Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Joel Jančařík

Úlohy optimálního investování řešitelné pomocí lineárního programování

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Martin Branda, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2015

Děkuji vedoucímu své bakalářské práce RNDr. Martinu Brandovi, Ph.D. za odborné vedení práce, vynaložený čas při konzultacích a množství hodnotných připomínek.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne ..... Joel Jančařík

Název práce: Úlohy optimálního investování řešitelné pomocí lineárního programování

Autor: Joel Jančařík

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Martin Branda, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Problém optimalizace portfolia patří ke klasickým optimalizačním úlohám. Účelem úlohy je maximalizovat očekávaný výnos a přitom minimalizovat riziko při skládání finančního portfolia.
Bakalářská práce popisuje některé míry rizika vedoucí na úlohu lineárního programování následně je aplikuje na reálná data z finančních trhů. V práci je popsán model s podmíněnou hodnotou v riziku, MAD-model a model minimax. Aplikace na reálná data z finančních trhů byla provedena na datech z frankfurtské burzy v programu Wolfram Mathematica 9.0 pomocí funkce LinearProgramming. Výsledkem jsou optimální portfolia z jedenácti uvažovaných modelů pro každé ze šesti omezení na minimální výnos. Nalezená portfolia jsou dále hodnocena dle dat z následujícího roku.

Klíčová slova: Optimalizace portfolia, míra rizika, lineární programování, podmíněná hodnota v riziku, střední absolutní odchylka

Title: Optimal investment problems solvable using linear programming

Author: Joel Jančařík

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Martin Branda, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Portfolio optimization problem is a classical optimization problem, where the expected return of the portfolio is maximized and the risk is minimized.
In this bachelor thesis some LP solvable portfolio optimization models are studied. Application on real life financial data is also included. Model with Conditional Value at Risk, MAD-model and Minimax model are described. In numerical analysis data from Frankfurt Stock Exchange are used and optimization has been made by Wolfram Mathematica 9.0 function LinearProgramming. As a result we got optimal portfolios for eleven different models for each of six minimal expected return constraints. The portfolios have been then evaluated according to the data from next year period.

Keywords: Portfolio optimization, Risk measure, Linear programming, Conditional Value at Risk, Mean absolute deviation

Obsah

Úvod

V bakalářské práci Úlohy optimálního investování řešitelné pomocí lineárního programování se zabýváme úlohou optimalizace portfolia. Naším cílem je popsat různé míry rizika, které vedou na úlohu lineárního programování, jejich vlastnosti a následně je aplikovat na reálná data z finančních trhů.
Optimalizaci portfolia se v práci převádí na dvou-kriteriální problém, kde se maximalizuje očekávaný výnos a minimalizuje riziko. Aby bylo možné minimalizovat riziko, je potřebné mít nástroj pro jeho měření. Tímto nástrojem jsou míry rizika, které přiřazují portfoliu reálné číslo v závislosti na tom, jak je portfolio rizikové. Celý model je pak závislý na použité míře rizika. Tento přístup byl zaveden v (Markowitz, 1952). Markowitz ve své práci používá za míru rizika směrodatnou odchylku, respektive rozptyl, a úloha pak vede na kvadratické programování. Od té doby bylo uskutečněno mnoho pokusů o linearizaci celého problému, která by podstatně snížila výpočetní náročnost.
V teoretické části práce nejprve zavádíme nezbytné pojmy a poté zkoumáme trojici základních modelů vedoucích na úlohu lineárního programování, které jsou popsané v kapitolách 2 až 4. Jde o model s podmíněnou hodnotou v riziku, MAD-model a minimax. Dále jsou zpracovány dvě rozšíření podmíněné hodnoty v riziku, které je možno shrnout pod název vážená podmíněná hodnota v riziku, a jedno rozšíření MAD-modelu, které se nazývá m-MAD-model. V numerické části práce poté aplikujeme naše poznatky na reálná finanční data z frankfurtské burzy. Konkrétně šlo o vybrané akcie z indexu DAX. Optimální portfolia byla vybrána na základě historických dat z období 2011 až 2014. Ke zhodnocení výsledků byla použita data z následujícího roku.
Ve druhé kapitole věnujeme pozornost podmíněné hodnotě v riziku, což je míra rizika objevující se na počátku tohoto tisíciletí (Rockafellar a Uryasev, 2000). Podmíněná hodnota v riziku je velice účinným nástrojem pro měření rizika, což dokládají jak její teoretické vlastnosti obsažené v této práci, tak aplikace na různé finanční problémy. Citace na různé aplikace je možno nalézt v (Mansini a kol., 2014). Podmíněná hodnota v riziku tímto v mnoha ohledech převyšuje hodnotu v riziku (VaR - Value at Risk), která je dnes hojně používaným nástrojem pro měření rizika (Mansini a kol., 2007). Pro podrobnější srovnání hodnoty v riziku a podmíněné hodnoty v riziku odkazujeme čtenáře na (Rockafellar a Uryasev, 2002).
Dále se zde také zabíráme rozšířením podmíněné hodnoty v riziku vedoucí na vícekriteriální optimalizační problém, který řešíme aplikací váženého součtu dle (Mansini a kol., 2007). Výslednou míru rizika nazýváme vážená podmíněná hodnota v riziku. Aplikace na data z milánské akciové burzy ukázaly dobré výsledky tohoto modelu ve srovnání s podmíněnou hodnotou v riziku i Giniho průměrem rozdílu (Mansini a kol., 2007).

Ve třetí kapitole rozebíráme historicky starší MAD-model (Konno a Yamazaki, 1991). Za míru rizika je zde vzata střední absolutní odchylka, která je podobnou charakteristikou jako směrodatná odchylka. MAD-model již ale na rozdíl od směrodatné odchylky vede pro diskrétně rozdělenou náhodnou veličinu na úlohu lineárního programování. MAD-model byl velice živě testován na různých akciových trzích. Příkladem můžou být (Konno a Yamazaki, 1991) a (Mansini a kol., 2003). Pro naši práci jsme si zvolili MAD-model jako zástupce klasických modelů používající střední hodnotu rizika. Navíc díky svému rozšíření na m-MAD-model (Michalowski a kol., 2000) lze získat model s výpočetní náročností srovnatelný s váženou podmíněnou hodnotou v riziku.
Čtvrtá kapitola obsahuje modelem s názvem minimax (Young, 1998). Jedná se o model využívající míru bezpečnosti nejhorší realizaci. Ve srovnání s podmíněnou hodnotou v riziku a MAD-modelem se zdá jít o hrubou míru rizika, což má ale za následek lepší výpočetní vlastnosti.

Kapitola 1

Základní termíny a definice

V této kapitole se zaměříme na definice pojmů, které využijeme v následujících kapitolách. Především se jedná o pojem míry rizika. Velká část kapitoly je věnována vlastnostem měr rizika. Dále formulujeme problém optimalizace portfolia.

1.1 Míry rizika a jejich vlastnosti

Tato podkapitola se zabývá zavedením důležitého pojmu míra rizika. Právě za pomoci míry rizika budeme moci uchopit pojem rizika. Prakticky to znamená, že míra rizika nám dá ohodnocení rizika reálným číslem. V této práci bude míra rizika klíčový pojem pro formulaci úlohy optimalizace portfolia. Dále se v této podkapitole zabýváme nejdůležitějšími vlastnostmi měr rizika, kterými jsou koherence ve smyslu definice z (Artzner a kol., 1999) a SSD konzistence.

Definice 1 (ztrátová funkce)**.** *Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ a nechť $\boldsymbol{x} \in X$ je vektor. Nechť Y je náhodný vektor z pravděpodobnostního prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ do $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$. Náhodnou veličinu $f(\boldsymbol{x}, Y)$ s hodnotami v $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ nazýváme ztrátová funkce. Označme množinu všech ztrátových funkcí jako $\mathcal{Z}$.*

Poznámka. Jelikož se tato práce zabývá optimalizací finančního portfolia používá se v dalším pro prvky množiny X označení portfolio. Potom jednotlivé složky vektoru $\mathbf{x} \in X$ označují váhy příslušných aktiv v portfoliu.

Definice 2 (míra rizika)**.** *Mírou rizika nazýváme funkcionál ze $\mathcal{Z}$ do $\mathbb{R}$.*

Nyní jsme dospěli k pojmu míra rizika, který je ovšem moc obecný na to, aby odpovídal naší představě o ohodnocení rizika. K tomu, aby šlo o přijatelný nástroj se od míry rizika očekávají ještě další vlastnosti, které jsou shrnuté pod pojmem koherence.

Definice 3 (koherence)**.** *Míru rizika ρ nazveme koherentní, jestliže platí*

Translační invariance $\forall Z \in \mathcal{Z}, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \rho(\alpha + Z) = \alpha + \rho(Z)$;

Subaditivita $\forall Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z} : \rho(Z_1 + Z_2) \leq \rho(Z_1) + \rho(Z_2)$;

Positivní homogenita $\forall Z \in \mathcal{Z}, \forall \alpha \geq 0 : \rho(\alpha Z) = \alpha \rho(Z)$;

Monotonie $\forall Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}, Z_1 \leq Z_2 \ s.j. : \rho(Z_1) \leq \rho(Z_2)$.

Poznámka. Tato definice je převzata z (Artzner a kol., 1999) a upravena změnou znaménka dle (Mansini a kol., 2003).

Poznámka. Stručně okomentujme některé požadované vlastnosti. Translační invariance zajišťuje jednotku, ve které míra rizika měří. To umožňuje určité vzájemné porovnání více koherentních měr rizika. Subaditivita je přirozená vlastnost, která zajišťuje rozložení investice do více různých aktiv - diverzifikaci. Monotonie říká, že pokud je jedna ztrátová funkce vždy vyšší, pak je i rizikovější.

Nyní se podívejme na druhou důležitou vlastnost měr rizika, kterou je SSD bezpečná konzistence. Zkratka SSD je z anglického second order stochastic dominance. Tato vlastnost je svým smyslem podobná vlastnosti monotonie z definice 3. Pokud je jedno portfolio v určitém smyslu lepší než jiné, pak má být méně rizikové. V definici konzistence tímto smyslem byla hodnota ztrátové funkce. Nyní přejdeme k citlivějšímu nástroji stochastické dominance druhého stupně.

Definice 4 (stochastická dominance pro portfolia)**.** *Řekneme, že portfolio $\boldsymbol{x} \in X$ dominuje nad portfoliem $\boldsymbol{y} \in X$ ve stochastické dominanci druhého stupně (second order stochastic dominance), jestliže pro všechna $a \in \mathbb{R}$ existují konečné oba následující integrály a platí*

$$\int_a^\infty P(f(\boldsymbol{x},Y) \geq \xi)d\xi \leq \int_a^\infty P(f(\boldsymbol{y},Y) \geq \xi)d\xi$$

s minimálně jednou ostrou nerovností. Dále řekneme, že portfolio $\boldsymbol{x}^0$ je efektivní ve stochastické dominanci druhého stupně, jestliže neexistuje portfolio $\boldsymbol{x}$ tak, že $\boldsymbol{x}$ dominuje nad $\boldsymbol{x}^0$ ve stochastické dominanci druhého stupně.

Pro definici SSD bezpečné konzistence je třeba ještě definovat míru bezpečnosti příslušnou k míře rizika.

Definice 5. *Nechť ρ je míra rizika. Definujme příslušnou míru bezpečnosti jako*

$$\mu_\rho(\boldsymbol{x}) = \mu(\boldsymbol{x}) - \rho(\boldsymbol{x}).$$

Poznámka. Občas také budeme hovořit o příslušné míře rizika k míře bezpečnosti, tím máme na mysli míru rizika takovou, že uvedená míra bezpečnosti je jí příslušná. Dále je třeba si všimnout, že minimalizace $\rho(\mathbf{x})$ vzhledem k $\mathbf{x}$ není obecně ekvivalentní maximalizaci $\mu_\rho(\mathbf{x})$.

