.$$

Z tohoto výčtu ještě vybereme jednoduché kořeny, které budou reprezentovat vrcholy Dynkinova diagramu:

Jednoduché kořeny algebry $\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}$:

$$L_1 - L_2, L_2 - L_3, \dots, L_{n-2} - L_{n-1}, L_{n-1} - L_n.$$

⁴někdy též říkáme prostý kořen

2.2. Algebra $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$

Symplektická Lieova grupa $\mathrm{Sp}_{2n}\mathbb{C}$ je definována jako grupa jistých automorfismů A na vektorovém prostoru V , který má dimenzi $2n$. Tyto automorfismy zachovávají nedegenerovanou, **antisymetrickou** bilineární formu

$$Q : V \times V \rightarrow \mathbb{C},$$

což lze symbolicky vyjádřit podmínkou:

$$Q(A(v), A(w)) = Q(v, w).$$

Je-li M matice této bilineární formy, musí platit

$$M = A^T \cdot M \cdot A.$$

Z tohoto vztahu najdeme podmínku, kterou musí splňovat matice patřící do odpovídající Lieovy algebry $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$.

Mějme tedy diferencovatelnou křivku $\gamma(t)$ v grupě $\mathrm{Sp}_{2n}\mathbb{C}$. Použijeme-li označení $A = \gamma(t)$, pak lze uvedenou rovnost přepsat do tvaru

$$M = \gamma(t)^T \cdot M \cdot \gamma(t)$$

a derivováním podle parametru t získáme maticovou rovnici

$$\mathbb{O} = \gamma'(t)^T \cdot M \cdot \gamma(t) + \gamma(t)^T \cdot M \cdot \gamma'(t).$$

Označíme-li dále $\gamma(0) = \mathbb{E}$ a $\gamma'(0) = X$, dostaneme pro $t = 0$

$$\underline{\mathbb{O} = X^T \cdot M + M \cdot X},$$

což je hledaná podmínka.

Abychom v této kapitole mohli provádět konkrétní výpočty, vyjádříme si bilineární formu Q vůči takové bázi e_1, \dots, e_{2n} prostoru V , kde

$$Q(e_i, e_{i+n}) = 1,$$

$$Q(e_{i+n}, e_i) = -1$$

a

$$Q(e_i, e_j) = 0$$

pro $j \neq i \pm n$. Máme-li tedy pevně zvolenou bázi, lze bilineární formu Q vyjádřit jako

$$Q(x, y) = x^T \cdot M \cdot y,$$

kde

$$M = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{E} \\ -\mathbb{E} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

je matice rozměru $2n \times 2n$. Jak tedy vypadá matice X ? Vyjádříme si ji v blokovém tvaru

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

a dosadíme ji do výše uvedené podmínky, která vymezuje matice studované algebry. Tak zjistíme, v jakém vztahu jsou mezi sebou její jednotlivé bloky. Pravá strana rovnosti bude po dosazení vypadat takto:

$$X^T \cdot M + M \cdot X = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{E} \\ -\mathbb{E} & \mathbb{O} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{E} \\ -\mathbb{E} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Po vynásobení matic a jejich následovném sečtení pak obdržíme

$$\begin{pmatrix} -C^T & A^T \\ -D^T & B^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & D \\ -A & -B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C^T + C & A^T + D \\ -D^T - A & B^T - B \end{pmatrix}.$$

Levá strana je pouze nulová matice, takže celem máme

$$\begin{pmatrix} -C^T + C & A^T + D \\ -D^T - A & B^T - B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

To znamená, že

$$C = C^T \quad \& \quad B = B^T$$

a lze tedy říci, že bloky na vedlejší diagonále jsou symetrické. Pro bloky na hlavní diagonále platí relace

$$A = -D^T,$$

a tedy A vznikne z $-D$ její transpozicí.

Cartanova podalgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$ bude opět vektorový prostor diagonálních matic, které spolu automaticky komutují. Lze volit generátory tvaru:

$$H_i = E_{i,i} - E_{n+i,n+i}.$$

Prostor \mathfrak{h}^* duální k prostoru \mathfrak{h} je opět definován podmínkou $L_j(H_i) = \delta_{i,j}$.

Klíčovou informací o struktuře této algebry nám však poskytne znalost vlastních vektorů adjungované reprezentace. Těmito vektory jsou

1. $\underline{X_{i,j} = E_{i,j} - E_{n+j,n+i}},$
2. $\underline{Y_{i,j} = E_{i,n+j} + E_{j,n+i}},$
3. $\underline{Z_{i,j} = E_{n+i,j} + E_{n+j,i}},$
4. $\underline{U_i = E_{i,n+i}},$
5. $\underline{V_i = E_{n+i,i}}.$

Tyto údaje ověříme přímým výpočtem, čímž nalezneme kořeny této algebry.

1. Kořeny $L_i - L_j$ a $L_j - L_i$:

$$\begin{aligned} \text{ad}(H)(X_{i,j}) &= HX_{i,j} - X_{i,j}H = a_i E_{i,j} - a_{n+j} E_{n+j,n+i} - a_j E_{i,j} + a_{n+i} E_{n+j,n+i} \\ &= a_i E_{i,j} + a_j E_{n+j,n+i} - a_j E_{i,j} - a_i E_{n+j,n+i} = (a_i - a_j) E_{i,j} - (a_i - a_j) E_{n+j,n+i} \\ &= (a_i - a_j) (E_{i,j} - E_{n+j,n+i}) = \underline{(a_i - a_j) X_{i,j}}, \end{aligned}$$

2. Kořeny $L_i + L_j$:

$$\begin{aligned} \text{ad}(H)(Y_{i,j}) &= HY_{i,j} - Y_{i,j}H = a_i E_{i,n+j} + a_j E_{j,n+i} - a_{n+j} E_{i,n+j} - a_{n+i} E_{j,n+i} \\ &= a_i E_{i,n+j} + a_j E_{j,n+i} + a_j E_{i,n+j} + a_i E_{j,n+i} = (a_i + a_j) E_{i,n+j} + (a_i + a_j) E_{j,n+i} \\ &= (a_i + a_j) (E_{i,n+j} + E_{j,n+i}) = \underline{(a_i + a_j) Y_{i,j}}, \end{aligned}$$

3. Kořeny $-L_i - L_j$:

$$\begin{aligned} \text{ad}(H)(Z_{i,j}) &= HZ_{i,j} - Z_{i,j}H = a_{n+i} E_{n+i,j} + a_{n+j} E_{n+j,i} - a_j E_{n+i,j} - a_i E_{n+j,i} \\ &= -a_i E_{n+i,j} - a_j E_{n+j,i} - a_j E_{n+i,j} - a_i E_{n+j,i} = (-a_i - a_j) E_{n+i,j} + (-a_i - a_j) E_{n+j,i} \\ &= (-a_i - a_j) (E_{n+i,j} + E_{n+j,i}) = \underline{(-a_i - a_j) Z_{i,j}}, \end{aligned}$$

4. Kořeny $2L_i$:

$$\text{ad}(H)(U_i) = HU_i - U_iH = a_i E_{i,n+i} - a_{n+i} E_{i,n+i} = a_i E_{i,n+i} + a_i E_{i,n+i} = \underline{2a_i E_{i,n+i}},$$

5. Kořeny $-2L_i$:

$$\text{ad}(H)(V_i) = HV_i - V_iH = a_{n+i} E_{n+i,i} - a_i E_{n+i,i} = -a_i E_{n+i,i} - a_i E_{n+i,i} = \underline{-2a_i E_{n+i,i}}.$$

Najdeme nyní jednotlivé podalgebry $\mathfrak{s}_\alpha \subset \mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$ izomorfní algebře $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ a jim odpovídající prvky $H_\alpha \in \mathfrak{h}$.

1. Kořeny $L_i - L_j$ a $L_j - L_i$: uvedené kořeny odpovídají vektorům $X_{i,j}$ a $X_{j,i}$:

$$\begin{aligned} [X_{i,j}, X_{j,i}] &= [E_{i,j} - E_{n+j,n+i}, E_{j,i} - E_{n+i,n+j}] \\ &= [E_{i,j}, E_{j,i}] + \mathbb{O} + \mathbb{O} + [E_{n+j,n+i}, E_{n+i,n+j}] \\ &= E_{i,i} - E_{j,j} + E_{n+j,n+j} - E_{n+i,n+i} = \underline{H_i - H_j}. \end{aligned}$$

Matice $H_{L_i - L_j}$ je tedy násobkem matice $H_i - H_j$. Požadujeme však, aby

$$\text{ad}(H_i - H_j)(X_{i,j}) = 2X_{i,j},$$

takže musí být

$$(L_i - L_j)(H_i - H_j) = 2.$$

To ale znamená, že

$$\underline{H_{L_i - L_j} = H_i - H_j}.$$

2. Kořeny $L_i + L_j$ a $-L_i - L_j$: tyto kořeny přísluší vektorům $Y_{i,j}$ a $Z_{i,j}$:

$$\begin{aligned} [Y_{i,j}, Z_{i,j}] &= [E_{i,n+j} + E_{j,n+i}, E_{n+i,j} + E_{n+j,i}] \\ &= \mathbb{O} + [E_{i,n+j}, E_{n+j,i}] + [E_{j,n+i}, E_{n+i,j}] + \mathbb{O} \\ &= E_{i,i} - E_{n+j,n+j} + E_{j,j} - E_{n+i,n+i} = \underline{H_i + H_j}. \end{aligned}$$

Hledaná matice $H_{L_i+L_j}$ je násobkem matice $H_i + H_j$ a tento násobek opět volíme tak, aby konstruovaná algebra $\mathfrak{sl}_{L_i+L_j}$ byla kopií $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$. Má být

$$\text{ad}(H_i + H_j)(Y_{i,j}) = 2Y_{i,j},$$

takže

$$(L_i + L_j)(H_i + H_j) = 2,$$

a proto

$$\underline{H_{L_i+L_j} = H_i + H_j}.$$

Analogickým postupem zjistíme, že

$$\underline{H_{-L_i-L_j} = -H_i - H_j}.$$

3. Kořeny $\pm 2L_i$: tyto kořeny jsou příslušné vlastním vektorům U_i a V_i :

$$[U_i, V_i] = [E_{i,n+i}, E_{n+i,i}] = E_{i,i} - E_{n+i,n+i} = \underline{H_i}.$$

Tím jsme vektory U_i a V_i doplnili na bázi \mathfrak{sl}_i . Dodaný prvek H_{2L_i} je násobkem matice H_i . Protože požadujeme, aby

$$\text{ad}(H_i)(U_i) = 2U_i,$$

musí být

$$2L_i(H_i) = 2,$$

takže

$$\underline{H_{2L_i} = H_i}.$$

Stejným postupem obdržíme

$$\underline{H_{-2L_i} = -H_i}.$$

Nalezenou množinu kořenů R opět uspořádáme pomocí lineární formoy l , kterou definujeme takto:

$$l\left(\sum a_i L_i\right) = c_1 a_1 + \dots + c_n a_n, \quad c_1 > c_2 > \dots > c_n > 0.$$

Získáváme tak rozklad

$$R = R^+ \cup R^-.$$

Kladné kořeny jsou potom

$$L_i + L_j, \quad i \leq j, i, j = 1, \dots, n$$

a dále

$$L_i - L_j, \quad i < j, i, j = 1, \dots, n.$$

Z tohoto výčtu nakonec vybereme všechny jednoduché kořeny, klíčové pro klasifikaci Dynkinových diagramů.

