Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ondřej Bartoš

Laplaceova rovnice ve zlomkových Sobolevových prostorech

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2015

Rád bych poděkoval vedoucímu práce RNDr. Tomáši Bártovi, Ph.D. za všechny konzultace, za užitečné rady, za rychlost, s jakou opravoval průběžné verze, a také za poskytnutí literatury.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Laplaceova rovnice ve zlomkových Sobolevových prostorech

Autor: Ondřej Bartoš

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Cílem práce je zkoumat Laplaceovu rovnici na jednotkovém kruhu. Na předepsané funkční hodnoty na hranici kruhu lze nahlížet jako na 2π-periodickou funkci a řešení je získáno pomocí Fourierovy metody. Jsou definovány obecné celočíselné Sobolevovy prostory a jejich alternativy výhodné pro popis funkcí na obvodu jednotkového kruhu a uvnitř kruhu. Elementárními metodami je ukázáno, jak si navzájem odpovídají. To samé je provedeno i pro zlomkové Sobolevovy prostory. Hlavním výsledkem je, že funkce z několikátého zlomkového Sobolevova prostoru uvnitř kruhu řešící Laplaceovu rovnici a funkce z prostoru o polovinu menšího na obvodu si odpovídají. Pomocí odvozených výsledků lze pro funkci z konkrétního Sobolevova prostoru na obvodu určit, v jak silné normě řešení Laplaceovy rovnice konverguje k zadané funkci.

Klíčová slova: Zlomkové Sobolevovy prostory, Laplaceova rovnice, Fourierovy řady

Title: Laplace equation in fractional Sobolev spaces

Author: Ondřej Bartoš

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: The goal of this thesis is to study Laplace's equation on a unit disc. The given function values on a unit circle can be interpreted as a 2π-periodic function and the solution can be derived using Fourier method. We introduce general integer Sobolev spaces and their alternatives useful for describing functions on a unit disc and a unit circle. Using elementary methods, we show how they are related to each other. The same results are shown for fractional Sobolev spaces. The main result is that functions from some Sobolev space on a unit disc that solve Laplace's equation correspond to functions from a one half lower Sobolev space on a unit circle. These results can be used to show for a function from some Sobolev space on a unit circle in how strong norm the solution of Laplace's equation converges to the given function.

Keywords: Fractional Sobolev spaces, Laplace equation, Fourier series

Obsah

Úvod

V této práci se budeme zabývat řešením Laplaceovy rovnice. Tu lze uplatnit při popisu různých fyzikálních dějů. Uvažujme otevřenou souvislou množinu v $\mathbb{R}^2$ představující zkoumaný předmět. Pokud známe teplotu předmětu v každém místě na jeho obvodu, můžeme chtít zjistit, jakou má teplotu uvnitř. Teplota je spojitá funkce f, pro kterou se ukazuje, že splňuje rovnici

$$\Delta f(x,y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) (x,y) = 0.$$

Tato rovnice se nazývá *Laplaceova*, diferenciální operátor Δ se nazývá *Laplaceův operátor* a funkce řešící Laplaceovu rovnici se nazývá *harmonická*.

Hledání řešení Laplaceovy rovnice na obecné oblasti není jednoduché, ale v této práci se omezíme na jednotkový kruh. Zadanou okrajovou podmínkou budou funkční hodnoty na obvodu. Ty lze brát jako 2π-periodickou funkci, následně k ní sestrojíme Fourierovu řadu a ověříme, že se rovná původní funkci. Poté z ní uděláme obdobu mocninné řady definovanou na celém jednotkovém kruhu. Tato funkce bude řešit Laplaceovu rovnici. Hlavní otázkou, která nás bude zajímat, bude: Pokud okrajová podmínka měla určitou hladkost, jak dobře konverguje řešení rovnice k původní funkci? K tomuto účelu zavedeme Sobolevovy prostory a větu o stopách.

1. Klíčové pojmy

1.1 Mocninná řada

Tato sekce je motivována podle (Čihák, 2001, kap. 6.2). Budeme uvažovat komplexní funkce jedné komplexní proměnné, ale později je budeme používat jako komplexní funkce dvou reálných proměnných.

Značení. Symbolem $B(x,r)$ označujeme uzavřenou kouli se středem v bodě x o poloměru r, symbolem $U(x,r)$ otevřenou kouli a symbolem $\partial\Omega$ hranici množiny Ω. Suma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n$ se v případě neabsolutní konvergence vyhodnocuje jako $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n + c_{-n})$.

Věta 1 (Cauchyův vzorec pro kruh)**.** *Nechť komplexní funkce f je holomorfní (má komplexní derivaci) na otevřené množině $G \subset \mathbb{C}$, $B(z_0,r) \subset G$, $\varphi(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$, $k \in \mathbb{N}_0$, potom platí*

$$f^k(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$$

a speciálně má f komplexní derivace všech řádů.

Uvažujme funkci $u(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + c_{-n}\overline{z}^n$ a její vyjádření v polárních souřadnicích

$$v(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\varphi} \tag{1}$$

které je 2π-periodické v proměnné φ, c_n jsou komplexní koeficienty. Nejprve potřebujeme zjistit, jak velký je její poloměr konvergence. Ukážeme, že z předpokladu následujícího tvrzení, který budou splňovat všechny později zkoumané funkce, vyplývá poloměr konvergence alespoň 1.

Tvrzení 2. *Nechť $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 |n|^{2k}$ konverguje pro nějaké $k \in \mathbb{R}$, pak je*

$$v_+(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (re^{i\varphi})^n = u_+(z),\ z \in \mathbb{C}$$

mocninnou řadou o poloměru konvergence alespoň 1.

Důkaz. Stačí, aby řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ konvergovala absolutně pro všechna $r \in (0,1)$. Nechť $r \in (0,1)$ je dáno, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \geq n_0$, $|c_n| > 1$ platí $|c_n| r^n \leq |c_n|^2 n^{2k}$, neboť na levé straně je exponenciála a na pravé straně mocninná funkce. Pokud $|c_n| \leq 1$, pak platí $|c_n| r^n \leq r^n$. Obě řady $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 n^{2k}$,

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ konvergují, tedy také řada $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n r^n|$ konverguje.

□

Je známo, že mocninné řady uvnitř poloměru konvergence jsou holomorfní, tedy speciálně třídy C^∞ a tedy lze zaměňovat derivace. Rozložme holomorfní funkci $f(z) = f_1(z) + i f_2(z)$ na reálnou a imaginární složku, označme $\frac{\partial}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial}{\partial y}$) derivaci podle reálné (resp. imaginární části). Funkce f splňuje Cauchy-Riemannovy podmínky $\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x}$. Jednoduchou úpravou

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial f_2}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}$$

zjistíme, že reálná i imaginární část holomorfní funkce splňují Laplaceovu rovnici. Dále si uvědomíme, že $\overline{v_-}(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \overline{c_n} r^{|n|} e^{-in\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_{-n}} (re^{i\varphi})^n = \overline{u_-}(z)$ je opět mocninnou řadou o poloměru konvergence alespoň 1 a také splňuje Laplaceovu rovnici. Z linearity derivací okamžitě plyne, že i celá původní funkce $v(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\varphi} = u(z)$ splňuje Laplaceovu rovnici.

Značení. Pokud je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina a $k \in \mathbb{N}_0$ je přirozené číslo, pak $C^k(\Omega)$ je množina funkcí, jejichž k-tá (klasická) derivace existuje a je spojitá. Pokud $k = 0$ nebo se úplně vynechá, označujeme prostor spojitých funkcí.

Nyní předpokládejme, že $v(1,\varphi)$ je spojitá funkce φ a u je spojitá na $B(0,1)$. Vezměme libovolné řešení $w(z)$ Laplaceovy rovnice na $U(0,1)$ splňující $w \in C^2(U(0,1)) \cap C(B(0,1))$, $w(e^{i\varphi}) = v(1,\varphi)$, pak $(v - w)$ je také řešení Laplaceovy rovnice na $U(0,1)$, které je nulové na $\partial U(0,1)$, tedy podle slabého principu maxima je nulové na celém $B(0,1)$.

Celkově jsme zjistili, že funkce tvaru mocninná řada + komplexně sdružená mocninná řada v $\mathbb{C}$ splňují Laplaceovu rovnici a v jistém smyslu ani jiná řešení neexistují, tuto jednoznačnost později upřesníme. Definiční obor komplexních čísel $\mathbb{C}$ lze uvažovat jako reálný prostor $\mathbb{R}^2$, a proto jsme nalezli řešení Laplaceovy rovnice v reálné rovině.

Tyto funkce lze lineární substitucí $a_n = \frac{c_n + c_{-n}}{2}$, $b_n = \frac{c_n - c_{-n}}{2i}$, $n \in \mathbb{N}$ přepsat do tvaru

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{|n|}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

kde speciálně platí $a_0 = c_0$ a inverze je $c_n = a_n + ib_n$, $c_{-n} = a_n - ib_n$, $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Slabá derivace

Nyní si zavedeme pojem slabé derivace podle (Evans, 2002, kap. 5.2.1). Bude nezbytný pro samotnou definici Sobolevových prostorů.

Značení. Pro otevřenou množinu $U \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ budeme funkce $\phi \in C_C^\infty(U)$ (hladké s kompaktním nosičem v U) nazývat *testovacími funkcemi* v U. V případě, že lze zaměňovat derivace, můžeme je zkráceně zapisovat pomocí multiindexu $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Množinu, která je otevřená a souvislá, nazveme *oblastí*. Funkci definovanou na otevřené množině U, jejíž integrál přes libovolnou kompaktní podmnožinu U konverguje absolutně, nazveme *lokálně integrovatelnou* na U. Prostor lokálně integrovatelných funkcí značíme $L^1_{loc}(U)$. Zkratka s.v. znamená skoro všude, až na množinu míry 0.

Definice 1. *Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ je oblast, $u, v \in L^1_{loc}(U)$, α multiindex, pak v je α-tá slabá derivace u (značíme $v = D^\alpha u$), pokud*

$$\int_U u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \phi dx$$

pro všechny testovací funkce ϕ v U. Pokud množina U není uvedena, rozumí se $U = \mathbb{R}$.

Nejprve si všimneme, že slabá derivace zobecňuje klasicky definovanou derivaci. Pokud totiž funkce má derivaci, lze použít metodu per partes a testovací funkce jsou nulové na hranici ∂U, a proto splňuje vzorec z definice slabé derivace.

Aby vůbec výraz $\int_U v\phi dx$ byl dobře definován, musí nutně platit $v \in L^1_{loc}(U)$.

Příklad. V $\mathbb{R}^n$ uvažujme funkci $f(x) = \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right)$, $|x| < 1$, $f(x) = 0$ jinde. Je to funkce třídy C^∞ a její kompaktní nosič je $B(0,1)$. Tedy je testovací funkcí v $U(-1,3)$, ale ne v $U(0,1)$.

Posloupnost funkcí $f_j(x) = \frac{j^n}{\int_{\mathbb{R}^n} f(t)dt} f(jx)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$ nazveme aproximativní jednotkou. Pomocí konvoluce aproximativní jednotky s funkcemi z prostoru L^1_{loc} lze ukázat, že pokud $\int f\phi = 0$ pro všechny $\phi \in C^\infty_C(U)$, pak $f = 0$ s.v. na U.