Nyní můžeme přistoupit ke slibované klíčové definici.

Definice 6. *Nechť ρ je míra rizika. Řekneme, že její příslušná míra bezpečnosti μ_ρ je SSD konzistentní, jestliže pro každou dvojici portfolií $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in X$ takovou, že portfolio $\boldsymbol{x}$ dominuje při druhém stupni stochastické dominance nad portfoliem $\boldsymbol{y}$, platí, že $\mu_\rho(\boldsymbol{x}) \geq \mu_\rho(\boldsymbol{y})$. Pokud je μ_ρ SSD konzistentní, nazveme ρ SSD bezpečně konzistentní.*

Důležitost zavedení tohoto pojmu ilustruje následující věta.

Věta 1. *(Ogryczak a Ruszczyński, 1999) Nechť ρ je SSD bezpečně konzistentní míra. Nechť $\mu(\boldsymbol{x}) = -Ef(\boldsymbol{x},Y)$ je střední hodnota zisku portfolia $\boldsymbol{x}$. Nechť $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in X$ platí $\mu(\boldsymbol{x}) \neq \mu(\boldsymbol{y})$ nebo $\mu_\rho(\boldsymbol{x}) \neq \mu_\rho(\boldsymbol{y})$. Potom je každé jednoznačné řešení bikriteriálního problému*

$$\max\{[\mu(\boldsymbol{x}),\mu_\rho(\boldsymbol{x})] : \boldsymbol{x} \in X\}$$

SSD efektivní portfolio.

1.2 Optimalizace portfolia

Problém optimalizace portfolia lze matematicky vyjádřit tak, že se snažíme investovat kapitál do aktiv z předem dané množiny a přitom maximalizovat zisk a minimalizovat riziko.

Definice 7. *Označme množinu všech možných aktiv* $J = \{1,...,n\}$. *Vektor* $\boldsymbol{x} = (x_j)_{j=1,...,n}$ *za podmínek*

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \quad x_j \geq 0, \text{ pro } j = 1,2,...,n. \tag{1.1}$$

Vektor $\boldsymbol{x}$ *má* j*-tou složku odpovídající části kapitálu, která se investuje do aktiva* $j \in J$.
Množinu všech portfolií označme jako X.

Poznámka. Podmínky ze vzorce 1.1 lze tedy vysvětlit tak, že neuvažujeme prodeje na krátko a aktiva považujeme za neomezeně dělitelná. V aplikacích se mohou na množinu X klást další omezení dle požadavků investora a omezení trhu.

Abychom mohli určit vhodné portfolio, musíme být nějakým způsobem schopni modelovat riziko. K tomuto účelu využijeme míry rizika. Označme $R_{\mathbf{x}} = -f(\mathbf{x},Y)$, kde f je ztrátová funkce určující ztrátu portfolia $\mathbf{x} \in X$. Potom náhodná veličina $R_{\mathbf{x}}$ označuje výnosnost portfolia $\mathbf{x}$ a $\mu(\mathbf{x}) = ER_{\mathbf{x}}$. Nechť ρ je míra rizika. Nyní můžeme formulovat problém optimalizace portfolia jako bikriteriální problém

$$\max\{[\mu(\mathbf{x}), -\rho(\mathbf{x})]\}.$$

V této práci budeme řešit tento problém zavedením omezení na střední hodnotu portfolia. Nechť $\mu_0 \in \mathbb{R}$ je pevné. Pak dostáváme problém

$$\max\{-\rho(\mathbf{x}) | \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0\} \Leftrightarrow \min\{\rho(\mathbf{x}) | \mu(\mathbf{x}) \geq \mu_0\}. \tag{1.2}$$

To odpovídá tomu, že investor požaduje minimální zisk větší než μ_0, které je voleno tak, aby úloha byla přípustná, a snaží se minimalizovat riziko dosažení tohoto zisku.

1.2.1 Očekávaný výnos v diskrétním případě

Situaci z definice 1 si můžeme ještě zjednodušit, uvažujeme-li stejné dimenze prostorů reálných čísel, tedy ve značení v této definici $m = n$. Dále uvažujeme $f(\mathbf{x},Y) = f_1(x_1,Y_1) + ... + f_n(x_n,Y_n)$. Potom zavádíme $R_j x_j = -f(x_j,Y_j)$. Celkem dostáváme $R_{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^{n} R_j x_j$.
Uvažme nyní $T \in \mathbb{N}$ scénářů s pravděpodobnostmi p_t, kde $t = 1,...,T$. Nechť platí $\sum_{t=1}^{T} p_t = 1$. Typicky se jedná o historická data s $p_t = \frac{1}{T}$, pro $t = 1,...,T$. Nechť náhodná veličina R_j nabývá hodnot r_{jt} s pravděpodobností p_t pro $j = 1,...,n$ a $t = 1,...,T$. Označme $\mu_j = \mathsf{E}\ R_j = \sum_{t=1}^{T} r_{jt} p_t$. Dále můžeme psát výnos z portfolia $\mathbf{x}$ při scénáři t jako $y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j$ a očekávanou hodnotu portfolia $\mathbf{x}$ jako $\mu(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{T} y_t p_t$.

Kapitola 2

Podmíněná hodnota v riziku

Kapitola je věnována podmíněné hodnotě v riziku (v angličtině Conditional value at risk nebo Expected shortfall). Podmíněná hodnota v riziku byla představená v (Rockafellar a Uryasev, 2000) a měla zásadní vliv na vývoj měr rizika na počátku 21. století (Mansini a kol., 2014). Za úspěchem podmíněné hodnoty v riziku stojí především její dobré teoretické vlastnosti, kterými převyšuje velmi oblíbenou míru rizika hodnota v riziku (Value at Risk). Tato kapitola se také věnuje rozšíření podmíněné hodnoty v riziku na váženou podmíněnou hodnotu v riziku a představuje dva systémy vah.

2.1 Definice podmíněné hodnoty v riziku

V této podkapitole si ukážeme zavedení podmíněné hodnoty v riziku pro obecná rozdělení dle (Rockafellar a Uryasev, 2002). Tato definice je rozšířením definice z (Rockafellar a Uryasev, 2000), kde se podmíněná hodnota v riziku definuje pouze pro spojitá rozdělení. V případě spojitého rozdělení můžeme zjednodušeně definovat podmíněnou hodnotu v riziku s parametrem β portfolia $\mathbf{x}$ jako střední hodnotu podmíněného rozdělení se ztrátou vyšší než $(1-\beta)$-kvantil rozdělení ztráty:

$$\mathsf{E}\left[f(\mathbf{x},Y)|f(\mathbf{x},Y) \geq F_{\mathbf{x}}^{(-1)}(1-\beta)\right]. \tag{2.1}$$

Nyní přejdeme k formálnější a obecnější definici, která ovšem vyžaduje podrobnější zavedení.

Definice 8. *Nechť f je ztrátová funkce. Definujme pomocnou funkci ψ předpisem*

$$\psi(\boldsymbol{x},\alpha) = P\{f(\boldsymbol{x},Y) \leq \alpha\}.$$

Poznámka. V následujícím textu předpokládejme, že $f(\mathbf{x},Y)$ je spojitá v proměnné $\mathbf{x}$ a měřitelná v proměnné Y. Dále předpokládejme, že $\mathsf{E}\,|f(\mathbf{x},Y)| < \infty$ pro všechna $\mathbf{x} \in X$.

Poznámka. Vidíme, že pro fixní $\mathbf{x}$ je ψ distribuční funkce ztráty $f(\mathbf{x},Y)$. To mimo jiné znamená, že $\psi(\mathbf{x},\alpha)$ je v proměnné α neklesající a zprava spojitá.

Definice 9 (Hodnota v riziku)**.** *Zvolme $\beta \in (0,1)$, potom definujeme β-VaR $\alpha_\beta(\boldsymbol{x})$ předpisem*

$$\alpha_\beta(\boldsymbol{x}) = \min\{\alpha \in \mathbb{R}|\psi(\boldsymbol{x},\alpha) \geq \beta\}$$

a dále definujme β-VaR$^+$ $\alpha_\beta^+(\boldsymbol{x})$ předpisem

$$\alpha_\beta^+(\boldsymbol{x}) = \inf\{\alpha|\psi(\boldsymbol{x},\alpha) > \beta\}.$$

Poznámka. Hodnota v riziku je hojně používanou mírou rizika. Nám však slouží jako předstupeň k definici podmíněné hodnoty v riziku. Povšimněme si, že pro spojitá rozdělení máme $\alpha_\beta^+(\mathbf{x}) = \alpha_\beta(\mathbf{x}) = F_{\mathbf{x}}^{(-1)}(\beta)$, kde $F_{\mathbf{x}}^{(-1)}$ je kvantilová funkce ztráty. První rovnost ovšem neplatí, pokud není v bodě β kvantilová funkce spojitá. To nás přivádí k dalšímu postupu ve smyslu vzorce 2.1.

Definice 10 (Podmíněná hodnota v riziku)**.** *Definujeme podmíněnou hodnotu v riziku (CVaR) $\phi_\beta(\boldsymbol{x})$ jako střední hodnotu náhodné veličiny s distribuční funkcí*

$$\psi_\beta(\boldsymbol{x},\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha < \alpha_\beta(\boldsymbol{x}) \\ \frac{1}{1-\beta}(\psi(\boldsymbol{x},\alpha) - \beta), & \alpha \geq \alpha_\beta(\boldsymbol{x}) \end{cases}.$$

2.2 Vlastnosti podmíněné hodnoty v riziku

Tato podkapitola se zabývá nejdůležitějšími vlastnostmi, které má podmíněná hodnota v riziku. Především se jedná o klíčový důkaz fundamentální minimalizační formule. Na základě této minimalizační formule se poté odvozuje řešitelnost v lineárním programování a vlastnosti koherence, SSD konzistence a stability. Nejprve zavedeme značení

$$[x]^+ = \max\{x,0\}, \quad [x]^- = \max\{-x,0\}, x \in \mathbb{R}.$$

Poté zřejmě platí

$$[x]^+ + [x]^- = |x|, x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Definice 11. *Pro $\beta \in (0,1)$ definujeme funkci F_β*

$$F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha) = \alpha + (1-\beta)^{-1}\, \mathsf{E}\, [f(\boldsymbol{x},Y) - \alpha]^+.$$

Věta 2 (fundamentální minimalizační formule)**.** *Funkce $F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha)$ z definice 11 je v proměnné $\alpha \in \mathbb{R}$ konečná a konvexní. Dále platí:*

$$\phi_\beta(\boldsymbol{x}) = \min_\alpha F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha).$$

A navíc platí $\operatorname{argmin}_\alpha F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha) = [\alpha_\beta(\boldsymbol{x}),\alpha_\beta^+(\boldsymbol{x})]$. *Speciálně* $\alpha_\beta(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{argmin}_\alpha F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha)$ *a* $\phi_\beta(\boldsymbol{x}) = F_\beta(\boldsymbol{x},\alpha_\beta(\boldsymbol{x}))$.

