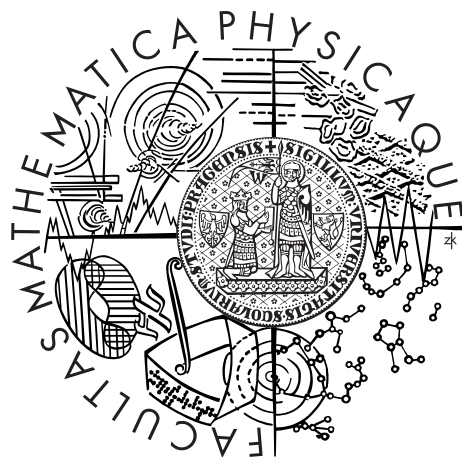


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Filip Šedivý

Klastrová rovinnost

Informatický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jelínek Vít, Ph.D.

Studijní program: Informatika

Studijní obor: obecná informatika

Praha 2015

Na tomto místě bych chtěl poděkovat několika osobám, které nějakým způsobem přispěli k tomu, aby tato práce mohla vzniknout. Chtěl bych na prvním místě poděkovat Bohu, který mi byl největší oporou při práci na této bakalářské práci.

Chci též poděkovat mému vedoucímu Vítu Jelínkovi, jehož rady a připomínky výrazně přispěli úrovni práce.

Chci poděkovat Janě Höger za pomoc s korekturou textu.

A na závěr chci poděkovat Raisse Likhonině, díky ní jsem dbal na to, aby text byl co nejsrozumitelnější.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Klastrová rovinnost

Autor: Filip Šedivý

Katedra / Ústav: Informatický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jelínek Vít, Ph.D., Informatický ústav Univerzity Karlovy

Abstrakt: Práce se zabývá problémem klastrové rovinnosti a ubírá se dvěma směry. Jedním směrem je otázka výpočetní složitosti, kde ukážeme, jak klastrovou rovinnost řešit v lineárním nedeterministickém čase vzhledem k počtu vrcholů vstupního grafu. Druhým směrem je charakterizace omezených verzí klastrové rovinnosti pomocí minimálních klastrově nerovinných instancí. Za tím účelem definujeme pojem klastrového minoru pomocí několika operací redukujících klastrové grafy, o nichž dokážeme, že zachovávají klastrovou rovinnost. Dokážeme, že v případě klastrového grafu, kde klastry mají velikost 2 a grafem je kružnice nebo cesta, existuje jen konečně mnoho minimálních klastrově nerovinných minorů. Kromě toho uvedeme i již známe výsledky o výpočetní složitosti klastrové rovinnosti.

Klíčová slova: Klastrová rovinnost, klastrové minory, výpočetní složitost, charakterizace minimálních klastrových grafů bez nakreslení

Title: Clustered planarity

Author: Filip Šedivý

Department: Computer Science Institute of Charles University

Supervisor: RNDr. Jelínek Vít, Ph.D., Computer Science Institute of Charles University

Abstract: This thesis studies the problem of clustered planarity and follows two directions. First direction deals with computational complexity, where we show how clustered planarity can be solved in linear nondeterministic time in terms of the number of vertices of the input graph. Second direction is characterization of restricted versions of clustered planarity using minimal non-clustered-planar instances. For this purpose we introduce a notion of clustered minor using several operations reducing clustered graphs. We show that these operations preserve clustered planarity. We show that in the case of clustered graphs where clusters have size 2 and the graph is a cycle or a path, there are only finitely many minimal non-clustered-planar minors. We also mention known results about the computational complexity of clustered planarity.

Keywords: Clustered planarity, clustered minors, computational complexity, characterization of minimal clustered graphs without embedding

Obsah

1	Úvod	1
2	Rešerše	4
3	Složitost	7
3.1	Datová reprezentace	7
3.2	Časová složitost	9
3.3	Prostorová složitost	11
4	Minorové operace	12
5	Speciální instance	16
5.1	Kružnice s klastry velikosti 2	16
5.2	Cesty s klastry velikosti 2	22
5.3	Vztah klastrových kružnic a klastrových cest	24
6	Závěr	26

Kapitola 1

Úvod

Při vizualizaci různých systémů, kde máme nějaké objekty a spoje mezi nimi, jako jsou například sítě, grafy, apod., můžeme mít na zobrazení různé požadavky. Častým požadavkem je, aby se spoje nekřížily. Další možným požadavkem je, že objekty mají být zobrazeny „blízko“ sebe. Velmi podobným požadavkem se zabývá klastrová rovinnost, kde máme objekty seskupené do skupin nazývané klastry a požadavkem na vizualizaci je, aby každou skupinu bylo možno ohraničit do vymezeného regionu.