Tvrzení 3. *Slabá derivace, pokud existuje, je určena jednoznačně až na množinu míry 0.*

Důkaz. Nechť jsou dány oblast U, na ní funkce u, multiindex α a v_1, v_2 jsou slabé derivace u na U. Pak $v_1 - v_2$ je z linearity slabou derivací nulové funkce na U a tedy z definice musí platit

$$0 = \int_U (u-u) D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U (v_1 - v_2)\phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{U(x_0,r)} (v_1 - v_2)\phi dx$$

pro všechny testovací funkce ϕ. Z toho už plyne, že $v_1 - v_2$ je nulová s.v.

□

Příklad. Uvažujme funkci $f(x)$, $|x|$, $x \in (-1,1)$, ta nemá klasicky definovanou derivaci, ale její první slabou derivací je $\mathrm{sgn}(x)$. Pro libovolnou testovací funkci ϕ totiž platí $\int_{-1}^1 f D\phi = \int_{-1}^0 -xD\phi + \int_0^1 xD\phi = [-x\phi]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 -\phi + [x\phi]_0^1 - \int_0^1 \phi = -\int_{-1}^1 \mathrm{sgn}(x)\phi(x)dx$. Obdobně lze ukázat, že druhou derivací by musela být $2\delta_0$ (Diracova míra v bodě 0), což už není funkce.

1.3 Hilbertovy prostory

V této sekci shrneme vlastnosti Hilbertových prostorů. Uvedená tvrzení lze najít v (Lukeš, 2011, kap. 10) a (Rudin, 1991, kap. 12).

Značení. Nechť $p \in [1,\infty)$. Pro množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ označujeme symbolem $L^p(\Omega)$ množinu funkcí f, pro které integrál $\int_\Omega |f(x)|^p dx$ konverguje. Pro indexovou množinu I označujeme symbolem $l^p(I)$ množinu posloupností $\{c_i\}_{i\in I}$, pro které řada $\sum_{i\in I} |c_i|^p$ konverguje.

Později budeme používat nejčastěji $L^2(0{,}2\pi)$, $l^2(\mathbb{Z})$.

Definice 2. *NLP (normovaný lineární prostor) se nazývá Banachův, pokud je úplný. NLP H je unitární, pokud je na něm definován skalární součin $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a pro normu platí $\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$, $f \in H$. NLP se nazývá Hilbertův, pokud je Banachův a unitární.*

V každém Hilbertově prostoru existuje ortonormální báze $\{e_i; i \in I\} \subset H$, kde I je indexová množina. To z definice znamená, že každý prvek $f \in H$ lze jednoznačně vyjádřit jako $f = \sum_{i\in I} c_i e_i$, $c_i \in \mathbb{C}$. Dále platí Parsevalova rovnost, která říká $\|f\|^2 = \sum_{i\in I} |c_i|^2$. Podle Riesz-Fischerovy věty navíc platí, že zobrazení $H \to l^2(I)$ s předpisem $f \mapsto \{c_i\}_{i\in I}$ je izometrie na.

Nás budou zajímat prostory L^2 se skalárním součinem $\langle f,g\rangle = \int f\overline{g}$. Dále platí, že v prostoru funkcí $L^2(0{,}2\pi)$ se skalárním součinem $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\overline{g}$ je ortonormální množina $\{e^{inx}; n \in \mathbb{N}\}$ bází.

Definice 3. *Nechť $f \in L^1(0{,}2\pi)$ je integrovatelná komplexní funkce, pak $\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$, $n \in \mathbb{Z}$ je Fourierův koeficient funkce f. Nechť $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ je posloupnost, pak $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ je Fourierova řada s Fourierovými koeficienty c_n, pokud je dobře definovanou funkcí. Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$, pak $\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\mathbb{R} f(t)e^{-ixt}dt$ (resp. $F^{-1}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\mathbb{R} f(t)e^{ixt}dt$) je Fourierova transformace (resp. inverzní Fourierova transformace) funkce f.*

Později, až budeme zkoumat jedinou funkci vyjádřenou přímo Fourierovou řadou, budeme její Fourierovy koeficienty pro jednoduchost značit $c_n = \widehat{f}(n)$.

Pokud $f \in L^2(0{,}2\pi)$, pak z Hölderovy nerovnosti speciálně $f \in L^1(0{,}2\pi)$ a je známo (Carlesonova věta), že Fourierova řada s Fourierovými koeficienty $\widehat{f}(n)$ se rovná původní funkci f s.v. Stejně tak pro $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ vrací inverzní Fourierova transformace původní funkci s.v. podle Plancherelovy věty.

Obdobně, jako na konci sekce 1.1, je v prostoru reálných funkcí $L^2(0{,}2\pi)$ se skalárním součinem $\langle f,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} fg$ množina $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin nx, \cos nx; n \in \mathbb{N}\}$ ortonormální bází. Navíc je výpočet Fourierových koeficientů

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} f(x)dx, a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

a sestrojení Fourierovy řady

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$$

izometrií $L^2(0{,}2\pi)$ na $l^2(\mathbb{N}_0,\mathbb{N})$.

2. Sobolevovy prostory

2.1 Celočíselné prostory

Ze sekce 1.3 víme, že pokud máme zadanou funkci $f_1 \in L^2(0{,}2\pi)$ na jednotkové kružnici, můžeme k ní sestrojit Fourierovy koeficienty $\widehat{f_1}(n) = c_n$ a Fourierova řada

$$f(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi} \tag{2}$$

se rovná původní funkci f_1 s.v. Dále podle sekce 1.1 je funkce

$$u(x,y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x+iy)^n + c_{-n}(x-iy)^n \tag{3}$$

řešením Laplaceovy rovnice uvnitř svého poloměru konvergence. V této kapitole pro okrajovou podmínku z daného Sobolevova prostoru zjistíme, ve kterém Sobolevově prostoru je řešení. Díky tomu budeme schopni určit, v jak silné normě řešení konverguje k okrajové podmínce. Nejprve uvedeme obvyklou definici celočíselného Sobolevova prostoru.

Definice 4. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1,\infty)$, pak symbolem $W^{k,p}(\Omega)$ označujeme prostor funkcí*

$$\left\{ f \in L^1_{loc}(\Omega); \exists D^\alpha f, D^\alpha f \in L^p(\Omega), \alpha \text{ multiindex}, |\alpha| \le k \right\}$$

se seminormou $\|f\| = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \int_\Omega |D^\alpha f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$. (Evans, 2002, str. 244)

Definice Sobolevova prostoru se dá různě zobecňovat. Později zavedeme definici pro $k \in [0,\infty)$. Budeme se zabývat pouze případy $p = 2$ a $n = 2$ nebo $n = 1$. Pro $n = 2$ bude $\Omega = U(0,1)$ a pro $n = 1$ zpravidla $\Omega = (0{,}2\pi)$. Prostory $W^{k,2}$ jsou Hilbertovy a značí se H^k.

2.2 Prostory na kružnici

V této sekci zavedeme prostory H^k_F a H^k_{per} obsahující funkce dané rovnicí (2). Navíc ukážeme, že tyto dva prostory se pro celočíselná $k \in \mathbb{N}_0$ shodují a později se ukáže, proč jsou pro popis řešení vhodné právě tyto prostory.

Definice 5. *Nechť $k \in \mathbb{N}_0$, pak H^k_{per} je prostor funkcí*

$$\left\{ f|_{(0,2\pi)}; f \in H^k(0{,}4\pi), f(x) = f(x+2\pi), x \in (0{,}2\pi) \right\}$$

se seminormou $\|f\| = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 + |D^k f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$.

H^k_{per} je tedy podmnožinou $H^k(0,2\pi)$ funkcí takových, že jejich slabá derivace definovaná pomocí integrálů testovacích funkcí existuje i na okolí krajů intervalu. To je přirozený požadavek, protože řešení Laplaceovy rovnice na $U(0,1)$ by mělo mít na celé jednotkové kružnici stejné vlastnosti.

Definice 6. *Nechť $k \in [0,\infty)$, pak H^k_F je prostor funkcí*

$$\left\{ f \in L^1_{loc}(0,2\pi); f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 |n|^{2k} < \infty \right\}$$

s normou $\|f\| = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 (1 + |n|^{2k})\right)^{\frac{1}{2}}$.

Tato definice má smysl i pro neceločíselná k, neceločíselným Sobolevovým prostorům se budeme podrobněji věnovat až později. Prozatím si všimneme, že norma prostoru H^k_F zaručuje, že poloměr konvergence funkce u dané rovnicí (3) je dle tvrzení 2 alespoň 1.

Zkoumané prostory funkcí jsou Hilbertovy a podle Riesz-Fischerovy věty máme izometrii $L^2(0,2\pi)$ na $l^2(\mathbb{N}_0,\mathbb{N})$. Právě definovaná norma v H^k_F bude odpovídat této izometrii v Sobolevových prostorech.

Výše definované funkcionály pro $W^{k,p}(\Omega)$, H^k_F jsou skutečně (semi)normami. V těchto prostorech jsou z definice funkce, jejichž zavedené (semi)normy jsou konečné. $\|af\| = |a|\|f\| \geq 0$ v obou a $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$ ve H^k_F jsou zjevné. Trojúhelníková nerovnost v H^k_F platí pro jednotlivé členy sumy, tedy i pro celou sumu, ve $W^{k,p}(\Omega)$ je obdobně trojúhelníková nerovnost jednotlivých členů sumy Minkovského nerovností.

Dále ve $W^{k,p}(\Omega)$ ze základních vlastností Lebesgueova integrálu plyne, že $\|f - g\| = 0$ právě když $f = g$ s.v., tedy funkce z tohoto prostoru lze rozdělit do tříd ekvivalence ztotožňující funkce, které se rovnají s.v. a ze seminormy se stane norma. V H^k_{per} získáme normu stejným způsobem a podmínka $f(x) = f(x + 2\pi)$ se stane ekvivalentní s $f(x) = f(x + 2\pi)$ s.v.

V prostoru H^k_F máme vztah pro Fourierovy koeficienty $c_n = \widehat{f}(n)$. Podle Carlesonovy věty platí, že $H^0(0,2\pi) = H^0_F = H^0_{per}$. Funkce z prostoru $H^k(0,2\pi)$ (resp. jeho podprostoru H^k_{per}) lze dodefinovat na celé $\mathbb{R}$ jako 2π-periodické funkce. Definice H^k_{per} zaručuje, že prostor obsahuje funkce, jejichž slabé derivace lze definovat i přes okraj intervalu. Dále je dobré si uvědomit, že v definici H^k_{per} jsme mohli zvolit libovolný jiný omezený otevřený interval $(\alpha,\beta) \supsetneq (0,2\pi)$ namísto $(0,4\pi)$ a prostor by obsahoval právě ty samé funkce. V normě prostoru H^k_F se přičítá jednička, aby norma byla schopná rozlišovat funkce lišící se o konstantu.

Příklad. Funkce $f(x) = x$, $x \in (0,2\pi)$ je v $H^k(0,2\pi)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Slabou derivací je $Df = 1$, $D^n f = 0$, $n \geq 2$. Funkce f ale není v H^1_{per}, protože první slabá derivace by musela být $Df = 1 - 2\pi\delta_\pi$, což není funkce.

V následujících dvou tvrzeních ukážeme, že prostory H^k_F a H^k_{per} pro $k \in \mathbb{N}_0$ obsahují stejné funkce a jejich normy jsou si rovny.