Jednoduché kořeny algebry $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$:

$$L_1 - L_2, L_2 - L_3, \dots, L_{n-1} - L_n, 2L_n.$$

2.3. Algebra $\mathfrak{so}_{2n}\mathbb{C}$ a $\mathfrak{so}_{2n+1}\mathbb{C}$

Mějme nedegenerovanou, nyní však **symetrickou** bilineární formu

$$Q : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

na vektorovém prostoru V dimenze m . Ortogonální grupa $\mathrm{SO}_m\mathbb{C}$ je pak definována jako grupa automorfismů A na prostoru V s determinanem 1, které zachovávají formu Q . Uvedenou skutečnost lze vyjádřit také jako

$$Q(A(v), A(w)) = Q(v, w).$$

Pokud M je matice této bilineární formy, pak platí

$$M = A^T \cdot M \cdot A$$

a na základě tohoto vztahu opět nalezneme odpovídající Lieovu algebru $\mathfrak{so}_m\mathbb{C}$.

Nechť tedy $\gamma(t)$ je diferencovatelná křivka v grupě $\mathrm{SO}_m\mathbb{C}$. Položíme $A = \gamma(t)$, takže naposledy uvedený vztah můžeme vyjádřit jako

$$M = \gamma(t)^T \cdot M \cdot \gamma(t)$$

a derivací tohoto vztahu podle parametru t získáme

$$\mathbb{O} = \gamma'(t)^T \cdot M \cdot \gamma(t) + \gamma(t)^T \cdot M \cdot \gamma'(t).$$

Pokud označíme $\gamma(0) = \mathbb{E}$ a $\gamma'(0) = X$, dostaneme pro $t = 0$ podmínku

$$\underline{\mathbb{O} = X^T \cdot M + M \cdot X},$$

vymežující matice algebry $\mathfrak{so}_m\mathbb{C}$. Nyní však od sebe oddělíme případy sudé a liché dimenze. V případě $m = 2n$ zvolíme bázi vektorového prostoru V tak, aby:

$$Q(e_i, e_{i+n}) = Q(e_{i+n}, e_i) = 1$$

a

$$Q(e_i, e_j) = 0$$

pro $j \neq i \pm n$. Máme-li tedy zvolenou bázi e_1, \dots, e_{2n} prostoru V , lze formu Q explicitně vyjádřit jako

$$Q(x, y) = x^T \cdot M \cdot y,$$

kde

$$M_{2n} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{E} \\ \mathbb{E} & \mathbb{O} \end{pmatrix}$$

je bloková matice rozměru $2n \times 2n$. Pokud dosadíme do naší podmínky za M , máme

$$\begin{aligned} X^T \cdot M + M \cdot X &= \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{E} \\ \mathbb{E} & \mathbb{O} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{E} \\ \mathbb{E} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C^T & A^T \\ D^T & B^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & D \\ A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^T + C & A^T + D \\ D^T + A & B^T + B \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^T + C & A^T + D \\ D^T + A & B^T + B \end{pmatrix}.$$

To znamená, že

$$\begin{aligned} C &= -C^T, \\ B &= -B^T \end{aligned}$$

a

$$A = -D^T.$$

Bloky na vedlejší diagonále jsou tedy, na rozdíl od případu symplektických algeber, antisymetrické.

V případě liché dimenze, kdy $m = 2n + 1$, vybereme bázi e_1, \dots, e_{2n+1} prostoru V tak, abychom měli

$$Q(e_i, e_{i+n}) = Q(e_{i+n}, e_i) = 1, 1 \leq i \leq n,$$

$$Q(e_i, e_j) = 0, i, j \neq 2n + 1$$

a

$$Q(e_{2n+1}, e_{2n+1}) = 1.$$

Stejně jako dříve lze nyní formu Q explicitně vyjádřit vůči naší bázi dle vztahu

$$Q(x, y) = x^T \cdot M \cdot y,$$

kde matice M je tentokrát rozměru $(2n + 1) \times (2n + 1)$ a má tvar

$$M_{2n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{E} & 0 \\ \mathbb{E} & \mathbb{O} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice X a X^T , v blokovém tvaru vyjádřené jako

$$X = \begin{pmatrix} A & B & E \\ C & D & F \\ G & H & J \end{pmatrix}, \quad X^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T & G^T \\ B^T & D^T & H^T \\ E^T & F^T & J^T \end{pmatrix},$$

opět dosadíme do naší podmínky a spočteme zvlášť oba sčítance:

$$X^T \cdot M = \begin{pmatrix} C^T & A^T & G^T \\ D^T & B^T & H^T \\ F^T & E^T & J^T \end{pmatrix}, \quad M \cdot X = \begin{pmatrix} C & D & F \\ A & B & E \\ G & H & J \end{pmatrix}.$$

Celkem tedy máme

$$\begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & 0 \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^T + C & A^T + D & G^T + F \\ D^T + A & B^T + B & H^T + E \\ F^T + G & E^T + H & J^T + J \end{pmatrix},$$

a tak pro jednotlivé bloky matice $X \in \mathfrak{so}_{2n+1}\mathbb{C}$ dostáváme následující vztahy:

$$C = -C^T, B = -B^T, A = -D^T, E = -H^T, F = -G^T, J = 0.$$

Cartanova podalgebra, v případě sudé i liché dimenze, má generátory tvaru diagonálních matic

$$H_i = E_{i,i} - E_{n+i,n+i}.$$

V případě liché dimenze jde o matice rozměru $(2n+1) \times (2n+1)$.

Opět uvedeme výčet vlastních vektorů adjungované reprezentace $\text{ad}(H)$. Pokud jde o sudou dimenzi, máme vektory

$$1. \quad \underline{X_{i,j} = E_{i,j} - E_{n+j,n+i}},$$

$$2. \quad \underline{Y_{i,j} = E_{i,n+j} - E_{j,n+i}},$$

$$3. \quad \underline{Z_{i,j} = E_{n+i,j} - E_{n+j,i}}.$$

Pokud jde o lichou dimenzi, obdržíme stejné tři vektory jako výše a navíc přibudou vektory

$$4. \quad \underline{U_i = E_{i,2n+1} - E_{2n+1,n+i}},$$

$$5. \quad \underline{V_i = E_{n+i,2n+1} - E_{2n+1,i}}.$$

Přímým výpočtem opět nalezneme vlastní čísla odpovídající výše uvedeným vlastním vektorům.

1. Kořeny $L_i - L_j$ a $L_j - L_i$:

$$\begin{aligned} \text{ad}(H)(X_{i,j}) &= HX_{i,j} - X_{i,j}H = a_i E_{i,j} - a_{n+j} E_{n+j,n+i} - a_j E_{i,j} + a_{n+i} E_{n+j,n+i} \\ &= a_i E_{i,j} + a_j E_{n+j,n+i} - a_j E_{i,j} - a_i E_{n+j,n+i} = (a_i - a_j) E_{i,j} - (a_i - a_j) E_{n+j,n+i} \\ &= (a_i - a_j) (E_{i,j} - E_{n+j,n+i}) = \underline{(a_i - a_j) X_{i,j}} \end{aligned}$$

2. Kořeny $L_i + L_j$:

$$\begin{aligned} \text{ad}(H)(Y_{i,j}) &= HY_{i,j} - Y_{i,j}H = a_i E_{i,n+j} - a_j E_{j,n+i} - a_{n+j} E_{i,n+j} + a_{n+i} E_{j,n+i} \\ &= a_i E_{i,n+j} - a_j E_{j,n+i} + a_j E_{i,n+j} - a_i E_{j,n+i} = (a_i + a_j) E_{i,n+j} - (a_i + a_j) E_{j,n+i} \\ &= (a_i + a_j) (E_{i,n+j} - E_{j,n+i}) = \underline{(a_i + a_j) Y_{i,j}}, \end{aligned}$$

3. Kořeny $-L_i - L_j$:

$$\begin{aligned} \text{ad}(H)(Z_{i,j}) &= HZ_{i,j} - Z_{i,j}H = a_{n+i} E_{n+i,j} - a_{n+j} E_{n+j,i} - a_j E_{n+i,j} + a_i E_{n+j,i} \\ &= -a_i E_{n+i,j} + a_j E_{n+j,i} - a_j E_{n+i,j} + a_i E_{n+j,i} = (-a_i - a_j) E_{n+i,j} - (-a_i - a_j) E_{n+j,i} \\ &= (-a_i - a_j) (E_{n+i,j} - E_{n+j,i}) = \underline{(-a_i - a_j) Z_{i,j}}, \end{aligned}$$

Toto vše platí jak pro sudou, tak i pro lichou dimenzi. Pouze v případě liché dimenze dále dostáváme:

4. Kořeny L_i :

$$\begin{aligned} \text{ad}(H)(U_i) &= HU_i - U_iH = a_i E_{i,2n+1} - a_{2n+1} E_{2n+1,n+i} - a_{2n+1} E_{i,2n+1} + a_{n+i} E_{2n+1,n+i} \\ &= a_i E_{i,2n+1} - a_i E_{2n+1,n+i} = a_i (E_{i,2n+1} - E_{2n+1,n+i}) = \underline{a_i U_i}, \end{aligned}$$

5. Kořeny $-L_i$:

$$\begin{aligned} \text{ad}(H)(V_i) &= HV_i - V_iH = a_{n+i} E_{n+i,2n+1} - a_{2n+1} E_{2n+1,i} - a_{2n+1} E_{n+i,2n+1} + a_i E_{2n+1,i} \\ &= -a_i E_{n+i,2n+1} + a_i E_{2n+1,i} = -a_i (E_{n+i,2n+1} - E_{2n+1,i}) = \underline{-a_i V_i}. \end{aligned}$$

Nyní můžeme postoupit k nalezení jednotlivých podalgeber \mathfrak{s}_α .

1. Kořeny $L_i - L_j$ a $L_j - L_i$: Přidáme-li k vektorům $X_{i,j}$ a $X_{j,i}$ komutátor

$$\begin{aligned} [X_{i,j}, X_{j,i}] &= [E_{i,j} - E_{n+j,n+i}, E_{j,i} - E_{n+i,n+j}] \\ &= [E_{i,j}, E_{j,i}] + \mathbb{O} + \mathbb{O} + [E_{n+j,n+i}, E_{n+i,n+j}] \\ &= E_{i,i} - E_{j,j} + E_{n+j,n+j} - E_{n+i,n+i} = \underline{H_i - H_j}, \end{aligned}$$

získáme generátory podalgebry $\mathfrak{s}_{L_i - L_j}$. Protože požadujeme, aby

$$\text{ad}(H_i - H_j)(X_{i,j}) = 2X_{i,j},$$

musíme $H_{L_i - L_j}$ zvolit tak, aby platilo

$$(L_i - L_j)(H_i - H_j) = 2.$$

Vidíme, že hledaným prvkem je právě $\underline{H_{L_i - L_j} = H_i - H_j}$. Tento závěr je tedy totožný s případem symplektické algebry $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$.