Problém existence rovinného klastrového nakreslení grafu (dále jen klastrová rovinnost) je jedním možným zobecněním klasické grafové rovinnosti pro případ, kdy kromě vrcholů a hran máme hierarchii skupin vrcholů. Skupinu vrcholů nazýváme klastrem. Pro klastrovou rovinnost není znám polynomiální algoritmus, a není známo, zda je tento problém NP-úplný.

Definice 1.1. Mějme graf $G = (V, E)$. Pod *klastrem* K budeme uvažovat podmnožinu vrcholů $K \subseteq V$.

Klastrovou hierarchii jest množina klastrů, kde pro každé dva klastry K_1 a K_2 platí následující

- buď $K_1 \cap K_2 = \emptyset$
- nebo $K_1 \subset K_2$, případně nebo $K_2 \subset K_1$

Klastrový graf je dvojice (G, \mathcal{C}) , kde G je graf a \mathcal{C} je klastrová hierarchie vrcholů G .

Formálně se můžeme dívat na klastrovou hierarchii jako podmnožinu $\mathcal{P}(V)$. To může vést k tomu, že bychom si mohli myslet, že klastrů může

být velmi mnoho vzhledem k velikosti původního grafu. V kapitole složitost (kap. 3) ukážeme, že počet klastřů je lineární vzhledem k počtu vrcholů grafu G . V některých situacích se hodí předpokládat, že množina všech vrcholů vždy tvoří klastř a též jednotlivé vrcholy tvoří klastry. Například se tento předpoklad hodí v důkazu o počtu klastřů.

Definice 1.2. Pod *klastrovým nakreslením* rozumíme to, že vrcholy a hrany nakreslíme do roviny jako u rovinného nakreslení a navíc doplníme nakreslení klastřů.

Nakreslením klastřu K v rovině je topologická kružnice γ_K . Vrcholy z K leží ve vnitřku γ_K a vrcholy nepatřící do K leží vně γ_K . Hrany grafu smí protínat γ_K nejvýše jedenkrát. Pro libovolné dva klastry se nesmí stát, že by se jejich nakreslení protínala.

Klastrový graf (G, \mathcal{C}) je *klastrově rovinný* pokud existuje nějaké jeho klastrové nakreslení.

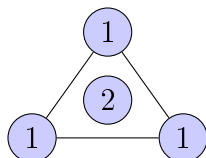
Omezení pro hrany v nakreslení klastřu K nám zaručuje, že hrany vedoucí mezi vrcholy klastřu K leží celé ve vnitřku γ_K . Podobně hrany spojující vrcholy mimo K musí ležet ve vnějšku γ_K . Definice nakreslení klastřu nám zaručuje, že každá hrana křížící γ_K spojuje vrchol z K s vrcholem z $V \setminus K$.

Nyní můžeme uvést definici rozhodovacího problému klastrové rovinnosti. Klastrová rovinnost má dvě základní verze, a to nakreslená a nenakreslená verze.

Definice 1.3. V *nenakreslené verze klastrové rovinnosti* máme rozhodnout, zda pro daný klastrový graf (G, \mathcal{C}) existuje jeho klastrové nakreslení. Instanci nenakreslené verze klastrové rovinnosti budeme nazývat *nenakreslený klastrový graf*.

U *nakreslené verze klastrové rovinnosti* máme na vstupu trojici (G, \mathcal{C}, ρ) , kde ρ je rovinné nakreslení G a (G, \mathcal{C}) je klastrový graf. Máme rozhodnout, zda lze ρ rozšířit na klastrové nakreslení (G, \mathcal{C}) dokreslením klastřů. Instanci nakreslené verze klastrové rovinnosti budeme nazývat *nakreslený klastrový graf*.

Nakreslená verze klastrové rovinnosti je už na pohled omezena silnější podmínkou a to nakreslením vstupního grafu. Pokud tedy nelze dokreslit klastry tak, abychom obdrželi klastrové nakreslení, pak klastrový graf stále může být klastrově rovinný (viz obrázek 1.1).



Obrázek 1.1: Čísla označují, do jakého klastru vrchol patří. Na první pohled je zřejmé, že není možné dokreslit klastr 1 tak, aby vrchol označený jako 2 nebyl ve vnitřku nakreslení klastru, ale je také zjevné, že příslušný klastrový graf je klastrově rovinný.