Tvrzení 4. *Nechť $k \in \mathbb{N}$, $f \in H^k_{per}$, pak $f \in H^k_F$ a $\widehat{D^m f}(n) = (in)^m \widehat{f}(n)$, $m \leq k$.*

Důkaz. Protože $H^k_{per} \subset L^1(0,2\pi)$, musí všechny integrály tvaru $\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$ konvergovat a tedy Fourierovy koeficienty $\widehat{f}(n)$ existují. Zvolme pevné $n \in \mathbb{N}$ a uvažujme testovací funkci ϕ_1 s nosičem v $(-\pi,3\pi)$, která se rovná e^{inx} na $[0,2\pi]$, a testovací funkci ϕ_2, která se rovná ϕ_1 na $(-\infty,0]$ a na $[0,\infty)$ se rovná ϕ_1 posunutému o -2π. Díky slabé derivaci $D^m f$ na intervalu $(-\pi,3\pi)$, což je ekvivalentní se slabou derivací na $(0,4\pi)$, platí

$$(-1)^m \int_{-\pi}^{3\pi} f(x)\phi_1^{(m)}(x)dx = \int_{-\pi}^{3\pi} D^m f(x)\phi_1(x)dx$$

a

$$(-1)^m \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\phi_2^{(m)}(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} D^m f(x)\phi_2(x)dx.$$

Odečtením integrálů obou testovacích funkcí se opodstatní použití per partes ve vzorci

$$(in)^m\widehat{f}(n) = (in)^m\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}(-1)^m\int_0^{2\pi} f(x)(e^{-inx})^{(m)}dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D^m f(x)e^{-inx}dx = \widehat{D^m f}(n).$$

Konečně $D^k f \in L^2(0,2\pi)$, tedy z Riesz-Fischerovy věty plyne $\|\widehat{D^k f}\|_{l^2(\mathbb{Z})} = \|D^k f\|_{L^2(0,2\pi)} < \infty$, neboli $f \in H^k_F$.

□

Značení. Pokud F, G jsou prostory funkcí, pak $F \leq G$ znamená F je podprostorem G.

Pokud bychom pro $k \in \mathbb{N}_0$ funkci $f \in H^k_{per}$ měřili postupně v normách prostorů H^k_{per} a $H^k(0,2\pi)$, dostaneme s využitím předchozího tvrzení nerovnosti

$$\|f\|^2_{H^k_{per}} = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 + |D^k f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f(n)}|^2(1+n^{2k})$$
$$\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f(n)}|^2 \left(\sum_{j=0}^{k} n^{2j}\right) = \|f\|^2_{H^k(0,2\pi)}$$
$$\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f(n)}|^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{k} n^{2k}\right) \leq (k+1)\|f\|^2_{H^k_{per}}.$$

Normy v obou prostorech jsou si ekvivalentní. Dále budeme používat jednodušší normu z H^k_{per} a právě jsme dokázali, že $H^k_{per} \leq H^k(0,2\pi)$.

Tvrzení 5. *Nechť $k \in [0,\infty)$, $f \in H^k_F$, pak $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(in)^m\widehat{f}(n)e^{inx}$ je pro $m \leq k$ m-tá slabá derivace f na libovolném otevřeném omezeném intervalu, $f \in H^{\lfloor k \rfloor}_{per}$ a v případě $k \in \mathbb{N}_0$ navíc $\|f\|_{H^k_F} = \|f\|_{H^k_{per}}$.*

Důkaz. Vlastnost $f(x) = f(x+2\pi)$ je pro funkce z H^k_F splněna triviálně. Nechť jsou dány $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)e^{inx}$, $m \leq k$, otevřený omezený interval $U \subset \mathbb{R}$ prozatím délky nejvýše 2π a testovací funkce $\phi \in C^\infty_C(U)$. Potřebujeme ověřit, že platí

$$\int_U \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}\phi^{(m)}(x)dx = (-1)^m\int_U \sum_{n=-\infty}^{\infty}(in)^m\widehat{f}(n)e^{inx}\phi(x)dx.$$

Díky tomu, že $\{e^{inx}; n \in \mathbb{Z}\}$ je ortonormální báze pro skalární součin $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f\overline{g}$ pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$, nám stačí, aby platilo

$$\int_U \widehat{f}(n)e^{inx}\phi^{(m)}(x)dx = (-1)^m \int_U (in)^m \widehat{f}(n)e^{inx}\phi(x)dx$$

pro všechna $n \in \mathbb{Z}$. Funkce e^{inx} jsou ale třídy C^∞, tedy speciálně mají m-tou slabou derivaci a proto dokazovaná rovnost platí. Nechť U je otevřený omezený interval libovolné délky, pak testovací funkci $\phi \in C_C^\infty(U)$ lze vyjádřit jako součet konečně mnoha testovacích funkcí, které mají nosič délky nejvýše 2π, pro každou z nich už máme

$$\int_U f(x)\phi^{(m)}(x)dx = (-1)^m \int_U \sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^m \widehat{f}(n)e^{inx}\phi(x)dx$$

ověřeno, tedy to platí i pro jejich součet. Nakonec z Parsevalovy rovnosti získáme

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D^m f|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{D^m f}(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 n^{2m},$$

speciálně je m-tá slabá derivace skutečně v prostoru $L^2(0,2\pi)$ pro $m \le k$. Celkově máme $f \in H_{per}^{\lfloor k\rfloor}$ a $\|f\|_{H_F^k} = \|f\|_{H_{per}^k}$ pro $k \in \mathbb{N}_0$.

$\square$

Celkově jsme ukázali, že ztotožněním funkcí rovnajících se s.v. ze seminorem Sobolevových prostorů získáme normy. Prostory funkcí H_{per}^k, H_F^k pro $k \in \mathbb{N}_0$ jsou totožné. Proto lze nově zavést společný prostor H_{per}^k, $k \in \mathbb{N}_0$ funkcí

$$\left\{ f \in L^1(0,2\pi); \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 n^{2k} < \infty \right\}$$

s normou $\|f\| = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2(1+|n|^{2k})\right)^{\frac{1}{2}}$. Pak zde bude $\{e^{inx}; n \in \mathbb{Z}\}$ ortogonální bází. Z konečné linearity integrálů plyne

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \widehat{f}(0) - \sum_{j=1}^{n}(\widehat{f}(j)e^{ijx} + \widehat{f}(-j)e^{-ijx})\|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} (|\widehat{f}(j)|^2 + |\widehat{f}(-j)|^2)(1+|n|^{2k}) \right)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

kde poslední limita je nulová kvůli konvergenci řady z definice normy f.

Nyní ukážeme, které Sobolevovy prostory na kružnici obsahují pouze spojité funkce.

Tvrzení 6. *Nechť $k \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}_0$, $k > m + \frac{1}{2}$, $f \in H_F^k$, pak $D^m f$ je spojitá funkce a vnoření H_F^k do $C^m(\mathbb{R})$ se supremovou normou je spojité.*

Důkaz. Z předchozího tvrzení víme, že $D^m f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^m c_n e^{inx}$. Nechť $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Pokud platí $|c_n||n|^{2k} \ge |n|^m$, pak $|n|^m|c_n| \le |c_n|^2|n|^{2k}$, jinak nastane

$|c_n||n^{2k}| < |n|^m$, tedy $|n|^m|c_n| < |n|^{2(m-k)}$. Dále platí $2(m-k) < -1$, tedy obě zobecněné řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2|n|^{2k}$, $X = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^{2(m-k)}$ konvergují, tedy také řada $\sum_{\mathbb{Z}} |c_n||n|^m \leq X + |c_0| + \sum_{n=1}^{\infty}(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)n^{2k}$ konverguje. Dále platí $|e^{inx}| = 1$, tedy podle Weierstrassova kritéria řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(in)^m c_n e^{inx}$ konverguje stejnoměrně a platí jednoduchý odhad $\|D^m f\|_{L^\infty} \leq \sum_{\mathbb{Z}} |c_n||n|^m$. Pokud řada spojitých funkcí konverguje lokálně stejnoměrně, pak konverguje ke spojité funkci, proto je $D^m f$ spojitá.
Nechť $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H_F^k$ je posloupnost funkcí konvergující k nule v normě prostoru H_F^k a nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pak existuje $i_0 \in \mathbb{N}$, že pro všechna $i \geq i_0$ platí $\|f_i\|_{H_F^k} < \frac{\varepsilon^2}{4X}$. Obdobně jako výše z $\frac{2X}{\varepsilon}|c_n||n|^{2k} \gtrless |n|^m$ plyne buď $|n|^m|c_n| \leq \frac{2X}{\varepsilon}|c_n|^2|n|^{2k}$, nebo $|n|^m|c_n| < \frac{\varepsilon}{2X}|n|^{2(m-k)}$, tedy $\|D^m f_i\|_{L^\infty} < \|f_n\|_{H_F^k}\frac{2X}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2X}X < \varepsilon$. Obdobně i funkce $f_i, Df_i, \ldots, D^{m-1}f_i$ konvergují k nule, tedy funkce f_i konvergují k nule v normě prostoru C^m.

□

Příklad. Nechť $k \in \mathbb{N}_0$. Uvažujme funkci f s Fourierovými koeficienty $\widehat{f}(n) = \frac{1}{(in)^k n \log n}$, $n \geq 2$, $\widehat{f}(n) = 0$ jinak. Pak řada $\sum_{n=2}^{\infty} n^{2k+1}\frac{1}{n^{2k}n^2\log^2 n}$ konverguje, tedy $f \in H_F^{k+\frac{1}{2}}$. Zároveň řada $\sum_{n=2}^{\infty}(in)^k\frac{1}{(in)^k n\log n}$ diverguje, tedy řada pro $D^k f$ nekonverguje v supremové normě, a proto k-tá derivace f není spojitá. Odhad z předchozího tvrzení tedy nelze zlepšit.

Obecně pro omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ s hranicí, která má určitou hladkost, platí, že pokud $k > \frac{n}{2}$ (k dokonce nemusí být celočíselné - definice 8), pak funkce z prostoru $H^k(\Omega)$ leží v prostoru $C(\Omega)$. Toto Sobolevovo vnoření zformulujeme ve větě 16.

2.3 Prostory uvnitř kruhu

V této sekci ukážeme, ve kterém celočíselném Sobolevově prostoru je řešení u dané rovnicí (3) nalezené Fourierovou metodou. Dále ukážeme, že řešení v k-tém prostoru ($k \in \mathbb{N}$) uvnitř kruhu je v $(k-\frac{1}{2})$-tém prostoru na kružnici, což odpovídá známé větě o stopách. Budeme uvažovat normu funkce $u(x,y)$ ve dvoudimenzionálním celočíselném prostoru $H^k(U(0,1))$, $k \in \mathbb{N}_0$, která je z definice rovna

$$\|u\|_{H^k(U(0,1))} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k}\int_{U(0,1)}|D^\alpha u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pro usnadnění si zavedeme další pomocný prostor H_U^k tak, aby měl smysl i pro neceločíselná k.

Definice 7. *Nechť $k \in [0,\infty)$, pak H_U^k je prostor funkcí u daných rovnicí* (3) *definovaných na $U(0,1)$ a splňujících $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2|n|^{2k} < \infty$. Jejich normu definujeme jako $\|u\| = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2(1+|n|^{2k})\right)^{\frac{1}{2}}$.*

Prostor H_F^k obsahuje funkce f tvaru (2) se stejnou normou. Z této definice okamžitě plyne, že prostory H_F^k a H_U^k jsou izometrické. Funkce z prostoru H_U^k řeší Laplaceovu rovnici na $U(0,1)$.

Tvrzení 7. *Nechť $k \in \mathbb{N}$, u je daná rovnicí (3). Pak $u \in H^k(U(0,1))$ právě když $u \in H_U^{k-\frac{1}{2}}$ a navíc existují konstanty $0 < K_1 < K_2$ závislé pouze na k, že*

$$K_1 \|u\|_{H_U^{k-\frac{1}{2}}} \leq \|u\|_{H^k(U(0,1))} \leq K_2 \|u\|_{H_U^{k-\frac{1}{2}}}.$$

Celkově je prostor $H_U^{k-\frac{1}{2}}$ izomorfně vnořen do $H^k(U(0,1))$.