2. Kořeny $L_i + L_j$ a $-L_i - L_j$: Zde je $\mathfrak{s}_{L_i + L_j}$ generována vektory $Y_{i,j}$, $Z_{i,j}$ a též

$$\begin{aligned} [Y_{i,j}, Z_{j,i}] &= [E_{i,n+j} - E_{j,n+i}, E_{n+i,j} - E_{n+j,i}] \\ &= \mathbb{O} + [E_{i,n+j}, -E_{n+j,i}] + [-E_{j,n+i}, E_{n+i,j}] + \mathbb{O} \\ &= -E_{i,i} - E_{j,j} + E_{n+j,n+j} + E_{n+i,n+i} = \underline{-H_i - H_j}. \end{aligned}$$

Protože chceme

$$\text{ad}(H_i + H_j)(Y_{i,j}) = 2X_{i,j},$$

položíme

$$(L_i + L_j)(H_i + H_j) = 2,$$

takže hledaným prvkem je právě $\underline{H_{L_i + L_j} = H_i + H_j}$. Podobně je

$$\underline{H_{-L_i - L_j} = -H_i - H_j}.$$

Nakonec doplníme případ $\mathfrak{so}_{2n+1}\mathbb{C}$.

3. Kořeny $\pm L_i$: Podalgebra \mathfrak{sl}_i je lineárním obalem vektorů U_i, V_i a komutátoru

$$\begin{aligned} [U_i, V_i] &= [E_{i,2n+1} - E_{2n+1,n+i}, E_{n+i,2n+1} - E_{2n+1,i}] \\ &= \mathbb{O} + [E_{i,2n+1}, -E_{2n+1,i}] + [-E_{2n+1,n+i}, E_{n+i,2n+1}] + \mathbb{O} \\ &= -E_{i,i} + E_{2n+1,2n+1} - E_{2n+1,2n+1} + E_{n+i,n+i} = \underline{-H_i}. \end{aligned}$$

Protože má být

$$\text{ad}(H_i)(U_i) = 2U_i.$$

je

$$(L_i)(H_i) = 2,$$

a element H_{L_i} má tedy tvar $\underline{H_{L_i} = 2H_i}$. Podobně je opět

$$\underline{H_{-L_i} = -2H_i}.$$

Abychom mohli na závěr nalezené kořeny uspořádat podle velikosti, zavedeme lineární formu l definovanou analogicky, jako v přechozí dvou podkapitolách:

$$l\left(\sum a_i L_i\right) = \sum c_i a_i,$$

kde volíme $c_1 > c_2 \dots > c_n > 0$. To znamená, že v případě algebry $\mathfrak{so}_{2n}\mathbb{C}$ jsou kladné kořeny:

$$L_i + L_j, \quad i \leq j$$

a

$$L_i - L_j, \quad i < j.$$

Pro algebru $\mathfrak{so}_{2n+1}\mathbb{C}$ máme kladné kořeny

$$L_i + L_j, \quad i \leq j,$$

$$L_i - L_j, \quad i < j$$

a navíc

$$L_i.$$

Indexy i, j zde probíhají množinu $\{1, \dots, n\}$. Z těchto dvou seznamů vybereme jednoduché kořeny, které budeme později reprezentovat vrcholy Dynkinova diagramu:

Jednoduché kořeny pro algebru $\mathfrak{so}_{2n}\mathbb{C}$:

$$L_1 - L_2, L_2 - L_3, \dots, L_{n-1} - L_n, L_{n-1} + L_n.$$

Jednoduché kořeny pro algebru $\mathfrak{so}_{2n+1}\mathbb{C}$:

$$L_1 - L_2, L_2 - L_3, \dots, L_{n-1} - L_n, L_n.$$

3. Dynkinovy diagramy

3.1. Killingova forma

V předchozí kapitole jsme našli jednoduché kořeny klasických Lieových algeber. Každá algebra měla svůj unikátní systém kořenů, který byl pro ni charakteristický. Systémy kořenů jednotlivých algeber mají jisté společné vlastnosti, skrze které v příští podkapitole definujeme tzv. formální kořenovou mříž. Dále zavedeme pojem Dynkinův diagram a objasníme jeho vztah k Lieově algebře \mathfrak{g} .

Jelikož Dynkinovy diagramy vypovídají též o metrických vlastnostech kořenů, je třeba zavést analogii skalárního součinu v euklidovském prostoru, kterým bude Killingova forma.

Definice: Mějme Lieovu algebru \mathfrak{g} . Bilineární forma $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ daná předpisem

$$B(X, Y) = \text{Tr}(\text{ad}X \circ \text{ad}Y),$$

se nazývá Killingova forma na algebře \mathfrak{g} .

Věta: Killingova forma je symetrická nedegenerovaná bilineární forma na kartézském součinu $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ a platí

$$B([X, Y], Z) = B(X, [Y, Z]).$$

Důkaz: viz [FH91], str.207.

V následujícím textu Killingovu formu explicitně vyjádříme na algebře $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ vůči bázi $\{E_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,n}$. Protože však k dané symetrické bilineární formě B existuje právě jedna kvadratická forma K_B , pro kterou

$$B(X, X) = K_B(X),$$

můžeme při výpočtu Killingovy formy využít toho, že její restrikcí na \mathfrak{g} nepřijdeme o žádnou informaci. Místo výrazu $B(X, Y)$ tak stačí pracovat pouze s výrazem $B(X, X)$, což nám zjednoduší postup. Odpovídající bilineární formu pak můžeme vždy zpětně rekonstruovat podle vztahu

$$B(X, Y) = \frac{1}{4}(K_B(X+Y) - K_B(X-Y)).$$

Podívejme se tedy nyní, jak lze Killingovu formu vyjádřit na algebře $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$. Kompozici

$$\text{ad}(X) \circ (\text{ad}(X)(Z))$$

lze zapsat jako složený komutátor

$$[X, [X, Z]] = X(XZ - ZX) - (XZ - ZX)X = X^2Z + ZX^2 - 2XZX.$$

Zobrazení, které je pro pevně zvolené $Z \in \mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ dáno předpisem

$$X \mapsto X^2Z + ZX^2 - 2XZX,$$

vyjádříme v bázi sestávající z matic $E_{i,j}$ a následně spočteme jeho stopu. V první řadě tedy máme

$$(XE_{i,j})_{ij} = x_{ii}, \quad (E_{i,j}X)_{ij} = x_{jj}.$$

Dále pak

$$(X^2)_{ij} = \sum_k x_{ik}x_{kj},$$

a tedy

$$(X^2E_{i,j})_{ij} = \sum_k x_{ik}x_{ki},$$

$$(E_{i,j}X^2)_{ij} = \sum_k x_{jk}x_{kj}$$

a také

$$(XE_{i,j}X)_{ij} = x_{ii}x_{jj}.$$

Můžeme nyní napsat, že

$$(X^2E_{i,j} + E_{i,j}X^2 - 2XE_{i,j}X)_{ij} = \sum_k x_{ik}x_{ki} + \sum_k x_{jk}x_{kj} - 2x_{ii}x_{jj}.$$

Našli jsme tedy prvky matice zobrazení $\text{ad}X \circ \text{ad}X$ vůči uvedené bázi. Nyní již stačí spočítat jeho stopu:

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left(\sum_{i,j} \left(\sum_k (x_{ik}x_{ki} + x_{jk}x_{kj}) - 2x_{ii}x_{jj} \right) E_{i,j} \right) \\ &= n \text{Tr} (X^2) + n \text{Tr} (X^2) - 2 \text{Tr} X \cdot \text{Tr} X = \underline{2n \text{Tr} (X^2) - 2 (\text{Tr} X)^2}. \end{aligned}$$

Podívejme se, jakého tvaru Killingova forma nabývá na obecné lineární algebře $\mathfrak{gl}_n \mathbb{C}$ a jejích podalgebách. Následující vzorce nebudeme dokazovat, jsou uvedeny v [FH91].

1. $\mathfrak{gl}_n \mathbb{C}$: $B(X, Y) = 2n \text{Tr} (XY) - 2 \text{Tr} X \text{Tr} Y$,

2. $\mathfrak{sl}_n \mathbb{C}$: $B(X, Y) = 2n \text{Tr} (XY)$,

3. $\mathfrak{sp}_{2n} \mathbb{C}$: $B(X, Y) = (2n + 2) \text{Tr} (XY)$,

4. $\mathfrak{so}_n \mathbb{C}$: $B(X, Y) = (n - 2) \text{Tr} (XY)$.

Protože Killingova forma B má roli skalárního součinu na \mathfrak{h} , můžeme zkoumat izomorfismus prostorů \mathfrak{h}^* a \mathfrak{h} . Pro kořen α algebry \mathfrak{g} nejdříve zavedeme prvek $T_\alpha \in \mathfrak{h}$:

$$T_\alpha = \frac{2}{B(H_\alpha, H_\alpha)} H_\alpha.$$

Izomorfismus následně definujeme podmínkou

$$\forall H \in \mathfrak{h} : B(T_\alpha, H) = \alpha(H).$$

Potom je izomorfismus ve směru

$$\mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}$$

dán předpisem

$$\alpha \mapsto T_\alpha = \frac{2}{B(H_\alpha, H_\alpha)} H_\alpha.$$

Lze to nahlédnout díky výpočtům níže. Předně je

$$\begin{aligned} B(H_\alpha, H) &= B([X_\alpha, Y_\alpha], H) = B(X_\alpha, [Y_\alpha, H]) \\ &= B(X_\alpha, \alpha(H) Y_\alpha) = \alpha(H) B(X_\alpha, Y_\alpha). \end{aligned}$$

Všimněme si, že pro $H = H_\alpha$ budeme mít

$$B(H_\alpha, H_\alpha) = \alpha(H_\alpha) B(X_\alpha, Y_\alpha) = 2B(X_\alpha, Y_\alpha) \neq 0,$$

neboť kdyby bylo $B(X_\alpha, Y_\alpha) = 0$, měli bychom $B(H_\alpha, H) = 0$ pro každé H , což by bylo ve sporu s tím, že forma B je nedegenerovaná. Proto tedy platí, že

$$\begin{aligned} B(T_\alpha, H) &= B\left(\frac{2H_\alpha}{B(H_\alpha, H_\alpha)}, H\right) = \frac{2}{B(H_\alpha, H_\alpha)} B(H_\alpha, H) \\ &= \frac{2}{2B(X_\alpha, Y_\alpha)} \alpha(H) B(X_\alpha, Y_\alpha) = \alpha(H), \end{aligned}$$

Nyní Killingovu formu zavedeme na duálním prostoru \mathfrak{h}^* . Na tomto prostoru ji definujeme tak, že položíme

$$B(\alpha, \beta) = B(T_\alpha, T_\beta).$$

Inverzní izomorfismus

$$\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$$

definujeme naopak předpisem

$$H_\alpha \mapsto \frac{2}{B(\alpha, \alpha)} \alpha.$$

Lze ukázat, že tento předpis je opravdu vhodnou volbou vzhledem k tomu, jak jsme definovali B na duálu \mathfrak{h}^* . Je totiž

$$\begin{aligned} B(T_\alpha, T_\beta) &= B\left(\frac{2H_\alpha}{B(H_\alpha, H_\alpha)}, \frac{2H_\beta}{B(H_\beta, H_\beta)}\right) \\ &= B\left(\frac{\frac{4}{B(\alpha, \alpha)} \alpha}{B\left(\frac{2}{B(\alpha, \alpha)} \alpha, \frac{2}{B(\alpha, \alpha)} \alpha\right)}, \frac{\frac{4}{B(\beta, \beta)} \beta}{B\left(\frac{2}{B(\beta, \beta)} \beta, \frac{2}{B(\beta, \beta)} \beta\right)}\right) \\ &= \frac{4^2}{B(\alpha, \alpha) B(\beta, \beta)} \cdot \frac{1}{\frac{4}{B(\alpha, \alpha)}} \cdot \frac{1}{\frac{4}{B(\beta, \beta)}} B(\alpha, \beta) = B(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Nyní uvedeme důležitou větu, která říká, že pro libovolné kořeny α, β dané algebry nabývá výraz

$$\frac{2B(\beta, \alpha)}{B(\alpha, \alpha)}$$

pouze celočíselných hodnot. Tato informace je stěžejní pro klasifikaci Lieových algeber, neboť klade jisté omezující podmínky na to, jaké podoby může kořenový systém a tedy i Dynkinův diagram nabývat.

