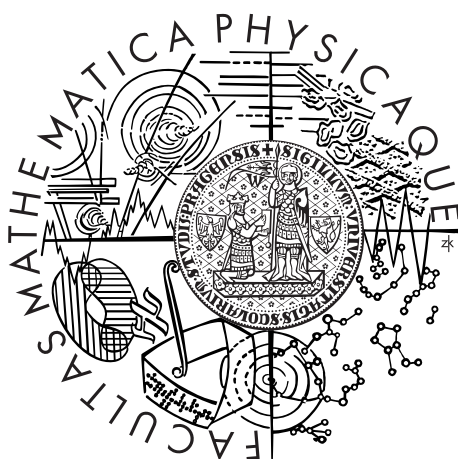


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Antonín Procházka

Konvergence jedné řady

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zelený Miroslav, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: obecná matematika

Praha 2015

Poděkování. Doc. Zelenému, zejména za jeho čas, cenné připomínky k mému textu a za účinnou pomoc v boji s \LaTeX em.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Antonín Procházka

Název práce: Konvergence jedné řady

Autor: Antonín Procházka

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zelený Miroslav, Ph.D., Katedra matematické analýzy

e-mail vedoucího: zeleny@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Text je věnován číselné řadě $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n |\sin n| / n$. Cílem práce je ukázat, že tato řada je konvergentní. Zde použité řešení využívá standardní kritéria konvergence řad, teorii Fourierových řad, a hlubší poznatky o aproximaci čísla π .

Klíčová slova: Fourierova řada, Dirichletovo kritérium, Dirichletovo-Jordanovo kritérium, parciální sumace

Title: On convergence of a series

Author: Antonín Procházka

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Zelený Miroslav, Ph.D., Department of mathematical analysis

Supervisor's e-mail address: zeleny@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: This text is devoted to the series, whose n -th term is defined by $(-1)^n |\sin n| / n$. The goal of this work is to prove convergence of this series. The solution uses standard convergence tests, the theory of Fourier Series and findings about approximation of number π .

Keywords: Fourier series, Dirichlet's test, Dirichlet-Jordan test, summation by parts

Obsah

1	Úvod	4
1.1	Standardní metody řešení	4
1.2	Absolutní divergence řady	5
1.3	Motivace	6
2	Definice a známé věty	7
3	Vypracování	9
4	Závěr	17

1 Úvod

1.1 Standardní metody řešení

Při prvních pokusech vyšetřit konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} |\sin n|$$

brzy zjistíme, že standardní kritéria pro rozhodnutí o konvergenci řady se zdají selhávat. Většina z těchto kritérií (srovnávací, limitní odmocninové, podílové apod.) vyžadují, aby vyšetřovaná řada měla nezáporné členy, což v našem případě není splněno. Leibnizovo kritérium sice pracuje s alternujícími řadami, v našem případě jej však použít nelze, neboť posloupnost $\frac{|\sin n|}{n}$ není monotónní. Abelovo kritérium též nelze jednoduše aplikovat, neboť to vyžaduje, aby platilo $a_n b_n = \frac{(-1)^n}{n} |\sin n|$, kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní a omezená posloupnost a kde řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní. To však nelze snadno pozorovat.

1.2 Absolutní divergence řady

Důsledkem Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro řady reálných čísel je, že pokud daná řada je absolutně konvergentní, potom je konvergentní. Tento důsledek však nelze použít k důkazu konvergence naší řady neboť, jak nyní ukážeme, zadaná řada nekonverguje absolutně.

