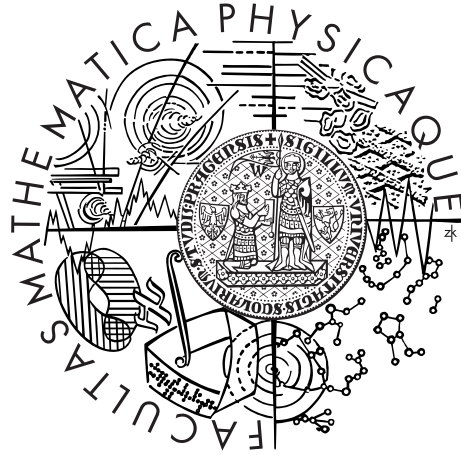


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Daniela Novotná

Náhodná pole faset

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2015

Chtěla bych na tom to místě upřímně poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce prof. RNDr. Viktoru Benešovi, DrSc. za všechny čas, který si na mě v průběhu práce vyhradil, za trpělivost, se kterou mi pomáhal pochopit téma a v neposlední řadě za velkou motivaci k dalšímu studiu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 22. 5. 2015

Daniela Novotná

Název práce: Náhodná pole faset

Autor: Daniela Novotná

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Proces faset je speciálním případem bodového procesu v Eukleidovském prostoru \mathbb{R}^d , kde body jsou reprezentované kompaktními podmnožinami nadrovin v \mathbb{R}^d s danou orientací, velikostí a tvarem. Zaměříme se na konečný proces faset s hustotou exponenciálního typu vzhledem k rozdělení Poissonova bodového procesu. Jeho submodel simulujeme pomocí Metropolisova-Hastingsova algoritmu rození a zániku. Takto sestrojený proces tvoří homogenní Markovský řetězec. Speciálně v prostoru \mathbb{R}^2 pak odvodíme jeho stacionární rozdělení. V prostorech \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^4 provedeme numerické simulace a ukážeme chování tohoto řetězce pro různé parametry modelu.

Klíčová slova: Eukleidovský prostor, fasety, stacionární rozdělení, bodový proces

Title: Random fields of facets

Author: Daniela Novotná

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Facet process is a special example of a point process in Euclidean space \mathbb{R}^d , where points are in this case represented by compact subsets of hyperplanes in \mathbb{R}^d with given orientation, size and shape. We focus on finite facet processes with density from exponential family with respect to the distribution of Poisson point process. Its submodel is simulated using the Metropolis-Hastings birth death algorithm, which gives us a homogeneous Markov chain. Specially in \mathbb{R}^2 space we derive its stationary distribution. In spaces \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^4 we perform numerical simulations to show behavior of the chain for various parameters in such model.

Keywords: Euclidean space, facet, stationary distribution, point process

Obsah

Úvod	2
1 Teoretické základy	3
1.1 Základy Markovských řetězců s diskrétním časem	3
1.2 Bodové procesy	4
1.2.1 Základní definice	5
1.2.2 Bodové procesy s hustotou	6
1.2.3 Podmíněná intenzita	7
1.2.4 Hustota exponenciálního typu	8
1.3 U-statistiky	9
2 Proces faset	10
2.1 Základní model	10
2.2 Asymptotické chování ve speciálním modelu	12
2.3 Podmíněná intenzita ve speciálním modelu	13
3 Metoda MCMC pro proces faset	14
3.1 Metropolisův-Hastingsův algoritmus rození a zániku	14
3.2 Teoretické výsledky v \mathbb{R}^2	15
3.2.1 Hastingsovy podíly	16
3.2.2 Matice pravděpodobností přechodu	16
3.2.3 Klasifikace stavů	18
3.2.4 Stacionární rozdělení	23
4 Výsledky simulací	24
4.1 Model v \mathbb{R}^2	24
4.2 Model v \mathbb{R}^4	29
Závěr	31
Literatura	32
Seznam obrázků	33
Seznam zkratk	34
Přílohy	35

Úvod

Pod pojmem náhodného pole faset si představujeme proces faset na nějaké kompaktní podmnožině prostoru \mathbb{R}^d . Fasety pak typicky popisujeme pomocí kanonických orientací vzhledem jednotkové hemisféře a tvar fasety pomocí eukleidovské normy nebo maximové normy jako vzdálenost všech bodů od středu fasety. Pomocí vhodné transformace stavového prostoru v d -rozměrném Eukleidovském prostoru na množinu d -tic přirozených čísel lze simulovat proces faset a zkoumat jeho vlastnosti.

V první kapitole zmíníme známé definice a vztahy z oblasti Markovských řetězců s diskrétním časem a bodových procesů, které jsou potřebné ke zkoumání a simulaci procesu faset. Definujeme bodový proces a jako důležitý příklad Poissonův bodový proces, od kterého budeme odvozovat speciální třídu bodových procesů s hustotou vzhledem k rozdělení Poissonova procesu. Důležitou roli pro simulace procesu faset bude hrát pojem podmíněné intenzity, kterou zavedeme a budeme vyšetřovat její vlastnosti v bodových procesech s hustotou exponenciálního typu.

Ve druhé kapitole přejdeme od bodových procesů k definici procesu faset. Tento proces budeme zkoumat pomocí jeho geometrických statistik. Uvedeme definici submodelu procesu faset a zavedeme speciální model, na kterém vyslovíme větu o konvergenci počtu průsečíků v submodelu k nule, viz věta 2.1. Tato věta je převzata z článku (Večeřa a Beneš, 2015, str. 15) a je motivací pro tuto práci. Prvním vlastním přínosem práce je věta 2.2, která vyšetřuje chování podmíněné intenzity submodelu ve speciálním modelu.

Podmíněnou intenzitu ve speciálním modelu využijeme k přesnému popisu Metropolisova-Hastingsova algoritmu rození a zániku, který ve třetí kapitole popíšeme pro obecný d -rozměrný případ. Tento algoritmus simuluje proces faset na transformované množině stavů jako homogenní Markovský řetězec. Hlavní přínos práce je obsažen v této kapitole a spočívá ve zkoumání vlastností takto sestrojeného řetězce v prostoru \mathbb{R}^2 a jeho stacionárního rozdělení. Odvodíme zde matici pravděpodobností přechodu, kterou využijeme ve větě 3.1 k důkazu existence reverzibilního rozdělení. Tento důkaz nám však umožní exaktně vyjádřit stacionární rozdělení v tomto řetězci, které popisuje věta 3.2.

V poslední kapitole provedeme numerické simulace Metropolisova-Hastingsova algoritmu rození a zániku pro submodel procesu faset ve speciálním modelu. Přínos této kapitoly je simulace stacionárního rozdělení odvozeného v předchozí kapitole a věty 2.1 pro pevně zvolený parametr a a různé parametry $\nu_d, d = 2, 4$. Uvidíme, že pro různé hodnoty ν_d bude mít při pevném a stacionární rozdělení rozdílné vlastnosti.

Kapitola 1

Teoretické základy

1.1 Základy Markovských řetězců s diskrétním časem

V kapitole 3 budeme využívat Markovské řetězce pro simulování procesu faset a vyšetřovat různé vlastnosti takových řetězců. Připomeneme zde tedy některé základní definice a vztahy z teorie náhodných procesů, které budeme v dalším textu potřebovat.

V celé sekci budeme předpokládat, že Markovský řetězec má nejvýše spočetnou množinu stavů S a matici pravděpodobností přechodu P s prvky $P_{i,j}, i, j \in S$.

Definice 1.1. Buď $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ homogenní Markovský řetězec s množinou stavů S . Pak pro $j \in S$ definujeme čas 1. vstupu do stavu j jako

$$\begin{aligned}\tau_j(1) &= \inf\{n > 0, X_n = j\}, \quad \{n > 0, X_n = j\} \neq \emptyset, \\ &= \infty, \quad \text{jinak.}\end{aligned}$$

Definice 1.2. Buď $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ homogenní Markovský řetězec s množinou stavů S . Řekneme, že stav $j \in S$ je

- *trvalý*, jestliže $\mathbb{P}(\tau_j(1) < \infty | X_0 = j) = 1$
- *přechodný*, jestliže $\mathbb{P}(\tau_j(1) = \infty | X_0 = j) > 0$.

Definice 1.3. Nechť $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní Markovský řetězec a j je jeho trvalý stav. Řekneme, že j je

- *nenulový*, jestliže $\mathbb{E}(\tau_j(1) | X_0 = j) < \infty$,
- *nulový*, jestliže $\mathbb{E}(\tau_j(1) | X_0 = j) = \infty$.

Definice 1.4. Buď $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ homogenní Markovský řetězec s množinou stavů S a maticí pravděpodobností přechodu P . Nechť pro vektor $\pi = \{\pi_j, j \in S\}$ platí $\pi_j \geq 0, j \in S$ a $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$. Řekneme, že π je *stacionární rozdělení* v Markovském řetězci, jestliže platí

$$\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k P_{k,j}, \quad \forall j \in S.$$

Definice 1.5. Buď $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ homogenní Markovský řetězec s množinou stavů S a maticí pravděpodobností přechodu P . Nechť pro vektor $\pi = \{\pi_j, j \in S\}$ platí $\pi_j \geq 0, j \in S$ a $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$. Pak π se nazývá *reverzibilní rozdělení*, jestliže pro všechny $i, j \in S$ platí

$$\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i}.$$

Věta 1.1. Buď $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ homogenní Markovský řetězec s množinou stavů S a maticí pravděpodobností přechodu P , který je nerozložitelný (tj. všechny stavy jsou vzájemně dosažitelné). Jestliže jsou všechny stavy přechodné nebo trvalé nulové, stacionární rozdělení neexistuje. Jestliže jsou všechny stavy trvalé nenulové, pak stacionární rozdělení existuje a je jediné.

Důkaz. Lze najít ve skriptech (Prášková a Lachout, 1998, str. 51-52). □

Věta 1.2. Buď $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ Markovský řetězec s množinou stavů S a maticí pravděpodobností přechodu P . Je-li $\pi = \{\pi_j, j \in S\}$ reverzibilní rozdělení v tomto řetězci, pak je zároveň i stacionárním rozdělením.

Důkaz. Důkaz věty pro konečnou množinu stavů lze najít v knize (Häggström, 2002, str. 39-40). Stejným způsobem je však možné větu dokázat i pro spočetnou množinu stavů. Chceme ukázat, že pro všechna $j \in S$ je

$$\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k P_{k,j}.$$

Skutečně máme, že

$$\pi_j = \pi_j \sum_{k \in S} P_{j,k} = \sum_{k \in S} \pi_j P_{j,k} = \sum_{k \in S} \pi_k P_{k,j}.$$

V poslední rovnosti jsme užili předpokladu reverzibility rozdělení π . □

Definice 1.6. Buď $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ Markovský řetězec s množinou stavů S a maticí pravděpodobností přechodu P . Stav $j \in S$ se nazývá *periodický* s periodou $d_j > 1$, kde $d_j = NSD\{n > 0 : P_{j,j}^{(n)} > 0\}$ a *neperiodický*, je-li $d_j = 1$. Symbol $P_{j,j}^{(n)}$ zde značí prvek matice P^n .

1.2 Bodové procesy

Pro lepší představu o procesech faset si nejdříve definujeme pojem bodového procesu. Procesy faset pak budou speciálním případem bodových procesů. Jen za body v prostoru \mathbb{R}^d budeme považovat podmnožiny nadrovin v \mathbb{R}^d .

1.2.1 Základní definice

Bodové procesy se dají definovat na libovolném d -rozměrném prostoru. My se však v této práci omezíme pouze na procesy v Euklidovském prostoru \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}$.