Nejprve připomeňme větu o celých číslech, kterou jsme dokázali v části textu týkající se algebry $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$. Zjistili jsme, že váhové podprostory ireducibilní reprezentace V této algebry jsou indexovány celými čísly

$$-n, -n + 2, \dots, n - 2, n.$$

Pokud některé z těchto čísel vybereme pevně a označíme jej m , pak k tomuto číslu existuje váha $\beta \in \mathfrak{h}^*$, pro kterou $\beta(H) = m$. Přitom β lze zapsat jako $k \cdot \alpha$, kde $k \in \mathbb{N}$ a α odpovídá jednomu z kořenů

$$L_1 - L_2, \quad L_2 - L_1,$$

pro které bylo

$$(L_1 - L_2)(H) = 2, \quad (L_2 - L_1)(H) = -2.$$

Dále každou ze studovaných Lieových algeber \mathfrak{g} lze napsat jako součet

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{s}_\alpha,$$

kde podalgebry \mathfrak{s}_α jsou izomorfní $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$. To však znamená, že pokud máme libovolnou váhu $\beta \in \mathfrak{h}^*$ reprezentace V dané Lieovy algebry \mathfrak{g} , pak platí, že

$$\underline{\beta(H_\alpha) \in \mathbb{Z}}.$$

Také jsme uvedli, že pro $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$ je tento řetízek celých čísel symetrický v \mathbb{Z} podle počátku. Pokud tedy označíme $-\beta(H_\alpha) = n$, pak řetízek vah

$$\beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots, \beta + n\alpha$$

je symetrický podle nadroviny kolmé na kořen α . Každé podalgebře \mathfrak{s}_α pak odpovídá jedna taková nadrovina. Tuto nadrovinu označíme Ω_α a definujeme ji jako podprostor \mathfrak{h}^* generovaný prvky β , pro které $\beta(H_\alpha) = 0$. Symbolicky je tedy

$$\Omega_\alpha = \{\beta \in \mathfrak{h}^*, \beta(H_\alpha) = 0\}.$$

Potom lze uvedenou symetrii vyjádřit jako zrcadlení podle nadroviny Ω_α a toto zrcadlení můžeme vyjádřit předpisem

$$W_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} \alpha.$$

Protože $\alpha(H_\alpha) = 2$, lze pravou stranu rovnosti ještě upravit na tvar

$$W_\alpha(\beta) = \beta - \beta(H_\alpha) \alpha.$$

Nyní přejdeme k poslední větě této podkapitoly.

Věta: Jsou-li α a β kořeny, potom

$$\frac{2B(\beta, \alpha)}{B(\alpha, \alpha)} = \beta(H_\alpha)$$

je celé číslo

Důkaz: Podívejme se, jak lze rozepsat výraz $\beta(H_\alpha)$:

$$\begin{aligned} \beta(H_\alpha) &= B(T_\beta, H_\alpha) = B\left(\frac{2}{B(H_\beta, H_\beta)}H_\beta, H_\alpha\right) \\ &= B\left(\frac{2}{B\left(\frac{2}{B(\beta, \beta)}\beta, \frac{2}{B(\beta, \beta)}\beta\right)} \cdot \frac{2}{B(\beta, \beta)}\beta, \frac{2}{B(\alpha, \alpha)}\alpha\right) \\ &= \frac{B^2(\beta, \beta)}{2^2} \cdot \frac{2^2}{B^2(\beta, \beta)} \cdot B\left(\beta, \frac{2}{B(\alpha, \alpha)}\alpha\right) = \frac{2B(\beta, \alpha)}{B(\alpha, \alpha)}. \end{aligned}$$

Protože již víme, že $\beta(H_\alpha)$ je celé číslo, je věta dokázána. □

3.2. Formální kořenová mříž

Nyní se chystáme upřesnit pojem kořenová mříž. Vlastnosti kořenových mříží jednotlivých Lieových algeber zastřešíme definicí formální kořenové mříže.

Definice: Formální kořenovou mříží v euklidovském prostoru nazýváme konečnou podmnožinu R takovou, že

1. R neobsahuje nulový vektor,
2. pro $\alpha \in R$ a $c \in \mathbb{R}$ je $c\alpha \in R$ právě když $c = \pm 1$,
3. zrcadlení W_α podle nadroviny kolmé na kterýkoli kořen α zobrazuje R na sebe,
4. pro libovolné dva kořeny α, β je výraz

$$n_{\beta\alpha} = 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$$

celé číslo.

Killingovu formu na euklidovském prostoru budeme značit (\bullet, \bullet) . I když výše uvedená definice říká, že $n_{\beta\alpha}$ je celé číslo, při podrobnějším zkoumání zjistíme, že $n_{\beta\alpha}$ nabývá pouze hodnot 0, 1, 2, 3 a 4. Podívejme se nyní, proč je tomu tak.

Protože

$$(\alpha, \alpha) = \|\alpha\|^2$$

a také

$$(\beta, \alpha) = \|\beta\| \|\alpha\| \cos\varphi,$$

lze $n_{\beta,\alpha}$ napsat jako

$$n_{\beta\alpha} = 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 2 \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos\varphi.$$

To však znamená, že

$$n_{\alpha\beta}n_{\beta\alpha} = 4 \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|} \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos^2\varphi = \underline{4\cos^2\varphi}.$$

Odtud plyne, že $n_{\alpha\beta}n_{\beta\alpha}$ nabývá celočíselné hodnoty z intervalu $\langle 0, 4 \rangle$. Podívejme se nyní na jednotlivé případy.

1. Když $n_{\alpha\beta}n_{\beta\alpha} = 0 = 4\cos^2\varphi$, je $\cos\varphi = 0$, a tak

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Poměr norem $\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}$ v tomto případě není definován.

2. Vezmeme-li $n_{\alpha\beta}n_{\beta\alpha} = 1 = 4\cos^2\varphi$, pak $\cos\varphi = \pm\frac{1}{2}$. Tedy

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \vee \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Poměr norem kořenů je

$$\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} = \pm 1.$$

A podobně pro zbylé případy.

3. Pokud $n_{\alpha\beta}n_{\beta\alpha} = 2 = 4\cos^2\varphi$, je $\cos\varphi = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, takže

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \vee \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

Poměr norem zde bude

$$\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} = \pm\sqrt{2}.$$

4. Nakonec pro $n_{\alpha\beta}n_{\beta\alpha} = 3 = 4\cos^2\varphi$ máme $\cos\varphi = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, což znamená, že

$$\varphi = \frac{\pi}{6} \vee \varphi = \frac{5\pi}{6}.$$

Poměr norem kořenů je

$$\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} = \pm\sqrt{3}.$$

Speciální případ $n_{\alpha\beta}n_{\beta\alpha} = 4 = 4\cos^2\varphi$ pouze vede na situaci lineárně závislých kořenů α, β , kde $\beta = \pm\alpha$.

Vidíme tak, že kořeny spolu svírají jen určitý úhel φ . V dalším textu ukážeme, že i tento výčet úhlů je omezen na úhly z druhého kvadrantu.

Věta: Pokud jsou α, β kořeny, pro které $\beta \neq \pm\alpha$, potom α -řetízek procházející kořenem β

$$\beta - p\alpha, \beta - (p-1)\alpha, \dots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \beta + q\alpha$$

má délku nejvíce tři, tzn. $p+q \leq 3$. Navíc platí $p-q = n_{\beta\alpha}$.

Důkaz: Jistě bude

$$W_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - p\alpha.$$

Protože zrcadlení W_α je homomorfismus, bude rovněž

$$W_\alpha(\beta + q\alpha) = W_\alpha(\beta) + W_\alpha(q\alpha) = \beta - n_{\beta\alpha}\alpha + (-q\alpha) = \beta - (n_{\beta\alpha} + q)\alpha.$$

Srovnáním obou vyjádření reflexe W_α na vektoru $\beta + q\alpha$ získáme

$$p - q = n_{\beta\alpha}.$$

Víme tedy, že $p - q = n_{\beta\alpha}$, a proto $p = n_{\beta\alpha} + q$. Pokud bude $p = 0$, pak β je kořen na konci α -řetízku a $q = -n_{\beta\alpha} \in \{0, 1, 2, 3\}$. Tedy v libovolné kořenové mříži ujdeme ve směru α maximálně tři kroky, což při zrcadlení W_α odpovídá obrazu $\beta + 3\alpha$. Pokud tedy zvolíme $p > 0$, musí být q právě takové, aby $p + q$ bylo maximálně 3. \square

Věta: Necht' jsou α, β kořeny, pro které $\beta \neq \pm\alpha$. Potom

$(\beta, \alpha) > 0 \Rightarrow \alpha - \beta$ je kořen,

$(\beta, \alpha) < 0 \Rightarrow \alpha + \beta$ je kořen.

Důkaz: Mějme zrcadlení podle nadroviny kolmé na kořen α :

$$W_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha = \beta - n_{\beta\alpha} \alpha.$$

Pokud $(\beta, \alpha) > 0$, musí být $n_{\beta\alpha} > 0$. Pro $n_{\beta\alpha} = 1$ získáme

$$W_\alpha(\beta) = \beta - \alpha,$$

takže $\beta - \alpha$ je kořen. Jestliže $(\beta, \alpha) < 0$, získáme $n_{\beta\alpha} < 0$ a pro $n_{\beta\alpha} = -1$ bude

$$W_\alpha(\beta) = \beta + \alpha.$$

Tedy $\beta + \alpha$ je kořen. □

Věta: Pokud jsou α a β dva různé jednoduché kořeny, potom $\alpha - \beta$ a $\beta - \alpha$ nejsou kořeny.