Položme $f(x) = |\sin(x-1)| + |\sin x|$, $x \in \mathbb{R}$. Chceme ukázat, že existuje konstanta $c > 0$ taková, že $f(x) \geq c$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce f je zřejmě π -periodická, proto stačí tuto vlastnost vyšetřit pouze na intervalu $[0, \pi]$. Ať $x \in (0, \pi)$. Protože $\sin x > 0$, je i $f(x) > 0$. Je-li $x = 0$ nebo $x = \pi$, pak jistě $|\sin(x-1)| > 0$. Funkce f je tedy na intervalu $[0, \pi]$ kladná. Protože funkce f je na tomto uzavřeném intervalu spojitá, nabývá na něm svého minima. Jak jsme právě ukázali, toto minimum musí být nutně kladné číslo, a proto konstanta c existuje. Dodejme, že rozбором funkce f na intervalu $[0, \pi]$ bychom snadno zjistili, že tato funkce nabývá svého minima v bodech $0, 1, \pi$ o hodnotě $\sin 1$.

Buď $K \in [0, \infty]$. O harmonické řadě je známé, že diverguje k nekonečnu. Zvolme tedy $N' \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo $\sum_{n=1}^{N'} \frac{1}{n} \geq \frac{2}{c}K$. Potom pro každé $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2N'$ máme

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \left| \frac{(-1)^n}{n} \sin n \right| \geq \sum_{n=1}^{2N'} \frac{|\sin n|}{n} \\ &= \frac{|\sin 1|}{1} + \frac{|\sin 2|}{2} + \dots + \frac{|\sin(2N' - 1)|}{2N' - 1} + \frac{|\sin 2N'|}{2N'} \\ &\geq \frac{|\sin 1|}{2} + \frac{|\sin 2|}{2} + \dots + \frac{|\sin(2N' - 1)|}{2N'} + \frac{|\sin 2N'|}{2N'} \\ &= \sum_{n=1}^{N'} \frac{|\sin(2n - 1)| + |\sin 2n|}{2n} \geq \frac{c}{2} \sum_{n=1}^{N'} \frac{1}{n} \geq K. \end{aligned}$$

Tím je ověřena divergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \sin n \right|.$$

1.3 Motivace

Proč bychom se ale měli domnívat, že zadaná řada konverguje? Z běžných vět pro rozhodnutí o konvergenci řad jsme zatím neuvažovali kritérium Dirichletovo (Věta 2.7). To vyžaduje, aby platilo $a_n b_n = \frac{(-1)^n}{n} |\sin n|$, kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní posloupnost s limitou 0 a kde posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je omezená. Uvažujme $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = (-1)^n |\sin n|$. Pro omezenost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ stačí prokázat existenci konstanty $M \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $N \in \mathbb{N}$ platí

$$\left| \sum_{n=1}^{2N} b_n \right| = \left| \sum_{n=1}^N |\sin 2n| - \sum_{n=1}^N |\sin(2n-1)| \right| \leq M.$$

Platnost této nerovnosti však ukázat neumíme. Měla by vůbec platit?

Nahlédněme nyní na problém tak, že hodnoty $n \bmod \pi$ vyplňují interval $[0, \pi]$ v nějakém smyslu dostatečně rovnoměrně. Měli bychom pak dostat, že hodnota částečného součtu $\sum_{n=1}^N |\sin 2n|$ je přibližně rovna číslu $N \frac{2}{\pi}$, kde $\frac{2}{\pi}$ je integrální průměr funkce $x \mapsto |\sin x|$ na intervalu $[0, \pi]$, a stejně tak hodnota částečného součtu $\sum_{n=1}^N |\sin(2n-1)|$ je přibližně rovna číslu $N \frac{2}{\pi}$. Jinými slovy ať existuje reálná konstanta K , splňující

$$\left| \sum_{n=1}^N |\sin 2n| - \frac{2}{\pi} N \right| \leq K \quad \text{a} \quad \left| \sum_{n=1}^N |\sin(2n-1)| - \frac{2}{\pi} N \right| \leq K$$

pro všechna $N \in \mathbb{N}$. Z Dirichletova kritéria pak plyne domněnka, že se jedná o konvergentní řadu.