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ je norma $u \in H_U^{k-\frac{1}{2}}$ rovna $\|u\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2(1 + |n|^{2k-1})$. V $U(0,1)$ se skalárním součinem $\langle f,g\rangle = \int_{U(0,1)} f\overline{g}$ jsou funkce $\{e_n(x,y) = (x + iy)^n, e_{-n} = (x-iy)^n; n \in \mathbb{N}_0\}$ ortogonální, neboť větou o substituci se převedou na funkce proměnných r,φ, platí $\langle e_n,e_m\rangle = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{|n|+|m|+1} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi dr$ a integrál přes φ bude nulový pro $n \neq m$. Jejich norma je $\|e_{\pm n}\|^2 = 2\pi \int_0^1 r^{2|n|+1} = \frac{\pi}{|n|+1}$, jejich derivace (tedy i slabé derivace) jsou díky jednoduchým vzorcům pro derivování komplexní funkce z^n a Cauchy-Riemannovým podmínkám rovny $\frac{\partial e_n}{\partial x} = ne_{n-1}$, $\frac{\partial e_n}{\partial y} = ine_{n-1}$ pro kladná $n \in \mathbb{Z}^+$ a $\frac{\partial e_n}{\partial x} = |n|e_{n+1}$, $\frac{\partial e_n}{\partial y} = -i|n|e_{n+1}$ pro záporná $n \in \mathbb{Z}^-$. Opakovaným derivováním zjistíme, že pro $n \geq \alpha_1 + \alpha_2$ platí

$$D^{(\alpha_1,\alpha_2)} e_n = \prod_{j=0}^{\alpha_1+\alpha_2-1} (n-j) i^{\alpha_2} e_{(n-\alpha_1-\alpha_2)},$$

pro $n \leq -\alpha_1 - \alpha_2$ platí

$$D^{(\alpha_1,\alpha_2)} e_n = \prod_{j=0}^{\alpha_1+\alpha_2-1} (|n|-j) i^{-\alpha_2} e_{-(|n|-\alpha_1-\alpha_2)}$$

a pro $|n| < \alpha_1 + \alpha_2$ platí $D^{(\alpha_1,\alpha_2)} e_n = 0$. To můžeme celkově shrnout do vzorce

$$D^{(\alpha_1,\alpha_2)} e_n = \prod_{j=0}^{\alpha_1+\alpha_2-1} (|n|-j) i^{\alpha_2 \operatorname{sgn}(n)} e_{(|n|-\alpha_1-\alpha_2)\operatorname{sgn}(n)} \tag{4}$$

platného pro všechna $n \in \mathbb{Z}$, neboť pro $|n| < \alpha_1 + \alpha_2$ je součin nulový. Dále pro prázdný součin definujeme $\prod_{j=0}^{-1} \cdots = 1$. Uvnitř $U(0,1)$ je funkce u třídy C^∞ a je vyjádřena absolutně konvergentní řadou, proto můžeme vyměnit sumu a derivaci a dále můžeme použít Parsevalovu rovnost. Norma u měřená v prostoru $H^k(U(0,1))$ je rovna

$$\|u\|^2_{H^k(U(0,1))} = \sum_{\alpha_1=0}^{k} \sum_{\alpha_2=0}^{k-\alpha_1} \int_{U(0,1)} |D^{(\alpha_1,\alpha_2)} u|^2 dx$$

$$= \sum_{\alpha_1=0}^{k} \sum_{\alpha_2=0}^{k-\alpha_1} \int_{U(0,1)} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \prod_{j=0}^{\alpha_1+\alpha_2-1} (|n|-j) i^{\alpha_2 \operatorname{sgn}(n)} e_{(|n|-\alpha_1-\alpha_2)\operatorname{sgn}(n)} \right|^2 dx$$

$$= \sum_{\alpha_1=0}^{k} \sum_{\alpha_2=0}^{k-\alpha_1} \int_{U(0,1)} \left| \sum_{|n| \geq \alpha_1+\alpha_2} c_n \prod_{j=0}^{\alpha_1+\alpha_2-1} (|n|-j) i^{\alpha_2 \operatorname{sgn}(n)} e_{(|n|-\alpha_1-\alpha_2)\operatorname{sgn}(n)} \right|^2 dx$$

$$= \sum_{\alpha_1=0}^{k} \sum_{\alpha_2=0}^{k-\alpha_1} \sum_{|n|\geq \alpha_1+\alpha_2} \left| c_n \prod_{j=0}^{\alpha_1+\alpha_2-1} (|n|-j) i^{\alpha_2 \operatorname{sgn}(n)} \right|^2 \frac{\pi}{|n|-\alpha_1-\alpha_2+1}$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{k} (\alpha+1) \sum_{|n|\geq\alpha} |c_n|^2 \left(\prod_{j=0}^{\alpha-1} (|n|-j) \right)^2 \frac{\pi}{|n|-\alpha+1}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \left(\sum_{\alpha=0}^{\min(k,|n|)} (\alpha+1) \left(\prod_{j=0}^{\alpha-1} (|n|-j) \right)^2 \frac{\pi}{|n|-\alpha+1} \right)$$

U členů sumy $|c_n|^2$ jsou nenulové polynomy n stupně $0,2,\dots,2k$ vydělené $n+1,n,\dots,n-k+1$. Proto musí existovat konstanty $0 < K_1 < K_2$ závislé pouze na $k \in \mathbb{N}$, že pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ platí

$$K_1(1+|n|^{2k-1}) \leq \sum_{\alpha=0}^{\min(k,|n|)} \frac{\pi(\alpha+1)}{|n|-\alpha+1} \left(\prod_{j=0}^{\alpha-1} (|n|-j) \right)^2 \leq K_2(1+|n|^{2k-1}).$$

Tím jsme zároveň ověřili, že $u \in H^k(U(0,1))$ právě když $u \in H_U^{k-\frac{1}{2}}$ a $H_U^{k-\frac{1}{2}}$ je izomorfně vnořen do $H^k(U(0,1))$.

$\square$

Důsledek 8. *Kdybychom výpočty v důkazu provedli pro $k = 0$, pak bychom získali nerovnost $\frac{\pi}{|n|+1} \leq K_2$, kterou lze zformulovat pomocí norem jako $\|u\|_{H^0(U(0,1))} \leq K_2\|u\|_{H_U^0}$. Tento odhad využijeme při důkazu tvrzení 12.*

Díky izomorfnímu vnoření $H_U^{k-\frac{1}{2}}$ do $H^k(U(0,1))$ můžeme vlastnosti řešení zkoumat pomocí vlastností okrajové podmínky. Z důkazu tvrzení 7 je patrné, že to bude výrazně jednodušší.

2.4 Zlomkové prostory

Už jsme zavedli dva izometrické zlomkové prostory. H_U^k definovaný na kruhu a H_F^k definovaný na kružnici. Nyní uvedeme jinou a obecnější definici zlomkových Sobolevových prostorů. Tato definice se tradičně používá a je pro ni dokázáno mnoho tvrzení, viz Grisvard (2011), Triebel (1983) a Runst a Sickel (1996). Proto budeme chtít ověřit, jak si odpovídá s námi zavedenou definicí vhodnou pro popis jednotkového kruhu.

Definice 8. *Nechť $p \in [1,\infty)$, $k \in (0,\infty) \setminus \mathbb{N}$, $k = m + s$, $m \in \mathbb{N}_0$, $s \in (0,1)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oblast, pak prostor $W^{k,p}(\Omega)$ je množina*

$$\left\{ f \in W^{m,p}(\Omega); \int_{\Omega\times\Omega} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy < \infty, \alpha \text{ multiindex}, |\alpha| = m \right\}$$

s normou $\|f\| = \left(\|f\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega^2} \frac{|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}$.

Sumu $\sum_{|\alpha|=m}\int_{\Omega^2}\frac{|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy$ budeme nazývat *hlavní částí normy.* Stejně jako v případě celočíselných prostorů se používá značení $H^k(\Omega)=W^{k,2}(\Omega)$.

$$\|f\|_{H^k(\Omega)}=\left(\|f\|^2_{H^m(\Omega)}+\sum_{|\alpha|=m}\int_{\Omega^2}\frac{|D^\alpha f(x)-D^\alpha f(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

Nyní můžeme rozšířit definici H^k_{per} i pro neceločíselná k.

Definice 9. *Nechť $k\in(0,\infty)\setminus\mathbb{N}$, pak prostor H^k_{per} obsahuje funkce*

$$\left\{f=f_2|_{(0,2\pi)};f_2\in H^k(0,4\pi),f_2(x)=f_2(x+2\pi)\text{s.v.},x\in(0,2\pi)\right\}$$

se seminormou $\|f\|=\|f_2\|_{H^k(0,4\pi)}$.

Stejně jako pro celočíselná k ztotožníme funkce rovnající se s.v. a ze seminormy se stane norma. Víme, že Sobolevův prostor 2π-periodických funkcí obsahuje ty samé nezávisle na volbě omezeného otevřeného intervalu $(0,4\pi)\supsetneq(0,2\pi)$. Při výpočtu normy se integruje přes $(0,4\pi)^2$, a proto na rozdíl od celočíselných prostorů nemůžeme pomocí samotných integrálů přes $(0,2\pi)^2$, které se sice rovnají integrálům přes $(2\pi,4\pi)^2$, odhadnout integrály přes množinu $(0,2\pi)\times(2\pi,4\pi)$ (resp. $(2\pi,4\pi)\times(0,2\pi)$). Proto zlomkové prostory H^k_{per} používají normu z prostoru $H^k(0,4\pi)$. Tato definice skutečně zobecňuje původní celočíselnou definici. Pro $k\in\mathbb{N}_0$ bychom integrováním přes $(0,4\pi)$ místo $(0,2\pi)$ získali $\sqrt{2}$-krát větší normu. Navíc nyní integrujeme všechny derivace místo původní integrace pouze samotné funkce a její k-té derivace. Obě tyto změny normy nám ale dávají ekvivalentní normu.

Ve všech třech důkazech v této sekci budeme využívat jednoduché identity a nerovnosti goniometrických funkcí:

$$|e^{inx}-1|^2=(1-\cos nx)^2+\sin^2 nx=2(1-\cos nx)=4\sin^2\frac{nx}{2}$$

$$\sin x\le\min(x,1),\ x\ge 0;\ 4\sin^2\frac{nx}{2}\le\min(4,n^2x^2)$$

$$\sin x\ge\frac{2x}{\pi},\ x\in[0,\frac{\pi}{2}];\ 4\sin^2\frac{nx}{2}\ge\frac{4n^2x^2}{\pi^2},\ x\in[0,\frac{\pi}{n}]$$

Nejprve ukážeme, že námi definované prostory H^k_F a H^k_{per} na kružnici jsou izomorfní (normy už se nebudou rovnat pro neceločíselná k) a že jsou podprostory obvyklých zlomkových prostorů $H^k(0,2\pi)$.