Důkaz: Budeme se opírat o definici jednoduchého kořene. Kořen α lze vyjádřit také jako $\beta + (\alpha - \beta)$, takže kdyby $\alpha - \beta$ byl kořen, dostali bychom spor s předpokladem věty. Také kořen β můžeme vyjádřit jako $\alpha + (\beta - \alpha)$, a protože β je jednoduchý kořen, musí být $\beta - \alpha \notin R$. □

Odtud již plyne skutečnost předeslaná výše. Jestliže jsou α a β dva lineárně nezávislé jednoduché kořeny, pak $\alpha - \beta$ není kořen a je-li tomu tak, musí být $(\alpha, \beta) \leq 0$. To však znamená, že

úhel mezi dvěma jednoduchými kořeny nemůže být ostrý.

Věta: Jednoduché kořeny jsou lineárně nezávislé.

Důkaz: Předně ukážeme, že množina vektorů, které leží na jedné straně nadroviny, a které mezi sebou navzájem svírají úhel alespoň 90° , musí být lineárně nezávislá. Necht' vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ jsou prvky této množiny. Předpokládejme, že existuje $k \in \{1, \dots, r-1\}$ a vektor v , který se dá dvěma různými způsoby vyjádřit jako netriviální celočíselná lineární kombinace s nezápornými koeficienty:

$$v = \sum_{i=1}^k n_i \alpha_i = \sum_{j=k+1}^r n_j \alpha_j.$$

Pro jeho kvadrát normy platí

$$0 \leq (v, v) = \left(\sum_{i=1}^k n_i \alpha_i, \sum_{j=k+1}^r n_j \alpha_j \right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^r n_i n_j (\alpha_i, \alpha_j) \leq 0.$$

Tedy v je nulový vektor. Pak ovšem musí být koeficienty $n_i, i = 1, \dots, r$ rovny nule. To znamená, že vektory $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ jsou lineárně nezávislé. Protože jednoduché kořeny nesyrají ostrý úhel, je věta dokázána. □

Nyní tedy víme, že jednoduché kořeny jsou lineárně nezávislé a protože množina R generuje euklidovský prostor dimenze n , existuje právě n jednoduchých kořenů. Každý kořen lze tedy jednoznačně vyjádřit jako celočíselnou lineární kombinaci jednoduchých kořenů. Dokonce lze ukázat následující:

Věta: Každý kladný kořen lze vyjádřit jako nezápornou celočíselnou lineární kombinaci jednoduchých kořenů.

Důkaz: Předpokládejme, že existuje neprázdná podmnožina euklidovského prostoru sestávající z kladných kořenů, pro které tvrzení neplatí. Nechť α je její minimální prvek v uspořádání daném formou l . Potom α není jednoduchý, a tedy jej můžeme vyjádřit jako součet $\beta + \gamma$. Protože

$$l(\alpha) = l(\beta + \gamma) = l(\beta) + l(\gamma),$$

je $\beta, \gamma < \alpha$. To je spor s minimalitou α . □

Okamžitým důsledkem je také fakt, že žádný kořen nelze zapsat jako lineární kombinaci jednoduchých kořenů s koeficienty se smíšenými znaménky. Proto jsme se při studiu Lieových algeber zajímali právě o jednoduché kořeny. Tyto kořeny vybereme za reprezentanty vrcholů Dynkinova diagramu. Vysvětleme si tento pojem. Dynkinův diagram je souvislé schéma sestávající z n vrcholů \bullet spojených liniemi⁵. Každý vrchol odpovídá právě jednomu jednoduchému kořenu. Násobnost linií pak udává úhel a poměr délek mezi kořeny.

Přejděme tedy ke grafickému znázornění toho, jak mohou být mezi sebou dva kořeny v rovině uspořádány.

1. situace: kořeny spolu svírají úhel $\varphi = \frac{\pi}{2}$:



Poměr jejich délek není definován.

2. situace: kořeny spolu svírají úhel $\varphi = \frac{2\pi}{3}$



Poměr délek kořenů je $\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} = 1$.

3. situace: kořeny spolu svírají úhel $\varphi = \frac{3\pi}{4}$



Poměr délek kořenů je $\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} = \sqrt{2}$.

4. situace: kořeny spolu svírají úhel $\varphi = \frac{5\pi}{6}$



Poměr délek kořenů je $\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|} = \sqrt{3}$.

⁵v literatuře se lze též setkat s pojmem vazba

Přítom šipka $>$ míří směrem ke kratšímu kořenu. Význam je stejný, jako u klasického relačního symbolu $>$, užívaného pro porovnávání dvou čísel.

Příští podkapitola pojednává o klasifikaci Dynkinových diagramů. V průběhu jejich klasifikace přijdeme mimo jiné k níže uvedeným čtyřem diagramům:

$$A_n \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \quad (n \geq 1)$$

$$B_n \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \rightrightarrows \bullet \quad (n \geq 2)$$

$$C_n \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \leftleftarrows \bullet \quad (n \geq 3)$$

$$D_n \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \\ \bullet \end{array} \quad (n \geq 4)$$

Již známe algebry, jejichž kořenové mříže odpovídají právě těmto diagramům. Jsou to právě algebry

$$\mathfrak{sl}_{n+1}\mathbb{C} \equiv A_n,$$

$$\mathfrak{so}_{2n+1}\mathbb{C} \equiv B_n,$$

$$\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C} \equiv C_n,$$

$$\mathfrak{so}_{2n}\mathbb{C} \equiv D_n.$$

Uvažujme například algebru $\mathfrak{sl}_3\mathbb{C}$ a podívejme se, zda

$$A_2 \bullet \text{---} \bullet$$

je vskutku jejím Dynkinovým diagramem.

Jednoduchými kořeny této algebry jsou lineární formy

$$\alpha_1 = L_1 - L_2, \quad \alpha_2 = L_2 - L_3.$$

Abychom spočítali jejich skalární součin na \mathfrak{h}^* , potřebujeme najít hodnoty T_{α_1} a T_{α_2} . Vezměme tedy nejprve kořen

$$\alpha_1 = L_1 - L_2.$$

Jemu odpovídající prvek T_{α_1} je definován podmínkou

$$\forall H \in \mathfrak{h} : \alpha_1(H) = B(H, H_{\alpha_1}),$$

kde H je diagonální matice

$$H = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$$

s nulovou stopou. Spočtěme tedy nejprve levou stranu uvedené rovnice:

$$\alpha_1(H) = (L_1 - L_2)(H) = L_1(H) - L_2(H) = a_1 - a_2.$$

Přejdeme k pravé straně. Prvek H_{α_1} je jedním z generátorů podalgebry \mathfrak{s}_{α_1} , která je izomorfní $\mathfrak{sl}_2\mathbb{C}$. Lze jej tedy vyjádřit jako

$$H_{\alpha_1} = \text{diag}(b_1, b_2, b_3).$$

Pravou stranu rovnice tak můžeme vyjádřit jako

$$B(H, H_{\alpha_1}) = 6(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3),$$

což znamená, že

$$H_{\alpha_1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní již můžeme spočítat T_{α_1} :

$$T_{\alpha_1} = \frac{2}{B(H_{\alpha_1}, H_{\alpha_1})} H_{\alpha_1} = \frac{2}{6 \cdot \frac{1}{36} \cdot (1+1)} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogicky je

$$T_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hledané číslo n_{α_1, α_2} je tedy:

$$n_{\alpha_1 \alpha_2} = 2 \frac{B(\alpha_1, \alpha_2)}{B(\alpha_2, \alpha_2)} = 2 \frac{B(T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2})}{B(T_{\alpha_2}, T_{\alpha_2})} = 2 \frac{6 \cdot (-1)}{6 \cdot 2} = -1$$

Tedy oba jednoduché kořeny spolu svírají úhel $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ a mají stejnou normu. Lze je tedy reprezentovat dvěma vrcholy spojenými jednoduchou vazbou.

Již jsme uvedli, že v nadcházející podkapitole klasifikujeme Dynkinovy diagramy. Ze všech možných schémat tak vytřídíme právě taková, která budou geometricky přípustná. Třebaže pojem přípustný Dynkinův diagram definujeme v příští podkapitole **3.3.**, ukažme si, proč nemůže existovat například diagram



Jde o diagram, který reprezentuje tři jednoduché kořeny. Součet úhlů, které tyto kořeny mezi sebou svírají, je $120^\circ + 150^\circ + 90^\circ$. Protože tento součet dává 360° , leží tyto tři kořeny v jedné rovině, a tedy nemohou být lineárně nezávislé. Pokud bychom tedy připustili výše uvedený diagram, dostali bychom spor s lineární nezávislostí těchto tří jednoduchých kořenů.

3.3. Klasifikace Dynkinových diagramů

Nyní již umíme číst v Dynkinových diagramech. Víme také, že jednoduché kořeny spolu mohou svírat pouze určitý úhel a právě tento fakt omezuje možné podoby Dynkinových diagramů. Abychom mohli najít jejich seznam, je třeba definovat, co je to přípustný Dynkinův diagram.

Definice: Řekneme, že Dynkinův diagram o n vrcholech, kde každý pár vrcholů je spojen žádnou, jednou, dvěma nebo třemi liniemi, je přípustný, jestliže v euklidovském prostoru existuje n lineárně nezávislých jednotkových vektorů e_1, \dots, e_n takových, že úhel mezi e_i a e_j je roven $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$.

Hlavní klasifikační věta: Dynkinovy diagramy ireducibilních kořenových systémů jsou právě

$$A_n \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \quad (n \geq 1)$$

$$B_n \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \rightrightarrows \bullet \quad (n \geq 2)$$

$$C_n \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \leftrightsquigarrow \bullet \quad (n \geq 3)$$

$$D_n \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \begin{cases} \bullet \\ \bullet \end{cases} \quad (n \geq 4)$$

$$E_6 \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$$

|

•

$$E_7 \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$$

|

•

$$E_8 \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$$

|

•

$$F_2 \bullet \text{---} \bullet \rightrightarrows \bullet \text{---} \bullet$$

$$G_2 \bullet \leftrightsquigarrow \bullet$$

Tento seznam obsahuje všechny vzájemně neizomorfní Dynkinovy diagramy.

Důkaz: První důležité pozorování je, že pro dva jednotkové vektory nabývá skalární součin (e_i, e_j) hodnot $0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ nebo $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Velmi užitečné však bude následující skutečnost a sice že výraz

$$4(e_i, e_j)^2 = 4 \cdot \cos^2 \varphi = n_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha}$$

odpovídá počtu vazeb mezi e_i a e_j .

Postupně dokážeme několik tvrzení. Při jejich odvozování se budeme opírat o následující princip označený **0**:

Tvrzení 0: Libovolný poddiagram přípustného diagramu, získaný odstraněním některých vrcholů a všech linií do nich vedoucích, je rovněž přípustný.

Důkaz: Toto tvrzení je zřejmé, neboť kdyby byl uvažovaný poddiagram nepřípustný, musel by být nepřípustný rovněž původní diagram, což je spor s předpokladem \square

Tvrzení 1: Existuje nejvýše $n - 1$ párů vrcholů spojených liniemi. Diagram neobsahuje žádné smyčky.