Definice 1.7. Nechť $X = \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}^d$ je nejvýše spočetná množina. Pak pro omezenou Borelovskou množinu $B \subset \mathbb{R}^d$ definujeme *čítací míru* jako

$$N_X(B) = \sum_{i=1}^{\infty} 1_B(x_i).$$

Definice 1.8. Buď $\mathbf{N} = \{N_X, X \subset \mathbb{R}^d \text{ je nejvýše spočetná}\}$ množina všech čítacích měr na \mathbb{R}^d . Dále buď \mathcal{N} σ -algebra podmnožin \mathbf{N} generovaná všemi jevy

$$E_{B,k} = \{N \in \mathcal{N}, N(B) = k\},$$

kde B je omezená Borelovská podmnožina \mathbb{R}^d a $k = 0, 1, 2, \dots$. Potom měřitelný prostor $(\mathbf{N}, \mathcal{N})$ nazýváme *prostor všech realizací* bodového procesu v \mathbb{R}^d .

Poznámka. Množiny $E_{B,k}$ v definici 1.8 symbolizují všechny jednoduché jevy, kdy přesně k bodů leží v množině B .

Definice 1.9. *Bodový proces* μ je měřitelné zobrazení $\mu : \Omega \rightarrow \mathbf{N}$ z pravděpodobnostního prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ do prostoru všech realizací bodového procesu $(\mathbf{N}, \mathcal{N})$.

Definice 1.10. Buď μ bodový proces na \mathbb{R}^d . Řekneme, že μ je *jednoduchý*, jestliže pro všechny body $x \in \mathbb{R}^d$ je $N_\mu(\{x\}) \leq 1$ skoro jistě.

Definice 1.11. Buď μ bodový proces na \mathbb{R}^d . Řekneme, že μ je *konečný*, jestliže pro $B \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní množinu je $N_\mu(B) < \infty$ skoro jistě.

Poznámka. V dalším textu budeme pracovat pouze s jednoduchými a konečnými bodovými procesy.

Definice 1.12. *Rozdělení bodového procesu* μ je pravděpodobnostní míra P_μ na prostoru $(\mathbf{N}, \mathcal{N})$ definovaná předpisem

$$P_\mu(A) = \mathbb{P}(N_\mu \in A), \quad A \in \mathcal{N}.$$

Definice 1.13. Nechť λ je σ -konečná míra na \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}$, taková, že pro všechny body $x \in \mathbb{R}^d$ je $\lambda(\{x\}) = 0$. *Poissonův bodový proces* na \mathbb{R}^d je bodový proces na \mathbb{R}^d splňující následující podmínky:

1. Pro každou kompaktní množinu $B \subset \mathbb{R}^d$ je $N(B)$ náhodná veličina, která má Poissonovo rozdělení se střední hodnotou $\lambda(B)$.
2. Jsou-li B_1, \dots, B_n , $n \in \mathbb{N}$, disjunktní kompaktní podmnožiny \mathbb{R}^d , potom jsou náhodné veličiny $N(B_1), \dots, N(B_n)$ nezávislé.

Poznámka. Míře λ v definici 1.13 se často říká míra intenzity nebo jen intenzita. Poissonův bodový proces s mírou intenzity λ se v literatuře obvykle značí η a jeho rozdělení pak P_η . My se budeme dále v této práci tohoto značení držet.

Definice 1.14. Nechť λ je míra intenzity bodového procesu μ na \mathbb{R}^d splňující pro nějakou funkci χ

$$\lambda(B) = \int_B \chi(x) dx, \quad B \in \mathbb{R}^d.$$

Pak χ se nazývá *funkce intenzity* μ .

1.2.2 Bodové procesy s hustotou

V minulé podsekcí jsme definovali Poissonův bodový proces s mírou intenzity. Ten nám pomůže k popsání důležité třídy bodových procesů, a sice bodových procesů s hustotou vzhledem k rozdělení Poissonova procesu.

Definice 1.15. Nechť η je Poissonův bodový proces na nějaké omezené Borelovské množině $B \subset \mathbb{R}^d$ s rozdělením P_η na \mathcal{N} . Mějme měřitelné zobrazení $p : \mathbf{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ splňující

$$\int_{\mathbf{N}} p(\mathbf{x}) dP_\eta(\mathbf{x}) = 1.$$

Pak bodový proces μ s rozdělením P_μ , pro které platí

$$dP_\mu(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) dP_\eta(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{N},$$

nazýváme *bodový proces s hustotou p vzhledem k rozdělení Poissonova procesu P_η* .

Poznámka. V definici 1.15 lze požadavek $dP_\mu(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) dP_\eta(\mathbf{x})$ přepsat do tvaru

$$P_\mu(A) = \int_A p(\mathbf{x}) dP_\eta(\mathbf{x}), \quad A \in \mathcal{N}.$$

Nyní si uvedeme základní vlastnost bodového procesu s hustotou vzhledem k rozdělení Poissonova procesu. Uvidíme, jaký vztah má tento odvozený proces s Poissonovým procesem, ze kterého byl odvozen. Znění následující věty včetně důkazu lze najít v (Baddeley, 2007, str. 62-63).

Věta 1.3. *Pro bodový proces μ s hustotou p vzhledem k rozdělení Poissonova procesu η s mírou intenzity λ na omezené Borelovské množině $B \subset \mathbb{R}^d$ kladné Lebesgueovy míry platí*

$$\mathbb{P}(\mu \in A) = e^{-\lambda(B)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_B \dots \int_B \mathbf{1}\{(x_1, \dots, x_n) \in A\} p(x_1, \dots, x_n) \lambda(dx_1) \dots \lambda(dx_n)$$

pro libovolné $A \in \mathcal{N}$ a

$$\mathbb{E}[g(\eta)] = e^{-\lambda(B)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_B \dots \int_B g(x_1, \dots, x_n) \lambda(dx_1) \dots \lambda(dx_n),$$

$$\mathbb{E}[g(\mu)] = e^{-\lambda(B)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_B \dots \int_B g(x_1, \dots, x_n) p(x_1, \dots, x_n) \lambda(dx_1) \dots \lambda(dx_n)$$

pro jakoukoliv integrovatelnou funkci $g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Poznámka. Vztahy pro bodový proces μ ve větě 1.3 lze zkráceně psát jako

$$\mathbb{P}(\mu \in A) = \mathbb{E}[p(\eta)1_A(\eta)],$$

$$\mathbb{E}[g(\mu)] = \mathbb{E}[g(\eta)p(\eta)].$$

1.2.3 Podmíněná intenzita

Definice 1.16. Necht' μ je bodový proces v \mathbb{R}^d s rozdělením P_μ . Mějme míru C na $S \times \mathbf{N}$, která je absolutně spojitá vzhledem k $\lambda^d \otimes P_\mu$ a splňuje pro všechny $B \subset \mathbb{R}^d$ a $A \in \mathcal{N}$

$$C[B \times A] = \mathbb{E} \left[\sum_{x \in \mu} \mathbf{1}\{x \in B\} \mathbf{1}\{\mu \setminus x \in A\} \right].$$

Potom Radon-Nikodýmova derivace $\lambda^* : \mathbb{R}^d \times \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ z C vzhledem k součinu měr $\lambda_d \otimes P_\mu$ se nazývá *podmíněná intenzita* bodového procesu μ a je definovaná tak, že pro všechny $B \subset \mathbb{R}^d$ a $A \in \mathcal{N}$ je

$$C[B \times A] = \int_B \mathbb{E} [\lambda^*(u, \mu) \mathbf{1}\{\mu \in A\}] du.$$

Poznámka. V anglicky psané literatuře můžeme podmíněnou intenzitu najít pod názvem *Papangelou conditional intensity* a míru C jako tzv. *reduced Campbell measure*. Podmíněná intenzita bodového procesu μ nám říká, jaká je podmíněná pravděpodobnost, že v nekonečně malém okolí daného bodu $x \in \mu$ se bude vyskytovat jiný bod μ za podmínky, že známe lokaci všech bodů vně tohoto okolí.

Věta 1.4 (Baddeley, 2007, str. 65). *Necht' μ je konečný bodový proces na omezené množině $B \subset \mathbb{R}^d$ s hustotou p . Předpokládáme, že*

$$p(\mathbf{x}) > 0 \Rightarrow p(\mathbf{y}) > 0, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{N}, \mathbf{y} \subset \mathbf{x}.$$

Potom podmíněná intenzita bodového procesu μ existuje a platí

$$\lambda^*(u, \mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} \cup \{u\})}{p(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{N}, u \in B, u \notin \mathbf{x}, \mathbb{P}(u \in \mu) = 0.$$

Pokud $p(\mathbf{x}) = 0$, položíme $\lambda^(u, \mathbf{x}) = 0$.*

Poznámka. Stejným způsobem jako ve větě 1.4 můžeme zavést pro $n > 1$ podmíněnou intenzitu n -tého řádu jako

$$\lambda_n^*(u_1, \dots, u_n, \mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} \cup \{u_1, \dots, u_n\})}{p(\mathbf{x})},$$

kde $u_1, \dots, u_n \in B$ jsou navzájem různé. Jak si můžeme všimnout, λ_n^* je symetrická vzhledem k proměnným u_1, \dots, u_n .

Definice 1.17. Buď μ bodový proces s podmíněnou intenzitou λ^* . Pak střední hodnota podmíněné intenzity n -tého řádu

$$\rho_n(u_1, \dots, u_n, \mu) = \mathbb{E} \lambda^*(u_1, \dots, u_n, \mu)$$

se nazývá *n -tá korelační funkce* bodového procesu μ , kde $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka. Máme-li bodový proces μ s hustotou p vzhledem k rozdělení Poissonova procesu η , pak n -tou korelační funkci z definice 1.17 lze vyjádřit jako

$$\rho_n(u_1, \dots, u_n, \mu) = \mathbb{E} [p(\eta \cup \{u_1, \dots, u_n\})].$$

1.2.4 Hustota exponenciálního typu

Vezměme $B \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ omezenou borelovskou množinou kladné Lebesgueovy míry a μ bodový proces na B . Označme $\mathbf{x} \in \mathbf{N}$ nějakou realizaci procesu μ . Pak pro integrovatelnou funkci $g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbb{R}^d$ položíme hustotu

$$p(\mathbf{x}) = c_\nu \exp(\nu \cdot g(\mathbf{x})) \quad (1.1)$$

vzhledem k Poissonovu bodovému procesu η . V tomto vzorci máme vektor reálných parametrů $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$, normující konstantu c_ν a

$$g(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_d(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^d.$$

V exponentu hustoty máme tedy skalární součin ν a $g(\mathbf{x})$. Vektor ν volíme tak, aby

$$\mathbb{E} [\exp(\nu \cdot g(\mu))] < \infty.$$

Definice 1.18. Nechť μ je bodový proces na borelovské množině $B \subset \mathbb{R}^d$, která je omezená. Pak pro funkcionál F a $y \in B$ definujeme operátor *diference* $D_y F$ jako

$$D_y F(\mu) = F(\mu + \delta_y) - F(\mu).$$

Symbolem δ_y zde značíme Diracovu míru bodu y .

V článku (Beneš a Zikmundová, 2014, str. 906) najdeme obecnější verzi následující věty diskutující případ podmíněné intenzity m -tého řádu, $m \in \mathbb{N}$, včetně důkazu. Pro naše další účely však bude stačit pouze tvrzení pro podmíněnou intenzitu řádu 1.

Věta 1.5. Nechť μ je bodový proces na množině $B \subset \mathbb{R}^d$ s hustotou p z vzorce (1.1). Potom pro $y \in B$, $\mathbf{x} \in \mathbf{N}$ a podmíněnou intenzitu prvního řádu $\lambda^*(y, \mathbf{x})$ platí

$$\lambda^*(y, \mathbf{x}) = e^{\nu \cdot D_y g(\mathbf{x})},$$

kde $D_y g(\mathbf{x}) = (D_y g_1(\mathbf{x}), \dots, D_y g_d(\mathbf{x}))$.