Tvrzení 9. *Nechť $k\in(0,\infty)\setminus\mathbb{N}$, pak H^k_F je podprostor $H^k(0,2\pi)$ a vnoření je spojité.*

Důkaz. Nechť $k=m+s$, kde $m\in\mathbb{N}_0$, $s\in(0,1)$ a $f\in H^k_F$ je dané rovnicí (2). V sekci 2.2 jsme dokázali odhady $\|f\|_{H^m(0,2\pi)}\le K_1\|f\|_{H^m_F}\le K_1\|f\|_{H^k_F}$. Zbývá nám odhad hlavní části normy. Pro ni platí následující (ne)rovnosti:

$$\int_{(0,2\pi)^2}\frac{|D^m f(x)-D^m f(y)|^2}{|x-y|^{1+2s}}dxdy=\int_{(0,2\pi)^2}\frac{|\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(in)^m(e^{inx}-e^{iny})|^2}{|x-y|^{1+2s}}dxdy$$

(použijeme substituci $x := x - y$ a nerovnost $|x| \geq \min(|x|,|2\pi - x|)$)

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{|\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (in)^m (e^{inx}-1)e^{iny}|^2}{|x|^{1+2s}} dydx$$

(nyní je y na jediném místě, můžeme využít ortogonalitu báze $\{e^{iny}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ a Parsevalovu rovnost)

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^m c_n (e^{inx}-1)|^2}{|x|^{1+2s}} dx = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^m c_n|^2 4\sin^2 \frac{nx}{2}}{|x|^{1+2s}} dx$$

$$\leq 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^m c_n|^2 \min(n^2x^2,4)}{|x|^{1+2s}} dx$$

(záměna sumy a integrálu nezáporných funkcí podle Leviho věty)

$$= 4\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} n^{2m}|c_n|^2 \left(\int_0^{\frac{2}{|n|}} n^2 x^{1-2s} dx + \int_{\frac{2}{|n|}}^{\pi} 4x^{-1-2s} dx \right)$$

$$= 4\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} n^{2m}|c_n|^2 \left(|n|^{2s} \frac{2^{1-2s}}{s(1-s)} - \frac{2}{s}\pi^{-2s} \right) \leq K_2 \|f\|_{H_F^k}$$

Tedy existuje konstanta $K > 0$ závislá pouze na $k \in (0,\infty) \setminus \mathbb{N}$, že $\|f\|_{H^k(0,2\pi)} \leq K\|f\|_{H_F^k}$, neboli $Id : H_F^k \to H^k(0,2\pi)$ je spojité vnoření.

□

Důsledek 10. *Prostor H_F^k je spojitě vnořen do H_{per}^k.*

Důkaz. Předpokládejme, že funkce f je 2π-periodicky rozšířena i za interval $(0,2\pi)$. Zcela stejný výsledek se stejnou konstantou K bychom získali integrováním přes množinu $(\pi,3\pi)^2$. Dále platí nerovnost

$$\int_{(0,\pi)\times(2\pi,3\pi)} \frac{|D^m f(x) - D^m f(y)|^2}{|x-y|^{1+2s}} dxdy \leq \int_{(0,\pi)^2} \frac{|D^m f(x) - D^m f(y)|^2}{|x-y|^{1+2s}} dxdy,$$

neboť jsme pouze zmenšili jmenovatel. Kombinací těchto výsledků dostáváme pro novou konstantu odhad $\|f\|_{H^k(0,3\pi)} \leq K_1\|f\|_{H_F^k}$. Dalším zopakováním bychom konečně získali odhad $\|f\|_{H^k(0,4\pi)} \leq K\|f\|_{H_F^k}$, tedy prostor H_F^k je spojitě vnořen do prostoru H_{per}^k.

□

Z tohoto důsledku je také dobře vidět, proč by prostor H_{per}^k obsahoval stejné funkce i při volbě libovolného jiného omezeného otevřeného intervalu $(\alpha,\beta) \supsetneq (0,2\pi)$. Úpravou výpočtů z posledního důkazu ukážeme i opačné vnoření.

Tvrzení 11. *Pro $k \in (0,\infty) \setminus \mathbb{N}_0$ je prostor H_{per}^k spojitě vnořen do H_F^k.*

Důkaz. Nechť $f \in H_{per}^k$, f_2 je rozšíření na $(0,4\pi)$. Podle Carlesonovy věty se f_2 rovná s.v. svojí Fourierově řadě, tedy bez újmy na obecnosti jsou f, f_2 dány rovnicí (2). Uvažujme hlavní část normy $\|f\|_{H_{per}^k}$. Nejprve si musíme uvědomit, že konstantní člen funkce f se na hlavním členu normy nijak neprojeví, ale platí například jednoduchý odhad $|c_0| \leq \|f\|_{H^k_{per}}$, takže při horních odhadech normy $\|f\|^2_{H^k_F} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2(1+|n|^{2k})$ nám bude stačit odhadnout členy sumy pro $n \neq 0$. Přímými výpočty dostáváme:

$$\|f\|^2_{H^k_{per}} \geq \int_{(0,4\pi)^2} \frac{|D^m f_2(x) - D^m f_2(y)|^2}{|x-y|^{1+2s}} dxdy$$

$$= \int_{(0,4\pi)^2} \frac{|\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(in)^m(e^{inx} - e^{iny})|^2}{|x-y|^{1+2s}} dxdy$$

(zmenšíme integrační obor na $y \in (\pi,3\pi)$, $x \in (y-\pi,y+\pi)$ a použijeme substituci $x := x - y$)

$$\geq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\pi}^{3\pi} \frac{|\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(in)^m(e^{inx} - 1)e^{iny}|^2}{|x|^{1+2s}} dydx$$

(upravujeme stejně, jako v důkazu předchozího tvrzení, použijeme nerovnost $|e^{inx} - 1|^2 \geq \frac{4n^2x^2}{\pi^2}$, $x \in [0,\frac{\pi}{n}]$ a zmenšíme integrační obor)

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^m c_n|^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|e^{inx} - 1|^2}{|x|^{1+2s}} dx \geq 4\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} n^{2m}|c_n|^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{|n|}} \frac{4n^2x^2}{\pi^2 x^{1+2s}} dx \right)$$

$$= \frac{16}{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} n^{2m}|c_n|^2 \frac{n^2}{2-2s} \frac{\pi^{2-2s}}{|n|^{2-2s}} = \frac{8\pi^{1-2s}}{1-s} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |c_n|^2|n|^{2k}$$

Tím jsme ověřili, že $\|f\|_{H^k_F} \leq K\|f\|_{H^k_{per}}$ pro vhodnou konstantu K závislou pouze na k a tedy je H^k_{per} spojitě vnořen do H^k_F.

□

Tímto jsme dokázali, že prostory H^k_F a H^k_{per} jsou izomorfní i v případě neceločíselných k. Zbývá nám dokázat poslední neceločíselná varianta předchozích tvrzení a to sice vnoření $H_U^{k-\frac{1}{2}}$ do $H^k(U(0,1))$.

Tvrzení 12. *Nechť $k \in [\frac{1}{2},\infty) \setminus \mathbb{N}$ a funkce u je dána rovnicí (3). Pak $u \in H_U^{k-\frac{1}{2}}$, právě když $u \in H^k(U(0,1))$ a navíc v tom případě existují konstanty $0 < K_1 < K_2$ závislé pouze na k, že $K_1\|u\|_{H^k(U(0,1))} \leq \|u\|_{H_U^{k-\frac{1}{2}}} \leq K_2\|u\|_{H^k(U(0,1))}$. Celkově je prostor $H_U^{k-\frac{1}{2}}$ izomorfně vnořen do prostoru $H^k(U(0,1))$.*

Důkaz. Nechť $k = m + s$, kde $m \in \mathbb{N}_0$, $s \in (0,1)$. Norma u je z definice

$$\|u\|_{H^k(U(0,1))} = \left(\|u\|^2_{H^m(U(0,1))} + \sum_{|\alpha|=m} \int_{U(0,1)^2} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

V tomto důkazu nazveme dvě nezáporné funkce f_1, f_2 *srovnatelné*, pokud existují konstanty $0 < K_1 < K_2$ takové, že $K_1 f_1 \leq f_2 \leq K_2 f_1$ na celém definičním oboru funkcí f_1, f_2. Na prostorech funkcí se výraz být srovnatelný shoduje s ekvivalencí norem. V tomto důkazu budeme nejčastěji srovnávat různě předepsané řady, do kterých se dosadí posloupnosti koeficientů. Dále budeme srovnávat různé funkce proměnné n.

Z tvrzení 7 už pro $m \geq 1$ víme, že $\|u\|_{H_U^{m-\frac{1}{2}}}$ a $\|u\|_{H^m(U(0,1))}$ jsou srovnatelné a z jeho důsledku navíc pro $m = 0$ máme horní odhad $K_2\|u\|_{H_U^0}$. To znamená, že nám stačí ukázat, že hlavní část normy u v $H^k(U(0,1))$ je srovnatelná s $\|u\|^2_{H_F^k}$. Dále si uvědomíme, že konečné sumy $\sum_{|n|\leq m} |c_n|^2(1 + |n|^{k_1})$ a $\sum_{|n|\leq m} |c_n|^2(1 + |n|^{k_2})$ jsou srovnatelné pro libovolné exponenty k_1, $k_2 > 0$, tedy první členy $|n| \leq m$ jsou už zahrnuty ve vyřešené celočíselné normě z $H^m(U(0,1))$.

Pokud se nám podaří dokázat, že pro všechny multiindexy $|\alpha| = m$ je $\int_{U(0,1)^2} \frac{|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy$ srovnatelné s $\sum_{n\in\mathbb{Z},\, |n|>m} |c_n|^2|n|^{2k-1}$, bude tvrzení dokázané.

Složka $D^{(m,0)}u$ z normy v $H^k(U(0,1))$ bude rovna:

$$\int_{U(0,1)^2} \frac{|D^{(m,0)}u(x_1,y_1) - D^{(m,0)}u(x_2,y_2)|^2}{\left(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2\right)^{1+s}} dx_1dy_1dx_2dy_2 \qquad (\star)$$

Vzorec pro m-tou derivaci je daný rovnicí (4) z tvrzení 7, použijeme polární substituci a rozepíšeme do sum

$$v^{(m,0)}(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{m-1} (|n| - j)\right) c_n r^{|n|-m} e^{i\varphi(|n|-m)\mathrm{sgn}(n)} \qquad (6)$$

$$\int_{(0,1)^2\times(-\pi,\pi)^2} \frac{|v^{(m,0)}(r_1,\varphi_1) - v^{(m,0)}(r_2,\varphi_2)|^2 r_1r_2}{|r_1e^{i\varphi_1} - r_2e^{i\varphi_2}|^{2+2s}} d\varphi_1d\varphi_2dr_1dr_2 \qquad (\star)$$

Ve výrazu $(\star)$ použijeme substitucí $\psi := \varphi_1$, $\varphi := \varphi_2 - \varphi_1$, využijeme 2π-periodicitu komplexní exponenciály, převedeme na společnou sumu díky absolutní konvergenci uvnitř jednotkového kruhu a označíme $n' = (|n| - m)\mathrm{sgn}(n)$, $n^{(m)} = \prod_{j=0}^{m-1}(|n| - j)$. Dostaneme, že $(\star)$ je roven

$$\int_{(0,1)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{(m)} c_n e^{in'\psi} \left(r_1^{|n|-m} - r_2^{|n|-m} e^{in'\varphi}\right)\right|^2 r_1r_2}{|e^{i\psi}(r_1 - r_2e^{i\varphi})|^{2+2s}} d\psi d\varphi dr_1dr_2$$