Ve zde uvedeném řešení úlohy však budu postupovat poněkud jinak. Dirichletovo kritérium sice použiji, avšak zdaleka ne s tak přímočarou myšlenkou. Kritérium aplikuji na posloupnosti $a_n = \frac{1}{n^{1-p}}$ a $b_n = \frac{(-1)^n}{n^p} |\sin n|$, $n \in \mathbb{N}$ pro vhodné $p \in (0, 1)$. K důkazu omezenosti posloupnosti částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pak využiji rozpis funkce $|\sin|$ do její Fourierovy řady, kde k důkazu rovnosti této funkce a její Fourierovy řady využiji Dirichletovo-Jordanovo kritérium. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tak převedu na nový tvar, o kterém pak s využitím Abelovy parciální sumace a poznatků o aproximaci čísla π racionálními čísly již omezenost částečných součtů této řady dokážu.

2 Definice a známé věty

Definice 2.1. Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je **lokálně integrovatelná** v \mathbb{R} , jestliže pro každý uzavřený interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ platí, že f je na něm integrovatelná, tj. existuje určitý Lebesgueův integrál funkce f přes interval $[a, b]$ a jeho hodnota je reálné číslo. Symbolem $\mathbb{P}_{2\pi}$ značíme množinu všech lokálně integrovatelných 2π -periodických funkcí v \mathbb{R} .

Definice 2.2. Nechť $f \in \mathbb{P}_{2\pi}$. Potom členy posloupností reálných čísel $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, definované předpisem

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

nazýváme **Fourierovými koeficienty** funkce f .

Řadu funkcí

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in \mathbb{R},$$

pak nazýváme **Fourierovou řadou** funkce f .

Definice 2.3. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce. Pak definujeme **Totální variaci** funkce f na intervalu $[a, b]$ jako hodnotu

$$V(f; a, b) = \sup_{D \in \mathbb{D}} \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \right\},$$

kde $\mathbb{D} = \{D = \{x_i\}_{i=0}^n \mid D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\}$. Konečná posloupnost $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je dělení intervalu $[a, b]$, jestliže $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Řekneme, že funkce f má na intervalu $[a, b]$ **konečnou variaci**, jestliže platí $V(f; a, b) < \infty$.

Věta 2.4 (Dirichlet-Jordan [1, str. 490]). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť funkce $f \in \mathbb{P}_{2\pi}$ je na intervalu $[a, b]$ spojitá a má na intervalu $[a, b]$ konečnou variaci. Potom v každém bodě $x \in (a, b)$ je Fourierova řada funkce f konvergentní, a má součet $f(x)$.*

Věta 2.5 (Dirichletovo kritérium konvergence řad [2, str. 296]).

1. Je-li posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ omezená a
2. je-li $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí posloupnost kladných čísel konvergující k nule,

potom řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

konverguje.

Lemma 2.6 (Abelova parciální sumace, [3, str. 233]). *Nechť jsou dány posloupnosti reálných čísel $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ a čísla $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$. Označme*

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Potom platí

$$\sum_{n=p+1}^q a_n b_n = \sum_{n=p+1}^q s_n (b_n - b_{n+1}) + s_q b_{q+1} - s_p b_{p+1}.$$

3 Vypracování

Tvrzení 3.1 (rozvoj funkce $|\sin|$ do její Fourierovy řady). *Platí rovnost*

$$|\sin x| = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cos kx, \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $d_0 = \frac{2}{\pi}$, $d_1 = 0$, a $d_k = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^k + 1}{k^2 - 1} \right)$ pro $k \geq 2$.

Navíc existuje konstanta $c_1 \in (0, \infty)$ taková, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí

$$|d_k| \leq \frac{c_1}{k^2}.$$

Důkaz. Funkce $f(x) = |\sin x|$ je zřejmě 2π -periodická a lokálně integrovatelná. Lze ji tedy rozvinout do Fourierovy řady. Podle definice vypočítáme koeficienty této řady:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx = -\frac{2}{\pi} [\cos x]_0^\pi = \frac{4}{\pi}, \\ a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin x| \cos x \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi \sin x \cos x \, dx - \int_\pi^{2\pi} \sin x \cos x \, dx \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi} ([\cos 2x]_0^\pi - [\cos 2x]_\pi^{2\pi}) = 0. \end{aligned}$$