Důkaz. Připomeňme si definici diference prvního řádu, tj.

$$D_y F(\mu) = F(\mu + \delta_y) - F(\mu).$$

Využijeme-li tuto definici a vlastnost skalárního součinu, dostáváme

$$\begin{aligned} \lambda^*(y, \mathbf{x}) &= \frac{p(\mathbf{x} \cup \{y\})}{p(\mathbf{x})} = \frac{c_\nu e^{\nu \cdot g(\mathbf{x} \cup \{y\})}}{c_\nu e^{\nu \cdot g(\mathbf{x})}} = e^{\nu \cdot g(\mathbf{x} \cup \{y\}) - \nu \cdot g(\mathbf{x})} = e^{\nu \cdot (g(\mathbf{x} \cup \{y\}) - g(\mathbf{x}))} \\ &= e^{\nu \cdot D_y g(\mathbf{x})}, \end{aligned}$$

což jsme chtěli ukázat. □

1.3 U-statistiky

Definice 1.19. Buď μ bodový proces. Pro $k \in \mathbb{N}$ definujeme U -statistiku k -tého řádu bodového procesu μ jako funkcionál

$$F(\mu) = \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in \mu_{\neq}^k} f(x_1, \dots, x_k),$$

kde $f : B^k \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L_1(\lambda^k)$ je funkce symetrická vzhledem ke všem permutacím proměnných x_1, \dots, x_k a $B \subset \mathbb{R}$ je borelovská. Symbolem μ_{\neq}^k zde rozumíme množinu všech k -tic navzájem různých bodů μ .

Věta 1.6. *Nechť F je U -statistika k -tého řádu z definice 1.19. Pak pro Poissonův proces η platí*

$$\mathbb{E} F(\eta) = \int_B \dots \int_B f(x_1, \dots, x_k) \lambda(dx_1) \dots \lambda(dx_k).$$

Důkaz. Plyne z tzn. Slivnyakovy-Meckeovy věty, kterou lze najít např. v (Schneider a Weil, 2008, str. 68). □

Věta 1.7. *Nechť $F \in L_2(P_\eta)$ je U -statistika k -tého řádu z definice 1.19 a nechť $p \in L_2(P_\eta)$ je hustota rozdělení bodového procesu μ . Pak platí*

$$\mathbb{E} F(\mu) = \int_B \dots \int_B f(x_1, \dots, x_k) \rho_k(x_1, \dots, x_k, \mu) \lambda(dx_1) \dots \lambda(dx_k). \quad (1.2)$$

Důkaz. Můžeme najít v (Beneš a Zikmundová, 2014, str. 900-901). □

Poznámka. Názorný příklad U -statistik uvidíme v kapitole 2, kde U -statistiky budou popisovat geometrické vlastnosti průniku faset.

Kapitola 2

Proces faset

V předešlé kapitole jsme definovali pojem bodového procesu a nyní pomocí této definice zavedeme proces faset. Popíšeme prostor, jehož každý bod popisuje jednu konkrétní fasetu. Pojem faseta chápeme jako kompaktní podmnožinu nějaké nadroviny v \mathbb{R}^d s daným tvarem, velikostí a orientací příslušné nadroviny. V následujícím textu budeme předpokládat, že dokážeme vyjádřit hustotu procesu faset jako hustotu exponenciálního typu vzhledem k rozdělení Poissonova procesu v \mathbb{R}^d jako ve vzorci (1.1). Máme tedy hustotu

$$p(\mathbf{x}) = c_\nu \exp(\nu \cdot g(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{N},$$

kde za g volíme vektor (g_1, \dots, g_d) geometrických statistik průniku všech realizovaných faset. Geometrickou statistikou g_k zde myslíme míru všech $d - k$ - rozměrných průníků realizovaných faset, kde $k = 1, \dots, d$. Složky vektorové funkce g jsou příklady U-statistik, které jsme obecně definovali v sekci 1.3.

2.1 Základní model

Položme nyní

$$Y = B \times (0, b] \times \mathbb{S}^{d-1}, \quad (2.1)$$

kde $B \subset \mathbb{R}^d$ je množina poloh středů faset, $b > 0$ je parametr určující velikost fasety a \mathbb{S}^{d-1} označuje hemisféru určující orientace v \mathbb{R}^d . Nyní množinu \mathbf{N} z definice 1.8 chápeme na celém Y . Množina Y popisuje všechny fasety $y \in Y$ jako body $y = (x, r, \phi)$, kde r je velikost fasety a x je střed fasety ležící v nadrovině $A = A(x, \phi)$, která je určena středem x a orientací ϕ . Můžeme tedy fasetu y vyjádřit ve tvaru

$$y = \{s \in A; \text{dist}(s, x) \leq r\},$$

kde dist je vzdálenost dvou bodů v A .

Poznámka. Jako vzdálenost dist lze volit například přirozenou Eukleidovskou metriku, která nám fasetu popíše jako $d - 1$ rozměrnou kouli. Pokud zvolíme maximovou metriku, faseta bude mít tvar $d - 1$ rozměrné krychle.

Poissonův proces η na Y má míru intenzity λ ,

$$\lambda(d(x, r, \phi)) = \chi(x) dx Q(dr) V(d\phi), \quad (2.2)$$

kde χ je omezená funkce intenzity středů x na B , Q je pravděpodobnostní míra na $(0, b]$ určující rozdělení délky fasety r a V je pravděpodobnostní míra na \mathbb{S}^{d-1} určující rozdělení orientace fasety ϕ .

Nyní si ukážeme, jak bude v tomto modelu vypadat hustota procesu faset odvozená od Poissonova procesu, která je exponenciálního typu. Ty jsme si zaváděli vzorcem (1.1). Abychom jí mohli vyjádřit v \mathbb{R}^d pro jakékoliv $d \in \mathbb{N}$, připomeneme si stručně definici Hausdorffovy míry, kterou budeme při tomto zobecnění používat.

Definice 2.1. Nechtě $d, s \in \mathbb{N}$, $d \geq s$ a $A \subset \mathbb{R}^d$. Pak pro $0 < \delta \leq \infty$ definujeme

$$H_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(A_i))^s : A \subset \bigcup A_i, \text{diam}(A_i) \leq \delta \right\}.$$

Hausdorffovou mírou pak nazveme zobrazení H^s , $A \mapsto H^s(A)$, kde

$$H^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^s(A).$$

Poznámka. Položíme-li $s = 0$, pak Hausdorffova míra splývá s mírou čítací a pro případ $s = 1$ pak s jednorozměrnou Lebesgueovou mírou na prostoru \mathbb{R}^d .

V práci (Večeřa a Beneš, 2015, str. 9) se zavádí hustota procesu faset následujícím způsobem.

Definice 2.2. Buď μ proces faset v \mathbb{R}^d s hustotou

$$p(\mathbf{x}) = c_\nu \exp(\nu \cdot g(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{N},$$

vzhledem k rozdělení Poissonova procesu η , kde

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}) &= \sum_{s \in \mu} H^{d-1}(s), \\ g_2(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \sum_{(s,t) \in \mu_{\neq}^2} H^{d-2}(s \cap t), \\ &\vdots \\ g_{d-1}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(d-1)!} \sum_{(x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mu_{\neq}^{d-1}} H^1(\cap_{i=1}^{d-1} x_i), \\ g_d(\mathbf{x}) &= \frac{1}{d!} \sum_{(x_1, \dots, x_d) \in \mu_{\neq}^d} H^0(\cap_{i=1}^d x_i). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Poznámka. U-statistika i -tého řádu $g_i(\mathbf{x})$ z definice 2.2 nám tedy říká, jakou míru má sjednocení všech takových množin, které vzniknou jako průnik i různých faset. Například $g_1(\mathbf{x})$ nám dává informaci o celkové míře všech faset, $g_2(\mathbf{x})$ pak míru všech průsečíků dvojic různých faset. Zmínili jsme, že míra H^0 splývá s čítací mírou. V našem případě opravdu $g_d(\mathbf{x})$ udává počet takových bodů, kterými zároveň prochází d různých faset.

O takovém procesu budeme dále předpokládat, že pro vektor $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ platí $\nu_j \leq 0$, $j \geq 2$. Tato podmínka nám zaručí integrovatelnost p , tj. že se skutečně bude jednat o hustotu.

2.2 Asymptotické chování ve speciálním modelu

Zúžíme nyní množinu Y ze vzorce (2.1) na

$$Y = [0, b]^d \times \{2b\} \times \{e_i, i = 1, \dots, d\}. \quad (2.4)$$

Zde volíme opět $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ parametr vymezující současně velikost fasety a délku strany d -rozměrné krychle, ve které se budou fasety realizovat. Tyto fasety budou opět určeny středem $z \in [0, b]^d$ a orientací z konečné množiny $\{e_i, i = 1, \dots, d\}$. Tyto orientace popisujeme jednotkovými kanonickými vektory e_i . Zde jsme zvolili velikost každé fasety pevně rovnu $2b$ záměrně, abychom docílili toho, že fasety jsou buď paralelní nebo se protínají. Fasetu $y \in Y$ definujeme ve tvaru

$$y = (z, \phi) = \{s \in A; \max_i |z_i - s_i| \leq 2b\},$$

kde A je příslušná nadrovina se středem z a orientací $\phi \in \{e_i, i = 1, \dots, d\}$ a $z_i, s_i, i = 1, \dots, d$ jsou po řadě složky bodů z a s .

Poissonův proces η má na takto zvolené množině Y míru intenzity podobně jako ve vzorci (2.2), kde však nyní rozdělení velikosti fasety má tvar $Q = \delta_{2b}$ a rozdělení orientací je rovnoměrné na množině $\{e_i, i = 1, \dots, d\}$. Pro $y = (z, \phi)$ je pak

$$\lambda(dy) = \chi(z) dz \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \delta_{e_i}(d\phi).$$

Definice 2.3. Nechť μ je proces faset s hustotou λ z vzorce (1.1). Řekneme, že proces faset $\mu^{(k)}$, $k = 1, \dots, d$ je submodel k -tého řádu procesu μ , jestliže $\mu^{(k)}$ má hustotu s vektorem parametrů $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$, kde $\nu_k \leq 0$ a $\nu_j = 0$, $j \neq k$.

Uvažujme nyní procesy faset μ_a , $a > 0$ s hustotami

$$p_a(\mathbf{x}) = c_{\nu, a} \exp(\nu \cdot g(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{N},$$

vzhledem k Poissonovým procesům η_a s intenzitami $\lambda_a = a\lambda$ z definice 2.2. Vezmeme-li U-statistiku k -tého řádu, $k = 1, \dots, d$, pak její střední hodnota lze vyjádřit dosazením do vzorce (1.2) následujícím způsobem:

$$\mathbb{E} g_k(\mu_a^{(k)}) = \frac{a^k}{k!} \int_{Y^k} H^{d-k} \left(\bigcap_{i=1}^k y_i \right) \rho_k(y_1, \dots, y_k, \mu_a^{(k)}) \lambda^k(dy_1, \dots, dy_k).$$

Následující věta je převzata z článku (Večeřa a Beneš, 2015, str. 15). Na stejném místě můžeme najít i důkaz.

Věta 2.1. Pro $a \rightarrow \infty$ a $k = 1, \dots, d$ platí

$$\mathbb{E} g_k(\mu_a^{(k)}) \rightarrow 0.$$

Poznámka. Jelikož jsou g_k nezáporné statistiky, plyne z tvrzení věty 2.1, že $g_k(\mu_a^{(k)}) \rightarrow 0$ skoro jistě. V této práci budeme vyšetřovat případ $k = d$. Pro tento případ nám věta říká, že submodel $\mu_a^{(d)}$ je asymptoticky degenerovaný ve smyslu, že očekávaný počet průsečíků d faset v d rozměrné krychli je nula. To znamená, že ve skoro každé realizaci bude alespoň jedna orientace e_i zcela chybět. Tato skutečnost je motivací celé bakalářské práce. Budeme se pomocí simulací zabývat chováním submodelu $\mu_a^{(d)}$ pro pevná a .

2.3 Podmíněná intenzita ve speciálním modelu

V této sekci vypočteme podmíněnou intenzitu ve speciálním procesu faset, který jsme zavedli v sekci 2.2.