Pokud $n_1' = n_2'$, $n_1 \neq n_2$, pak alespoň jedno z $|n_1|$, $|n_2|$ je ostře menší než m, předpokládejme, že $|n_1| < m$. Pak bude $n_1^{(m)} = 0$, neboli u každé mocniny $e^{in'\psi}$ se objeví nejvýše jeden nenulový koeficient $n^{(m)}$. Zrušením $|e^{i\psi}|$ ve jmenovateli a využitím ortogonality $\{e^{in\psi}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ v sumě v čitateli proto dostaneme, že předchozí výraz je roven

$$\int_{(0,1)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\pi r_1r_2 \sum_{|n|\geq m} \left(n^{(m)}\right)^2 |c_n|^2 \left|r_1^{|n|-m} - r_2^{|n|-m} e^{in'\varphi}\right|^2}{|r_1 - r_2e^{i\varphi}|^{2+2s}} d\varphi dr_1dr_2$$

Ze vzorce (4) plyne, že kdybychom za původní multiindex místo $\alpha = (m,0)$ zvolili libovolný jiný $|\alpha| = m$, jednotlivé členy sumy v rovnici (6) by se pouze vynásobily nějakou mocninou komplexní jednotky i. Další úpravy by ale proběhly zcela stejně a po využití ortogonality $\{e^{in\psi}\}$ bychom došli ke stejnému trojnému integrálu. Využitím sudosti vzhledem k φ, nahlédnutím, že na částech, kde $r_1 < r_2$ a kde

$r_1 > r_2$ se naintegruje stejná hodnota a výměnou integrálů a sumy nezáporných funkcí díky Leviho větě dostáváme

$$8\pi \sum_{|n|\geq m} \int_0^1 \int_0^{r_2} \int_0^{\pi} \frac{r_1 r_2 \left(n^{(m)}\right)^2 |c_n|^2 \left| r_1^{|n|-m} - r_2^{|n|-m} e^{in'\varphi} \right|^2}{|r_1 - r_2 e^{i\varphi}|^{2+2s}} d\varphi dr_1 dr_2$$

Substitucí $r_2 := r$, $r_1 := xr$, $x \in (0,1)$, $\frac{\partial r_1}{\partial x} = r$ získáme

$$8\pi \sum_{|n|\geq m} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\pi} \frac{xr^2 \left(n^{(m)}\right)^2 |c_n|^2 r^{|2n|-2m} \left| x^{|n|-m} - e^{in'\varphi} \right|^2 r}{r^{2+2s} |x - e^{i\varphi}|^{2+2s}} d\varphi dx dr$$

Integrací přes r dostaneme

$$\sum_{|n|\geq m} \frac{4\pi \left(n^{(m)}\right)^2 |c_n|^2}{1 + |n| - m - s} \int_0^1 \int_0^{\pi} \frac{x|x^{|n|-m} - e^{in'\varphi}|^2}{|x - e^{i\varphi}|^{2+2s}} d\varphi dx$$

Pro $|n| = m$ je integrál nulový. Pro $|n| > m$ lze zlomek $\frac{4\pi(n^{(m)})^2}{1+|n|-k}$ srovnat s $|n|^{2m-1}$, proto nám už stačí ukázat, že dvojný vnitřní integrál je srovnatelný s $|n|^{2s}$. Komplexní sdružení nemá vliv na absolutní hodnotu, takže můžeme předpokládat, že $n' = (|n| - m)\mathrm{sgn}(n) = |n| - m$. Dále jsou $|n|^{2s}$ a $(|n| - m)^{2s}$ srovnatelné, posuneme indexy v sumě $n \mapsto n - m\,\mathrm{sgn}(n)$ a zbývá nám dokázat, že pro $n \neq 0$ je $|n|^{2s}$ srovnatelné s

$$I = \int_0^1 \int_0^{\pi} \frac{x|x^{|n|} - e^{in\varphi}|^2}{|x - e^{i\varphi}|^{2+2s}} d\varphi dx.$$

Nejprve uděláme horní odhad interálu I a pro přehlednost uvažujme $n \geq 0$. Pro $n = 1$ a $n = 2$ integrál konverguje, tedy bez újmy na obecnosti $n \geq 3$. Budeme používat blíže nespecifikovanou kladnou konstantu K závislou pouze na s, která se v jednotlivých odhadech obecně bude lišit. Následující odhady platné na celém integračním oboru I jsou odvozeny v lemmatu 13 za tímto důkazem:

$$|x - e^{i\varphi}|^2 \geq K \max\left((1-x)^2, x\varphi^2\right) \tag{7}$$

$$|x^n - e^{in\varphi}|^2 \leq (1 - x^n)^2 + x^n \min(n^2\varphi^2, 4) \tag{8}$$

Funkce minima a maxima mají zlomy v bodech $\varphi = \frac{2}{n}, x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$ a pořadí těchto bodů se mění pro $x_0 > 0$, pro který $\frac{2}{n} = x_0^{-\frac{1}{2}} - x_0^{\frac{1}{2}}$. Označme $x_0 = 1 - h(n)$, pak $h(n)$ je dle lemmatu 13 srovnatelné s $\frac{1}{n}$ a navíc $h(n) < \frac{1}{2}$ pro $n \geq 3$.

Díky tomu platí

$$I \leq K \int_0^1 \int_0^{\pi} \frac{x\left((1 - x^n)^2 + x^n \min(n^2\varphi^2, 4)\right)}{\left(\max\left((1-x)^2, x\varphi^2\right)\right)^{1+s}} d\varphi dx.$$

Při všech horních odhadech kromě I_2 nám bude stačit nahradit první x v čitateli jedničkou. Dále budeme $\sqrt{x}$ odhadovat konstantou s využitím $h(n) < \frac{1}{2}$. Dále v závislosti na exponentu $r < 0$, $r \neq -1$ platí odhady

$$\int_a^b x^r dx \leq K b^{r+1}, r \in (-1,0), 0 \leq a < b < \infty$$

$$\int_a^b x^r dx \le K a^{r+1}, r \in (-\infty, -1), 0 < a < b \le \infty$$

V případech $x < 1 - h(n)$ a $x > 1 - h(n) \wedge \varphi > \frac{2}{n}$ použijeme $|x^n - e^{in\varphi}|^2 \le 4$. Integrály pro horní odhad vychází:

$$I_1 = \int_0^{1-h(n)} \int_0^{\frac{1-x}{\sqrt{x}}} \frac{d\varphi dx}{(1-x)^{2+2s}} = \int_0^{1-h(n)} \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)^{1+2s}}$$

$$I_1 \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2^{1+2s}dx}{\sqrt{x}} + \int_{\frac{1}{2}}^{1-h(n)} \frac{dx}{\sqrt{2}(1-x)^{1+2s}} \le K \int_{h(n)}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^{1+2s}} \le Kn^{2s}$$

$$I_2 = \int_0^{1-h(n)} \int_{\frac{1-x}{\sqrt{x}}}^{\pi} \frac{x d\varphi dx}{x^{1+s}\varphi^{2+2s}} \le K \int_0^{1-h(n)} \frac{dx}{x^{-1+1+s-\frac{1}{2}-s}(1-x)^{1+2s}} \le Kn^{2s}$$

$$I_3 = \int_{1-h(n)}^{1} \int_{\frac{2}{n}}^{\pi} \frac{d\varphi dx}{x^{1+s}\varphi^{2+2s}} \le K \frac{2^{1+s}}{n} \int_{\frac{2}{n}}^{\pi} \frac{d\varphi}{\varphi^{2+2s}} \le Kn^{2s}$$

Ve zbývajících případech čitatel odhadneme pomocí $(1-x^n)^2 + n^2\varphi^2$.

$$I_4 = \int_{1-h(n)}^{1} \int_0^{\frac{1-x}{\sqrt{x}}} \frac{(1-x^n)^2 + n^2\varphi^2}{(1-x)^{2+2s}} d\varphi dx \le K \int_{1-h(n)}^{1} \frac{(1-x^n)^2 + (1-x)^2 n^2}{(1-x)^{1+2s}} dx$$

Nyní použijeme $(1-x^n) = (1-x)\sum_{j=0}^{n-1} x^j \le (1-x)n$.

$$I_4 \le Kn^2 \int_0^{h(n)} x^{1-2s} dx \le Kn^{2s}$$

$$I_5 = \int_{1-h(n)}^{1} \int_{\frac{1-x}{\sqrt{x}}}^{\frac{2}{n}} \frac{(1-x^n)^2 + n^2\varphi^2}{x^{1+s}\varphi^{2+2s}} d\varphi dx$$

$$I_5 \le K \int_{1-h(n)}^{1} \left(\frac{(1-x^n)^2}{(1-x)^{1+2s}} + n^2 g(s,x) \right) dx$$

Kde je

$$g(s,x) = \int_{\frac{1-x}{\sqrt{x}}}^{\frac{2}{n}} \varphi^{-2s} dt.$$

Rozborem případů dokončíme odhad I_5 a tedy také celý horní odhad I

$$s < \frac{1}{2}: \ g(s,x) \le Kn^{2s-1}, \ \int_{1-h(n)}^{1} n^{2+2s-1} dx \le Kn^{2s}$$

$$s > \frac{1}{2}: \ g(s,x) \le Kx^{s-\frac{1}{2}}(1-x)^{1-2s}, \ \int_{1-h(n)}^{1} n^2(1-x)^{1-2s} dx \le Kn^{2s}$$

$$s = \frac{1}{2}: \ g(s,x) = \log \frac{\frac{2\sqrt{x}}{n}}{1-x}, \ \int_0^{h(n)} n^2 \log \frac{2\sqrt{1-x}}{nx} dx \le K \int_0^{h(n)} n^2 \log \frac{2}{nx} dx =$$

$$= K2n \int_0^{\frac{nh(n)}{2}} -\log y dy \le Kn, I_5 \le Kn^{2s}$$

Pro dolní odhad I a $n \geq 1$ integrujeme nezápornou funkci a integrál konverguje. Tedy lze při odhadování vynechat konečně mnoho $n \in \mathbb{N}$. Bez újmy na obecnosti $n \geq 4$, všechny až na jeden integrál zdola odhadneme nulou. Bude nám stačit integrál na množině, kde $x > 1 - \frac{\pi}{n}$ a $\varphi < 1 - x$:

$$I = \int_0^1 \int_0^\pi \frac{x|x^n - e^{in\varphi}|^2}{|x - e^{i\varphi}|^{2+2s}} d\varphi dx \geq K \int_{1-\frac{\pi}{n}}^1 \int_0^{1-x} \frac{x\frac{4}{\pi^2}x^n n^2 \varphi^2}{(1-x)^{2+2s}} d\varphi dx$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\pi}{n}\right)^{n+1} = e^{-\pi},$$

lze pro dostatečně velká n hodnotu x^{n+1} zdola odhadnout pevnou konstantou a získáme odhad

$$I \geq Kn^2 \int_{1-\frac{\pi}{n}}^1 (1-x)^{1-2s} dx \geq Kn^{2s}.$$

Tedy funkce tvaru $u(x,y) = c_0 + \sum_{n=1}^\infty c_n(x+iy)^n + c_{-n}(x-iy)^n$ jsou v prostoru $H_U^{k-\frac{1}{2}}$, právě když jsou v prostoru $H^k(U(0,1))$ a vnoření je izomorfismus.