Důkaz: Uvažujme nějaký přípustný diagram. Pro vektory e_i a e_j , které reprezentují dva jeho vrcholy, platí, že

$$2(e_i, e_j) = 2 \cdot \cos \varphi_{i,j} \in \{0, -1, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}\}.$$

Vezměme nyní vektor $\sum_{i=1}^n e_i \neq o$. Druhou mocninu normy lze podrobněji rozepsat, jak ukazuje výpočet níže:

$$\begin{aligned} 0 < \left(\sum e_i, \sum e_i \right) &= (e_1, e_1) + \dots + (e_n, e_n) + \sum_{i < j} (e_i, e_j) + \sum_{j < i} (e_j, e_i) = \\ &= n + 2 \sum_{i < j} (e_i, e_j) = n + \sum_{i < j} 2(e_i, e_j). \end{aligned}$$

Ve výrazu $\sum_{i < j} 2(e_i, e_j)$ budou některé sčítance nulové, neboť v našem diagramu mohou existovat dvojice vrcholů, které nejsou spojeny žádnou vazbou. Do celkové sumy tak přispívají jen páry spojené nějakým typem vazby. Podívejme se, jaký maximální počet takových párů může v přípustném diagramu existovat. Pokud nás zajímá horní odhad, předpokládejme, že náš diagram sestává pouze z jednoduchých vazeb. Ty totiž v absolutní hodnotě přispívají nejméně do uvedené sumy, neboť

$$2(e_i, e_j) = -1.$$

Aby zůstala nerovnost zachována, může být počet párů spojených jednoduchou vazbou nejvýše $n - 1$. \square

Důsledkem tohoto závěru je fakt, že přípustný diagram neobsahuje smyčky. V opačném případě by totiž uvažovaná smyčka sestávala ze stejného počtu vazeb, jako je počet vrcholů, což je spor s **tvrzením 1**.

Tvrzení 2: Do žádného vrcholu nevedou více než tři linie.

Důkaz: Předpokládejme diagram, z jehož jednoho vrcholu, nazvěme ho e_1 , vede nějaký typ vazby ke všem zbývajícím vrcholům. Podle předchozího bodu však vrcholy e_2, \dots, e_n nesmí být spojeny. Dostali bychom totiž více než $n - 1$ párů spojených nějakou vazbou. Chceme tedy dokázat, že

$$\sum_{j=2}^n 4(e_1, e_j)^2 = \sum_{j=2}^n 4 \cdot \cos^2 \varphi_{1,j} < 4.$$

Pro jednoduché vazby to znamená, že do jednoho vrcholu mohou vést buď 1, 2 nebo 3 jednoduché linie. Pokud budeme uvažovat také dvojně vazby, lze do jednoho vrcholu vést jednu jednoduchou a jednu dvojnou vazbu, popř. pouze jednu dvojnou vazbu. Jestliže nakonec přidáme trojně vazby, pak jedinou možností je pouze jedna trojná vazba spojující v tomto případě vrcholy e_1 a e_2 . Dokažme tedy uvedenou nerovnost. Víme již, že vektory e_2, \dots, e_n jsou jednotkové a navzájem kolmé, neboť jim odpovídající vrcholy nejsou spojeny žádnou linií. Protože vektor e_1 není v jejich lineárním obalu, bude platit tzv. Besselova nerovnost

$$1 = (e_1, e_1)^2 > \sum_{j=2}^n (e_1, e_j)^2.$$

Suma na její pravé straně je kvadrát normy projekce vektoru e_1 do podprostoru generovaného vektory e_2, \dots, e_n . Označíme-li tuto projekci \hat{e}_1 , lze tuto nerovnost zkráceně napsat jako $1 = \|e_1\|^2 > \|\hat{e}_1\|^2$. Případně ji lze ještě vynásobit čtyřmi, čímž získáme

$$4 = 4(e_1, e_1)^2 > \sum_{j=2}^n 4(e_1, e_j)^2$$

Druhý bod je tak dokázán. \square

Tvrzení 3: V každém přípustném diagramu, který sestává z řetězce vrcholů spojených jednoduchou vazbou, kde pouze konce tohoto řetězce jsou spojeny vazbou (obecně násobnou) s jinými vrcholy⁶, lze řetězec vrcholů redukovat na jeden vrchol a takto vzniklý diagram je stále přípustný.

Důkaz: Necht' jsou e_1, \dots, e_r jednotkové vektory, které po řadě odpovídají vrcholům v řetězci. Vrchol odpovídající redukovanému řetězci označme $\hat{e} = \sum_{i=1}^r e_i$. Uvažovaný řetězec tedy reprezentujeme vektorem, který vznikne jejich součtem. Je třeba, aby tento vektor byl jednotkový, neboť by jinak nemohl reprezentovat vrchol přípustného diagramu. Tedy

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^r e_i, \sum_{i=1}^r e_i \right) &= \sum_{i=1}^r (e_i, e_i) + 2((e_1, e_2) + (e_2, e_3) + \dots + (e_{r-1}, e_r)) \\ &= r + 2 \left((r-1) \cos \frac{2\pi}{3} \right) = r - (r-1) = 1. \end{aligned}$$

Navíc, vezmeme-li skalární součin vektoru \hat{e} s ostatními vektory e_j , obdržíme výraz

$$(e_1, e_j) + (e_r, e_j).$$

Pokud se e_j nachází vpravo⁷, zbyde pouze druhý sčítanec, tedy

$$(\hat{e}, e_j) = (e_r, e_j).$$

Jestliže se e_j nachází vlevo⁸, zbyde naopak první sčítanec, takže

$$(\hat{e}, e_j) = (e_1, e_j).$$

Vidíme tak, že tento jediný vrchol je s vrcholy v rozvětvené části diagramu ve stejném vztahu, jako byly oba původní konce. Pokud byl původní diagram přípustný, bude tento redukovaný diagram rovněž přípustný. \square

Nyní k důsledkům. Začneme postupně podle násobnosti vazeb, takže skrze předchozí body můžeme ihned nahlédnout, že existuje pouze jeden diagram s trojnou vazbou. V opačném případě bychom překročily povolený počet vazeb, které mohou vést do jednoho vrcholu. Je to diagram, který odpovídá jedné z výjimečných Lieových algeber a ve výše uvedeném výčtu je označen G_2 .

⁶ve speciálním případě s jedním vrcholem

⁷tedy je spojen určitým typem vazby s koncem původního řetězce

⁸tentokrát je spojen určitým typem vazby se začátkem původního řetězce

Z našeho seznamu přípustných Dynkinových diagramů dále vidíme, že na konci diagramu se vyskytuje vždy nejvýše jedna dvojná vazba



Kdyby se dvojná vazba vyskytovala na obou koncích diagramu:

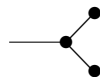


mohli bychom jej podle **tvrzení 3** redukovat na diagram



z jehož jednoho vrcholu vychází čtyři linie ke zbylým dvěma sousedním vrcholům, což je ve sporu s **tvrzením 2**.

Ze stejného důvodu může Dynkinův diagram obsahovat nejvýše jeden trojný uzel⁹



Pro názornost si představme nejjednodušší možnou situaci. Řetězec vrcholů spojených jednoduchou vazbou, obsahující dva trojné uzly na koncích



Podle **tvrzení 3** bychom jej mohli redukovat na vrchol, z kterého vedou čtyři jednoduché linie ke zbylým čtyřem vrcholům

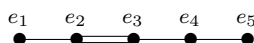


Takový diagram však zakazuje **tvrzení 2**.

Stejně tak není možné, aby Dynkinův diagram obsahoval dohromady dvojnou vazbu a trojný uzel. Jde o stejný princip, jako v předchozím případě:



Tvrzení 4: Diagram



není přípustný.

Důkaz: Uvažujme vektory $v = a_1e_1 + a_2e_2$ a $w = a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5$ se zatím neznámými koeficienty a_1, \dots, a_5 . Snadno spočteme normy obou vektorů

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= (v, v) = (a_1e_1 + a_2e_2, a_1e_1 + a_2e_2) \\ &= a_1^2 + 2a_1a_2 \cos \frac{2\pi}{3} + a_2^2 = a_1^2 + a_2^2 - a_1a_2. \end{aligned}$$

⁹tzn. vrchol, z kterého vedou tři jednoduché linie ke třem jiným vrcholům

Dále

$$\begin{aligned}\|w\|^2 &= (w, w) = (a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5, a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5) \\ &= a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + 2a_3a_4 \cos \frac{2\pi}{3} + 2a_4a_5 \cos \frac{2\pi}{3} = a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_3a_4 - a_4a_5.\end{aligned}$$

Nakonec

$$(v, w) = (a_1e_1 + a_2e_2, a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5) = a_2a_3 \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a_2a_3.$$

Chceme najít hodnoty $a_1, \dots, a_5 \in \mathbb{R}$ tak, abychom získali spor s Cauchyho-Schwarzovou nerovností, která říká, že pro lineárně nezávislé vektory v, w platí

$$(v, w)^2 < \|v\|^2 \|w\|^2.$$

Po dosazení a úpravách dostaneme

$$\frac{a_2^2}{\|v\|^2} \frac{a_3^2}{\|w\|^2} < 2.$$

Oba činitele na levé straně nerovnosti je třeba maximalizovat. Podívejme se na prvního činitele

$$\frac{a_2^2}{\|v\|^2} = \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2 - a_1a_2}.$$

Stacionární bod je řešením soustavy rovnic

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{a_2^2}{\|v\|^2} \right) = \frac{a_2^2 (a_2 - 2a_1)}{(a_1^2 + a_2^2 - a_1a_2)^2} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{a_2^2}{\|v\|^2} \right) = \frac{2a_2 (a_1^2 + a_2^2 - a_1a_2) - a_2^2 (2a_2 - a_1)}{(a_1^2 + a_2^2 - a_1a_2)^2} = 0.$$

V případě prvního činitele je tedy hledanou podmínkou

$$a_2 = 2a_1.$$

Lze např. zvolit $a_1 = 1$ a vektor v bude mít vyjádření

$$v = e_1 + 2e_2.$$

Pro druhého činitele

$$\frac{a_3^2}{\|w\|^2} = \frac{a_3^2}{a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_3a_4 - a_4a_5}$$

máme

$$\frac{\partial}{\partial a_3} \left(\frac{a_3^2}{\|w\|^2} \right) = \frac{2a_3 (a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_3a_4 - a_4a_5) - a_3^2 (2a_3 - a_4)}{(a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_3a_4 - a_4a_5)^2} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial a_4} \left(\frac{a_3^2}{\|w\|^2} \right) = \frac{-a_3^2 (2a_4 - a_3 - a_5)}{(a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_3a_4 - a_4a_5)^2} = 0$$

a

$$\frac{\partial}{\partial a_5} \left(\frac{a_3^2}{\|w\|^2} \right) = \frac{-a_3^2 (2a_5 - a_4)}{(a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_3a_4 - a_4a_5)^2} = 0.$$

Tato soustava rovnic je splněna tehdy, když

$$a_3 = 3a_5, a_4 = 2a_5$$

s tím, že můžeme položit $a_5 = 1$. Tedy

$$w = 3e_3 + 2e_4 + e_5.$$

Pak

$$\frac{a_2^2}{\|v\|^2} = \frac{4}{3}, \frac{a_3^2}{\|w\|^2} = \frac{3}{2},$$

a tedy

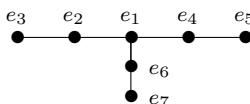
$$\frac{a_2^2}{\|v\|^2} \cdot \frac{a_3^2}{\|w\|^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2.$$

Takže dvojice lineárně nezávislých vektorů $v = e_1 + 2e_2$ a $w = 3e_3 + 2e_4 + e_5$ nesplňuje ostrou Cauchyho-Schwarzovu nerovnost, což není možné. \square

Z dosud dokázaných tvrzení plyne, že jediné diagramy, obsahující dvojnou vazbu, jsou B_n, C_n a F_4 .