Důkaz. Rozšiřujeme důkaz z (Rockafellar a Uryasev, 2002). Konečnost funkce F plyne z předpokladů učiněných v poznámce pod definicí 8. Konvexita F plyne z konvexity $[f(\mathbf{x},Y) - \alpha]^+$. Jako konečná konvexní funkce α má F konečné pravé a levé derivace pro všechny $\alpha \in \mathbb{R}$ (Rockafellar, 1970). Označíme si

$$\beta^-(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x})^-) := P\{y|f(\mathbf{x},Y) < \alpha\}$$
$$\beta^+(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x})).$$

Nejprve dokážeme

$$\frac{\partial^+ F_\beta(\mathbf{x},\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{\beta^+(\mathbf{x}) - \beta}{1-\beta}, \quad \frac{\partial^- F_\beta(\mathbf{x},\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{\beta^-(\mathbf{x}) - \beta}{1-\beta}. \tag{2.3}$$

Upravujme výraz

$$\frac{F_\beta(\mathbf{x},\alpha^*) - F_\beta(\mathbf{x},\alpha)}{\alpha^* - \alpha} = 1 + \frac{1}{1-\beta}\,\mathsf{E}\left\{\frac{[f(\mathbf{x},Y) - \alpha^*]^+ - [f(\mathbf{x},Y) - \alpha]^+}{\alpha^* - \alpha}\right\}.$$

Pro $\alpha^* > \alpha$ máme:

$$\frac{[f(\mathbf{x},Y) - \alpha^*]^+ - [f(\mathbf{x},Y) - \alpha]^+}{\alpha^* - \alpha} = \begin{cases} -1, & \text{pro} f(\mathbf{x},Y) \geq \alpha^*, \\ 0, & \text{pro} f(\mathbf{x},Y) \leq \alpha, \\ \in (-1,0), & \text{jinak.} \end{cases}$$

Protože $\mathsf{P}(f(\mathbf{x},Y) > \alpha^*) = 1 - \psi(\mathbf{x},\alpha^*)$ a $\mathsf{P}(\alpha < f(\mathbf{x},Y) \leq \alpha^*) = \psi(\mathbf{x},\alpha^*) - \psi(\mathbf{x},\alpha)$ je celkem pro nějaké $c \in (-1,0)$:

$$\mathsf{E}\left\{\frac{[f(\mathbf{x},Y) - \alpha^*]^+ - [f(\mathbf{x},Y) - \alpha]^+}{\alpha^* - \alpha}\right\} = -(1 - \psi(\mathbf{x},\alpha^*)) + c(\psi(\mathbf{x},\alpha^*) - \psi(\mathbf{x},\alpha)).$$

Díky spojitosti ψ zprava v proměnné α dostáváme

$$\lim_{\alpha^* \searrow \alpha} \mathsf{E}\left\{\frac{[f(\mathbf{x},Y) - \alpha]^+ - [f(\mathbf{x},Y) - \alpha]^+}{\alpha^* - \alpha}\right\} = -(1 - \psi(\mathbf{x},\alpha)).$$

Z toho již jednoduše dostaneme

$$\frac{\partial^+ F_\beta(\mathbf{x},\alpha)}{\partial\alpha} = 1 + \frac{1}{1-\beta}(\psi(\mathbf{x},\alpha) - 1) = \frac{\psi(\mathbf{x},\alpha) - \alpha}{1-\beta},$$

což je první část vzorce 2.3.
Podobně odvodíme i vzorec pro parciální derivaci zleva. Nechť $\alpha^* < \alpha$, potom máme:

$$\frac{[f(\mathbf{x},Y) - \alpha^*]^+ - [f(\mathbf{x},Y) - \alpha]^+}{\alpha^* - \alpha} = \begin{cases} -1, & \text{pro} f(\mathbf{x},Y) \geq \alpha, \\ 0, & \text{pro} f(\mathbf{x},Y) \leq \alpha^*, \\ \in (-1,0), & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dále platí $\mathsf{P}(f(\mathbf{x},Y) \geq \alpha) = 1 - \psi(\mathbf{x},\alpha^-)$ a $\mathsf{P}(\alpha^* < f(\mathbf{x},Y) < \alpha) = \psi(\mathbf{x},\alpha^-) - \psi(\mathbf{x},\alpha^*)$, z čehož dostáváme pro nějaké $c \in (-1,0)$:

$$\mathsf{E}\left\{\frac{[f(\mathbf{x},Y) - \alpha^*]^+ - [f(\mathbf{x},Y) - \alpha]^+}{\alpha^* - \alpha}\right\} = -(1 - \psi(\mathbf{x},\alpha^-)) + c(\psi(\mathbf{x},\alpha^-) - \psi(\mathbf{x},\alpha^*)).$$

A tedy i v limitě

$$\lim_{\alpha^* \nearrow \alpha} \mathsf{E}\left\{\frac{[f(\mathbf{x},Y) - \alpha]^+ - [f(\mathbf{x},Y) - \alpha]^+}{\alpha^* - \alpha}\right\} = -(1 - \psi(\mathbf{x},\alpha^-)).$$

Teď již můžeme spočíst parciální derivaci

$$\frac{\partial^- F_\beta(\mathbf{x},\alpha)}{\partial\alpha} = 1 + \frac{1}{1-\beta}(\psi(\mathbf{x},\alpha^-) - 1) = \frac{\psi(\mathbf{x},\alpha^-) - \beta}{1-\beta}.$$

Nyní si stačí uvědomit, že

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\partial^+ F_\beta(\mathbf{x},\alpha)}{\partial\alpha} = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\partial^- F_\beta(\mathbf{x},\alpha)}{\partial\alpha} = 1$$

a že

$$\lim_{\alpha\to-\infty} \frac{\partial^+ F_\beta(\mathbf{x},\alpha)}{\partial\alpha} = \lim_{\alpha\to-\infty} \frac{\partial^- F_\beta(\mathbf{x},\alpha)}{\partial\alpha} = -\frac{\beta}{1-\beta}.$$

Na základě těchto limit dostaneme, že množina $\{\alpha | F_\beta(\mathbf{x},\alpha) \leq m\}$ je omezená $\forall m \in \mathbb{R}$. Z toho dostáváme, že funkce F nabývá svého minima vzhledem k α a množina argumentů minima je uzavřený omezený interval. Hodnoty α v tomto intervalu jsou charakterizovány nerovnostmi

$$\frac{\partial^- F_\beta(\mathbf{x},\alpha)}{\partial\alpha} \leq 0 \leq \frac{\partial^+ F_\beta(\mathbf{x},\alpha)}{\partial\alpha}.$$

Z již dokázaného vzorce 2.3 jde o hodnoty splňující $\psi(\mathbf{x},\alpha^-) \leq \beta \leq \psi(\mathbf{x},\alpha)$. Dle definice jsou krajní body intervalu $\alpha_\beta(\mathbf{x})$ a $\alpha_\beta^+(\mathbf{x})$.
Tím jsme dokázali, že $\operatorname*{argmin}_\alpha F_\beta(\mathbf{x},\alpha) = [\alpha_\beta(\mathbf{x}),\alpha_\beta^+(\mathbf{x})]$.
Dále dokážeme, že $F(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x})) = \phi_\beta(\mathbf{x})$. Tím bude důkaz dokončen. Nejdříve upravíme

$$\mathsf{E}\left[(f(\mathbf{x},Y) - \alpha_\beta(\mathbf{x}))1_{f(\mathbf{x},Y)\geq\alpha_\beta(\mathbf{x})}\right] = \mathsf{E}\left[f(\mathbf{x},y)1_{f(\mathbf{x},Y)\geq\alpha_\beta(\mathbf{x})}\right] - \alpha_\beta(\mathbf{x})\,\mathsf{E}\left[1_{f(\mathbf{x},Y)\geq\alpha_\beta(\mathbf{x})}\right].$$

Z definice víme, že $\mathsf{E}\left[f(\mathbf{x},y)1_{f(\mathbf{x},Y)\geq\alpha_\beta(\mathbf{x})}\right] = (1-\beta)\phi_\beta(\mathbf{x})$ a $\mathsf{E}\left[1_{f(\mathbf{x},Y)\geq\alpha_\beta(\mathbf{x})}\right] = 1 - \psi(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x})^-) = 1-\beta$. Celkem tedy máme

$$\begin{aligned}\min_\alpha F_\beta(\mathbf{x},\alpha) = F_\beta(\mathbf{x},\alpha_\beta(\mathbf{x})) &= \alpha_\beta(\mathbf{x}) + (1-\beta)^{-1}\,\mathsf{E}\left[f(\mathbf{x},Y) - \alpha_\beta(\mathbf{x})\right]^+ \\ &= \alpha_\beta(\mathbf{x}) + (1-\beta)^{-1}((1-\beta)\phi_\beta(\mathbf{x}) - \alpha_\beta(\mathbf{x})(1-\beta)) = \phi_\beta(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

❑

Důsledek (konvexita). (Rockafellar a Uryasev, 2002) Jestliže je funkce ztráty $f(\mathbf{x},Y)$ konvexní vzhledem k $\mathbf{x}$, pak je i $\phi_\beta(\mathbf{x})$ konvexní funkce vzhledem k $\mathbf{x}$. Obdobně pro sublinearitu.

Věta 3 (koherence). *(Pflug, 2000) Podmíněná hodnota v riziku je koherentní.*

Věta 4 (stabilita). *(Rockafellar a Uryasev, 2002) Hodnota $\phi_\beta(\boldsymbol{x})$ je spojitá vzhledem k $\alpha \in (0,1)$. Navíc má vždy derivaci zleva i zprava s předpisy:*

$$\frac{\partial^-\phi_\beta(\boldsymbol{x})}{\partial\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}\,\mathsf{E}\{[f(\boldsymbol{x},Y) - \alpha_\beta(\boldsymbol{x})]^+\}$$

$$\frac{\partial^+\phi_\beta(\boldsymbol{x})}{\partial\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}\,\mathsf{E}\{[f(\boldsymbol{x},Y) - \alpha_\beta^+(\boldsymbol{x})]^+\}.$$

Věta 5 (SSD konzistence). *(Ogryczak a Ruszczyński, 2002a) Míra bezpečnosti $-\phi_\beta(\boldsymbol{x})$ je SSD konzistentní.*

Věta 6. *Míru rizika $\phi_\beta(\boldsymbol{x})$ je pro diskrétní náhodnou veličinu možno spočítat pomocí úlohy lineárního programování*

$$\begin{aligned} \phi_\beta(\boldsymbol{x}) = \min \quad & \{\alpha + \frac{1}{1-\beta}\sum_{t=1}^{T} d_t p_t\}, \\ s.t. \quad & d_t \geq -\alpha - y_t,\ d_t \geq 0,\ t = 1, \dots, T, \\ & \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Úloha optimalizace portfolia 1.2 je s mírou rizika $\phi_\beta(\boldsymbol{x})$ pro diskrétní náhodnou veličinu řešitelná pomocí lineárního programování jako

$$\begin{aligned} \min \quad & \{\alpha + \frac{1}{1-\beta}\sum_{t=1}^{T} d_t p_t\}, \\ s.t. \quad & d_t \geq -\alpha - y_t,\ d_t \geq 0,\ t = 1, \dots, T, \\ & \alpha \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{x} \in X,\ \sum_{t=1}^{T} y_t p_t \geq \mu_0. \end{aligned}$$

2.3 Vážená podmíněná hodnota v riziku

Jelikož je podmíněná hodnota v riziku závislá pouze na extrémních hodnotách rozdělení zisku, zdá se býti trochu hrubým nástrojem pro modelování rizika. Tento argument společně s nízkou výpočetní náročností vedl k rozšíření podmíněné hodnoty v riziku na vícenásobnou podmíněnou hodnotu v riziku.
Nechť pro $m \in \mathbb{N}$ jsou $1 > \beta_1 > ... > \beta_m \geq 0$ parametry podmíněné hodnoty v riziku. Potom můžeme formulovat vícekriteriální model

$$\min\{[\phi_{\beta_1}(\mathbf{x}),...,\phi_{\beta_m}(\mathbf{x})] : \mathbf{x} \in X\}.$$

Okamžitě se objevuje otázka, jak takto zadaný model řešit. Asi nejjednodušší možností je použití váženého součtu.