Věta 2.2. *Bud' $\mu^{(d)}$ proces faset na $[0, b]^d$, $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $d \in \mathbb{N}$ s hustotou z definice 2.2. Bud' $\mathbf{x} \in \mathbf{N}$ nějaká realizace procesu $\mu^{(d)}$ a předpokládejme, že \mathbf{x} obsahuje k_i faset orientace e_i , $i = 1, \dots, d$. Necht' $y \in Y$, $y \notin \mathbf{x}$ má orientaci e_j , $j \in \{1, \dots, d\}$. Pak pro podmíněnou intenzitu $\lambda^*(y, \mathbf{x})$ platí*

$$\lambda^*(y, \mathbf{x}) = \exp \left\{ \nu_d \left(\prod_{i=1}^{j-1} k_i \prod_{i=j+1}^d k_i \right) \right\}. \quad (2.5)$$

Důkaz. Z věty 1.5 máme pro $\mu^{(d)}$ vztah

$$\lambda^*(y, \mathbf{x}) = e^{\nu_d D_y g_d(\mathbf{x})},$$

kde

$$g_d(\mathbf{x}) = \frac{1}{d!} \sum_{(x_1, \dots, x_d) \in \mu_{\neq}^d} H^0(\cap_{i=1}^d x_i) = \frac{1}{d!} \sum_{(x_1, \dots, x_d) \in \mu_{\neq}^d} 1 = \prod_{i=1}^d k_i.$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} \lambda^*(y, \mathbf{x}) &= \exp \{ \nu_d (g_d(\mathbf{x} \cup \{y\}) - g_d(\mathbf{x})) \} \\ &= \exp \left\{ \nu_d \left(\left(\prod_{i=1}^{j-1} k_i \right) (k_j + 1) \prod_{i=j+1}^d k_i - \prod_{i=1}^d k_i \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ \nu_d \left(\prod_{i=1}^{j-1} k_i \prod_{i=j+1}^d k_i \right) \right\}. \end{aligned}$$

□

Poznámka. Všimněme si, že podmíněná intenzita λ^* nezávisí na poloze faset, ale pouze na počtu faset s orientacemi e_i , $i = 1, \dots, d$.

Kapitola 3

Metoda MCMC pro proces faset

3.1 Metropolisův-Hastingsův algoritmus rození a zániku

K simulaci procesu faset budeme používat jeden ze základních typů metody Monte Carlo, tzv. Metropolisův-Hastingsův algoritmus rození a zániku. Ten se vyznačuje tím, že v každém kroku simulace je vznesen návrh na provedení určité akce a zároveň proběhne jeho přijetí, respektive zamítnutí. Pod názvem *birth-death Metropolis-Hastings algorithm* lze najít algoritmus v článku (Geyer a Møller, 1994, str. 362).

Předpokládejme nyní, že máme množinu Y definovanou v (2.4) a chceme simulovat proces faset s hustotou vzhledem k danému Poissonovu bodovému procesu s mírou intenzity λ na množině $B = [0, b]^d$. Nechť \mathbf{x} je množina doposud realizovaných faset v n -té iteraci. V $n + 1$. iteraci provedeme následující schéma:

1. krok

S pravděpodobností $\frac{1}{2}$ je položen návrh na rození fasety $y \in Y$ a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ pak návrh na zánik některé ze současných faset $u \in \mathbf{x}$. Pokud jsme dostali návrh na zánik fasety a množina \mathbf{x} je prázdná, iterace tím končí a \mathbf{x} zůstává nepozměněná. V ostatních případech pokračujeme na 2. krok.

2. krok

Tento krok spočívá ve výběru fasety, ke které se návrh z kroku 1 vztahuje. Rozdělíme ho na dva případy pro rození a zánik zvlášť.

- a) Pokud jsme dostali návrh na rození nové fasety, použijeme rovnoměrné rozdělení pro výběr orientace, kterou bude nová faseta disponovat. Tedy nová faseta bude mít orientaci e_i s pravděpodobností $\frac{1}{d}$ pro $i = 1, \dots, d$.
- b) V případě navrženého zániku fasety nemůžeme všem orientacím přiřadit rovnoměrné rozdělení, protože všechny orientace nemusí být v \mathbf{x} zastoupeny. Označme $k_i, i = 1, \dots, d$, počet faset v \mathbf{x} s orientací e_i a položme pravděpodobnost výběru orientace e_i rovnu

$$\frac{k_i}{\sum_{i=1}^d k_i}.$$

3. krok

V tomto kroku budeme potřebovat tzv. Hastingsův podíl (angl. *Hastings ratio*), který nám určí pravděpodobnosti přijetí, respektive zamítnutí návrhů z kroku 1. Ten definujeme pro návrh rození a zániku zvlášť.

- a) Pokud jsme v prvním kroku dostali návrh na rození fasety, přijmeme ho s pravděpodobností $\min(1, H_r(\mathbf{x}, y))$, kde

$$H_r(\mathbf{x}, y) = \lambda^*(y, \mathbf{x}) \frac{\lambda(Y)}{n(\mathbf{x}) + 1}.$$

Zde vystupuje podmíněná intenzita λ^* z definice 1.16, míra intenzity λ z definice 1.13 a zobrazení $n(\mathbf{x})$ přiřazující \mathbf{x} počet obsažených faset. Přijmeme-li návrh, realizujeme operaci $\mathbf{x} \cup \{y\}$. Návrh zamítáme s doplňkovou pravděpodobností k $\min(1, H_r(\mathbf{x}, y))$. V případě zamítnutí množina se \mathbf{x} nezmění.

- b) Návrh na zánik $u \in \mathbf{x}$ přijmeme s pravděpodobností $\min(1, H_z(\mathbf{x}, u))$, kde Hastingsův podíl pro zánik je

$$H_z(\mathbf{x}, u) = \frac{n(\mathbf{x} \setminus \{u\}) + 1}{\lambda^*(u, \mathbf{x} \setminus \{u\}) \lambda(Y)}.$$

Přijmeme-li, provedeme $\mathbf{x} \setminus \{u\}$. Návrh zamítáme s doplňkovou pravděpodobností k $\min(1, H_z(\mathbf{x}, u))$.

Takto sestrojený proces vytvoří homogenní Markovský řetězec. Ukázali jsme, že podmíněná intenzita λ^* nezávisí na poloze faset, takže stavový prostor tohoto řetězce popíšeme jako množinu všech d -tic $\{(k_1, \dots, k_d), k_i \in \mathbb{N}_0, i = 1, \dots, d\}$.

3.2 Teoretické výsledky v \mathbb{R}^2

V prostoru \mathbb{R}^2 budeme pracovat na omezeném okně $B = [0, b]^2$, kde volíme $b > 0, b \in \mathbb{R}$. V sekci 2.2 jsme zavedli množinu všech faset s konečnou množinou různých orientací. Zde uvažujeme dvě kanonické orientace $e_1 = 0$ a $e_2 = \frac{\pi}{2}$. Dostáváme množinu faset tvaru úsečky se středem v $[0, b]^2$ a délkou $2b$.

$$Y = [0, b]^2 \times \{2b\} \times \{e_1, e_2\}.$$

Dále budeme předpokládat, že proces, který simulujeme, má hustotu exponenciálního typu vzhledem k rozdělení Poissonova procesu s intenzitou $\lambda_a = a\lambda$

$$p(\mathbf{x}) = c_{\nu, a} \exp(\nu_2 g_2(\mathbf{x})).$$

Zde již tedy v exponentu nevystupuje skalární součin, nýbrž nekladný parametr ν_2 a U-statistika druhého řádu $g_2(\mathbf{x})$, určující počet všech průsečíků realizovaných faset.

3.2.1 Hastingsovy podíly

Nyní si odvodíme konkrétní hodnoty Hastingsových podílů pro model v prostoru \mathbb{R}^2 . K tomu potřebujeme znát podmíněnou intenzitu λ^* a funkci intenzity středů generovaných faset χ viz vzorec (2.2). Tu pro zjednodušení položíme identicky rovnu jedné, tedy $\chi(s) = 1, s \in B$. Označíme k_1, k_2 počet realizovaných faset s orientací e_1, e_2 .

V případě rození fasety $y \in Y, y \notin \mathbf{x}$ s orientací $e_i, i \neq j, i, j \in \{1, 2\}$ dostaneme užitím věty 2.2 Hastingsův podíl tvaru

$$H_r(\mathbf{x}, y) = e^{\nu_2 k_j} \frac{ab^2}{k_1 + k_2 + 1}.$$

Stejným způsobem dosadíme dle věty 2.2 podmíněnou intenzitu do Hastingsova podílu pro zánik fasety $u \in \mathbf{x}$ s orientací $e_i, i \neq j, i, j \in \{1, 2\}$ a dostaneme

$$H_r(\mathbf{x}, u) = \frac{k_1 + k_2}{e^{\nu_2 k_j} ab^2}.$$

Poznámka. Následující výpočty a simulace provedeme pouze pro $a = 1$.

3.2.2 Matice pravděpodobností přechodu

Abychom mohli zkoumat, jak se bude simulovaný proces chovat, popíšeme ho pomocí množiny stavů a matice pravděpodobností přechodu. Označme dále $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ takový proces, že X_t označuje počet faset orientací $e_i, i = 1, 2$. Množina stavů S se tedy skládá ze všech dvojic $(k_1, k_2), k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$. Spočítáme nyní pravděpodobnosti jednotlivých přechodů. Jak vidíme z popisu algoritmu, v každé iteraci máme pouze 5 možností, kam se můžeme posunout. Zavedme následující označení.

- $P_0(k_1, k_2)$ značí pravděpodobnost, že stav (k_1, k_2) před iterací bude stejný jako po provedení jedné iterace.
- $P_1(k_1, k_2)$ značí pravděpodobnost, že ze stavu (k_1, k_2) se po jedné iteraci dostaneme do stavu $(k_1 + 1, k_2)$.
- $P_2(k_1, k_2)$ značí pravděpodobnost, že ze stavu (k_1, k_2) se po jedné iteraci dostaneme do stavu $(k_1, k_2 + 1)$.
- $P_3(k_1, k_2)$ značí pravděpodobnost, že ze stavu (k_1, k_2) se po jedné iteraci dostaneme do stavu $(k_1 - 1, k_2)$.
- $P_4(k_1, k_2)$ značí pravděpodobnost, že ze stavu (k_1, k_2) se po jedné iteraci dostaneme do stavu $(k_1, k_2 - 1)$.

Ze znalosti Hastingsových podílů ze sekce 3.2.1 můžeme tyto pravděpodobnosti spočítat pro každou dvojici (k_1, k_2) . Dle postupu algoritmu 3.1 tedy dostáváme

$$P_1(k_1, k_2) = \frac{1}{4} \min \left(1, \frac{e^{\nu_2 k_2} b^2}{k_1 + k_2 + 1} \right),$$

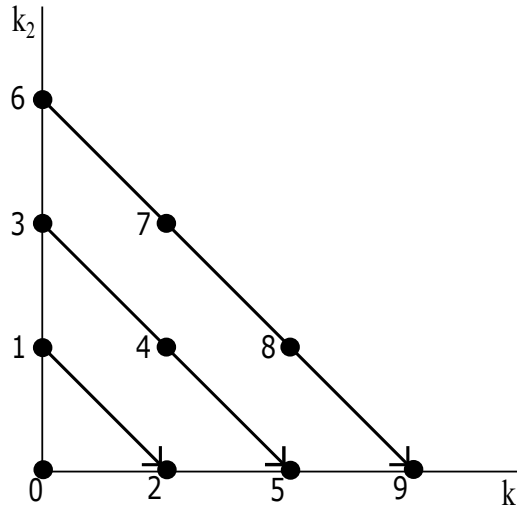
$$P_2(k_1, k_2) = \frac{1}{4} \min \left(1, \frac{e^{\nu_2 k_1 b^2}}{k_1 + k_2 + 1} \right),$$

$$P_3(k_1, k_2) = \frac{1}{2} 1\{k_1 \neq 0\} \frac{k_1}{k_1 + k_2} \min \left(1, \frac{k_1 + k_2}{e^{\nu_2 k_2 b^2}} \right),$$

$$P_4(k_1, k_2) = \frac{1}{2} 1\{k_2 \neq 0\} \frac{k_2}{k_1 + k_2} \min \left(1, \frac{k_1 + k_2}{e^{\nu_2 k_1 b^2}} \right),$$

$$P_0(k_1, k_2) = 1 - (P_1(k_1, k_2) + P_2(k_1, k_2) + P_3(k_1, k_2) + P_4(k_1, k_2)).$$

Chtěli bychom nyní sestavit matici pravděpodobností přechodu. K tomu potřebujeme očíslovat prvky množiny S přirozenými čísly a nulou, abychom je mohli seřadit. To lze, neboť S je spočetná. Dvojice tedy očísloujeme následujícím způsobem. Stavů (0,0) přiřadíme číslo 0, stavů (1,0) číslo 1, stavů (0,1) číslo 2, , stavů (2,0) číslo 3, stavů (1,1) číslo 4, stavů (0,2) číslo 5 atp.. K lepší představě nám pomůže následující schéma.