Podívejme se na diagramy obsahující pouze jednoduché vazby a 1 trojný uzel.

Tvrzení 5: Diagram



není přípustný.

Důkaz: Uvažujme vektory

$$u_1 = \frac{2e_2 + e_3}{\sqrt{3}}, u_2 = \frac{2e_4 + e_5}{\sqrt{3}}, u_3 = \frac{2e_6 + e_7}{\sqrt{3}}.$$

Tyto vektory jsou jednotkové a navzájem kolmé. Vektor e_1 navíc neleží v jejich lineárním obalu. Označíme-li \hat{e}_1 projekci vektoru e_1 do podprostoru generovaného vektory u_1, u_2 a u_3 , bude platit $\|e_1\|^2 > \|\hat{e}_1\|^2$. Protože také $\|\hat{e}_1\|^2 = \sum_{i=1}^3 (e_1, u_i)^2$ a zároveň

$$\left(e_1, \frac{2e_2 + e_3}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} (e_1, e_2) + \frac{1}{\sqrt{3}} (e_1, e_3) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2} \right) + 0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

stejně tak, jako

$$\left(e_1, \frac{2e_4 + e_5}{\sqrt{3}} \right) = \left(e_1, \frac{2e_6 + e_7}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

získáme podle Besselovy nerovnosti

$$1 = \|e_1\|^2 > (e_1, u_1)^2 + (e_1, u_2)^2 + (e_1, u_3)^2 = 1,$$

což je spor.

Podívejme se podrobněji, jak jsme postupovali v tomto případě a zkusme uvedený postup zobecnit. Požadujeme, aby

$$(e_1, u_1)^2 + (e_1, u_2)^2 + (e_1, u_3)^2 = 1.$$

Protože všechny větve diagramu jsou stejně dlouhé¹⁰, přiřadíme skalárním součinům stejnou váhu $\frac{1}{3}$. Jak zvolit vektor u_1 ? Napišme si nejprve jeho obecné vyjádření

$$u_1 = \frac{a_2 e_2 + a_3 e_3}{\|a_2 e_2 + a_3 e_3\|}.$$

Tento vektor je jistě jednotkový. Požadujeme také, aby

$$(e_1, u) = \frac{a_2 (e_1, e_2) + a_3 (e_1, e_3)}{\|a_2 e_2 + a_3 e_3\|} = \frac{a_2 \cdot (-\frac{1}{2})}{\sqrt{a_2^2 + a_3^2 - a_2 a_3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Pro jednoduchost zvolíme $a_2 = 2$, a tím pádem musí být

$$\|2e_2 + a_3 e_3\|^2 = 3,$$

což je kvadratická rovnice

$$a_2^2 + a_3^2 - a_2 a_3 = 3.$$

Dosazením za a_2 pak získáme rovnici

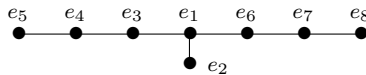
$$a_3^2 - 2a_3 + 4 = 3,$$

kterou lze ještě zjednodušit na tvar

$$(a_3 - 1)^2 = 0.$$

To znamená, že $a_3 = 1$. Ze symetrie diagramu získáme záměnou indexů zbylé vektory u_2 a u_3 .

Tvrzení 6: Diagram



není přípustný.

Důkaz: Najděme vektory u_1, u_2, u_3 tak, aby

$$(e_1, u_1)^2 + (e_1, u_2)^2 + (e_1, u_3)^2 = 1.$$

Pak nás Besselova nerovnost dovede opět ke sporu. Tyto vektory najdeme obdobnou cestou, jako v minulém odstavci. Požadujeme tedy, aby byly jednotkové, navzájem kolmé a aby vektor e_1 neležel v jejich lineárním obalu. Nejprve bychom tedy chtěli najít vyjádření vektoru

$$u_1 = \frac{a e_2}{\|a e_2\|}.$$

Vzhledem k výše uvedeným požadavkům však pro tento vektor existuje pouze jediná možnost, jež je daná volbou

$$u_1 = e_2.$$

Nyní je tedy

$$(e_1, e_2)^2 = \frac{1}{4}.$$

¹⁰jinými slovy obsahují stejný počet vrcholů

Protože má náš diagram opět symetrii, zkusme zbylým skalárním součinům přiřadit stejné hodnoty tak, aby

$$(e_1, u_2)^2 = (e_1, u_3)^2 = \frac{3}{8}.$$

Rozepišme skalární součin $(e_1, u_2)^2$ podrobněji:

$$\left(\frac{a_3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_3a_4 - a_4a_5}} \right)^2 = \frac{3}{8}.$$

Zjistíme, že

$$\frac{a_3^2}{a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_3a_4 - a_4a_5} = \frac{3}{2}$$

a pokud zvolíme $a_3 = \sqrt{3}$ musí být

$$a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_3a_4 - a_4a_5 = 2$$

Dosazením do této rovnice za a_3 získáme rovnici

$$3 + a_4^2 + a_5^2 - \sqrt{3}a_4 - a_4a_5 = 2,$$

kteřou vyřešíme vzhledem k parametru a_4 . Upravíme ji tedy na tvar

$$a_5^2 - a_4a_5 + (a_4^2 - \sqrt{3}a_4 + 1) = 0.$$

Diskriminant

$$D = a_4^2 - 4(a_4^2 - \sqrt{3}a_4 + 1)$$

musí být nezáporný, což je ekvivalentní s nerovnicí

$$-3a_4^2 + 4\sqrt{3}a_4 - 4 \geq 0.$$

Diskriminant této nerovnice je však nula, takže jediným řešením je dvojnásobný kořen

$$a_4 = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Opětovným dosazením do původní rovnice získáme

$$3 + \frac{4}{3} + a_5^2 - 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}a_5 = 2$$

a úpravou

$$a_5^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}a_5 + \frac{1}{3} = 0.$$

Řešením je samozřejmě opět dvojnásobný kořen. Jeho hodnota je $a_5 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Shrneme tedy naše výsledky: $a_3 = \sqrt{3}$, $a_4 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ a $a_5 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Protože je diagram symetrický, získáme přeindexováním stejný výsledek také pro vektor u_3 .

Explicitně tedy máme

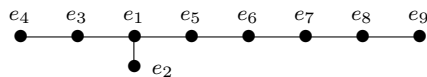
$$\begin{aligned} u_1 &= e_2, \\ u_2 &= \frac{\frac{3\sqrt{3}}{3}e_3 + \frac{2\sqrt{3}}{3}e_4 + \frac{\sqrt{3}}{3}e_5}{\sqrt{2}}, \\ u_3 &= \frac{\frac{3\sqrt{3}}{3}e_6 + \frac{2\sqrt{3}}{3}e_7 + \frac{\sqrt{3}}{3}e_8}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Pokud tyto výrazy ještě rozšíříme zlomkem $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$, dostaneme úhlednější vyjádření:

$$\begin{aligned} u_1 &= e_2, \\ u_2 &= \frac{3e_3 + 2e_4 + e_5}{\sqrt{6}}, \\ u_3 &= \frac{3e_6 + 2e_7 + e_8}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

□

Tvrzení 7: Diagram



není přípustný.

Důkaz: Můžeme se již inspirovat předchozími jednoduššími případy. Zvolíme

$$u_1 = e_2$$

s tím, že

$$(e_1, u_1)^2 = \frac{1}{4}.$$

Dále zvolíme

$$u_2 = \frac{2e_3 + e_4}{\sqrt{3}}$$

a jak už víme, bude

$$(e_1, u_2)^2 = \frac{1}{3}.$$

To znamená, že vektor u_3 by měl být zvolen tak, aby platilo

$$(e_1, u_3)^2 = \frac{5}{12},$$

protože potom

$$(e_1, u_1)^2 + (e_1, u_2)^2 + (e_1, u_3)^2 = 1.$$

Podívejme se, kam nás tato hypotéza zavede a vyjádřeme si vektor u_3 v obecném tvaru:

$$u_3 = \frac{a_5e_5 + a_6e_6 + a_7e_7 + a_8e_8 + a_9e_9}{\|a_5e_5 + a_6e_6 + a_7e_7 + a_8e_8 + a_9e_9\|}.$$

Požadujeme, aby

$$(e_1, u_3)^2 = \frac{a_5^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)}{a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 + a_8^2 + a_9^2 - a_5a_6 - a_6a_7 - a_7a_8 - a_8a_9} = \frac{5}{12}.$$

Zvolíme tedy $a_5 = \sqrt{5}$, a potom musí být

$$a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 + a_8^2 + a_9^2 - a_5a_6 - a_6a_7 - a_7a_8 - a_8a_9 = 3.$$

Nyní je třeba najít řešení této rovnice s tím, že již známe koeficient a_5 . Pokud se inspirujeme postupem u minulého diagramu, nabízí se zvolit $a_9 = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $a_8 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ a $a_7 = \frac{3\sqrt{5}}{5}$. Zbývá tedy dopočítat koeficient a_6 , který je řešením rovnice

$$a_6^2 - \frac{8\sqrt{5}}{5}a_6 + \frac{16}{5} = 0.$$

Tak zjistíme, že $a_6 = \frac{4\sqrt{5}}{5}$. Dohromady tak máme

$$\begin{aligned} u_1 &= e_2, \\ u_2 &= \frac{2e_3 + e_4}{\sqrt{3}}, \\ u_3 &= \frac{\sqrt{5}e_5 + \frac{4\sqrt{5}}{5}e_6 + \frac{3\sqrt{5}}{5}e_7 + \frac{2\sqrt{5}}{5}e_8 + \frac{\sqrt{5}}{5}e_9}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Poslední zlomek lze ještě upravit¹¹ na tvar

$$u_3 = \frac{5e_5 + 4e_6 + 3e_7 + 2e_8 + e_9}{\sqrt{15}}.$$

Pro přehlednost uvedeme pohromadě všechny vektory:

$$\begin{aligned} u_1 &= e_2, \\ u_2 &= \frac{2e_3 + e_4}{\sqrt{3}}, \\ u_3 &= \frac{5e_5 + 4e_6 + 3e_7 + 2e_8 + e_9}{\sqrt{15}}. \end{aligned}$$