Pro $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ máme

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin x| \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi \sin x \cos kx \, dx - \int_\pi^{2\pi} \sin x \cos kx \, dx \right).$$

Dvojitým použitím metody per partes snadno zjistíme, že příslušná primitivní funkce je tvaru

$$\int \sin x \cos kx \, dx = \frac{1}{k^2 - 1} (k \sin x \sin kx + \cos x \cos kx) + c.$$

Takže

$$\int_0^\pi \sin x \cos kx \, dx = \frac{1}{k^2 - 1} [k \sin x \sin kx + \cos x \cos kx]_0^\pi = \frac{-(-1)^k - 1}{k^2 - 1},$$

$$\int_\pi^{2\pi} \sin x \cos kx \, dx = \frac{1 + (-1)^k}{k^2 - 1}.$$

Celkem pro $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ dostáváme

$$a_k = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^k + 1}{k^2 - 1} \right).$$

Jak bychom s použitím metody per partes snadno spočítali, pro zbylé koeficienty platí

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin x| \sin kx \, dx = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Takže Fourierova řada funkce $|\sin|$ má pouze sudou část, což koresponduje s tím, že se jedná o sudou funkci. Buď $x \in \mathbb{R}$. Zvolíme $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $a < x < b$. Snadno si rozmyslíme, že funkce $f(x) = |\sin x|$ má na intervalu $[a, b]$ konečnou variaci. Podle Věty 2.4 (Dirichletovo-Jordanovo kritérium konvergence Fourierových řad) je tedy $S_f(x) = f(x)$. Protože jsme bod $x \in \mathbb{R}$ volili libovolně, získáváme, že funkce f je rovna součtu své Fourierovy řady na celém \mathbb{R} .

Zbývá už jen nalézt konstantu c_1 ze znění dokazovaného tvrzení. Pro $k = 1$ můžeme volit $c_1 \in (0, \infty)$ libovolně. Pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ jistě platí $k^2 \leq 2(k^2 - 1)$. Pro $k \geq 2$ tak snadno odhadneme

$$|d_k| = \frac{2}{\pi} \frac{|(-1)^k + 1|}{k^2 - 1} \leq \frac{4}{\pi k^2}.$$

Tvrzení tedy platí s konstantou $c_1 = \frac{8}{\pi}$. □

Díky Tvrzení 3.1 tak můžeme pro každé $p \in \mathbb{R}$ a $N \in \mathbb{N}$ napsat

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^p} |\sin n| = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^p} \cos kn.$$

Naším cílem je pro vhodné $p \in (0, 1)$ ukázat omezenost posloupnosti, jejíž N -tý člen je součet konečné řady na levé straně výše uvedené rovnosti. Konvergence zadané řady pak totiž snadno vyplyne z Dirichletova kritéria. Pro pevné $p > 0$ je nultý člen řady napravo odhadnut (v absolutní hodnotě) jistou konstantou, nezávislou na N , což plyne z Leibnizova kritéria (podrobně viz Lemma 3.5). Protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ máme $|d_k| \leq \frac{c_1}{k^2}$, stačí ukázat, že pro vhodné $p \in (0, 1)$ existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ a číslo $q < 1$ takové, že pro všechna $k, N \in \mathbb{N}$ platí $\left| \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^p} \cos kn \right| \leq ck^q$. Vrcholem práce je proto důkaz této nerovnosti v Tvrzení 3.7. Řada napravo ve výše uvedené rovnosti totiž pak bude v absolutní hodnotě odhadnuta konvergentní řadou $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_1}{k^2} ck^q$, jejíž součet na N nezávisí.