Obrázek 3.1: Schéma přechíslování stavů

Tímto způsobem vznikne přehledná matice pravděpodobností přechodu P , kde

$$P = \begin{pmatrix} P_0(0,0) & P_2(0,0) & P_1(0,0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ P_4(0,1) & P_0(0,1) & 0 & P_2(0,1) & P_1(0,1) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ P_3(1,0) & 0 & P_0(1,0) & 0 & P_2(1,0) & P_1(1,0) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & P_4(0,2) & 0 & P_0(0,2) & 0 & 0 & P_2(0,2) & P_1(0,2) & \dots \\ 0 & P_3(1,1) & P_4(1,1) & 0 & P_0(1,1) & 0 & 0 & P_2(1,1) & \dots \\ 0 & 0 & P_3(2,0) & 0 & 0 & P_0(2,0) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & P_4(0,3) & 0 & 0 & P_0(0,3) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & P_3(1,2) & P_4(1,2) & 0 & 0 & P_0(1,2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Kdybychom si rozepsali matici ještě dále, zřetelně bychom viděli, jak se postupně nenulové prvky matice mimo diagonálu postupně oddalují od diagonály.

3.2.3 Klasifikace stavů

Věta 3.1. Řetězec $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ s maticí pravděpodobností přechodu P a množinou stavů S z podsekcce 3.2.2 je nerozložitelný, neperiodický a existuje v něm reverzibilní rozdělení.

Důkaz. Dokážeme nejprve nerozložitelnost. Vidíme, že pro všechny $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ jsou $P_1(k_1, k_2) > 0$ a $P_2(k_1, k_2) > 0$. Dále pro $k_1 \in \mathbb{N}$ je $P_3(k_1, k_2) > 0$ a pro $k_2 \in \mathbb{N}$ je $P_4(k_1, k_2) > 0$. Nechť $i = (i_1, i_2), j = (j_1, j_2), i_1, i_2, j_1, j_2 \in \mathbb{N}_0$ jsou libovolné dva stavy. Dokážeme, že pak pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j je kladná. Označme tuto pravděpodobnost $p_{i,j}$ a počítejme

$$p_{i,j} \geq \prod_{k=i_1}^{j_1-1} P_1(k, i_2) \prod_{k=j_1+1}^{i_2} P_3(k, i_2) \prod_{k=i_2}^{j_2-1} P_2(j_1, k) \prod_{k=j_2+1}^{i_2} P_4(j_1, k) > 0.$$

Protože jsme stavy i, j volili zcela libovolně, znamená to, že každý stav je dosažitelný z každého, tedy řetězec je nerozložitelný.

Všechny stavy řetězce jsou neperiodické, protože všechny jsou z nerozložitelnosti stejného typu a například stav $(0,0)$ je neperiodický, neboť

$$p_{0,0}^{(1)} = P_0(0,0) = 1 - \left(\frac{1}{2} \min(1, b^2) \right) > \frac{1}{2} > 0,$$

kde $p_{0,0}^{(1)}$ značí pravděpodobnost přechodu ze stavu $(0,0)$ do téhož po jednom kroku.

Nyní dokážeme existenci reverzibilního rozdělení. Prvky matice P budeme dosazovat do soustavy lineárních rovnic z definice 1.5. Pro přehlednost označíme pravděpodobnosti π_j z této definice jako $\pi_{i,j}$, kde i, j odpovídá stavům $(i, j) \in S$. Dosazením tedy dostaneme

$$\begin{aligned} \pi_{0,0} P_2(0,0) &= \pi_{0,1} P_4(0,1), \\ \pi_{0,0} P_1(0,0) &= \pi_{1,0} P_3(1,0), \\ \pi_{0,1} P_2(0,1) &= \pi_{0,2} P_4(0,2), \\ \pi_{0,1} P_1(0,1) &= \pi_{1,1} P_3(1,1), \\ \pi_{1,0} P_2(1,0) &= \pi_{1,1} P_4(1,1), \\ \pi_{1,0} P_1(1,0) &= \pi_{2,0} P_3(2,0), \\ \pi_{0,2} P_2(0,2) &= \pi_{0,3} P_4(0,3), \\ \pi_{0,2} P_1(0,2) &= \pi_{1,2} P_3(1,2), \\ \pi_{1,1} P_2(1,1) &= \pi_{1,2} P_4(1,2), \\ \pi_{1,1} P_1(1,1) &= \pi_{2,1} P_3(2,1), \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\pi_{i,j} \geq 0, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}_0,$$

$$\sum_{i,j \in \mathbb{N}_0} \pi_{i,j} = 1.$$

Vynechali jsme všechny rovnice využívající diagonální člen matice P , neboť takové rovnice jsou splněny vždy a nepřinášejí nám žádnou novou informaci.

Pokusíme-li se všechny pravděpodobnosti $\pi_{i,j}$ vyjádřit jen pomocí pravděpodobností přechodu a $\pi_{0,0}$, zjistíme, že všechny musí splňovat tyto rovnosti

$$\begin{aligned}
\pi_{0,1} &= \pi_{0,0} \frac{P_2(0,0)}{P_4(0,1)}, \\
\pi_{1,0} &= \pi_{0,0} \frac{P_1(0,0)}{P_3(1,0)}, \\
\pi_{0,2} &= \pi_{0,0} \frac{P_2(0,0)}{P_4(0,1)} \frac{P_2(0,1)}{P_4(0,2)}, \\
\pi_{1,1} &= \pi_{0,0} \frac{P_1(0,0)}{P_3(1,0)} \frac{P_2(1,0)}{P_4(1,1)}, \\
\pi_{2,0} &= \pi_{0,0} \frac{P_1(0,0)}{P_3(1,0)} \frac{P_1(1,0)}{P_3(2,0)}, \\
\pi_{0,2} &= \pi_{0,0} \frac{P_2(0,0)}{P_4(0,1)} \frac{P_2(0,1)}{P_4(0,3)} \frac{P_2(0,2)}{P_4(0,3)}, \\
&\vdots \\
\pi_{i,j} &= \pi_{0,0} \frac{\prod_{k=0}^{i-1} P_1(k,0)}{\prod_{k=1}^i P_3(k,0)} \frac{\prod_{k=0}^{j-1} P_2(i,k)}{\prod_{k=1}^j P_4(i,k)}. \tag{3.1}
\end{aligned}$$

Zřejmě, je-li $\pi_{0,0} = 0$, pak i $\pi_{i,j} = 0, i, j \in \mathbb{N}_0$ a není tedy splněna podmínka $\sum_{i,j \in \mathbb{N}_0} \pi_{i,j} = 1$. Pokud ale $\pi_{0,0} > 0$, pak jistě i $\pi_{i,j} > 0, i, j \in \mathbb{N}_0$. Chceme-li, aby platila i podmínka

$$\pi_{0,0} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{i-1} P_1(k,0)}{\prod_{k=1}^i P_3(k,0)} \frac{\prod_{k=0}^{j-1} P_2(i,k)}{\prod_{k=1}^j P_4(i,k)} = 1, \tag{3.2}$$

musíme zaručit, že

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{i-1} P_1(k,0)}{\prod_{k=1}^i P_3(k,0)} \frac{\prod_{k=0}^{j-1} P_2(i,k)}{\prod_{k=1}^j P_4(i,k)} < \infty.$$

V takovém případě jsme schopni vyjádřit $\pi_{0,0}$ a z něj i všechny ostatní $\pi_{i,j}$. Označíme nyní

$$a_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{i-1} P_1(k,0)}{\prod_{k=1}^i P_3(k,0)} \frac{\prod_{k=0}^{j-1} P_2(i,k)}{\prod_{k=1}^j P_4(i,k)} = \frac{\prod_{k=0}^{i-1} P_1(k,0)}{\prod_{k=1}^i P_3(k,0)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{j-1} P_2(i,k)}{\prod_{k=1}^j P_4(i,k)}.$$

a dosadíme hodnoty P_i odvozené v podsekcí 3.2.2. Uvědomme si nejprve, že pravděpodobnosti P_i závisí na parametrech $b > 0$ a $\nu_2 < 0$. Než začneme dosazovat, připravíme si následující pomocná čísla

$$i_1 := \min \left\{ i \in \mathbb{N}_0 : \frac{b^2}{i+1} \leq 1 \right\}, \quad i_2 := \min \left\{ i \in \mathbb{N}_0 : \frac{e^{\nu_2 i} b^2}{i+1} \leq 1 \right\}.$$

Zřejmě pro všechny parametry b a ν_2 je $i_1 \geq i_2$. Tato čísla využijeme pro rozklad součinnů v členech a_i . Rozdělíme si situaci na více případů. Součiny $\prod_{k=0}^{i-1} P_1(k,0)$ a $\prod_{k=1}^i P_3(k,0)$ spočítáme zvlášť pro $i < i_1$ a následovně pro $i \geq i_1$. Zatímco součiny $\prod_{k=0}^{j-1} P_2(i,k)$ a $\prod_{k=1}^j P_4(i,k)$ budeme počítat zvlášť pro případ $i < i_2$ a $i \geq i_2$.