Poznámka. Pro speciální volbu $\beta_m = 0$ dostáváme míru rizika $\phi_0(\mathbf{x}) = -\mu(\mathbf{x})$. To umožňuje implicitně zahrnout očekávaný výnos.

Definice 12. *Nechť pro $m \in \mathbb{N}$ jsou $1 > \beta_1 > ... > \beta_m \geq 0$. Dále nechť jsou $w_k > 0$, pro $k = 1,...,m$, takové, že $\sum_{k=1}^{m} w_k = 1$. Potom míru rizika*

$$\phi_w^{(m)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{m} w_k \phi_{\beta_k}(\boldsymbol{x})$$

nazveme vážená vícenásobná podmíněná hodnota v riziku.

Poznámka. Vážená podmíněná hodnota v riziku byla poprvé představena v (Ogryczak, 2000). Z koherence podmíněné hodnoty v riziku a její SSD konzistence plyne koherence a SSD konzistence vážené vícenásobné podmíněné hodnoty v riziku (Mansini a kol., 2007).

Věta 7. *Míru rizika $\phi_w^{(m)}(\boldsymbol{x})$ je pro diskrétní náhodnou veličinu možno spočítat pomocí úlohy lineárního programování*

$$\begin{aligned}\phi_w^{(m)}(\boldsymbol{x}) = \min \quad & \{\sum_{k=1}^{m} w_k(\alpha_k + \frac{1}{1-\beta_k}\sum_{t=1}^{T} d_{kt}p_t)\},\\ s.t. \quad & d_{kt} \geq -\alpha_k - y_t,\, d_{kt} \geq 0,\ t = 1,\dots,T; k = 1,\dots,m,\\ & \alpha_k \in \mathbb{R},\ k = 1,\dots,m.\end{aligned}$$

Úloha optimalizace portfolia 1.2 je s mírou rizika $\phi_w^{(m)}(\boldsymbol{x})$ pro diskrétní náhodnou veličinu řešitelná pomocí lineárního programování jako

$$\begin{aligned}\min \quad & \{\sum_{k=1}^{m} w_k(\alpha_k + \frac{1}{1-\beta_k}\sum_{t=1}^{T} d_{kt}p_t)\},\\ s.t. \quad & d_{kt} \geq -\alpha_k - y_t,\, d_{kt} \geq 0,\ t = 1,\dots,T; k = 1,\dots,m,\\ & \boldsymbol{x} \in X,\ \sum_{t=1}^{T} y_t p_t \geq \mu_0,\, \alpha_k \in \mathbb{R},\ k = 1,\dots,m.\end{aligned}$$

Nyní si ukážeme určitá nastavení vah pro váženou podmíněnou hodnotu v riziku. Tato nastavení vah jsou určena jen parametry $1 > \beta_1 > ... > \beta_m \geq 0$ a váhy jsou pak již těmito parametry jednoznačně určeny. Pro tento účel uveďme ještě jednu míru rizika odvozenou od Giniho průměru rozdílu, která byla poprvé představena v (Yitzhaki, 1982).

Definice 13. *Definujme míru rizika Giniho průměru rozdílu Γ předpisem*

$$\Gamma(\boldsymbol{x}) = \mathsf{E}\,|R_{\boldsymbol{x}}^{(1)} - R_{\boldsymbol{x}}^{(2)}|,$$

kde $R_{\boldsymbol{x}}^{(1)}$ a $R_{\boldsymbol{x}}^{(2)}$ jsou stejně rozdělené nezávislé náhodné veličiny určující zisk portfolia $\boldsymbol{x}$. Dále definujeme příslušnou míru bezpečnosti μ_Γ dle definice 1.1.

Jak bylo ukázáno v (Mansini a kol., 2007), tak vhodným nastavením měr pro $m = T - 1$ lze dosáhnout ekvivalence $\phi_w^{(m)}(\mathbf{x})$ s $-\mu_\Gamma(\mathbf{x})$. To nás přivádí k možnosti aproximovat $-\mu_\Gamma(\mathbf{x})$ za pomoci vážené podmíněné hodnoty v riziku s menším počtem parametrů. V praxi se ukázalo, že velice dobrých výsledků se dá dosáhnout i s velmi nízkým m. Například s $m = 3$ jako v (Mansini a kol., 2007), kde bylo použito lichoběžníkové aproximace. Pro zjednodušení zápisu dodefinujme $\beta_0 = 1 > \beta_1 > ... > \beta_{m+1} = 0$. Potom lichoběžníková aproximace vede na nastavení vah

$$w_k = (\beta_{k-1} - \beta_{k+1})(1 - \beta_k), k = 1,...,m, \quad w_0 = \beta_m, \tag{2.4}$$

kde w_0 je váha odpovídající parametru $\beta_{m+1} = 0$ čili míře rizika $-\mu(\mathbf{x})$.

Definice 14. *Váženou podmíněnou hodnotu v riziku s nastavením vah 2.4 nazveme širokou váženou podmíněnou hodnotou v riziku.*

Další možností je použít nastavení vah založenou na chvostové verzi Giniho průměrného rozdílu.

Definice 15. *Zadefinujme míru rizika pro* $\beta \in (0,1]$ *jako*

$$-\mu_{\Gamma_\beta}(\boldsymbol{x}) = -\frac{2}{\beta^2} \int_0^\beta \int_0^\alpha F_{\boldsymbol{x}}^{(-1)}(p) dp d\alpha,$$

kde $F_{\boldsymbol{x}}^{(-1)}(p) = \inf\{\alpha | F_{\boldsymbol{x}}(\alpha) \geq p\}$ *je zleva spojitá kvantilová funkce k distribuční funkci* $F_{\boldsymbol{x}}$.

Poznámka. Tato míra rizika vznikla jako opačné číslo k míře bezpečnosti příslušné k chvostové verzi Giniho průměrného rozdílu.

I tuto míru rizika je možno aproximovat pro $1 > \beta_1 > ... > \beta_m = \beta \geq 0$ lichoběžníkovou aproximací, a tedy dostaneme nastavení vah:

$$w_k = \frac{(\beta_{k-1} - \beta_{k+1})(1 - \beta_k)}{(1 - \beta)^2} \tag{2.5}$$

pro $k = 1,...,m-1$ a $w_m = \frac{(\beta_{m-1} - \beta_m)(1 - \beta_m)}{(1-\beta)^2}$, kde $\beta_0 = 1$.

Definice 16. *Vážená podmíněná hodnotu v riziku s nastavením vah 2.5 se nazývá chvostová vážená podmíněná hodnota v riziku.*

Poznámka. V anglické literatuře se chvostová vážená podmíněná hodnota v riziku nazývá Wide Conditional Value at Risk.

Kapitola 3

Střední absolutní odchylka

V roce 1991 byla představena míra rizika odvozená od střední absolutní odchylky (Konno a Yamazaki, 1991). Pro úlohu optimalizace portfolia s touto mírou rizika se ujal název MAD model dle anglické zkratky mean absolute deviation. Z historického hlediska jde o krok nahrazení směrodatné odchylky (Markowitz, 1952) podobnou charakteristikou, která však již vede pro diskrétně rozdělenou náhodnou veličinu na úlohu lineárního programování. V kapitole také rozebíráme rozšíření MAD modelu na takzvaný m-MAD model. V obou těchto případech přecházíme k míře bezpečnosti, která má lepší vlastnosti.

Definice 17 (Střední absolutní odchylka)**.** *Definujeme míru rizika střední absolutní odchylka δ pro portfolio $\boldsymbol{x}$ jako*

$$\delta(\boldsymbol{x}) = \mathsf{E}\,|\mu(\boldsymbol{x}) - R_{\boldsymbol{x}}|.$$

Definice 18 (Dolní polo-odchylka)**.** *Definujeme míru rizika Dolní polo-odchylka $\bar{\delta}$ pro portfolio $\boldsymbol{x}$ jako*

$$\bar{\delta}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{E}[\mu(\boldsymbol{x}) - R_{\boldsymbol{x}}]^+.$$

Věta 8. *Platí rovnost $\mathsf{E}[\mu(\boldsymbol{x}) - R_{\boldsymbol{x}}]^+ = \mathsf{E}[\mu(\boldsymbol{x}) - R_{\boldsymbol{x}}]^-$, a tedy i*

$$\delta(\boldsymbol{x}) = 2\bar{\delta}(\boldsymbol{x}).$$

Důkaz. Je pro pevné $\mathbf{x} \in X$

$$\mathsf{E}\,[\mu(\mathbf{x}) - R_{\mathbf{x}}]^+ = \int_{-\infty}^{\mu(\mathbf{x})} [\mu(\mathbf{x}) - r] dP_{R(\mathbf{x})}(r) = \int_{\mu(\mathbf{x})}^{\infty} -[\mu(\mathbf{x}) - r] dP_{R(\mathbf{x})}(r) = \mathsf{E}\,[\mu(\mathbf{x}) - R_{\mathbf{x}}]^-.$$

Rovnost $\delta(\mathbf{x}) = 2\bar{\delta}(\mathbf{x})$ dostaneme z identity 2.2.

❑

Poznámka. Dolní polo-odchylka se v anglické literatuře nazývá downside mean semideviation from the mean. Pro naše potřeby ji ztotožníme se střední absolutní odchylkou na základě předcházející věty 8.

Nyní přejdeme k příslušné míře bezpečnosti $\mu_{\bar{\delta}}$. Tato míra bezpečnosti má lepší vlastnosti než dolní polo-odchylka.

Věta 9. *(Ogryczak a Ruszczyński, 1999) Míra bezpečnosti $\mu_{\bar{\delta}}$ je SSD konzistentní.*

Věta 10. *(Ogryczak a Ruszczyński, 2002a) Míra rizika $-\mu_{\bar{\delta}}$ je koherentní.*

Věta 11. *Míru rizika $-\mu_{\bar{\delta}}$ je pro diskrétní náhodnou veličinu možno spočítat jako úlohu lineárního programování*

$$\begin{aligned} -\mu_{\bar{\delta}}(\boldsymbol{x}) = \min \quad & \{\sum_{t=1}^{T}(d_t^- - y_t)p_t\}, \\ s.t. \quad & d_t^- \geq \sum_{j=1}^{n}(\mu_j - r_{jt})x_j,\, d_t^- \geq 0,\, t = 1, \ldots, T. \end{aligned}$$

Úloha optimalizace portfolia 1.2 je s mírou rizika $-\mu_{\bar{\delta}}$ pro diskrétní náhodnou veličinu řešitelná pomocí lineárního programování jako

$$\begin{aligned} \min \quad & \{\sum_{t=1}^{T}(d_t^- - y_t)p_t\}, \\ s.t. \quad & d_t^- \geq \sum_{j=1}^{n}(\mu_j - r_{jt})x_j,\, d_t^- \geq 0,\, t = 1, \ldots, T, \\ & \boldsymbol{x} \in X,\, \sum_{t=1}^{T} y_t p_t \geq \mu_0. \end{aligned}$$

3.1 Rozšíření MAD modelu

Také MAD model se dočkal různých rozšíření. Pro potřeby této práce si ukážeme míru rizika vedoucí na takzvaný m-MAD model. Za tímto účelem lze přidat k celému modelu parametr. To nám umožní přejít k váženému průměru, jako tomu bylo u podmíněné hodnoty v riziku.