Nyní definujeme několik pojmů, které jsou potřeba pro uvedení věty dávající kombinatorický pohled na problém klastrové rovinnosti.

Definice 1.4. Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) . Klastř K je *souvislý* pokud podgraf indukovaný na vrcholech klastru je souvislý.

Definice 1.5. Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) , kde $G = (V, E)$. *Saturátor* S je podmnožina $\binom{V}{2} \setminus E$ taková, že každý klastř je v $(G \cup S, \mathcal{C})$ souvislý, kde $G \cup S = (V, E \cup S)$.

Mějme nakreslení grafu G , označme jej ρ . *Nakreslený saturátor* S je množina nakreslených hran takových, že nakreslení $\rho \cup S$ je rovinné nakreslení $G \cup S$ a v $G \cup S$ je každý klastř souvislý.

Definice 1.6. Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) . V nakreslení ρ grafu G rozumíme *dírou* kružnici C v grafu G , jejíž vrcholy náležejí klastř K takovou, že v nakreslení ρ je uvnitř nakreslení C vrchol nepatřící do klastř K .

Pokud má nakreslení ρ grafu G díru, tak jej nelze rozšířit na klastrové nakreslení, proto jej zde uvádíme. Větu o kombinatorickém pohledu na klastrovou rovinnost uvedeme zvlášť pro nakreslenou verzi a zvlášť pro nenakreslenou verzi.

Věta 1.7 (Di Battista, Frati [9]). *Nakreslený klastrový graf (G, \mathcal{C}, ρ) je klastrově rovinný právě tehdy, když existuje nakreslený saturátor S takový, že $(G \cup S, \mathcal{C})$ nemá díru v ρ .*

Věta 1.8 (Di Battista, Frati [9]). *Nenakreslený klastrový graf (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný právě tehdy, když existuje saturátor S takový, že $G \cup S$ má rovinné nakreslení, v němž není díra vzhledem k $(G \cup S, \mathcal{C})$.*

Kapitola 2

Rešerše

V této kapitole čtenáře seznámíme se známými výsledky v oblasti klastrové rovinnosti. Jedná se o výsledky, kde pro omezenou verzi klastrové rovinnosti je znám polynomiální deterministický algoritmus pro otestování klastrové rovinnosti, případně je znám i algoritmus pro nakreslení.

Jedním směrem, kde omezení přineslo nějaké výsledky, je omezení se na souvislé klastry. Pro další výsledky v tomto směru se vždy požadavek na souvislost upravil. Například, že klastry indukují nejvýše dvě komponenty či některé klastry jsou obecně nesouvislé. Nyní uvedeme několik výsledků dosažených v tomto směru.

Věta 2.1 (Cortese et al. [1]). *Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) , kde každý klastr $K \in \mathcal{C}$ je souvislý. Pak existuje lineární deterministický algoritmus rozhodující zda (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný.*

Tento výsledek využijeme později při konstrukci lineárního nedeterministického algoritmu pro obecné klastrové grafy (viz kapitola 3).

Před uvedením dalšího výsledku uvedeme definici takzvaného úplně souvislého klastrové grafu.

Definice 2.2. Klastrový graf (G, \mathcal{C}) je *úplně souvislý*, pokud pro každý klastr $K \in \mathcal{C}$ je K souvislý a $V \setminus K$ je souvislý.

Věta 2.3 (Cornelsen a Wagner [2]). *Úplně souvislý klastrový graf (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný $\iff G$ je rovinný.*

Rovinnost lze rozpoznávat v lineárním čase. A navíc je i možné získat v tomto případě v lineárním čase klastrové nakreslení.

Věta 2.4 (Jelínek et al. [3]). *Mějme nakreslený klastrový graf (G, \mathcal{C}, ρ) . Pokud každý klastř $K \in \mathcal{C}$ indukuje nejvýše dvě komponenty, pak existuje lineární algoritmus pro rozhodnutí, zda (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný.*

Věta 2.5 (Gutwenger et al. [4]). *Pokud všechny nesouvislé klastry klastrového grafu (G, \mathcal{C}) leží na stejné cestě začínající v kořeni klastrové hierarchie, pak pro (G, \mathcal{C}) lze v kvadratickém čase rozhodnout, zda je klastrově rovinný.*