Tvrzení 3.2. Pro každé $N \in \mathbb{N}$ a každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ platí

$$\left| \sum_{n=1}^N (-1)^n \cos(nx) \right| \leq \frac{1}{\left| \cos \frac{x}{2} \right|}.$$

Důkaz. Připomněme součtové vzorce pro $x, y \in \mathbb{R}$ ve tvaru

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y. \end{aligned}$$

Aplikací prvních dvou získáme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)x = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cos nx.$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $N \in \mathbb{N}$ pak s využitím výše uvedené rovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} & 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \sum_{n=1}^N \cos nx \\ &= \sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{1}{2}x + \sin \frac{5}{2}x - \sin \frac{3}{2}x + \cdots + \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(N - \frac{1}{2}\right)x \\ &= -\sin \frac{1}{2}x + \sin\left(N + \frac{1}{2}\right)x. \end{aligned}$$

Odtud pro všechna $N \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ plyne po vydělení obou stran výrazem $2 \sin \frac{1}{2}x$ nerovnost

$$\left| \sum_{n=1}^N \cos nx \right| = \frac{|\sin(N + \frac{1}{2})x - \sin \frac{1}{2}x|}{|2 \sin \frac{1}{2}x|} \leq \frac{1}{|\sin \frac{1}{2}x|}.$$

U této nerovnosti provedeme substituci $x = y + \pi$. Pak s využitím třetího součtového vzorce upravíme obě strany nerovnosti do tvarů

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \cos nx &= \sum_{n=1}^N \cos(ny + n\pi) = \sum_{n=1}^N (\cos ny \cos n\pi - \sin ny \sin n\pi) \\ &= \sum_{n=1}^N (\cos ny \cdot (-1)^n - \sin ny \cdot 0) = \sum_{n=1}^N (-1)^n \cos ny \end{aligned}$$

a

$$\frac{1}{|\sin \frac{1}{2}x|} = \frac{1}{|\sin(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{2})|} = \frac{1}{|\cos \frac{1}{2}y|}.$$

Celkem tedy pro všechna $N \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ platí

$$\left| \sum_{n=1}^N (-1)^n \cos nx \right| \leq \frac{1}{\left| \cos \frac{1}{2}x \right|}.$$

□

Pozornost si zaslouží následující netriviální tvrzení z teorie čísel. Dále uvedená vlastnost čísla π je klíčová ve zde zpracovaném důkazu konvergence zadané řady.

Tvrzení 3.3 (Mahler, 1953, [4]). *Pro každé $k \in \mathbb{Z}$ a pro každé $q \in \mathbb{N}$ platí nerovnost*

$$\left| \pi - \frac{k}{q} \right| \geq q^{-42}.$$

Tvrzení 3.4. *Existuje konstanta $c_2 \in (0, \infty)$ taková, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí*

$$\left| \cos \frac{k}{2} \right| \geq c_2 k^{-41}.$$

Důkaz. Ať $k \in \mathbb{N}$ je dáno. Položme $l := \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. Číslo $\frac{k}{2}$ tedy je prvkem intervalu $[l\pi, (l+1)\pi]$ a proto platí $|\frac{k}{2} - (l + \frac{1}{2})\pi| \leq \frac{\pi}{2}$. Z konkavity funkce \sin na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ snadno vidíme, že na tomto intervalu platí nerovnost $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$. S využitím této nerovnosti a Tvrzení 3.3 máme

$$\begin{aligned} \left| \cos \frac{k}{2} \right| &= \left| \sin \left(\frac{k}{2} - (l + \frac{1}{2})\pi \right) \right| = \sin \left| \frac{k}{2} - (l + \frac{1}{2})\pi \right| \geq \frac{2}{\pi} \left| \frac{k}{2} - (l + \frac{1}{2})\pi \right| \\ &= \frac{2}{\pi} (l + \frac{1}{2}) \left| \frac{k}{2l+1} - \pi \right| \geq \frac{1}{\pi} (2l+1) (2l+1)^{-42} = \frac{1}{\pi} (2l+1)^{-41}. \end{aligned}$$

Protože $l\pi \leq \frac{k}{2}$ a $k \geq 1$, máme $2l+1 \leq \frac{k}{\pi} + 1 \leq \frac{k}{\pi} + \frac{4k}{\pi} = \frac{5k}{\pi}$.