Definice 19. *Definujeme pro $\alpha \in (0,1]$ míru rizika $\bar{\delta}_\alpha$ portfolia $\boldsymbol{x} \in X$ jako*

$$\bar{\delta}_\alpha = \mathsf{E}\,[\mu(\boldsymbol{x}) - \alpha R_{\boldsymbol{x}}]^+.$$

Poznámka. Všimněme si, že pro $\alpha = 1$ dostáváme míru rizika $\bar{\delta}$.

Pro rozšíření MAD si ukážeme postup z (Michalowski a kol., 2000). Nechť pro $m \in \mathbb{N}$ je $\mu_1(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x})$ a dále $\bar{\delta}_1(\mathbf{x}) = \bar{\delta}(\mathbf{x})$. Potom rekurzivně definujeme:

$$\bar{\delta}_k(\mathbf{x}) = \mathsf{E}\,[\mu_k(\mathbf{x}) - R_{\mathbf{x}}]^+ = \mathsf{E}\,[\mu(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{k-1}\bar{\delta}_i(\mathbf{x}) - R_{\mathbf{x}}]^+,$$

$$\mu_{k+1}(\mathbf{x}) = \mu_k(\mathbf{x}) - \bar{\delta}_k(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{k}\bar{\delta}_i(\mathbf{x}).$$

Nyní můžeme za míru rizika vzít

$$\bar{\delta}_w^{(m)}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} w_k \bar{\delta}_k(\mathbf{x}),$$

kde $1 = w_1 \geq w_2 \geq ,..., \geq w_m \geq 0$.
Míra rizika $\bar{\delta}_w^{(m)}(\mathbf{x})$ jde také vyjádřit jako $\mathsf{E}\{u([\mu(\mathbf{x}) - R_{\mathbf{x}}]^+)\}$, pro u rostoucí po částech lineární funkci s body zlomu $b_k(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \mu_k(\mathbf{x})$ a směrnicemi $s_k = w_1 + ,..., + w_k$ pro $k = 1,...,m$. Z tohoto důvodu se tato míra v anglické literatuře nazývá mean penalized semideviation, čili polo-odchylka s penalizací (Mansini a kol., 2003).
Nyní přejdeme k příslušné míře bezpečnosti $\mu_{\bar{\delta}_w^{(m)}}(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \bar{\delta}_w^{(m)}(\mathbf{x})$. Tato míra bezpečnosti je SSD konzistentní (Michalowski a kol., 2000) a platí také, že $-\mu_{\bar{\delta}_w^{(m)}}(\mathbf{x})$ je koherentní mírou rizika (Mansini a kol., 2003).

Věta 12. *Míru rizika $-\mu_{\bar{\delta}_w^{(m)}}(\boldsymbol{x})$ je pro diskrétní náhodnou veličinu možno spočítat jako úlohu lineárního programování*

$$\begin{aligned}
-\mu_{\bar{\delta}_w^{(m)}}(\boldsymbol{x}) = \min \quad & \{\sum_{k=1}^{m} w_k z_k - \sum_{t=1}^{T} y_t p_t\}, \\
s.t. \quad & z_k = \sum_{t=1}^{T} d_{kt} p_t,\ k = 1, \ldots, m, \\
& d_{kt} \geq \sum_{j=1}^{n} (\mu_j - r_{jt}) x_j - \sum_{i=1}^{k-1} z_i,\ k = 1, \ldots, m; t = 1, \ldots, T. \\
& d_{kt} \geq 0,\ k = 1, \ldots, m; t = 1, \ldots, T.
\end{aligned}$$

Úloha optimalizace portfolia 1.2 je s mírou rizika $-\mu_{\bar{\delta}_w^{(m)}}(\boldsymbol{x})$ pro diskrétní náhodnou veličinu řešitelná pomocí lineárního programování jako

$$\begin{aligned}
\min \quad & \{\sum_{k=1}^{m} w_k z_k - \sum_{t=1}^{T} y_t p_t\}, \\
s.t. \quad & z_k = \sum_{t=1}^{T} d_{kt} p_t,\ k = 1, \ldots, m, \\
& d_{kt} \geq \sum_{j=1}^{n} (\mu_j - r_{jt}) x_j - \sum_{i=1}^{k-1} z_i,\ d_{kt}, \geq 0,\ k = 1, \ldots, m; t = 1, \ldots, T, \\
& \boldsymbol{x} \in X,\ \sum_{t=1}^{T} y_t p_t \geq \mu_0.
\end{aligned}$$

Zbývá problém, jak vhodně zvolit váhy $1 = w_1 \geq w_2 \geq ,..., \geq w_m \geq 0$. To je možné vyřešit zavedením parametru $a \in (0,1]$ a definováním

$$w_k = a^{k-1}, k = 1,...,m, \tag{3.1}$$

jako v (Mansini a kol., 2003).

Kapitola 4

Minimax

V této kapitole si uvedeme intuitivní a výpočetně nenáročný model nazvaný minimax. Tento model se poprvé objevuje v (Young, 1998), a to za pomoci míry bezpečnosti, kterou nazýváme nejhorší realizace. Pro naše účely přejdeme formálně k míře rizika definované jako opačná hodnota nejhorší realizace. Dále uvádíme souhrn základních vlastností.
Uvažujme diskrétní rovnoměrně rozdělenou náhodnou veličinu $R_{\mathbf{x}}$ udávající zisk portfolia. Nyní můžeme hledat vhodné portfolio, tak abychom minimalizovali ztrátu přes všechny možné scénáře.

Definice 20. *Zvolme scénáře* 1,...,T. *Označme minimální ztrátu přes všechny scénáře jako*

$$M(\boldsymbol{x}) = \min_{t=1,..,T}(-y_t).$$

Dostáváme míru bezpečnosti, která se nazývá nejhorší realizace. Nyní můžeme přejít k míře rizika $-M(\boldsymbol{x})$. *Model 1.2 s mírou rizika* $-M(\boldsymbol{x})$ *se nazývá minimax.*

Jak je vidět již z definice, tak tato míra rizika bere v úvahu jen hodnoty ztráty v nejhorším případě. Dala by se tedy označit za velmi hrubou míru rizika.

Věta 13. *Míra rizika* $-M(\boldsymbol{x})$ *je pro diskrétní náhodnou veličinu řešitelná pomocí lineárním programování*

$$-M(\boldsymbol{x}) = \min\{-\nu : \nu \leq \sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j, t = 1,...,T\}.$$

Úloha optimalizace portfolia 1.2 je s mírou rizika -M($\boldsymbol{x}$*) pro diskrétní náhodnou veličinu řešitelná pomocí lineárním programování jako*

$$-M(\boldsymbol{x}) = \min\{-\nu : \nu \leq \sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j, t = 1,...,T, \boldsymbol{x} \in X, \mu(\boldsymbol{x}) \geq \mu_0\}.$$

Věta 14. *(Ogryczak a Ruszczyński, 2002b) Nejhorší realizace M(*$\boldsymbol{x}$*) je SSD konzistentní míra bezpečnosti.*

Věta 15. *(Mansini a kol., 2003) Míra rizika* $-M$ *je koherentní mírou rizika.*

Věta 16. *(Ogryczak a Ruszczyński, 2002b) Nechť* $\boldsymbol{x} \in X$ *je pevné. Potom pro* β *jdoucí k* 1 *zleva jde* $\phi_\beta(\boldsymbol{x})$ *k* $-M(\boldsymbol{x})$.

Kapitola 5

Numerická část

V této části jsou zkoumané míry rizika uplatněny na finanční data z frankfurtské akciové burzy. Přesněji jde o akcie z indexu DAX se symboly ADS.DE, ALV.DE, BAS.DE, BAYN.DE, BEI.DE, BMW.DE, CBK.DE, DAI.DE, DB1.DE, DBK.DE. Celkový počet akcií N je 10. Dále označme $T+1$ počet týdnů ve sledovaném období. Nyní můžeme vypočíst r_{nt} je relativní výnos n-té akcie v t-tém týdnu vzorcem:

$$r_{nt} = \frac{H_{t+1,n} - H_{t,n}}{H_{t,n}}, \quad t = 1,..,T \text{ a } n = 1,...,N,$$

kde $H_{t,n}$ je cena n-té akcie v t-tém týdnu. Data neberou ohled na dividendy. Výpočty byly provedeny v programu Wolfram Mathematica 9.0 funkcí LinearProgramming. Hodnoceny byly následující modely: minimax (Věta 13), podmíněná hodnota v riziku (Věta 6) třikrát s parametry $\beta = 0{,}9, \beta = 0{,}75$ a $\beta = 0{,}5$ (dále značeno CVAR[0,9], CVAR[0,75] a CVAR[0,5]), MAD-Model (Věta 11), m-MAD-model (Věta 12) s parametry $m \in \{2{,}3\}$ a $a = 0.75$ (Vzorec 3.1) a nakonec vážená podmíněná hodnota v riziku (Věta 7) s parametry $\beta_1 = 0{,}9, \beta_2 = 0{,}75, \beta_3 = 0{,}5$. Nastavení vah bylo zvoleno pro širokou váženou podmíněnou hodnotu v riziku 2.4 (dále WeighedCVAR) i pro chvostovou váženou podmíněnou hodnotu v riziku 2.5 (dále WideCVAR). Hodnoty vah ve vážených modelech uvádí tabulka 5.1. Všimněme si, že w_0 je u obou modelech vážené podmíněné hodnoty v riziku dosti vysoká. Oba tyto modely se tedy budou snažit o maximalizaci očekávaného výnosu s váhou w_0.

	w_0	w_1	w_2	w_3
2-MAD	x	1	0,75	x
3-MAD	x	1	0,75	0,5625
WeightCVAR[2]	0,75	0,025	0,225	x
WeightCVAR[3]	0,5	0,025	0,1	0,375
WideCVAR[2]	x	0,4	0,6	x
WideCVAR[3]	x	0,1	0,4	0,5

Tabulka 5.1: Váhy pro víceparametrické modely.

Počet pomocných proměnných a pomocných omezení v úloze lineárního programování pro výpočet jednotlivých měr rizika uvádí tabulka 5.2, kde vidíme, že

minimax má z modelů nejméně pomocných proměnných. Naproti tomu u vážené podmíněné hodnoty v riziku a m-MAD modelu roste počet proměnných i omezení v závislosti na m, a to přibližně T-násobně.

Míra rizika	$\rho(\mathbf{x})$		Pomocné proměnné	Pomocná omezení
MINIMAX	$-M(\mathbf{x})$	Věta 13	2	T
CVAR	$\phi_\beta(\mathbf{x})$	Věta 6	T+2	T
MAD	$-\mu_{\bar{\delta}}(\mathbf{x})$	Věta 11	T	T
m-MAD	$-\mu_{\bar{\delta}_w^{(m)}}(\mathbf{x})$	Věta 12	mT	mT
WCVAR	$\phi_w^{(m)}(\mathbf{x})$	Věta 7	m(T+2)	mT

Tabulka 5.2: Pomocné proměnné a omezení.

5.1 Optimalizace portfolia

V této části jsou použita data z vybraných akcií v období mezi 1.1.2011 a 30.12.2013. Data byla vybrána týdenní a celkem šlo tedy o období o délce $T+1 =$ 157 týdnů. Pravděpodobnost p_t byla zvolena konstantní $p_t = \frac{1}{T}$, $t = 1,...,T$. Za minimální požadovaný výnos μ_0 byla brána čísla 0,35 % až 0,5 % s krokem 0,03 %. Celkem tedy bylo provedeno šest měření. U $\mu_0 = 0{,}35$ % je očekávaný výnos všech nalezených portfolií definovaných tabulkou 5.3 vyšší než μ_0, a tedy jde v jistém smyslu o nejbezpečnější portfolia.