Věta 2.6 (Goodrich et al. [5]). *Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) . Nechť pro každý nesouvislý klastř $K \in \mathcal{C}$ platí, že jeho rodič a sourozenci v klastrové hierarchii jsou souvislé klastry. Potom pro (G, \mathcal{C}) lze v kvadratickém čase rozhodnout, zda je klastrově rovinný.*

Věta 2.7 (Gutwenger et al. [4]). *Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) . Každý nesouvislý klastř K má souvislého rodiče a souvislé komponenty K mají napojení mimo rodiče. Pak je algoritmus pracující v polynomiálním čase rozhodující o klastrové rovinnosti a dávající klastrové nakreslení v případě kladné odpovědi.*

Další směr, který přinesl výsledky, se týká takzvaných placatých klastrových grafů. Jedná se o omezení klastrové hierarchie, kde klastry jsou po dvou disjunktní (nepočítaje klastř obsahující všechny vrcholy a jednovrcholové klastry).

Definice 2.8. Klastrový graf (G, \mathcal{C}) je *placatý* pokud všechny klastry kromě kořene (klastř obsahující všechny vrcholy) mají jako rodiče kořen (jednovrcholové klastry ignorujeme).

Věta 2.9 (Jelínková et al. [6]). *Mějme placatý klastrový graf (G, \mathcal{C}) , kde G je kružnice. Pokud každý klastř obsahuje nejvýše tři vrcholy (kromě kořene), pak lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je (G, \mathcal{C}) klastrově rovinný.*

Věta 2.10 (Cortese et al [7]). *Mějme placatý klastrový graf (G, \mathcal{C}) , kde G je kružnice. Pokud klastry jsou uspořádané do cyklu nebo cesty, pak lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je (G, \mathcal{C}) klastrově rovinný.*

Věta 2.11 (Cortese et al [8]). *Mějme placatý klastrový graf (G, \mathcal{C}) , kde G je kružnice. Pokud klastry jsou uspořádané do nakresleného rovinného grafu, pak lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je (G, \mathcal{C}) klastrově rovinný.*

Věta 2.12 (Jelínková et al. [6]). *Mějme placatý klastrový graf (G, \mathcal{C}) , kde G je 3-souvislý a všechny stěny mají velikost nejvýše 4, pak lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je (G, \mathcal{C}) klastrově rovinný.*

Věta 2.13 (DiBattista a Frati [9]). *Mějme placatý nakreslený klastrový graf (G, \mathcal{C}, ρ) , kde všechny stěny mají velikost nejvýše 5, pak lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je (G, \mathcal{C}) klastrově rovinný.*

Jiným směrem bylo omezení grafu na vrcholově 3 souvislý.

Věta 2.14 (Jelínková et al. [6]). *Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) , kde klastry mají velikost nejvýše 3 (kromě kořene) a G je vrcholově 3-souvislý, pak lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je (G, \mathcal{C}) klastrově rovinný.*

Věta 2.15 (Jelínková et al. [6]). *Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) , kde klastry mají velikost nejvýše 3 (kromě kořene) a G je dělení vrcholově 3-souvislého multigrafu, který má $\mathcal{O}(1)$ vrcholů, a G má všechny stupně sudé, pak lze v polynomiálním čase rozhodnout, zda je (G, \mathcal{C}) klastrově rovinný.*

Ještě jedním směrem je omezení počtu klastrů. Konkrétně na dva klastry, viz články [12], [13], [14]. Dokazuje se v nich (mimo jiné) lineární algoritmus pro situaci, kdy množina vrcholů je rozdělena na právě dva neprázdné disjunktí klastry (nepoužívá se v nich terminologie klastrové rovinnosti, ale je to ekvivalentní).

Závěrem je nutno poznamenat, že jinak se jedná o otevřené problémy. Například pro obecné placaté grafy se neví, jestli lze efektivně rozhodovat o klastrové rovinnosti. Pro obecnou klastrovou rovinnost je otevřeným problémem zda patří do P nebo jestli je NP-úplný.

Kapitola 3

Složitost

V této kapitole ukážeme několik výsledků ohledně časové a prostorové složitosti. Problém klastrové rovinnosti patří do třídy NP z pohledu časové složitosti a z hlediska prostorového se dá řešit v prostoru $\mathcal{O}(n)$ na deterministickém stroji, kde n je počet vrcholů.