Dostáváme tak

$$\left| \cos \frac{k}{2} \right| \geq \frac{1}{\pi} (2l+1)^{-41} \geq \frac{1}{\pi} \left(\frac{5}{\pi} \right)^{-41} k^{-41}.$$

Tvrzení tedy platí s konstantou $c_2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{5}{\pi} \right)^{-41}$. □

Lemma 3.5. *Pro každé $p \in (0, \infty)$ existuje konstanta $\alpha_p \in [0, \infty)$ taková, že pro všechna $N \in \mathbb{N}$ platí nerovnost*

$$\left| \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^p} \right| \leq \alpha_p.$$

Důkaz. Ať $p \in (0, \infty)$ je dáno. Posloupnost $\{\frac{1}{n^p}\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní a konverguje k nule. Dle Leibnizova kritéria pro alternující řady je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ konvergentní, tj. posloupnost částečných součtů této řady je konvergentní. Protože každá konvergentní posloupnost je nutně shora i zdola omezená, je tvrzení pravdivé. \square

Tvrzení 3.6. Pro každé $p \in (0, 1)$ a pro všechna $N \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{1-p} N^{1-p}.$$

Důkaz. Ať $p \in (0, 1)$ a $N \in \mathbb{N}$ jsou dána. Je-li $N = 1$, je tvrzení zřejmé. Uvažujme pomocnou funkci $f(x) = \frac{1}{x^p}$, $x \in (0, \infty)$. Funkce f na svém definičním oboru klesající. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ proto platí $f(x) \geq f(n)$, je-li $x \in [n-1, n]$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tak dostáváme

$$\int_{n-1}^n f(x) dx \geq \int_{n-1}^n f(n) dx = f(n)(n - (n-1)) = \frac{1}{n^p}.$$

Pro $N \geq 2$ tedy máme

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^p} &= 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^p} \leq 1 + \sum_{n=2}^N \int_{n-1}^n f(x) dx = 1 + \int_1^N \frac{1}{x^p} dx \\ &= 1 + \frac{1}{1-p} [x^{1-p}]_1^N = \frac{1}{1-p} N^{1-p} - \frac{1}{1-p} + 1 \leq \frac{1}{1-p} N^{1-p}. \end{aligned}$$

\square

Tvrzení 3.7. Pro každé $p \in [\frac{41}{42}, 1)$ existuje konstanta $\beta_p \in [0, \infty)$ taková, že pro všechna $k, N \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$\left| \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^p} \cos kn \right| \leq \beta_p k^p.$$

Důkaz. Ať $p \in [\frac{41}{42}, 1)$ a $k, N \in \mathbb{N}$ jsou dána. Položme $N' = k^{41}$. Ze vztahu $\frac{41}{42} \leq p$ plyne $41 \leq p + 41p$, z čehož plyne $41(1-p) \leq p$. Ať $N \leq N'$. Díky Tvrzení 3.6 platí

$$\left| \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^p} \cos kn \right| \leq \sum_{n=1}^{N'} \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{1-p} (N')^{1-p} = \frac{1}{1-p} k^{41(1-p)} \leq \frac{1}{1-p} k^p.$$

Je-li $N > N'$, máme

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^p} \cos kn \right| &= \left| \sum_{n=1}^{N'} \frac{(-1)^n}{n^p} \cos kn + \sum_{n=N'+1}^N \frac{(-1)^n}{n^p} \cos kn \right| \\ &\leq \frac{1}{1-p} k^p + \left| \sum_{n=N'+1}^N \frac{(-1)^n}{n^p} \cos kn \right|. \end{aligned}$$

K odhadu sumy uvnitř absolutní hodnoty nyní využijeme Abelovu parciální sumaci (Lemma 2.6). Položme

$$a_m = (-1)^m \cos km, \quad b_m = \frac{1}{m^p}, \quad m = N' + 1, \dots, N.$$

Pro $n = N' + 1, \dots, N$ máme $s_n = \sum_{m=1}^n (-1)^m \cos km$. Podle Abelovy parciální sumace platí

$$\sum_{n=N'+1}^N \frac{(-1)^n}{n^p} \cos kn = \sum_{n=N'+1}^N s_n \left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^p} \right) + s_N \frac{1}{(N+1)^p} - s_{N'} \frac{1}{(N'+1)^p}.$$