□

Lemma 13. *Pro $x \in [0,1]$, $\varphi \in [0,\pi]$ platí nerovnosti (7) a (8). Nechť kladné řešení rovnice $\frac{2}{n} = x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$ je $1 - h(n)$. Pak $h(n)$ je srovnatelé s $\frac{1}{n}$ a pro $n \geq 3$ je $h(n) < \frac{1}{2}$.*

Důkaz. Pro $x \in [0,1]$ a $\varphi \in [0,\frac{\pi}{2}]$ platí

$$|x - e^{i\varphi}|^2 = (x - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = (1-x)^2 + 2x(1-\cos\varphi) \geq (1-x)^2 + \frac{4x\varphi^2}{\pi^2}$$

$$|x - e^{i\varphi}|^2 \geq K \max\left((1-x)^2, x\varphi^2\right)$$

Dále pro $x \in [0,1]$ a $\varphi \in [\frac{\pi}{2},\pi]$ platí

$$|x - e^{i\varphi}|^2 \geq 1 \geq K \max\left((1-x)^2, x\varphi^2\right)$$

Pro $x \geq 0$ a $\varphi \in \mathbb{R}$ platí

$$|x^n - e^{in\varphi}|^2 = (1-x^n)^2 + 2x^n(1-\cos n\varphi) \leq (1-x^n)^2 + x^n \min(4, n^2\varphi^2)$$

Tím jsme ověřili nerovnosti (7) a (8). Body zlomu minima a maxima jsou $\varphi = \frac{2}{n}$ a $\varphi = \frac{1-x}{\sqrt{x}}$ a pořadí těchto bodů se mění v kladném kořenu kvadratické rovnice

$$x + \frac{2\sqrt{x}}{n} - 1 = 0, \sqrt{x} = \frac{-\frac{2}{n} + \sqrt{\frac{4}{n^2} + 4}}{2} = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - \frac{1}{n} = \sqrt{1 - h(n)}$$

$$h(n) = 1 - \frac{(\sqrt{n^2+1} - 1)^2}{n^2} = \frac{2\sqrt{n^2+1} - 2}{n^2}$$

a z tohoto vyjádření $h(n)$ okamžitě plyne, že je srovnatelné s $\frac{1}{n}$. Dále lze pro $n = 3, 4$ přímým výpočtem ověřit, že $h(n) < \frac{1}{2}$. Pro $n \geq 5$ platí odhad

$$h(n) < \frac{2\sqrt{n^2+1}}{n^2} < \frac{2(n+1)}{n^2} < \frac{1}{2}.$$

□

Tímto jsme ověřili, že nalezené řešení Laplaceovy rovnice u dané rovnicí (3) je prvek zlomkového Sobolevova prostoru definovaného podle Grisvard (2011), Triebel (1983) a Runst a Sickel (1996).

2.5 Obecná tvrzení

Na konec ještě bez důkazu uvedeme několik obecných tvrzení, která popisují Sobolevovy prostory i na složitějších oblastech než pouze jednotkový kruh.

Definice 10. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ je oblast, $r \in \mathbb{N}_0$. Řekneme, že hranice $\partial\Omega$ je r-spojitá (resp. r-lipschitzovská), pokud pro každý bod $x \in \partial\Omega$ existuje okolí U, že $\partial\Omega \cap U$ je regulární $(n-1)$-rozměrná plocha s parametrizací $\psi : V \to \partial\Omega \cap U$ a funkce ψ a ψ^{-1} mají derivace až do r-tého řádu (resp. jsou tyto derivace navíc lipschitzovské). (Grisvard, 2011, 1.2.1.2)*

V případě $r = 0$ se hranice označuje jako spojitá (resp. lipschitzovská). Dále v případě, že Ω je omezená, lze $\partial\Omega$ pokrýt pomocí konečně mnoha funkcí $\psi_1, \ldots, \psi_m$.

Tvrzení 14. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast se spojitou hranicí, pak restrikce funkcí z $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ na Ω tvoří hustou množinu v prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ pro všechna $p > 1$, $k > 0$. (Grisvard, 2011, 1.4.2.1)*

Každá funkce ze Sobolevova prostoru na množině se spojitou hranicí je proto limitou testovacích funkcí, jejichž restrikce na hranici oblasti budou dobře definované a natolik hladké, jako je hranice.

Značení. Pokud je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina a $k \in \mathbb{N}$ je přirozené číslo, pak $C^{k,1}(\overline{\Omega})$ je množina restrikcí na Ω z funkcí s kompaktním nosičem v $\mathbb{R}^n$, jejichž k-tá derivace je lipschitzovská. Pokud $k = 0$ nebo se úplně vynechá, označujeme prostor lipschitzovských funkcí s kompaktním nosičem.

Nyní uvažujme omezenou oblast Ω s r-lipschitzovskou hranicí pokrytou funkcemi $\psi_1, \ldots, \psi_m$. Budeme chtít funkcím z prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ přiřadit funkce z nějakých Sobolevových prostorů na $(n-1)$-rozměrných plochách $U_1 \cap \partial\Omega, \ldots, U_m \cap \partial\Omega$. Funkcím z $C^{r,1}(\overline{\Omega})$ přiřadíme jejich restrikci na hranici. Ostatní funkce lze vyjádřit jako limitu funkcí, které už svou hodnotu na hranici mají dobře definovanou.

Věta 15 (o stopách)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast s r-lipschitzovskou hranicí, ψ je parametrizace $U \cap \partial\Omega$ podle definice 10, $p \in (1,\infty)$. Nechť k je takové,že $k \leq r + 1$ a $k - \frac{1}{p} > 0$ není celé číslo. Uvažujme zobrazení T, které funkci $u \in C^{r,1}(\overline{\Omega})$ přiřadí funkci $T(u) = f : V \to \mathbb{R}$ danou předpisem $f(x) = u(\psi(x))$. Pak existuje jednoznačně určené spojité rozšíření T, které je zobrazením $W^{k,p}(\Omega)$ na $W^{k-\frac{1}{p},p}(V)$. (Grisvard, 2011, 1.5.1.2)*

Funkce $T(u) = f$ z předchozí věty se nazývá stopa funkce u. Podle Heineho věty je spojitost ekvivalentní s implikací $lim_{n\to\infty} u_n = u \Rightarrow lim_{n\to\infty} f_n = f$. Tedy pokud u je limitou hladkých funkcí, pak stopa f je limitou stop jednotlivých hladkých funkcí.

Nechť $k = m + \frac{1}{p}$, kde $m \in \mathbb{N}_0$ a tedy $k - \frac{1}{p}$ je celé číslo. Pokud $m = 0$, pak každá funkce z $W^{\frac{1}{p},p}(\Omega)$ je limitou funkcí z prostoru $C_C^\infty(\Omega)$, které by měly mít nulovou stopu, tedy pojem stopa nemá smysl. (Grisvard, 2011, 1.4.2.4) Pokud $m \in \mathbb{N}$, pak funkce z $W^{m+\frac{1}{p},p}(\Omega)$, které mají klasické derivace až do řádu $(m-1)$ a jejich derivace na hranici $\partial\Omega$ ve směru normály jsou až do řádu $(m-1)$ nulové, jsou limitou funkcí z $C_C^\infty(\Omega)$ viz Franke (1986). Předpoklad $k - \frac{1}{p} \notin \mathbb{N}_0$ ve větě o stopách nelze vynechat.

Nyní aplikujeme větu o stopách na jednotkový kruh $\Omega = B(0{,}1)$, $n = 2$ a $p = 2$. Hranice je funkce třídy C^∞ a její parametrizace je $(\cos x, \sin x)$, $x \in (0{,}2\pi)$ (resp. $x \in (\pi{,}3\pi)$), pak podle věty o stopách pro $k - \frac{1}{2} \in (0{,}\infty) \setminus \mathbb{N}$ existuje právě jedno spojité zobrazení z $H^k(U(0{,}1))$ na $H_{per}^{k-\frac{1}{2}}$. Nechť u_1, $u_2 \in H^k(U(0{,}1))$ jsou řešení Laplaceovy rovnice se stejnou stopou a $k > \frac{1}{2}$. Pokud by $k - \frac{1}{2}$ bylo přirozené číslo, pak zvolíme nové $k_2 := k - \frac{1}{2}$ a jinak necháme $k_2 = k$. Bude platit $k_2 > \frac{1}{2}$ a $k_2 - \frac{1}{2}$ není přirozené číslo a díky vnoření $H^k(U(0{,}1))$ do $H^{k-\frac{1}{2}}(U(0{,}1))$ plynoucího přímo z definice Sobolevových prostorů máme u_1, $u_2 \in H^{k_2}(U(0{,}1))$. Pak $u_1 - u_2$ je také řešení Laplaceovy rovnice ležící ve stejném Sobolevově prostoru $H^{k_2}(U(0{,}1))$. Obě funkce měly stejnou stopu, proto bude $u_1 - u_2$ mít nulovou stopu. Nyní předpokládejme, že původní k bylo alespoň 1. Podle Lax-Milgramovy věty (Evans, 2002, str. 297, 345) této stopě odpovídá právě jedno řešení v prostoru $H^1(U(0{,}1))$. Víme, že nulová funkce řeší Laplaceovu rovnici a má nulovou stopu, proto se funkce u_1, u_2 musely rovnat. Tedy pro $k \geq 1$ existuje k dané stopě z prostoru $H_{per}^{k-\frac{1}{2}}$ právě jedno řešení v prostoru $H^k(U(0{,}1))$.

V případě, že $k > 1$ lze stejný výsledek odvodit ještě jiným způsobem.

Věta 16 (Sobolevovo vnoření). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí, $p \in (1{,}\infty)$, $r \in \mathbb{N}_0$, $k > r + \frac{n}{p}$. Pak reprezentanti funkcí z prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ leží v prostoru $C^r(\Omega)$. (Grisvard, 2011, 1.4.4.1)*

Věta 17 (Sobolevovo vnoření v $\mathbb{R}^2$). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí, $p \in (1{,}\infty)$, $r \in \mathbb{N}_0$, $k > r + \frac{2}{p}$. Pak reprezentanti funkcí z prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ leží v prostoru $C^r(\overline{\Omega})$. (Grisvard, 2011, 1.4.5.2)*

Nechť $k > 1$ a $u_1 \in H^k(U(0{,}1))$ řeší Laplaceovu rovnici. Podle Věty o stopách nalezneme stopu f z prostoru $H_{per}^{k-\frac{1}{2}}$. Podle tvrzení 12 rovnicí (3) nalezneme funkci $u_2 \in H^k(U(0{,}1))$, která také řeší Laplaceovu rovnici a má stopu f. Podle linearity integrálů řeší $(u_1 - u_2)$ Laplaceovu rovnici na $U(0{,}1)$, má nulovou stopu a navíc podle Sobolevova vnoření v $\mathbb{R}^2$ je spojité na $B(0{,}1)$. Tyto podmínky splňuje nulová funkce a podle slabého principu maxima jiná funkce z $C(B(0{,}1))$ tyto podmínky nesplňuje.

Tedy tvrzení 12 lze pro $k \geq 1$ zesílit.

Důsledek 18. *Nechť $k \in [1{,}\infty)$ a $k = m + s$, kde $m \in \mathbb{N}$, $s \in [0{,}1)$. Pokud v Sobolevově prostoru $H^k(U(0{,}1))$ ztotožníme funkce rovnající se s.v., pak*

$$H_U^{k-\frac{1}{2}} = \left\{u \in H^k(U(0{,}1));\ \Delta u = 0\right\}$$

a normy obou prostorů

$$\|u\|^2_{H^{k-\frac{1}{2}}} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \left(1 + |n|^{2k-1}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H^k(U(0,1))} = &\sum_{|\alpha|\leq m} \int_{U(0,1)} |D^\alpha u(x,y)|^2 dxdy \\ &+ \sum_{|\alpha|=m} \int_{(U(0,1))^2} \frac{|D^\alpha u(x_1,y_1) - D^\alpha u(x_2,y_2)|^2}{|x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2|^{2+2s}} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \end{aligned} \tag{5}$$

jsou pro tyto funkce ekvivalentní. Každé řešení Laplaceovy rovnice v prostoru $H^k(U(0{,}1))$ je dáno rovnicí (3)

$$u(x{,}y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x+iy)^n + c_{-n}(x-iy)^n.$$

3. Laplaceova rovnice

3.1 Konvergence řešení

V této sekci odvodíme, v jaké normě konverguje nalezené řešení Laplaceovy rovnice k zadané funkci ze Sobolevova prostoru na jednotkové kružnici.