V tabulce 5.3 také vidíme, že se všechny modely omezily pouze na čtveřici akcií.

	ADS.DE	BAYN.DE	BEI.DE	DB1.DE
MINIMAX	0,015	0,	0,713	0,272
CVAR[0,9]	0,	0,	0,796	0,204
CVAR[0,75]	0,031	0,	0,791	0,178
CVAR[0,5]	0,058	0,037	0,745	0,159
MAD	0,062	0,102	0,723	0,113
2-MAD	0,058	0,029	0,798	0,115
3-MAD	0,029	0,029	0,777	0,165
WeightCVAR[2]	0,104	0,031	0,759	0,106
WeightCVAR[3]	0,056	0,044	0,749	0,15
WideCVAR[2]	0,	0,	0,797	0,203
WideCVAR[3]	0,034	0,	0,781	0,185

Tabulka 5.3: Optimálních portfolia v letech 2011-2014 s $\mu_0 = 0{,}35$ %.

Většinový podíl všechny modely přisoudily akciím BEI.DE. Akcie DB1.DE jsou také obsaženy ve všech optimálních portfoliích. Zbylé dvě využité akcie jsou akcie s vyšším očekávaným výnosem, okolo 0,5 %. Akcie BEI.DE má očekávaný výnos 0,04 % a k tomu také z této čtveřice nejnižší směrodatnou odchylku. Akcie DB1.DE má očekávaný výnos 0,2 % a nejvyšší směrodatnou odchylku.

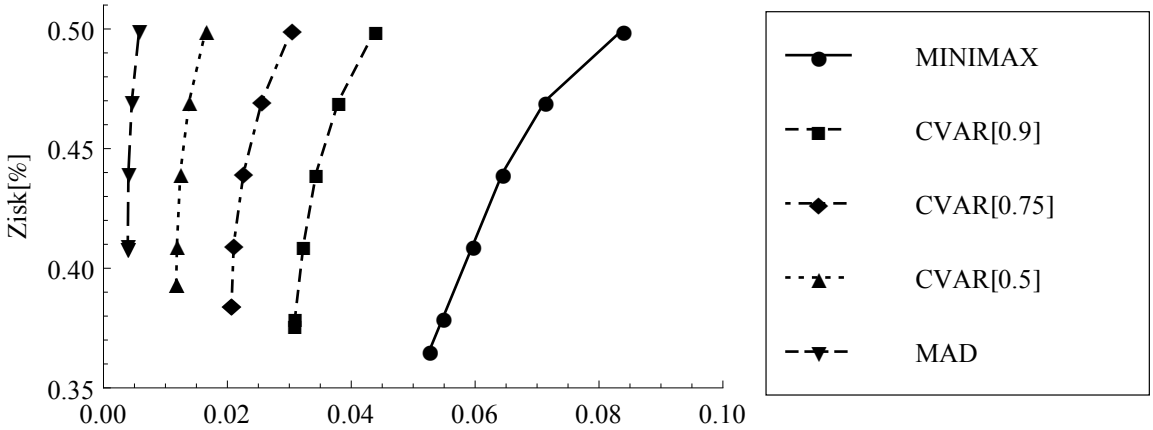
Shrnutí základních charakteristik portfolií s $\mu_0 = 0{,}35$ % uvádíme v tabulce 5.4.

Shrnutí všech výsledných optimálních portfolií v příloze.
Očekávaný zisk v tabulce 5.4 udává průměrný výnos optimálního portfolia za sledované období. Diverzita portfolia počítá, kolik různých akcií má v optimálním portfoliu podíl nad 10^{-6}. Dále je uveden nejvyšší a nejnižší podíl (vyšší než 10^{-6}) v portfoliu.
Další zajímavým hodnocením jednotlivých modelů je graf závislosti požadovaného

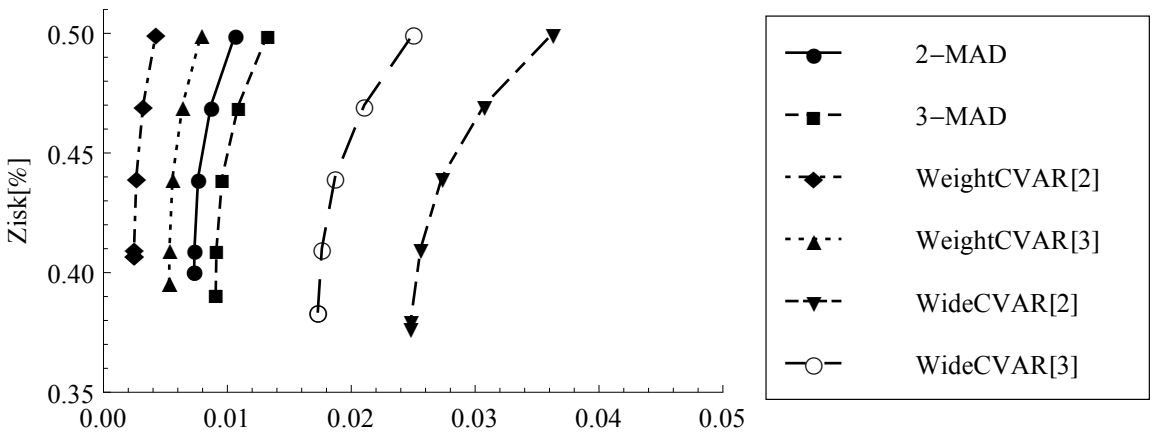
	Očekávaný zisk[%]	Diverzita	Max. podíl	Min. podíl
MINIMAX	0,366	3	0,713	0,015
CVAR[0,9]	0,377	2	0,796	0,204
CVAR[0,75]	0,385	3	0,791	0,031
CVAR[0,5]	0,394	4	0,745	0,037
MAD	0,409	4	0,723	0,062
2-MAD	0,402	4	0,798	0,029
3-MAD	0,39	4	0,777	0,029
WeightCVAR[2]	0,408	4	0,759	0,031
WeightCVAR[3]	0,396	4	0,749	0,044
WideCVAR[2]	0,377	2	0,797	0,203
WideCVAR[3]	0,384	3	0,781	0,034

Tabulka 5.4: Charakteristiky optimálních portfolií v letech 2011-2014 s $\mu_0 =$ 0,35 %.

zisku na hodnotách míry rizika. Možnost použít takový graf nám umožňuje vlastnost translační invariance z definice 3 a to, že všechny použité míry rizika jsou koherentní. Pro přehlednost jsou míry rizika rozdělené do dvou grafů. Míry rizika minimax, CVaR a MAD jsou v grafu 5.1 a míry rizika m-MAD,WCVaR jsou v grafu 5.2.



Obrázek 5.1: Graf závislosti funkční hodnoty na zisku - modely s jedním parametrem



Obrázek 5.2: Graf závislosti funkční hodnoty na zisku - modely s více paramtery

5.2 Výkonnost portfolia v následujícím období

Tradičním způsobem srovnání optimálních portfolií je jejich aplikace na data v nadcházejícím období. V této části se hodnotí optimální portfolia vypočtená v předchozí sekci na datech z období od 1.1.2014 do 1.1.2015 opět po týdnech. Celkem jde o $T + 1 = 52$ týdnů.
Hodnocení optimálních portfolií s $\mu_0 = 0{,}35$ % je možno nalézt v tabulce 5.5. U vybraných portfolií se hodnotí počet týdnů, kdy se dosáhl zisk vyšší, než byl požadovaný zisk μ_0. Počet takových týdnů je označen #. Dále je uveden minimální zisk, průměrný zisk, medián zisku, maximální zisk; vše v procentech. Další možností, jak hodnotit výsledné zisky, je použit odchylky od průměru. Zvolili jsme střední absolutní odchylku (MAD) a směrodatnou odchylku (sd).
Vidíme, že průměrný zisk u všech vybraných portfolií v roce 2014 je záporný. To

	#[a]	Min[%]	Průměr[%]	Medián[%]	Max[%]	MAD[b]	sd[c]
MINIMAX	25	-4,928	-0,06	0,22	3,652	1,712	2,06
CVAR[0,9]	26	-5,035	-0,063	0,212	3,781	1,717	2,079
CVAR[0,75]	26	-5,073	-0,089	0,266	3,83	1,741	2,092
CVAR[0,5]	26	-5,151	-0,096	0,239	3,985	1,77	2,113
MAD	24	-5,313	-0,084	0,083	4,28	1,795	2,152
2-MAD	25	-5,209	-0,108	0,136	4,042	1,777	2,134
3-MAD	26	-5,133	-0,079	0,194	3,947	1,748	2,102
WeightCVAR[2]	25	-5,221	-0,139	0,139	4,066	1,809	2,157
WeightCVAR[3]	26	-5,175	-0,095	0,216	4,023	1,772	2,118
WideCVAR[2]	26	-5,037	-0,064	0,211	3,783	1,717	2,08
WideCVAR[3]	26	-5,062	-0,089	0,266	3,817	1,742	2,09

Pozn: [a] # značí počet období se splněnou podmínkou zisk $\geq \mu_0$.
Pozn: [b] MAD značí střední absolutní odchylku.
Pozn: [c] sd značí směrodatnou odchylku.

Tabulka 5.5: Charakteristiky optimálních portfolií v roce 2014 s $\mu_0 = 0{,}35$ %.

odpovídá celkovému vývoji všech deseti zvolených akcií, které měly průměrnou ztrátu 0,008 %. Čtveřice akcií, které jsou obsaženy v portfoliích, tedy akcie se

symboly ADS.DE, BAYN.DE, BEI.DE, DB1.DE, si vedla v jednotlivých charakteristikách dle tabulky 5.6.
Dále si můžeme všimnout, že pro minimálně riziková portfolia je medián vždy větší než průměrný výnos viz. tabulka 5.5. Zajímavé je, že jedině akcie DB1.DE mají nižší medián než průměrný výnos. Je také možné si povšimnout vysokého mediánu akcií ADS.DE. Celkově je vhodné zhodnotit, že akcie BEI.DE, které všechny modely vybraly s většinovým podílem, mají nejnižší střední absolutní odchylku i směrodatnou odchylku, dokonce z celé desítky uvažovaných akcií. Každý model také vybral akcie DB1.DE, které mají také nízkou směrodatnou odchylku i střední absolutní odchylku. Podíváme-li se do příloh (tabulky A.4, A.7, A.10,

	ADS.DE	BAYN.DE	BEI.DE	DB1.DE
Průměrný zisk	-0,759	0,268	-0,103	0,092
MAD[a]	2,941	2,418	1,775	2,085
sd[b]	4,048	3,134	2,223	2,672
Medián	0,481	0,315	0,236	-0,066

Pozn: [a] MAD značí střední absolutní odchylku.
Pozn: [b] sd značí směrodatnou odchylku.

Tabulka 5.6: Charakteristiky akcií v roce 2014.

A.13, A.16) na složení portfolií s vyšším požadovaným výnosem μ_0, můžeme zaznamenat posun k akciím s vyšším očekávaným výnosem ADS.DE a BAYN.DE. Tím u většiny modelů roste diverzita. Zlom poté nastává u $\mu_0 = 0{,}47$ %, kde všechny modely vypouští akcie DB1.DE, které mají nízký očekávaný výnos (tabulka A.13). Nejvíce na to doplácí minimax a podmíněná hodnota v riziku s parametrem $\beta = 0{,}9$, které mají nejhorší výsledek v očekávaném zisku, mediánu i minimálním zisku (tabulka A.15).