Z Tvrzení 3.2 víme, že platí $|s_n| \leq \frac{1}{|\cos \frac{k}{2}|}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Proto

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N'+1}^N \frac{(-1)^n}{n^p} \cos kn \right| &\leq \sum_{n=N'+1}^N \left| s_n \left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^p} \right) \right| + |s_N| \frac{1}{N^p} + |s_{N'}| \frac{1}{(N'+1)^p} \\ &\leq \frac{1}{|\cos \frac{k}{2}|} \left(\frac{1}{(N'+1)^p} - \frac{1}{(N'+2)^p} + \dots + \frac{1}{N^p} - \frac{1}{(N+1)^p} + \frac{1}{N^p} + \frac{1}{(N'+1)^p} \right) \\ &= \frac{1}{|\cos \frac{k}{2}|} \left(\frac{1}{(N'+1)^p} - \frac{1}{(N+1)^p} + \frac{1}{N^p} + \frac{1}{(N'+1)^p} \right) \leq \frac{1}{|\cos \frac{k}{2}|} \frac{3}{(N'+1)^p}. \end{aligned}$$

Díky Tvrzení 3.4 existuje konstanta $c_2 \in (0, \infty)$ taková, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí $|\cos \frac{k}{2}| \geq c_2 k^{-41}$. Použitím již odvozených odhadů tak dostáváme

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^p} \cos kn \right| &\leq \frac{1}{1-p} k^p + \frac{1}{|\cos \frac{k}{2}|} \frac{3}{(N'+1)^p} \\ &\leq \frac{1}{1-p} k^p + \frac{1}{c_2 k^{-41}} \frac{3}{k^{41p}} \leq \frac{1}{1-p} k^p + \frac{3}{c_2} k^p. \end{aligned}$$

Dokazované tvrzení tedy platí s konstantou $\beta_p = \frac{1}{1-p} + \frac{3}{c_2}$. □

Tvrzení 3.8. Pro každé $p \in [\frac{41}{42}, 1)$ existuje konstanta $\gamma_p \in [0, \infty)$ taková, že pro všechna $N \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$\sum_{k=0}^{\infty} |d_k| \left| \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^p} \cos kn \right| \leq \gamma_p.$$

Připomeňme, že koeficienty d_k , $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ jsme definovali v Tvrzení 3.1 o rozvoji funkce $|\sin|$ do Fourierovy řady jako $d_0 = \frac{2}{\pi}$, $d_1 = 0$, a

$$d_k = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^k + 1}{k^2 - 1} \right) \text{ pro } k \geq 2.$$

Důkaz. Ať $p \in [\frac{41}{42}, 1)$ a $N \in \mathbb{N}$ jsou dána. Máme

$$\sum_{k=0}^{\infty} |d_k| \left| \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^p} \cos kn \right| = |d_0| \left| \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^p} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} |d_k| \left| \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^p} \cos kn \right|.$$

První sčítanec odhadneme pomocí Lemmatu 3.5, a druhý pomocí Tvrzení 3.7. Dostáváme tak

$$\sum_{k=0}^{\infty} |d_k| \left| \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^p} \cos kn \right| \leq |d_0| \alpha_p + \sum_{k=1}^{\infty} |d_k| \beta_p k^p,$$

kde α_p je konstanta daná Lemmatem 3.5 a β_p je konstanta daná Tvrzením 3.7.