Funkce $f \in L^2(0,2\pi) = H^0(0,2\pi)$ se s.v. rovná svojí Fourierově řadě $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi}$. Předpisem $u(x,y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(x+iy)^n + (x-iy)^n$, $(x,y) \in B(0,1)$ získáme řešení Laplaceovy rovnice uvnitř kruhu $U(0,1)$. Substitucí řešení u do polárních souřadnic získáme funkci

$$v(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\varphi}$$

definovanou pro $r \in [0,1]$ a 2π-periodickou v proměnné φ. Dále je funkce $v(r,\cdot)$ pro $r \in [0,1)$ třídy C^∞. Víme, že funkcím ze Sobolevova prostoru $H^{k+\frac{1}{2}}(U(0,1))$, $k \in [0,\infty)$ neodpovídají funkce přímo z prostoru $H^k(0,2\pi)$, ale až funkce z prostoru H^k_{per}, protože se v normě musí projevit i chování funkce na okrajích intervalu. V prostoru H^k_{per} lze za normu místo původní normy z definice Sobolevova prostoru uvažovat ekvivalentní $\|f\|_{H^k_F} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2(1+|n|^{2k})$.

Tvrzení 19. *Nechť $f \in H^k_{per}$ a v jsou dány rovnicemi (2) a (1), $k \in [0,\infty)$, pak funkce $v(r,\cdot)$ konverguje k původní funkci $f(\cdot)$ v H^k_{per}, neboli* $\lim_{r\to 1_-} \|f(\cdot) - v(r,\cdot)\|_{H^k_{per}} = 0$.

Důkaz. Suma $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2(1+|n|^{2k})$ konverguje, tedy pro $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0+1}^{\infty}(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)(1+|n|^{2k}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Následně zvolíme dostatečně malé δ, přesněji $\delta = 1$ pro $\sum_{n=-n_0}^{n_0} |c_n|^2(1+|n|^{2k}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, jinak

$$\delta = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\sum_{n=-n_0}^{n_0} |c_n|^2(1+|n|^{2k})}\right)^{\frac{1}{2n_0}}.$$

Pak platí, že $\sum_{n=-n_0}^{n_0}(1-(1-\delta)^{2n_0})|c_n|^2(1+|n|^{2k}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ a tedy pro $r \in (1-\delta,1)$ platí

$$\|f - v(r,\cdot)\|^2_{H^k_F} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1-r^{2|n|})|c_n|^2(1+|n|^{2k})$$

$$< \sum_{n=-n_0}^{n_0} (1-(1-\delta)^{2n_0})|c_n|^2(1+|n|^{2k}) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)(1+|n|^{2k}) < \varepsilon,$$

a proto $\lim r \to 1_- v(r,\cdot) = f(\cdot)$ v normě H^k_{per}.

□

Nechť f je reprezentant volený přímo jako Fourierova řada, pak $v(r,\cdot) \to f(\cdot)$ bodově pro taková φ, pro která jsou funkce dobře definované, to přímo plyne z Abelovy věty. Zde bodovou konvergencí myslíme pro pevný úhel φ a $r \to 1_-$. Dále je známo, že pokud spojité funkce $v(r,\cdot)$ konvergují stejnoměrně k nějaké funkci $f(\cdot)$, pak je f spojitá. Tedy $v(r,\cdot) \rightrightarrows f(\cdot)$ stejnoměrně nemůže platit, pokud f není v nějakém bodě spojitá nebo není definovaná. To se může stát pro funkce f z prostoru H_F^k pro $k \leq \frac{1}{2}$. Dále pro $m \in \mathbb{N}$, $m \leq k$ je m-tá slabá derivace f v prostoru H_{per}^{k-m} a její Fourierovy koeficienty jsou $\{(in)^m c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Díky tomu stačí provést důkazy pro funkce samotné a odvozené výsledky můžeme použít i pro jejich derivace. Je důležité si ale uvědomit, jaký je vztah mezi derivacemi funkce v konvergujícími k f a derivacemi řešení u.

Příklad. Uvažujme funkci $f(\varphi) = e^{i\varphi}$. Odpovídá jí řešení $u(x,y) = x + iy$, jehož derivace jsou $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = i$, ale funkce $v(r,\varphi) = re^{i\varphi}$ má derivaci $\frac{\partial v}{\partial \varphi} = ire^{i\varphi}$. Pokud označíme $\phi_r(\varphi) = re^{i\varphi}$, získáme derivace funkce v pomocí vzorců pro derivování složené funkce

$$v(r,\varphi) = u(\mathrm{Re}\phi_r(\varphi),\mathrm{Im}\phi_r(\varphi)).$$

Tvrzení 20. *Nechť $f \in H_{per}^k$, $k > \frac{1}{2}$, v dáno rovnicí (1), pak funkce $v(r,\cdot)$ konverguje stejnoměrně k původní funkci $f(\cdot)$.*

Důkaz. V důkazu tvrzení 6 (pro $k > \frac{1}{2}$ je f spojitá) jsme ukázali, že řada $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$ konverguje. Dále lze pro libovolné $\varepsilon > 0$ obdobně jako v předchozím důkazu najít $\delta > 0$, že pro $r \in (1-\delta,1)$ bude platit

$$\|f - v(r,\cdot)\|_{L^\infty} = \sup_{\varphi\in(0,2\pi)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - r^{2|n|}) e^{in\varphi} c_n$$

$$\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1 - r^{2|n|})|c_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

tedy $v(r,\cdot) \rightrightarrows f(\cdot)$.

□

Uvažujme funkci f z prostoru H_F^k, $k > \frac{1}{2}$. Odpovídající funkce v je pro $r \in (0,1)$ dokonce třídy C^∞. Zvolme libovolné φ_0 a $\varepsilon > 0$. Funkce f je spojitá (tvrzení 6), tedy existuje $\delta_1 > 0$, že pro všechna $\varphi \in (\varphi_0 - \delta_1, \varphi_0 + \delta_1)$ platí $|v(1,\varphi) - v(1,\varphi_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Z právě dokázané stejnoměrné konvergence existuje $\delta_2 > 0$, že pro všechna $r \in (1-\delta_2,1)$ a všechna φ platí $|v(r,\varphi) - v(1,\varphi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy pro všechna $\varphi \in (\varphi_0 - \delta_1, \varphi_0 + \delta_1)$ a $r \in (1-\delta_2,1)$ platí $|v(r,\varphi) - v(1,\varphi_0)| \leq \varepsilon$. Tedy funkce v je spojitá. Řešení u dané rovnicí (3) je spojité na $B(0,1)$.

3.2 Vlastnosti řešení

Nyní shrneme, co jsme zjistili o nalezeném řešení Laplaceovy rovnice.

Byla zadána okrajová podmínka f z prostoru $L^2(0,2\pi)$. Ta se s.v. rovnala svojí Fourierově řadě danou rovnicí (2).

$$f(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\varphi}$$

Nalezli jsme řešení u dané rovnicí (3), které je třídy $C^\infty(U(0,1))$.

$$u(x,y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (x+iy)^n + (x-iy)^n$$

Nalezené řešení lze zapsat v polárních souřadnicích pomocí rovnice (1).

$$v(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\varphi}$$

Pokud je okrajová podmínka f v prostoru H^k_{per}, $0 \leq k < \frac{1}{2}$, pak je řešení u v Sobolevově prostoru $H^{k+\frac{1}{2}}(U(0,1))$. Polární vyjádření řešení v konverguje k okrajové podmínce v normě prostoru H^k_{per} a bodově pro úhly φ, pro které Fourierova řada f konverguje.

Pokud je okrajová podmínka f v prostoru $H^{\frac{1}{2}}_{per}$, pak je řešení u v Sobolevově prostoru $H^1(U(0,1))$, je jednoznačné a všechny funkce z prostoru $H^1(U(0,1))$ řešící Laplaceovu rovnici jsou dané rovnicí (3) s.v. Polární vyjádření řešení v konverguje k okrajové podmínce v normě prostoru H^k_{per} a bodově pro úhly φ, pro které Fourierova řada f konverguje.

Pokud je okrajová podmínka f v prostoru H^k_{per}, $k > \frac{1}{2}$, pak je řešení u v Sobolevově prostoru $H^{k+\frac{1}{2}}(U(0,1))$, je spojité na $B(0,1)$, je jednoznačné a všechny funkce z prostoru $H^{k+\frac{1}{2}}(U(0,1))$ řešící Laplaceovu rovnici jsou dané rovnicí (3) s.v. Polární vyjádření řešení v konverguje k okrajové podmínce v normě prostoru H^k_{per} a také stejnoměrně. Nalezené řešení je z prostoru $C^\infty(U(0,1)) \cap C(B(0,1)) \cap H^{k+\frac{1}{2}}(U(0,1))$ a je jednoznačné mezi funkcemi z $C^2(U(0,1)) \cap C(B(0,1))$ i mezi funkcemi z $H^1(U(0,1))$.

Závěr

Zkoumali jsme Laplaceovu rovnici na jednotkovém kruhu. K okrajové podmínce jsme Fourierovou metodou nalezli řešení. Zavedli jsme celočíselné i zlomkové Sobolevovy prostory a zkoumali jsme, ve kterých z nich leží okrajová podmínka a řešení. Dále jsme zadefinovali různé varianty Sobolevových prostorů, ve kterých se se zkoumanými funkcemi lépe pracovalo. Hlavním cílem bylo ukázat elementárními metodami speciální případy některých obecných tvrzení a zjistit, jaký vztah mají tyto neobvyklé Sobolevovy prostory s těmi vyskytujícími se v literatuře. Povedla se ukázat různá vnoření a izomorfismy. Nakonec se s pomocí některých známých tvrzení výsledky aplikovaly na Laplaceovu rovnici na jednotkovém kruhu a zjistili jsme, jakým způsobem řešení konverguje k okrajové podmínce a v jakém smyslu je jednoznačné.

Literatura

ČIHÁK, P. (2001). *Matematická analýza nejen pro fyziky (V)*. Matfyzpress. ISBN 80-85863-65-0.

EVANS, L. C. (2002). *Partial Differential Equations*. Volume 19. AMS, Rhode Island. ISBN 0-8218-0772-2.

FRANKE, J. (1986). On the Spaces of Triebel-Lizorkin Type: Pointwise Multipliers and Spaces on Domains. *Mathematische Nachrichten*, **125**, 61.

GRISVARD, P. (2011). *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. SIAM, Philadelphia. ISBN 978-1-611972-02-3.

LUKEŠ, J. (2011). *Úvod do funkcionální analýzy*. Karolinum. ISBN 978-80-246-1955-2.

RUDIN, W. (1991). *Functional Analysis*. 2nd edition. McGraw Hill, New York. ISBN 0-07-100944-2.

RUNST, T. a SICKEL, W. (1996). *Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations*. de Gruyter. ISBN 978-3-11-015113-8.

TRIEBEL, H. (1983). *Theory of Function Spaces*. Birkhäuser. ISBN 978-3-0346-0415-4.