1. Nechť $i < i_1$. Pak

$$\prod_{k=0}^{i-1} P_1(k,0) = \prod_{k=0}^{i-1} \frac{1}{4} \min\left(1, \frac{b^2}{k+1}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^i \prod_{k=0}^{i-1} 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^i,$$

$$\prod_{k=1}^i P_3(k,0) = \prod_{k=1}^i \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{k}{b^2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^i \prod_{k=1}^i \frac{k}{b^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^i \frac{i!}{(b^2)^i}.$$

2. Nechť $i \geq i_1$. Pak

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{i-1} P_1(k,0) &= \prod_{k=0}^{i-1} \frac{1}{4} \min\left(1, \frac{b^2}{k+1}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^i \prod_{k=0}^{i_1-1} 1 \prod_{k=i_1}^{i-1} \frac{b^2}{k+1} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^i \prod_{k=i_1}^{i-1} \frac{b^2}{k+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^i (b^2)^{i-i_1} \frac{i_1!}{i!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^i P_3(k,0) &= \prod_{k=1}^i \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{k}{b^2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^i \prod_{k=1}^{i_1} \frac{k}{b^2} \prod_{k=i_1+1}^i 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^i \prod_{k=1}^{i_1} \frac{k}{b^2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^i (b^2)^{-i_1} i_1!. \end{aligned}$$

3. Nechť $i < i_2$.

(a) Nechť $j < i_2 - i + 1$. Pak

$$\prod_{k=0}^{j-1} P_2(i,k) = \prod_{k=0}^{j-1} \frac{1}{4} \min\left(1, \frac{e^{\nu_2 i} b^2}{i+k+1}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^j \prod_{k=0}^{j-1} 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^j,$$

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^j P_4(i,k) &= \prod_{k=1}^j \frac{1}{2} \frac{k}{i+k} \min\left(1, \frac{i+k}{e^{\nu_2 i} b^2}\right) = \prod_{k=1}^j \frac{1}{2} \frac{k}{i+k} \frac{i+k}{e^{\nu_2 i} b^2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^j \prod_{k=1}^j \frac{k}{e^{\nu_2 i} b^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^j \frac{j!}{(e^{\nu_2 i} b^2)^j}. \end{aligned}$$

(b) Necht $j \geq i_2 - i + 1$. Pak

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{j-1} P_2(i, k) &= \prod_{k=0}^{j-1} \frac{1}{4} \min \left(1, \frac{e^{\nu_2 i} b^2}{i+k+1} \right) = \left(\frac{1}{4} \right)^j \prod_{k=0}^{i_2-i-1} 1 \prod_{k=i_2-i}^{j-1} \frac{e^{\nu_2 i} b^2}{i+k+1} \\ &= \left(\frac{1}{4} \right)^j (e^{\nu_2 i} b^2)^{j+i-i_2} \frac{i_2!}{(i+j)!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^j P_4(i, k) &= \prod_{k=1}^j \frac{1}{2} \frac{k}{i+k} \min \left(1, \frac{i+k}{e^{\nu_2 i} b^2} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^j \frac{j! i!}{(i+j)!} \prod_{k=1}^{i_2-i} \frac{i+k}{e^{\nu_2 i} b^2} \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^j \frac{j! i!}{(i+j)!} (e^{\nu_2 i} b^2)^{-i_2+i} \frac{i_2!}{i} \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^j \frac{j! i_2!}{(i+j)!} (e^{\nu_2 i} b^2)^{-i_2+i}. \end{aligned}$$

4. Necht $i \geq i_2$. Pak

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{j-1} P_2(i, k) &= \prod_{k=0}^{j-1} \frac{1}{4} \min \left(1, \frac{e^{\nu_2 i} b^2}{i+k+1} \right) = \left(\frac{1}{4} \right)^j \prod_{k=0}^{j-1} \frac{e^{\nu_2 i} b^2}{i+k+1} \\ &= \left(\frac{1}{4} \right)^j (e^{\nu_2 i} b^2)^j \frac{i!}{(i+j)!}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^j P_4(i, k) &= \prod_{k=1}^j \frac{1}{2} \frac{k}{i+k} \min \left(1, \frac{i+k}{e^{\nu_2 i} b^2} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^j \frac{j! i!}{(i+j)!} \prod_{k=1}^j 1 \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^j \frac{j! i!}{(i+j)!}. \end{aligned}$$

Nyní vše dosadíme do a_i a dostaneme

1. pro $i < i_2$ (tedy speciálně $i < i_1$)

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\left(\frac{1}{4} \right)^i}{\left(\frac{1}{2} \right)^i (b^2)^{-i} i!} \left(\sum_{j=0}^{i_2-i} \frac{\left(\frac{1}{4} \right)^j}{\left(\frac{1}{2} \right)^j \frac{j!}{(e^{\nu_2 i} b^2)^j}} + \sum_{j=i_2-i+1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4} \right)^j (e^{\nu_2 i} b^2)^{j+i-i_2} \frac{i_2!}{(i+j)!}}{\left(\frac{1}{2} \right)^j (e^{\nu_2 i} b^2)^{-i_2+i} \frac{j! i_2!}{(i+j)!}} \right) \\ &= \left(\frac{b^2}{2} \right)^i \frac{1}{i!} \left(\sum_{j=0}^{i_2-i} \left(\frac{e^{\nu_2 i} b^2}{2} \right)^j \frac{1}{j!} + \sum_{j=i_2-i+1}^{\infty} \left(\frac{e^{\nu_2 i} b^2}{2} \right)^j \frac{1}{j!} \right) \\ &= \left(\frac{b^2}{2} \right)^i \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{e^{\nu_2 i} b^2}{2} \right)^j \frac{1}{j!}, \end{aligned}$$

2. pro $i_2 \leq i < i_1$

$$a_i = \frac{\left(\frac{1}{4} \right)^i}{\left(\frac{1}{2} \right)^i (b^2)^{-i} i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4} \right)^j (e^{\nu_2 i} b^2)^j \frac{i!}{(i+j)!}}{\left(\frac{1}{2} \right)^j \frac{j! i!}{(i+j)!}} = \left(\frac{1}{2} \right)^i (b^2)^i \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^j \frac{(e^{\nu_2 i} b^2)^j}{j!},$$

3. pro $i \geq i_1$ (tedy speciálně $i \geq i_2$)

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^i (b^2)^{i-i_1} \frac{i_1!}{i!}}{\left(\frac{1}{2}\right)^i (b^2)^{-i_1} i_1!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^j (e^{\nu_2 i} b^2)^j \frac{i!}{(i+j)!}}{\left(\frac{1}{2}\right)^j \frac{j! i!}{(i+j)!}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^i (b^2)^i \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j \frac{(e^{\nu_2 i} b^2)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Tedy $\forall i \in \mathbb{N}_0$ je

$$a_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i (b^2)^i \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j \frac{(e^{\nu_2 i} b^2)^j}{j!} = \left(\frac{b^2}{2}\right)^i \frac{1}{i!} \exp\left\{\frac{e^{\nu_2 i} b^2}{2}\right\}. \quad (3.3)$$

Protože jsme dokázali jsme vyjádřit a_i pro všechny $i \in \mathbb{N}_0$, můžeme nyní vyšetřit konvergenci řady

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{b^2}{2}\right)^i \frac{1}{i!} \exp\left\{\frac{e^{\nu_2 i} b^2}{2}\right\}.$$

Označme

$$b_i = \left(\frac{b^2}{2}\right)^i \frac{1}{i!}, \quad c_i = \exp\left\{\frac{e^{\nu_2 i} b^2}{2}\right\}, \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Pak $\sum_{i=0}^{\infty} b_i < \infty$ a $(c_i)_{i=1}^{\infty}$ je omezená a monotónní posloupnost, neboť jsme volili $\nu_2 < 0$. Můžeme tedy použít Abelovo kritérium pro konvergenci řad a dostaneme, že

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i c_i < \infty.$$

Tím jsme však dokázali, že v tomto řetězci existuje reverzibilní rozdělení, a to pro všechny parametry $b > 0, \nu_2 < 0$. □

Důsledek. V řetězci $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ existuje stacionární rozdělení a všechny jeho stavy jsou trvalé nenulové.

Důkaz. Ve větě 3.1 jsme dokázali, že v řetězci $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ existuje reverzibilní rozdělení. Dle věty 1.2 dostáváme, že toto rozdělení je zároveň stacionárním rozdělením. Navíc je tento řetězec nerozložitelný, a tedy z věty 1.1 stavy nemůžou být přechodné ani trvalé nulové. Nezbývá tedy jiná možnost než, že jsou všechny trvalé nenulové. □

Poznámka. Existenci reverzibilního rozdělení pro Markovský řetězec generovaný Metropolisovým-Hastingsovým "birth-death" algoritmem potvrzuje věta 7.12 v publikaci (Møller a Waagepetersen, 2003, str. 128-129), která je vyslovena obecně pro nespočetnou množinu stavů. Nám však důkaz věty 3.1 umožní odvodit explicitní tvar stacionárního rozdělení na transformované množině stavů.

3.2.4 Stacionární rozdělení

Věta 3.2. Řetězec $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ s maticí pravděpodobností přechodu P a množinou stavů S z podsekcce 3.2.2 má stacionární rozdělení $\pi = \{\pi_{i,j}, i, j \in N_0\}$ tvaru

$$\pi_{i,j} = \pi_{0,0} \left(\frac{b^2}{2}\right)^{i+j} \frac{1}{i!j!} e^{\nu_2 ij},$$

$$\pi_{0,0} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{b^2}{2}\right)^i \frac{1}{i!} \exp\left\{\frac{e^{\nu_2 i} b^2}{2}\right\}}.$$

Důkaz. Z důsledku věty 3.1 víme, že existuje stacionární rozdělení a navíc z věty 1.1 máme, že je jediné. V důkazu věty 3.1 jsme odvodili $\forall i \in N_0$ členy a_i jako

$$a_i = \frac{\prod_{k=0}^{i-1} P_1(k,0)}{\prod_{k=1}^i P_3(k,0)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{j-1} P_2(i,k)}{\prod_{k=1}^j P_4(i,k)} = \left(\frac{b^2}{2}\right)^i \frac{1}{i!} \exp\left\{\frac{e^{\nu_2 i} b^2}{2}\right\}.$$

Ze vzorce (3.2) v tomtéž důkazu dostaneme

$$\pi_{0,0} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} a_i}.$$

Vynecháme-li ve vzorci (3.3) ve druhé rovnosti operátor sumace a dosadíme do vzorce (3.1), dostaneme vztah pro $\pi_{i,j}$. □

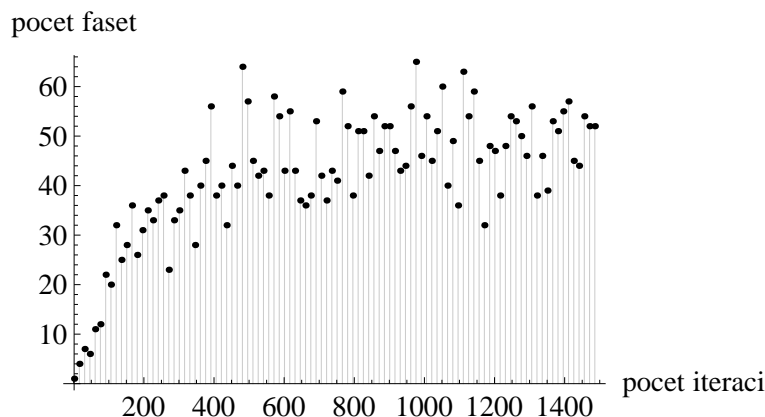
Kapitola 4

Výsledky simulací

V této kapitole budeme simulovat Metropolisův-Hastingsův algoritmus rození a zániku popsany v kapitole 3.

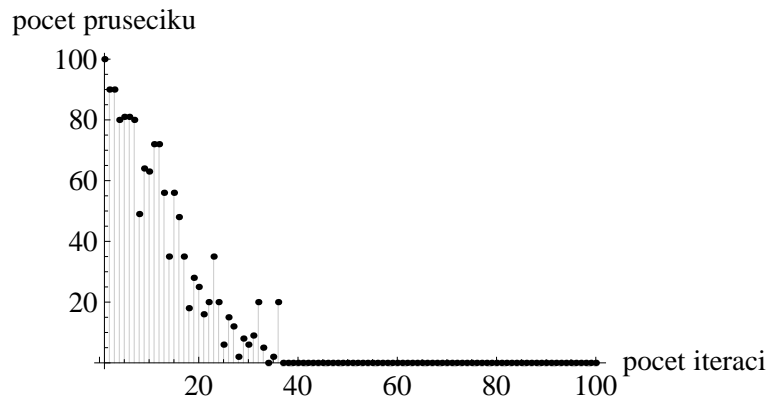
4.1 Model v \mathbb{R}^2

V \mathbb{R}^2 uvažujeme pouze dvě orientace e_1, e_2 . Na obrázku 4.1 jsme zvolili délku strany okna $b = 10$ a parametr $\nu_2 = -10$. Postupně jsme prováděli 1 až 1500 iterací vždy s počátečním stavem $(0,0)$. Na obrázku vidíme, že celkový počet faset postupně roste s počtem iterací a po určité době přestane růst a počet faset se ustálí.