Díky Tvrzení 3.1 víme, že existuje konstanta $c_1 \in [0, \infty)$ taková, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ jest $|d_k| \leq \frac{c_1}{k^2}$. Platí proto odhad

$$\sum_{k=1}^{\infty} |d_k| \beta_p k^p \leq \beta_p c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2-p}}.$$

Díky známému poznatku, že pro reálný parametr a je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ konvergentní právě tehdy, když $a > 1$, získáváme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2-p}}$ má konečný součet. Stačí tedy položit

$$\gamma_p = \frac{2}{\pi} \alpha_p + \beta_p c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2-p}}.$$

□

Tvrzení 3.9. *Řada reálných čísel*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} |\sin n|$$

je konvergentní.

Důkaz. Zvolme $p \in [\frac{41}{42}, 1)$ libovolně. Položme

$$a_n = \frac{1}{n^{1-p}} \text{ a } b_n = \frac{(-1)^n}{n^p} |\sin n|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Buď $N \in \mathbb{N}$. Díky Tvrzení 3.1 víme, že funkce $|\sin|$ je rovna součtu své Fourierovy řady. Díky Tvrzení 3.8 navíc existuje nezáporná konstanta γ_p taková, že platí

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^p} |\sin n| \right| &= \left| \sum_{n=1}^N \left(\frac{(-1)^n}{n^p} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cos kn \right) \right| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} d_k \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^p} \cos kn \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |d_k| \left| \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^p} \cos k \right| \leq \gamma_p. \end{aligned}$$

Takže řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ má omezenou posloupnost částečných součtů. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a její limita je rovna nule. Dle Dirichletova kritéria (Věta 2.5) je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergentní. \square

4 Závěr

Čtenář si může všimnout, že ve výsledku jsme dokázali o něco silnější tvrzení, než bylo naším cílem, a to konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a} |\sin n|$$

pro každý parametr $a \in (\frac{41}{42}, 1]$ (pro $a > 1$ je konvergence této řady triviální). Z důkazu je zřejmé, že kdybychom měli nějakou lepší variantu Mahlerova odhadu, tj. kdybychom měli k dispozici nerovnost

$$\left| \pi - \frac{k}{q} \right| \geq q^{-m}, \quad k \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

pro nějaké $m \in \mathbb{N}$, $1 < m < 42$, mohli bychom aplikovat totožný důkaz a získat tak konvergenci výše uvedené řady pro parametr a z intervalu $(\frac{m-1}{m}, 1]$. Jistě se nám nepodaří číslo m snížit libovolně. Například dosazením $k = 22$, $q = 7$ získáváme, že pro platnost takového odhadu musí nutně platit $m \geq 4$. Vystává každopádně otázka, pro jaký parametr a je výše uvedená řada ještě konvergentní. Já osobně jsem přesvědčen, že výše uvedená řada je konvergentní pro každé $a \in (0, \infty)$, což by bylo implikováno omezeností částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n |\sin n|$. Tuto domněnku беру jako novou výzvu, na kterou mě navedlo vypracovávání této bakalářské práce, a doufám, že se mi ji podaří v budoucnu potvrdit.

Při řešení příkladu ze zadání této bakalářské práce jsem vycházel z původního vypracování svého vedoucího, doc. Zeleného. Většinu tvrzení z tohoto vypracování jsem převzal, důkazy některých z nich jsem zjednodušil. V obou vypracováních je klíčový Mahlerův odhad (Věta 3.3). Hlavní myšlenka je však rozdílná. Zatímco ve vypracování doc. Zeleného se vyskytovala jistá stejnoměrně konvergentní posloupnost funkcí na metrickém prostoru $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, a konvergence zadané řady plynula z Moore-Osgoodovy věty, mé vypracování využívá elementárnější analýzu a konvergence zadané řady plyne z Dirichletova kritéria.

Literatura

- [1] Jarník V.: Integrální počet II, Academia, (1984).
- [2] Grebenča M.K., Novoselov S.I.: Učebnice matematické analýzy II. díl, Nakladatelství Československé akademie věd, (1953).
- [3] Veselý J.: Základy matematické analýzy První díl, Matfyzpress, (2004).
- [4] Mahler K.: On the approximation of π , Indagationes Math. 15 (1953), 30-42.