Závěr

V práci je zkoumán dvou-kriteriální problém optimalizace portfolia. Po zavedení nezbytných pojmů jsou zde charakterizovány tři míry rizika vedoucí pro diskrétně rozdělenou náhodnou veličinu na úlohu lineárního programování.
První mírou rizika je podmíněná hodnota v riziku. Pro tuto míru rizika je uveden důkaz fundamentální minimalizační formule, která umožňuje řešit úlohu hledání optimálního portfolia metodami lineárního programování. Jedná se o koherentní míru rizika, která navíc v opačné hodnotě splňuje SSD konzistenci.
Druhou popsanou mírou rizika je střední absolutní odchylka. Byl ukázán vztah mezi střední absolutní odchylkou a dolní polo-odchylkou. Dále jsou uvedeny vlastnosti koherence a SSD bezpečné konzistence.
Třetí zkoumanou mírou rizika je opačná hodnota k nejhorší realizaci. Tato míra rizika je zavedena pomocí míry bezpečnosti nejhorší realizace. Opačná hodnota je SSD konzistentní a její opačná hodnota je koherentní.
V numerické části jsou získané modely použité na finanční data z Německé akciové burzy z let 2011, 2012 a 2013. Použitím různých parametrů u zkoumaných modelů jsme získali celkem jedenáct vybraných portfolií pro každý ze šestice minimálních požadovaných výnosů. V těchto portfoliích jsou obsaženy maximálně čtyři z desíti uvažovaných akcií. Pro každé portfolio jsme určili základní charakteristiky. Ukázalo se, že MAD-modely a modely se širokou váženou podmíněnou hodnotou v riziku mají u portfolií s minimálním rizikem (tabulka A.2) vyšší očekávaný výnos než ostatní portfolia. Vysoký očekávaný výnos u portfolia s minimálním rizikem má také model s podmíněnou hodnotou v riziku s parametrem $\beta = 0{,}5$. Naopak nejnižší očekávaný zisk u nejméně rizikového portfolia má minimax. Většina vybraných portfolií má maximální podíl vyšší než 0,5. Z tohoto hlediska by se zdálo vhodné vynutit vyšší diverzifikaci, jako tomu bylo v (Mansini a kol., 2007).
V další části numerické studie jsme nalezená portfolia hodnotili dle výsledků v roce 2014. Rok 2014 nebyl pro akcie z našeho výběru příliš příznivý a průměrný zisk byl záporný. U nejbezpečnějších portfolií (tabulka A.3) si na průměrný zisk nejlépe vedl minimax, který byl ve ztrátě pouze 0,06 %. Nejhůře si vedla široká vážená podmíněná hodnota v riziku s dvojicí parametrů. U nejbezpečnějších portfolií za zhodnocení také stojí nejvyšší medián, kterého dosáhla podmíněná hodnota v riziku s parametrem $\beta = 0{,}75$ a chvostová vážená podmíněná hodnota v riziku s trojicí parametrů. Výsledky podmíněná hodnoty v riziku s parametrem $\beta = 0{,}75$ jsou obecně dobré i se zvyšujícím se požadovaným výnosem.
Zvolené míry rizika jsou studovány teoreticky i na reálných datech z finančních trhů. Pro lepší porovnání jednotlivých modelů zvláště z hlediska diverzifikace by bylo vhodné podstatně rozšířit množinu uvažovaných akcií, jak tomu je například u (Mansini a kol., 2003). V teoretické části byl z kapacitních důvodů vynechán ge-

ometrický význam měr rizika řešitelných pomocí lineárního programování, jakožto měr disperzního prostoru či duálního disperzního prostoru (Ogryczak a Ruszczyński, 2002a). Pro případné rozšíření práce by se nabízelo tuto část doplnit.

Literatura

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. a Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, **9**(3), 203–228.

Konno, H. a Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to tokyo stock market. *Management science*, **37**(5), 519–531.

Mansini, R., Ogryczak, W. a Speranza, M. G. (2003). Lp solvable models for portfolio optimization: A classification and computational comparison. *IMA Journal of Management Mathematics*, **14**(3), 187–220.

Mansini, R., Ogryczak, W. a Speranza, M. G. (2007). Conditional value at risk and related linear programming models for portfolio optimization. *Annals of operations research*, **152**(1), 227–256.

Mansini, R., Ogryczak, W. a Speranza, M. G. (2014). Twenty years of linear programming based portfolio optimization. *European Journal of Operational Research*, **234**(2), 518–535.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, **7**(1), 77–91.

Michalowski, W., Ogryczak, W. a of Ottawa. Faculty of Administration, U. (2000). *Extending the MAD Portfolio Optimization Model to Incorporate Downside Risk Aversion*. Working paper (University of Ottawa. Faculty of Administration). Faculty of Administration, University of Ottawa. URL `http://books.google.cz/books?id=2HDOoAEACAAJ`.

Ogryczak, W. (2000). Multiple criteria linear programming model for portfolio selection. *Annals of Operations Research*, **97**(1-4), 143–162.

Ogryczak, W. a Ruszczyński, A. (1999). From stochastic dominance to mean-risk models: Semideviations as risk measures. *European Journal of Operational Research*, **116**(1), 33–50.

Ogryczak, W. a Ruszczyński, A. (2002a). Dual stochastic dominance and related mean-risk models. *SIAM Journal on Optimization*, **13**(1), 60–78.

Ogryczak, W. a Ruszczyński, A. (2002b). Dual stochastic dominance and quantile risk measures. *International Transactions in Operational Research*, **9** (5), 661–680.

Pflug, G. C. (2000). Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk. In *Probabilistic constrained optimization*, pages 272–281. Springer.

Rockafellar, R. T. (1970). *Convex analysis*. Princeton University Press.

Rockafellar, R. T. a Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of risk*, **2**, 21–42.

Rockafellar, R. T. a Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of banking & finance*, **26**(7), 1443–1471.

Yitzhaki, S. (1982). Stochastic dominance, mean variance, and gini's mean difference. *The American Economic Review*, pages 178–185.

Young, M. R. (1998). A minimax portfolio selection rule with linear programming solution. *Management science*, **44**(5), 673–683.

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Příloha A

Tabulky

	ADS.DE	BAYN.DE	BEI.DE	DB1,DE
MINIMAX	0,015	0,	0,713	0,272
CVAR[0,9]	0,	0,	0,796	0,204
CVAR[0,75]	0,031	0,	0,791	0,178
CVAR[0,5]	0,058	0,037	0,745	0,159
MAD	0,062	0,102	0,723	0,113
2-MAD	0,058	0,029	0,798	0,115
3-MAD	0,029	0,029	0,777	0,165
WeightCVAR[2]	0,104	0,031	0,759	0,106
WeightCVAR[3]	0,056	0,044	0,749	0,15
WideCVAR[2]	0,	0,	0,797	0,203
WideCVAR[3]	0,034	0,	0,781	0,185

Tabulka A.1: Optimálních portfolia v letech 2011-2014 s $\mu_0 = 0{,}35$ %.

	Očekávaný zisk	Diverzita	Max. podíl	Min. podíl
MINIMAX	0,366	3	0,713	0,015
CVAR[0,9]	0,377	2	0,796	0,204
CVAR[0,75]	0,385	3	0,791	0,031
CVAR[0,5]	0,394	4	0,745	0,037
MAD	0,409	4	0,723	0,062
2-MAD	0,402	4	0,798	0,029
3-MAD	0,39	4	0,777	0,029
WeightCVAR[2]	0,408	4	0,759	0,031
WeightCVAR[3]	0,396	4	0,749	0,044
WideCVAR[2]	0,377	2	0,797	0,203
WideCVAR[3]	0,384	3	0,781	0,034

Tabulka A.2: Charakteristiky optimálních portfolií v letech 2011-2014 s $\mu_0 = 0{,}35$ %.

	#	Min[%]	Průměr[%]	Medián[%]	Max[%]	MAD	sd
MINIMAX	25	-4,928	-0,06	0,22	3,652	1,712	2,06
CVAR[0,9]	26	-5,035	-0,063	0,212	3,781	1,717	2,079
CVAR[0,75]	26	-5,073	-0,089	0,266	3,83	1,741	2,092
CVAR[0,5]	26	-5,151	-0,096	0,239	3,985	1,77	2,113
MAD	24	-5,313	-0,084	0,083	4,28	1,795	2,152
2-MAD	25	-5,209	-0,108	0,136	4,042	1,777	2,134
3-MAD	26	-5,133	-0,079	0,194	3,947	1,748	2,102
WeightCVAR[2]	25	-5,221	-0,139	0,139	4,066	1,809	2,157
WeightCVAR[3]	26	-5,175	-0,095	0,216	4,023	1,772	2,118
WideCVAR[2]	26	-5,037	-0,064	0,211	3,783	1,717	2,08
WideCVAR[3]	26	-5,062	-0,089	0,266	3,817	1,742	2,09

Tabulka A.3: Charakteristiky optimálních portfolií v roce 2014 s $\mu_0 = 0{,}35$ %.

	ADS.DE	BAYN.DE	BEI.DE	DB1,DE
MINIMAX	0,088	0,	0,679	0,232
CVAR[0,9]	0,	0,	0,811	0,189
CVAR[0,75]	0,031	0,	0,791	0,178
CVAR[0,5]	0,058	0,037	0,745	0,159
MAD	0,062	0,102	0,723	0,113
2-MAD	0,059	0,029	0,798	0,115
3-MAD	0,054	0,015	0,773	0,159
WeightCVAR[2]	0,104	0,031	0,759	0,106
WeightCVAR[3]	0,056	0,044	0,749	0,15
WideCVAR[2]	0,	0,	0,811	0,189
WideCVAR[3]	0,036	0,	0,779	0,186

Tabulka A.4: Optimálních portfolia v letech 2011-2014 s $\mu_0 = 0{,}38$ %.

	Očekávaný zisk	Diverzita	Max. podíl	Min. podíl
MINIMAX	0,38	3	0,679	0,088
CVAR[0,9]	0,38	2	0,811	0,189
CVAR[0,75]	0,385	3	0,791	0,031
CVAR[0,5]	0,394	4	0,745	0,037
MAD	0,409	4	0,723	0,062
2-MAD	0,402	4	0,798	0,029
3-MAD	0,392	4	0,773	0,015
WeightCVAR[2]	0,408	4	0,759	0,031
WeightCVAR[3]	0,396	4	0,749	0,044
WideCVAR[2]	0,38	2	0,811	0,189
WideCVAR[3]	0,384	4	0,779	0,

Tabulka A.5: Charakteristiky optimálních portfolií v letech 2011-2014 s $\mu_0 = 0{,}38$ %.

	#	Min[%]	Průměr[%]	Medián[%]	Max[%]	MAD	sd
MINIMAX	25	-4,984	-0,116	0,228	3,727	1,767	2,093
CVAR[0,9]	26	-5,06	-0,067	0,202	3,81	1,72	2,086
CVAR[0,75]	26	-5,073	-0,089	0,266	3,83	1,741	2,092
CVAR[0,5]	26	-5,152	-0,097	0,24	3,984	1,77	2,113
MAD	24	-5,314	-0,084	0,083	4,279	1,795	2,152
2-MAD	25	-5,21	-0,109	0,136	4,041	1,777	2,134
3-MAD	26	-5,121	-0,102	0,275	3,912	1,763	2,108
WeightCVAR[2]	25	-5,223	-0,139	0,139	4,066	1,809	2,158
WeightCVAR[3]	26	-5,176	-0,095	0,216	4,024	1,772	2,118
WideCVAR[2]	26	-5,06	-0,067	0,202	3,81	1,72	2,086
WideCVAR[3]	26	-5,061	-0,09	0,265	3,815	1,743	2,09

Tabulka A.6: Charakteristiky optimálních portfolií v roce 2014 s $\mu_0 = 0{,}38$ %.