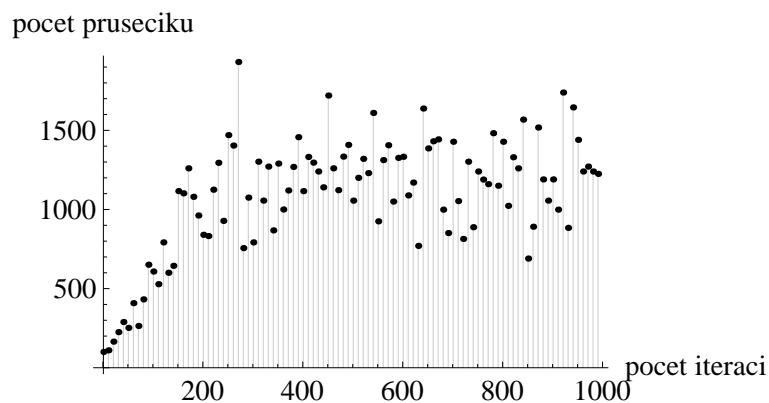


Obrázek 4.1: Závislost počtu realizovaných faset na počtu iterací v \mathbb{R}^2

Na obrázcích 4.2 a 4.3 uvidíme rozdíl chování algoritmu pro různé volby parametru ν_2 . V obou případech volíme $b = 10$. V prvním případě jsme provedli 1 až 100 iterací vždy s počátečním stavem $(10,10)$. V druhém případě 1 až 1000 iterací s tímž počátečním stavem. V 4.2 jsme volili $\nu_2 = -10$. Z obrázku je vidět, že počet průsečíků rychle klesl z počátečního stavu na nulu. To znamená, že algoritmus vypustil jednu orientaci. Při volbě parametru $\nu_2 = -0,01$ v 4.3 však žádnou konvergenci k nule již nevidíme ani při zvýšeném počtu iterací.

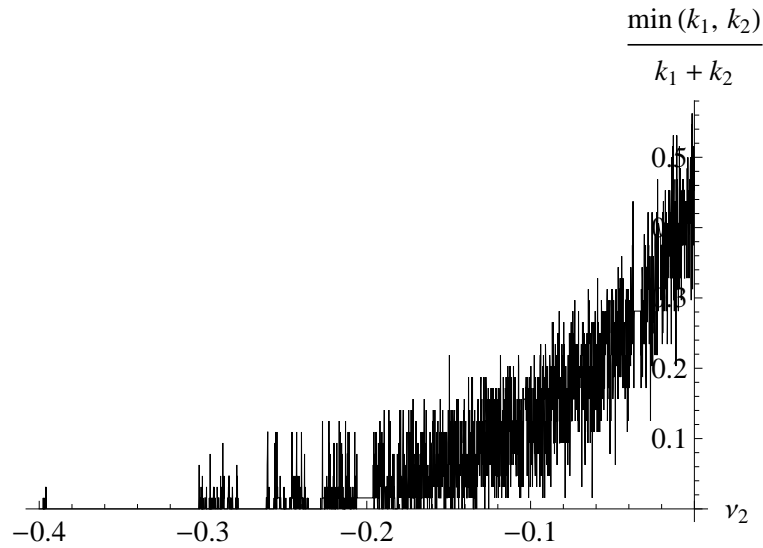


Obrázek 4.2: Klesající počet průsečíku při volbě $\nu_2 = -10$

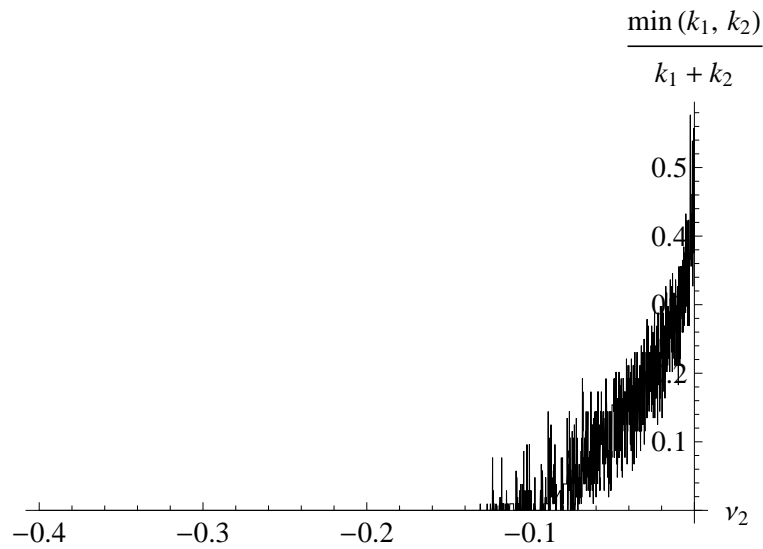


Obrázek 4.3: Neklesající počet průsečíku při volbě $\nu_2 = -0,01$

Následující série dvou obrázků porovnává chování algoritmu pro ν_2 jdoucí k nule zleva při pevném a . Ukážeme, jak záleží na počtu iterací, pokud zkoumáme konvergenci počtu průsečíků k nule. V obou případech volíme $b = 10$ a počáteční stav $(0,0)$. Podíváme se, jak se bude chovat $\frac{\min(k_1, k_2)}{k_1 + k_2}$. Uvidíme, že pro ν_2 dostatečně blízké nule budou k_1 a k_2 podobné. S rostoucím počtem iterací však budeme potřebovat ν_2 blíže k nule. V případě 4.4 jsme pro každé $\nu_2 \in [-0,4, 0]$ provedli 200 iterací a v 4.4 pak 1000 iterací. Zdá se však, že pro libovolný počet provedených iterací existuje ν_2 dostatečně blízké nule, že počet průsečíků bude kladný.

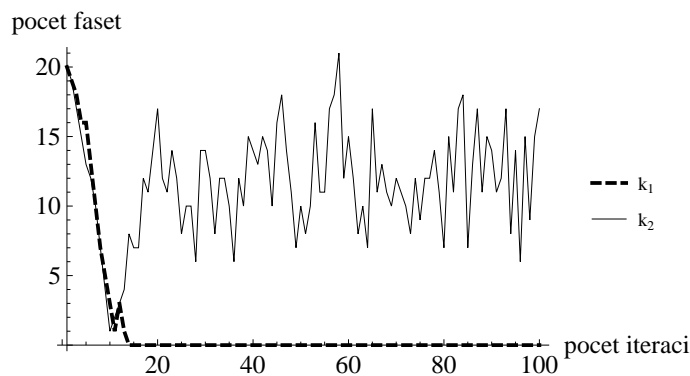


Obrázek 4.4: Konvergence počtu průsečíku k nule v závislosti na ν_2 při 200 iteracích

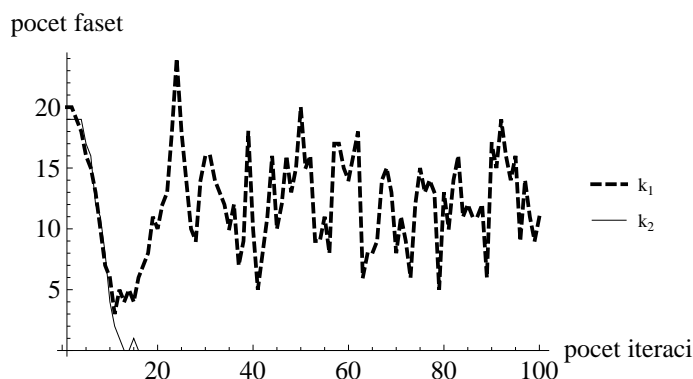


Obrázek 4.5: Konvergence počtu průsečíku k nule v závislosti na ν_2 při 1000 iteracích

Obrázek 4.6 a 4.7 nám ukazují pohyb počtu faset obou orientací. Zde volíme $b = 5, \nu_2 = -1$ a provádíme 100 iterací z počátečního stavu $(20, 20)$. Vidíme, že pro takto zvolené parametry algoritmus jednu orientaci zcela vypustí. Kterou vypustí však záleží na náhodě.



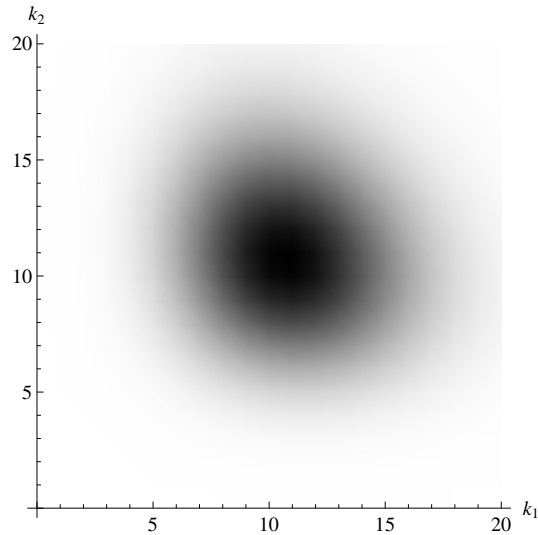
Obrázek 4.6: Algoritmus vypustil orientaci k_1



Obrázek 4.7: Algoritmus vypustil orientaci k_2

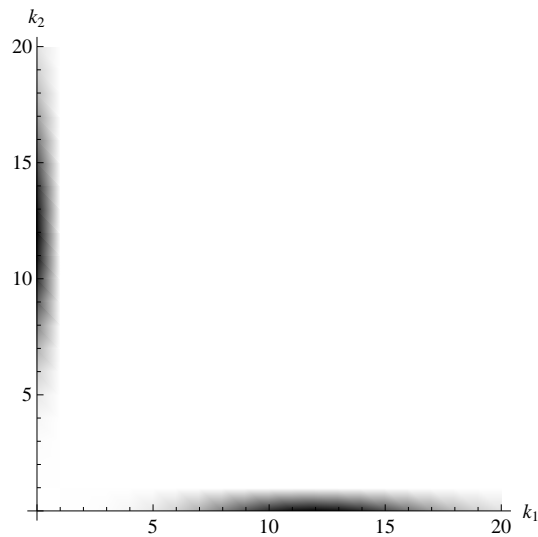
Věta 3.2 nám dává analytické vyjádření stacionárního rozdělení řetězce sestaveného Metropolisovým-Hastingsovým algoritmem. Jak jsme viděli z obrázků výše chování algoritmu závisí velmi na parametrech b a ν_2 . Parametr b ovlivňuje přímo počet realizovaných faset. Volíme-li větší okno, pak se v něm bude realizovat větší počet faset. Zatímco parametr ν_2 ovlivňuje rychlost konvergence k nulovému počtu průsečíků. Pokud je ν_2 daleko od nuly, stačí nám mnohem méně iterací k tomu, aby algoritmus vyloučil jednu orientaci, než v případě, kdy je ν_2 od nuly blízko. Obrázek 4.4 a 4.5 nám dokonce ukázaly, že pro ν_2 jdoucí k nule zleva poměr zastoupení obou orientací konverguje k $\frac{1}{2}$. To se musí nějak odrazit i na povaze stacionárního rozdělení. Následující dva obrázky ukazují, jak se rozdělení chová pro parametr ν_2 blízky nule a naopak vzdálený od nuly. V obou případech jsme volili $b = 5$. Do tabulky jsme uložili hodnoty $\pi_{k_1, k_2}, k_1, k_2 \in \{0, \dots, 20\}$ a použili v programu *Mathematica*[®] 9.0 funkci `ListDensityPlot`.

V grafu 4.8 vidíme rozložení pravděpodobností stacionárního rozdělení mezi stavy (k_1, k_2) , $k_1, k_2 \in \{0, \dots, 20\}$. Tmavší část určuje oblast stavů, ve kterých se koncentruje. Naopak světlou část tvoří body s velmi malou pravděpodobností. Zde jsme volili parametr $\nu_2 = -0,01$. V této situaci se pravděpodobnost koncentruje do diagonální části. To odpovídá obrázku 4.3, kde při ν_2 blízkém nule bylo zastoupení obou orientací podobné.