Takto zvolené vektory opět vedou ke sporu. □

Důsledkem těchto tvrzení je, že jediné přípustné Dynkinovy diagramy s jednoduchými vazbami jsou A_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8 a věta je tedy dokázána. □

¹¹rozšířením zlomkem $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

3.4. Trojné uzly Dynkinova diagramu

V následujících odstavcích se pokusíme zobecnit úvahy, jichž jsme v minulé podkapitole užily pro trojné uzly. Pro získání sporu bylo třeba zvolit jistým způsobem trojici vektorů u_1 , u_2 a u_3 . Pro řetězce délky¹² 1 až 5 jsme prostřednictvím předchozích úvah postupně dostali:

délka 1 $u_1 = e_2,$

délka 2 $u_1 = \frac{2e_2+e_3}{\sqrt{3}},$

délka 3 $u_1 = \frac{3e_2+2e_3+e_4}{\sqrt{6}},$

délka 5 $u_1 = \frac{5e_2+4e_3+3e_4+2e_5+e_6}{\sqrt{15}}.$

Doposud jsme se však nesetkali s případem řetězce délky 4. Zkusme jej proto doplnit. Čítecitel je zřejmý:

$$4e_2 + 3e_3 + 2e_4 + e_5.$$

Druhá mocnina jmenovatele je pak součtem koeficientů vystupujících u vektorů e_i v čitateli. Jsou to vlastně trojúhelníková čísla¹³, která jsou vyjádřena předpisem

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Vektor u_1 pro řetězec délky 4 tedy bude vypadat takto

délka 4 $u_1 = \frac{4e_2+3e_3+2e_4+e_5}{\sqrt{10}}.$

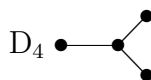
A obecně pro řetězec délky n bude

délka n $u_1 = \frac{ne_2+(n-1)e_3+\dots+e_{n+1}}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}}.$

Nyní, když umíme vyjádřit vektor u_i , $i = 1, 2, 3$, pro řetězec vrcholů libovolné délky, můžeme provést analogické úvahy, které nás dříve přivedly ke sporu s Besselovou nerovností, a zjistit, jaká je souvislost mezi „zakázaným“ trojným uzlem Dynkinova diagramu a délkou jeho jednotlivých větví. Jedna hypotéza se nabízí. Odteď však budeme místo pojmu „délka řetězce“ (DR) používat pojem „délka větve“ (DV), který definujeme takto

$$DV = DR + 1.$$

Pod délkou větve tedy budeme rozumět počet vektorů e_i včetně uzlového vektoru e_1 . Všimněme si tedy nejprve algebry D_4 , neboť jde o případ povoleného trojného uzlu



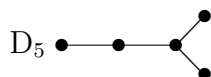
¹²délkou řetězce myslíme počet vrcholů dané větve mimo vrchol reprezentovaný vektorem e_1 ; lze také říci, že je to počet jednoduchých vazeb v daném řetězci

¹³jinými slovy jde o součet prvních n členů aritmetické posloupnosti a_n s diferencí $d = 1$, kde první člen a_1 má hodnotu 1

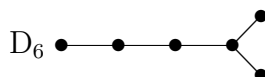
Sečteme-li převrácené hodnoty délek jednotlivých větví, získáme

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1.$$

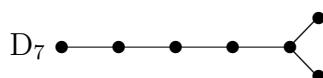
Budeme-li prodlužovat horizontální větev, dostaneme postupně následující diagramy a jim odpovídající součty převrácených hodnot délek jejich větví



$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{3} > 1,$$



$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{4} > 1,$$



$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{5} > 1.$$

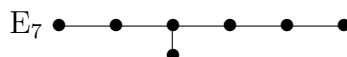
Obecně je zřejmé

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{n} > 1.$$

Pak zde máme ještě přípustné diagramy výjimečných Lieových algeber, které jsou rovněž trojnými uzly. Jde o algebry E_6 , E_7 a E_8 . Podíváme-li se na délky větví, zjistíme postupně stejné relace. Nejprve tedy

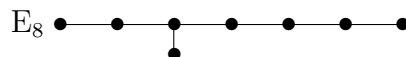


$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} > 1,$$



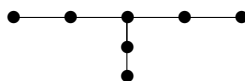
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$$

a nakonec

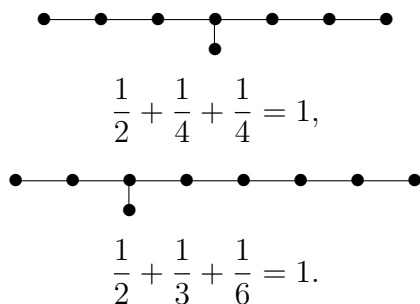


$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} > 1.$$

Vzpomeneme-li naopak na tři trojné uzly, které jsme již vyloučili, zjistíme, že mezi součtem převrácených hodnot délek větví a číslem 1 platí opačná relace



$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1,$$



Je zřejmé, že tyto tři případy jsou hraniční v tom smyslu, že kdybychom prodloužili některou z větví, dostali bychom se pod hodnotu 1. To souvisí s tím, že naddiagram nepřipustného diagramu je rovněž nepřipustný¹⁴.

Máme tedy hypotézu, která říká, že jsou-li p, q, r délky větví trojného uzlu, pak pro nepřipustný Dynkinův diagram platí

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1.$$

Ukážeme, že tato hypotéza je pravdivá a její obsah lze formulovat ve tvaru ekvivalence.

Věta: Nechtě p, q, r jsou délky větví trojného uzlu Dynkinova diagramu. Potom platí, že Dynkinův diagram je nepřipustný právě tehdy, když

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1.$$

Důkaz: Vyjádřeme vektory u_i , $i = 1, 2, 3$, pomocí délek p, q, r jim příslušných větví¹⁵

$$u_1 = \frac{(p-1)e_2 + (p-2)e_3 + \dots + e_p}{\sqrt{\frac{(p-1)p}{2}}},$$

$$u_2 = \frac{(q-1)e_{p+1} + (q-2)e_{p+2} + \dots + e_{p+q-1}}{\sqrt{\frac{(q-1)q}{2}}},$$

$$u_3 = \frac{(r-1)e_{q+1} + (r-2)e_{q+2} + \dots + e_{p+q+r-2}}{\sqrt{\frac{(r-1)r}{2}}}.$$

Platí

$$(e_1, u_1)^2 = \frac{\frac{(p-1)^2}{4}}{\frac{(p-1)p}{2}} = \frac{p-1}{2p},$$

$$(e_1, u_2)^2 = \frac{\frac{(q-1)^2}{4}}{\frac{(q-1)q}{2}} = \frac{q-1}{2q},$$

a

$$(e_1, u_3)^2 = \frac{\frac{(r-1)^2}{4}}{\frac{(r-1)r}{2}} = \frac{r-1}{2r}.$$

¹⁴jde jen o ekvivalentní vyjádření tvrzení **0**

¹⁵držíme se stejného značení, jako v předchozích speciálních případech

Pro získání sporu potřebujeme, aby

$$1 = \|e_1\|^2 > \sum_{i=1}^3 (e_1, u_i)^2 = \frac{p-1}{2p} + \frac{q-1}{2q} + \frac{r-1}{2r} \geq 1.$$

Upravme proto nerovnici

$$\frac{p-1}{2p} + \frac{q-1}{2q} + \frac{r-1}{2r} \geq 1.$$

Tak získáme

$$1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r} \geq 2$$

a posléze

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 1.$$

To však znamená, že naše hypotéza je pravdivá. □

Tím jsme tedy splnili hlavní cíl tohoto textu. Podařilo se nám klasifikovat Dynkinovy diagramy a můžeme dokonce říci, že jsme současně klasifikovali všechny Lieovy algebry. Výsledkem tak je, že existují čtyři nekonečné série v podobě algeber $\mathfrak{sl}_{n+1}\mathbb{C}$, $\mathfrak{so}_{2n+1}\mathbb{C}$, $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$ a $\mathfrak{so}_{2n}\mathbb{C}$ a pět samostatných kusů, kterými jsou algebry G_2 , F_4 , E_6 , E_7 a E_8 . V případě klasických Lieových algeber to je zřejmé, neboť již víme, že první čtyři Dynkinovy diagramy skutečně odpovídají algebřám, které jsme studovali v tomto textu avšak totéž nelze říci o zbylých Dynkinových diagramech. Ve skutečnosti je pro tyto diagramy ještě třeba ukázat, že k nim také existuje příslušná Lieova algebra. To zdaleka není jednoduchá otázka, třebaže odpověď je kladná. Čtenář se o této problematice může dozvědět více v textu [FH91], kde je podrobně rozebrán případ algebry G_2 .

Závěr

V této práci jsme se zabývali Lieovými algebry s přihlédnutím k jejich kořenům. Poté jsme provedli jejich klasifikaci pomocí Dynkinových diagramů.

Zprvu jsme uvedli základní pojmy, jako Lieova algebra a adjungovaná reprezentace. Odtud jsme přešli k hledání Lieových algeber na základě znalosti jejich Lieových grup.

Pak jsme našli nenulová vlastní čísla reprezentace ad a získali tak seznam kořenů dané Lieovy algebry. V tomto seznamu jsme zavedli uspořádání, které nám umožnilo provést disjunktní rozklad množiny R na kladné a záporné kořeny. Již pro účely kapitoly **2** jsme definovali pojem jednoduchý kořen, třebaže jsme některé vlastnosti jednoduchých kořenů dokázali až v příští, tedy **3.**, kapitole.

První část této **3.** kapitoly jsme zahájili definicí Killingovy formy, která nám umožňuje měřit relativní velikost kořenů a úhly, které mezi sebou svírají. Definovali jsme také formální kořenovou mříž. Díky této definici jsme odvodili mnohé vlastnosti kořenů, které nás nakonec přivedly k formulaci pojmu Dynkinova diagramu. Zbytek kapitoly je věnován důkazu hlavní klasifikační věty.

Za největší přínos této práce považujeme podrobné provedení klasifikace Dynkinových diagramů, která je pro názornost doplněna jejich ilustracemi.

Literatura

- [FH91] *W.Fulton, J.Harris: Representation Theory, A first course*
Springer, 1991
- [KST97] *L.Krump, V.Souček, J.Těšínský: Matematická analýza na varietách*
Karolinum, 1997
- [ZM03] *M.Zahradník, L.Motl: Pěstujeme lineární algebru*
Karolinum, 2003
- [ZV02] *M.Zahradník, K.Výborný: Používáme lineární algebru*
Karolinum, 2002
- [JB05] *J.Bečvář: Lineární algebra*
Matfyzpress, 2005
- [VS02] *V. Souček: Representace Lieových grup a algeber*
studijní text k přednášce Úvod do teorie Lieových grup
<http://www.karlin.mff.cuni.cz/soucek/>, 2002
- [MB13] *M. Bakusová: Lieovy algebry - od příkladů k teorii*
bakalářská práce
Msarykova univerzita, 2013
- [VP07] *V. Pravda: Maticové Lieovy grupy a Lieovy algebry*
Jednota českých matematiků a fyziků, 2007