	ADS.DE	BAYN.DE	BEI.DE	DB1,DE
MINIMAX	0,245	0,	0,608	0,147
CVAR[0,9]	0,	0,116	0,803	0,081
CVAR[0,75]	0,108	0,031	0,766	0,095
CVAR[0,5]	0,088	0,081	0,722	0,108
MAD	0,069	0,104	0,718	0,11
2-MAD	0,092	0,066	0,739	0,103
3-MAD	0,098	0,054	0,748	0,1
WeightCVAR[2]	0,108	0,031	0,766	0,095
WeightCVAR[3]	0,088	0,077	0,729	0,106
WideCVAR[2]	0,103	0,03	0,776	0,091
WideCVAR[3]	0,105	0,053	0,738	0,103

Tabulka A.7: Optimálních portfolia v letech 2011-2014 s $\mu_0 = 0{,}41$ %.

	Očekávaný zisk	Diverzita	Max. podíl	Min. podíl
MINIMAX	0,41	3	0,608	0,147
CVAR[0,9]	0,41	3	0,803	0,081
CVAR[0,75]	0,41	4	0,766	0,031
CVAR[0,5]	0,41	4	0,722	0,081
MAD	0,41	4	0,718	0,069
2-MAD	0,41	4	0,739	0,066
3-MAD	0,41	4	0,748	0,054
WeightCVAR[2]	0,41	4	0,766	0,031
WeightCVAR[3]	0,41	4	0,729	0,077
WideCVAR[2]	0,41	4	0,776	0,03
WideCVAR[3]	0,41	4	0,738	0,053

Tabulka A.8: Charakteristiky optimálních portfolií v letech 2011-2014 s $\mu_0 = 0{,}41$ %.

	#	Min[%]	Průměr[%]	Medián[%]	Max[%]	MAD	sd
MINIMAX	25	-5,478	-0,235	0,23	3,886	1,905	2,26
CVAR[0,9]	24	-5,388	-0,045	-0,015	4,384	1,775	2,165
CVAR[0,75]	25	-5,241	-0,144	0,104	4,088	1,813	2,166
CVAR[0,5]	24	-5,29	-0,11	0,061	4,22	1,807	2,159
MAD	24	-5,321	-0,089	0,07	4,291	1,8	2,157
2-MAD	25	-5,277	-0,119	0,058	4,183	1,808	2,16
3-MAD	25	-5,264	-0,128	0,075	4,149	1,81	2,161
WeightCVAR[2]	25	-5,241	-0,144	0,104	4,088	1,813	2,166
WeightCVAR[3]	24	-5,288	-0,111	0,053	4,212	1,807	2,159
WideCVAR[2]	25	-5,244	-0,142	0,092	4,089	1,81	2,165
WideCVAR[3]	25	-5,257	-0,132	0,093	4,141	1,814	2,163

Tabulka A.9: Charakteristiky optimálních portfolií v roce 2014 s $\mu_0 = 0{,}41$ %.

	ADS.DE	BAYN.DE	BEI.DE	DB1,DE
MINIMAX	0,402	0,	0,536	0,062
CVAR[0,9]	0,209	0,13	0,632	0,029
CVAR[0,75]	0,165	0,15	0,668	0,017
CVAR[0,5]	0,177	0,121	0,694	0,009
MAD	0,217	0,116	0,641	0,026
2-MAD	0,214	0,104	0,662	0,019
3-MAD	0,214	0,104	0,662	0,019
WeightCVAR[2]	0,165	0,146	0,674	0,015
WeightCVAR[3]	0,189	0,135	0,654	0,021
WideCVAR[2]	0,166	0,144	0,677	0,014
WideCVAR[3]	0,171	0,142	0,671	0,016

Tabulka A.10: Optimálních portfolia v letech 2011-2014 s $\mu_0 = 0{,}44$ %.

	Očekávaný zisk	Diverzita	Max. podíl	Min. podíl
MINIMAX	0,44	3	0,536	0,062
CVAR[0,9]	0,44	4	0,632	0,029
CVAR[0,75]	0,44	4	0,668	0,017
CVAR[0,5]	0,44	4	0,694	0,009
MAD	0,44	4	0,641	0,026
2-MAD	0,44	4	0,662	0,019
3-MAD	0,44	4	0,662	0,019
WeightCVAR[2]	0,44	4	0,674	0,015
WeightCVAR[3]	0,44	4	0,654	0,021
WideCVAR[2]	0,44	4	0,677	0,014
WideCVAR[3]	0,44	4	0,671	0,016

Tabulka A.11: Charakteristiky optimálních portfolií v letech 2011-2014 s $\mu_0 = 0{,}44$ %.

	#	Min[%]	Průměr[%]	Medián[%]	Max[%]	MAD	sd
MINIMAX	21	-8,095	-0,354	0,122	4,044	2,065	2,536
CVAR[0,9]	24	-5,471	-0,187	0,096	4,525	1,924	2,309
CVAR[0,75]	24	-5,522	-0,153	0,004	4,613	1,906	2,282
CVAR[0,5]	23	-5,493	-0,173	0,03	4,536	1,909	2,287
MAD	23	-5,455	-0,198	0,113	4,485	1,927	2,314
2-MAD	23	-5,45	-0,201	0,108	4,462	1,925	2,311
3-MAD	23	-5,45	-0,201	0,108	4,462	1,925	2,311
WeightCVAR[2]	23	-5,519	-0,155	0,005	4,604	1,906	2,282
WeightCVAR[3]	23	-5,492	-0,173	0,054	4,558	1,915	2,295
WideCVAR[2]	23	-5,518	-0,156	0,005	4,599	1,906	2,282
WideCVAR[3]	23	-5,512	-0,16	0,016	4,589	1,908	2,285

Tabulka A.12: Charakteristiky optimálních portfolií v roce 2014 s $\mu_0 = 0{,}44$ %.

	ADS.DE	BAYN.DE	BEI.DE	DB1,DE
MINIMAX	0,542	0,065	0,393	0,
CVAR[0,9]	0,531	0,077	0,392	0,
CVAR[0,75]	0,334	0,282	0,384	0,
CVAR[0,5]	0,415	0,198	0,387	0,
MAD	0,423	0,189	0,388	0,
2-MAD	0,413	0,2	0,387	0,
3-MAD	0,394	0,22	0,386	0,
WeightCVAR[2]	0,355	0,26	0,385	0,
WeightCVAR[3]	0,415	0,198	0,387	0,
WideCVAR[2]	0,394	0,22	0,386	0,
WideCVAR[3]	0,388	0,226	0,386	0,

Tabulka A.13: Optimálních portfolia v letech 2011-2014 s $\mu_0 = 0{,}47$ %.

	Očekávaný zisk	Diverzita	Max. podíl	Min. podíl
MINIMAX	0,47	3	0,542	0,065
CVAR[0,9]	0,47	3	0,531	0,077
CVAR[0,75]	0,47	3	0,384	0,282
CVAR[0,5]	0,47	3	0,415	0,198
MAD	0,47	3	0,423	0,189
2-MAD	0,47	3	0,413	0,2
3-MAD	0,47	3	0,394	0,22
WeightCVAR[2]	0,47	3	0,385	0,26
WeightCVAR[3]	0,47	3	0,415	0,198
WideCVAR[2]	0,47	3	0,394	0,22
WideCVAR[3]	0,47	3	0,388	0,226

Tabulka A.14: Charakteristiky optimálních portfolií v letech 2011-2014 s $\mu_0 = 0{,}47$ %.

	#	Min[%]	Průměr[%]	Medián[%]	Max[%]	MAD	sd
MINIMAX	22	-10,551	-0,434	-0,229	5,016	2,256	2,863
CVAR[0,9]	21	-10,379	-0,423	-0,206	4,986	2,244	2,842
CVAR[0,75]	22	-7,427	-0,218	0,168	5,064	2,08	2,572
CVAR[0,5]	23	-8,633	-0,301	0,048	4,796	2,14	2,66
MAD	23	-8,763	-0,31	0,04	4,767	2,147	2,672
2-MAD	23	-8,61	-0,3	0,049	4,801	2,139	2,658
3-MAD	22	-8,323	-0,28	0,092	4,865	2,124	2,634
WeightCVAR[2]	23	-7,74	-0,239	0,15	4,995	2,094	2,592
WeightCVAR[3]	23	-8,633	-0,301	0,048	4,796	2,14	2,66
WideCVAR[2]	22	-8,319	-0,28	0,093	4,866	2,124	2,634
WideCVAR[3]	22	-8,23	-0,273	0,115	4,885	2,119	2,627

Tabulka A.15: Charakteristiky optimálních portfolií v roce 2014 s $\mu_0 = 0{,}47$ %.

	ADS.DE	BAYN.DE	BEI.DE	DB1,DE
MINIMAX	0,638	0,307	0,055	0,
CVAR[0,9]	0,754	0,187	0,059	0,
CVAR[0,75]	0,549	0,401	0,051	0,
CVAR[0,5]	0,68	0,263	0,056	0,
MAD	0,641	0,304	0,055	0,
2-MAD	0,659	0,286	0,055	0,
3-MAD	0,615	0,332	0,053	0,
WeightCVAR[2]	0,549	0,4	0,051	0,
WeightCVAR[3]	0,638	0,307	0,054	0,
WideCVAR[2]	0,733	0,209	0,059	0,
WideCVAR[3]	0,602	0,345	0,053	0,

Tabulka A.16: Optimálních portfolia v letech 2011-2014 s $\mu_0 = 0{,}5$ %.

	Očekávaný zisk	Diverzita	Max. podíl	Min. podíl
MINIMAX	0,5	3	0,638	0,055
CVAR[0,9]	0,5	3	0,754	0,059
CVAR[0,75]	0,5	3	0,549	0,051
CVAR[0,5]	0,5	3	0,68	0,056
MAD	0,5	3	0,641	0,055
2-MAD	0,5	3	0,659	0,055
3-MAD	0,5	3	0,615	0,053
WeightCVAR[2]	0,5	3	0,549	0,051
WeightCVAR[3]	0,5	3	0,638	0,054
WideCVAR[2]	0,5	3	0,733	0,059
WideCVAR[3]	0,5	3	0,602	0,053

Tabulka A.17: Charakteristiky optimálních portfolií v letech 2011-2014 s $\mu_0 = 0{,}5$ %.

	#	Min[%]	Průměr[%]	Medián[%]	Max[%]	MAD	sd
MINIMAX	21	-12,556	-0,408	-0,092	7,207	2,447	3,225
CVAR[0,9]	21	-14,285	-0,528	-0,484	7,5	2,576	3,44
CVAR[0,75]	23	-11,209	-0,314	0,07	6,98	2,374	3,091
CVAR[0,5]	22	-13,186	-0,451	-0,163	7,314	2,492	3,298
MAD	21	-12,6	-0,411	-0,096	7,215	2,45	3,23
2-MAD	21	-12,865	-0,429	-0,121	7,259	2,467	3,26
3-MAD	22	-12,198	-0,383	-0,058	7,147	2,428	3,186
WeightCVAR[2]	23	-11,215	-0,315	0,07	6,981	2,375	3,091
WeightCVAR[3]	21	-12,552	-0,407	-0,091	7,207	2,447	3,224
WideCVAR[2]	22	-13,97	-0,506	-0,392	7,446	2,552	3,397
WideCVAR[3]	23	-12,008	-0,37	-0,04	7,115	2,418	3,166

Tabulka A.18: Charakteristiky optimálních portfolií v roce 2014 s $\mu_0 = 0{,}5$ %.