Obrázek 4.8: Stacionární rozdělení pro volbu parametru $\nu_2 = -0,01$

Na obrázku 4.9 vidíme opět rozložení pravděpodobnosti. Tentokrát jsme však volili $\nu_2 = -100$ a vidíme, že tato volba nám zaručila, že rozdělení pravděpodobnosti se spíše koncentruje v oblastech obou os, tj. mezi body $(k_1, 0)$ a $(0, k_2)$, $k_1, k_2 \in \{0, \dots, 20\}$. To odpovídá obrázku 4.2, ve kterém pro ν_2 dostatečně daleko od nuly došlo k vynechání jedné orientace. Dále vidíme, že se rozdělení koncentruje na určité omezené oblasti. To je však způsobeno tím, že celkový počet realizovaných faset se po dostatečném počtu iterací ustálí a pohybuje se jen v nějakém omezeném pásu (viz obrázek 4.1).



Obrázek 4.9: Stacionární rozdělení pro volbu parametru $\nu_2 = -100$

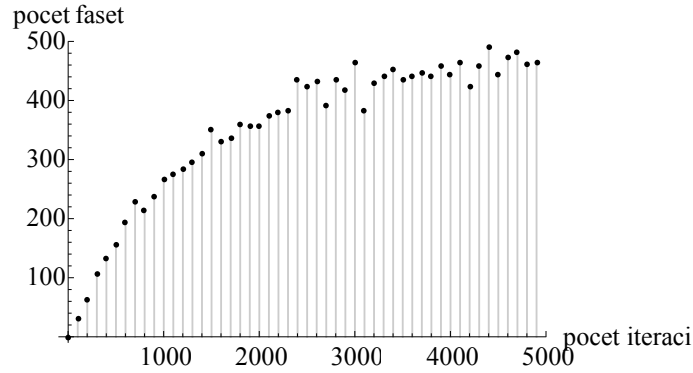
4.2 Model v \mathbb{R}^4

Uvažujme nyní orientace $e_i, i = 1, \dots, 4$. V takovém případě mají Hastingsovy podíly pro rození fasety $y \in Y$ a pro zánik fasety $u \in \mathbf{x}$, obě s orientacemi $e_j, j \in \{1, \dots, 4\}$, dle věty 2.2 tvar

$$H_r(\mathbf{x}, y) = \frac{\exp \left\{ \nu_4 \left(\prod_{i=1}^{j-1} k_i \prod_{i=j+1}^4 k_i \right) \right\} ab^4}{k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + 1},$$

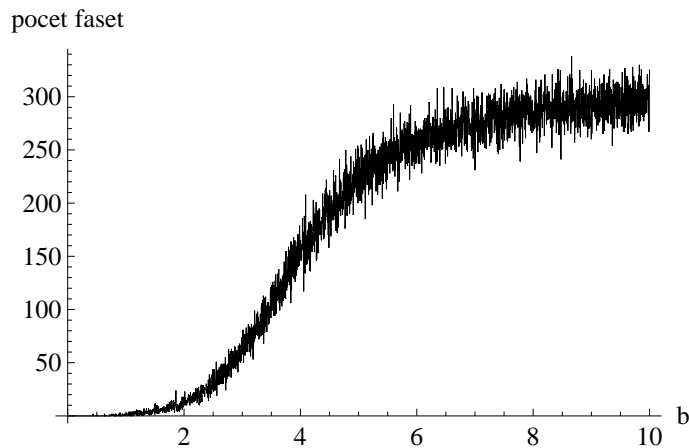
$$H_z(\mathbf{x}, u) = \frac{k_1 + k_2 + k_3 + k_4}{\exp \left\{ \nu_4 \left(\prod_{i=1}^{j-1} k_i \prod_{i=j+1}^4 k_i \right) \right\} ab^4}.$$

Pro simulace opět zvolíme pevné $a = 1$. Na obrázku 4.10 opět vidíme, že počet realizovaných faset postupně stoupá pro rostoucí počet iterací, až přestane růst a od určitého počtu iterací se ustálí v nějakém omezeném pásu. Zde jsme parametry volili $b = 5, \nu_4 = -1$ a provedli jsme 1 až 5000 iterací vždy s počátečním stavem $(0,0,0,0)$.



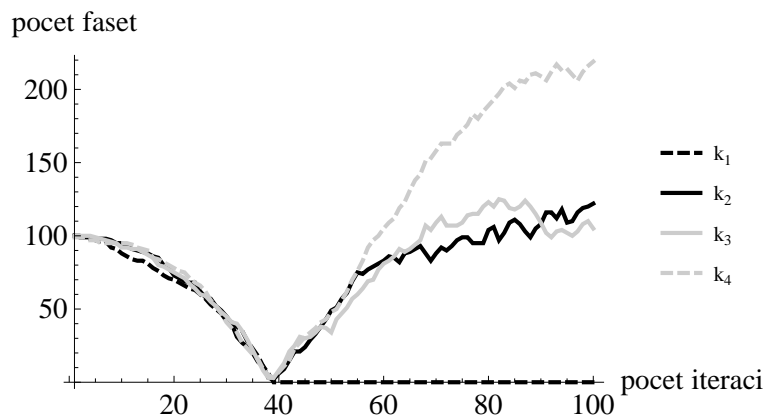
Obrázek 4.10: Závislost počtu realizovaných faset na počtu iterací v \mathbb{R}^4

Závislost počtu realizovaných faset na velikosti okna B nám ukáže následující graf 4.11, ke byl volen parametr $\nu_4 = -1$ a pro každé $b \in (0, 10]$ bylo provedeno 1000 iterací.

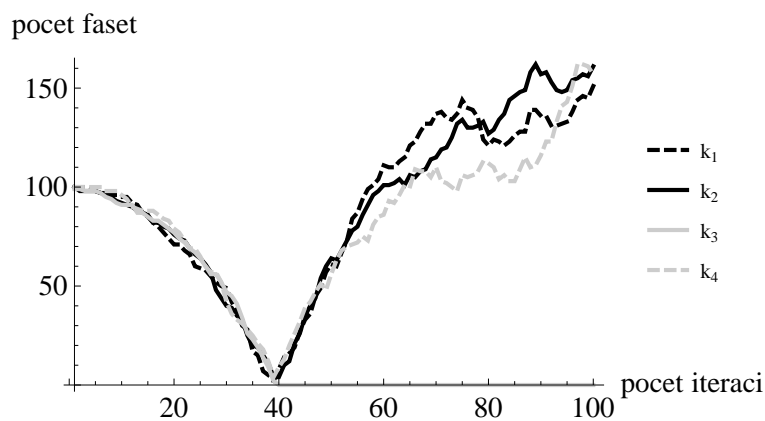


Obrázek 4.11: Závislost počtu realizovaných faset na velikosti okna B

Stejně jako v případě $d = 2$ algoritmus vypouští jednu orientaci, a to zcela náhodně. To můžeme vidět na sérii dalších dvou grafů 4.12 a 4.13, u nichž jsme volili parametry $b = 5, \nu_4 = -5$ a provedli jsme celkem 100 iterací. Výchozí stav jsme volili $(100, 100, 100, 100)$.



Obrázek 4.12: Algoritmus vypustil orientaci k_1



Obrázek 4.13: Algoritmus vypustil orientaci k_3

Závěr

Po zavedení teoretického základu bodových procesů a procesů faset jsme odvodili stacionární rozdělení pro speciální model procesu faset. Tento proces a odvozené stacionární rozdělení jsme simulovali ve čtvrté kapitole pro případ \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^4 a ukázalo se, že jeho vlastnosti odpovídají tvrzení věty 2.1 pro vhodnou volbu parametru $\nu_d, d = 2, 4$. Neplatilo to však pro všechny volby ν_d , jak ukazuje například obrázek 4.8, ale to je způsobené pevnou volbou parametru a . Simulace by se daly provést i v prostorech vyšší dimenze, avšak výsledky by byly obdobné. Rovněž by bylo možné odvodit stacionární rozdělení pro prostor obecné dimenze \mathbb{R}^d a pro obecný parametr a a zkoumat jeho chování pro $a \rightarrow \infty$. To by však rozsahem přesahovalo úroveň bakalářské práce, a tak se budeme tímto problémem zabývat až v pozdějších pracích.

Literatura

- BADDELEY, A. (2007). *Spatial Point Processes and their Applications*. In: A. Baddeley, I. Barany, R. Schneider, W. Weil (eds.). *Stochastic Geometry. Lecture Notes in Mathematics*, volume 1892. Springer, Berlin. ISBN 9783540381747.
- BENEŠ, V. a ZIKMUNDOVÁ, M. (2014). Functionals of spatial point processes having a density with respect to the Poisson process. *Kybernetika*, **50**(6), 896–913.
- GEYER, C. J. a MØLLER, J. (1994). Simulation Procedures and Likelihood Inference for Spatial Point Processes. *Scandinavian Journal of Statistics*, **21** (4), 359–373.
- HÄGGSTRÖM, O. (2002). *Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*. Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 9780521890014.
- MØLLER, J. a WAAGEPETERSEN, R. P. (2003). *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*. Monographs on Statistics and Applied Probability 100. CRC Press. ISBN 9780203496930.
- PRÁŠKOVÁ, Z. a LACHOUT, P. (1998). *Základy náhodných procesů*. 1. vydání. Karolinum - Nakladatelství Univerzity Karlovy, Prana. ISBN 9788071846888.
- SCHNEIDER, R. a WEIL, W. (2008). *Stochastic and Integral Geometry*. Probability and Its Applications. Springer, Berlin, Heidelberg. ISBN 9783540788584.
- VEČEŘA, J. a BENEŠ, V. (2015). Interaction processes for unions of facets, a limit behavior. arXiv: 1501.00363v4[math.PR].

Seznam obrázků

3.1	Schéma přechislování stavů	17
4.1	Závislost počtu realizovaných faset na počtu iterací v \mathbb{R}^2	24
4.2	Klesající počet průsečíku při volbě $\nu_2 = -10$	25
4.3	Neklesající počet průsečíku při volbě $\nu_2 = -0,01$	25
4.4	Konvergence počtu průsečíku k nule v závislosti na ν_2 při 200 iteracích	26
4.5	Konvergence počtu průsečíku k nule v závislosti na ν_2 při 1000 iteracích	26
4.6	Algoritmus vypustil orientaci k_1	27
4.7	Algoritmus vypustil orientaci k_2	27
4.8	Stacionární rozdělení pro volbu parametru $\nu_2 = -0,01$	28
4.9	Stacionární rozdělení pro volbu parametru $\nu_2 = -100$	28
4.10	Závislost počtu realizovaných faset na počtu iterací v \mathbb{R}^4	29
4.11	Závislost počtu realizovaných faset na velikosti okna B	29
4.12	Algoritmus vypustil orientaci k_1	30
4.13	Algoritmus vypustil orientaci k_3	30

Seznam zkratek

\mathbb{R}	reálná čísla
\mathbb{R}_+	nezáporná reálná čísla
\mathbb{N}	přirozená čísla bez nuly
\mathbb{N}_0	přirozená čísla a nula
$\mathbb{P}(A)$	pravděpodobnost jevu A
$\mathbb{E}(X)$	střední hodnota náhodné veličiny X
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$	pravděpodobností prostor
$\lambda_1 \otimes \lambda_2$	součin měr λ_1 a λ_2
$\mathbf{1}\{B\}$	indikátor množiny B
δ_y	Diracova míra bodu y
$L_p(\mu)$	$\left\{ f : \left(\int_X f ^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, f \text{ měřitelná na měřitelném prostoru } (X, \mu) \right\}$
μ_{\neq}^k	množina všech k -tic navzájem různých bodů bodového procesu μ
\mathbb{S}^{d-1}	jednotková hemisféra v prostoru \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}$
<i>dist</i>	obecná metrika

Přílohy

Příloha 1.

Na přiloženém CD lze najít kódy generující všechny simulace v kapitole 4. Kód je psaný v programu *Mathematica*[®] 9.0 a příslušný soubor je uložen pod názvem *simulace.nb*.