Jako výchozí model uvažujeme RAM s logaritmickou velikostí paměťových buněk vzhledem k velikosti vstupu a jednotkovou cenou za aritmetické operace s čísly, případně jeho nedeterministickou verzi nRAM. Tedy polynomiálně velká čísla lze uložit a operovat s nimi v konstantním prostoru a čase. Je to standardní model u tohoto typu problémů, díky němuž lze říci, že graf s n vrcholy a m hranami je uložen v prostoru $\mathcal{O}(n + m)$.

3.1 Datová reprezentace

Nejprve uvedeme možnosti reprezentace klastrového grafu a ujasníme si, vzhledem k čemu budeme vztahovat příslušnou složitost. Pro reprezentaci klastrové hierarchie se nabízí dvě možnosti.

1. Seznamy vrcholů
2. Strom, kde listy představují vrcholy a vnitřní uzly představují klastry
 - Zde předpokládejme, že kořen tohoto stromu reprezentuje klastr obsahující všechny vrcholy.

V této kapitole budeme několikrát hovořit o maximálních podklastrech (vzhledem na inkluzi) v nějakém klastru K . Proto si zavedeme následující definici.

Definice 3.1. Pod *maximálním podklastrem vzhledem ke klastru K* myslíme klastr takový, že je přímým potomkem K v klastrové hierarchii.

Nejprve musíme určit, kolik klastrů se v klastrové hierarchii může nacházet. Pro zjednodušení budeme předpokládat, že v klastrové hierarchii máme vždy klastr obsahující všechny vrcholy a každá jednovrcholová množina je též klastrem v klastrové hierarchii.

Tvrzení 3.2. *Maximální počet klastrů v grafu G s n ($n \geq 1$) vrcholy je $2n - 1$.*

Důkaz. Důkaz indukcí podle n :

Základ indukce: $n=1$

Zjevně platí.

Indukční předpoklad: Tvrzení platí pro $|V| < n$.

Indukční krok:

Díky předpokladům víme, že klastr, který obsahuje aspoň dva vrcholy, má aspoň dva maximální podklastry.

Máme graf s n vrcholy. Podle předpokladu máme klastr K obsahující všechny vrcholy. Ten obsahuje k vzájemně disjunktních maximálních podklastrů. Velikost i -tého klastru nechť je k_i . Každý z těchto klastrů obsahuje méně než n vrcholů. Platí pro ně tedy indukční předpoklad. Máme tedy:

$$\text{počet klastrů} \leq 1 + \sum_{i=1}^k (2 * k_i - 1) = 1 + 2 * \sum_{i=1}^k k_i - k = 2n - k + 1$$

K maximalizování dojde pokud bude vždy $k = 2$, což odpovídá situaci, kde každý klastr, který není listem, má právě dva maximální podklastry. \square

Velikost grafu na vstupu je $\mathcal{O}(n+m+|\mathcal{C}|)$, \mathcal{C} je klastrová hierarchie a $|\mathcal{C}|$ je velikost její reprezentace. První varianta reprezentace klastrové hierarchie má za následek, že klastrová hierarchie zabírá prostor až $\mathcal{O}(n^2)$. Příkladem takové klastrové hierarchie je graf, kde klastry jsou postupně do sebe vnořené. První klastr obsahuje všechny vrcholy, druhý o vrchol méně, třetí o další vrchol, atd.. Druhá varianta reprezentace naproti tomu dává prostor $\mathcal{O}(n)$. Nejvíce nám tedy o časové a prostorové složitosti problému prozradí, když budeme složitost vyjadřovat vzhledem k počtu vrcholů vstupního grafu. Dostali jsme, že klastrový graf (G, \mathcal{C}) , kde G je rovinný graf, lze reprezentovat v prostoru $\mathcal{O}(n)$.

Dále v textu budeme pracovat výhradně se stromovou reprezentací klastrové hierarchie.

3.2 Časová složitost

Hlavním výsledkem této části je lineární nedeterministický algoritmus pro klastrovou rovinnost.

Tvrzení 3.3. *Problém rozhodnutí existence rovinného klastrového nakreslení patří do třídy NP.*

Důkaz. Využíváme toho, že ekvivalentním problémem ke klastrové rovinnosti je existence saturátoru. Ten nám zajistí, že klastry jsou souvislé. Saturátor dostaneme jako certifikát. Vzhledem k tomu, že klastrů je polynomiálně mnoho, tak ověření saturátoru se dá provést v polynomiálním čase (například otestováním souvislosti každého klastru zvlášť). Dále jsou algoritmy testující klastrovou rovinnost v polynomiálním čase (viz věta 2.1), pokud klastry jsou souvislé. \square

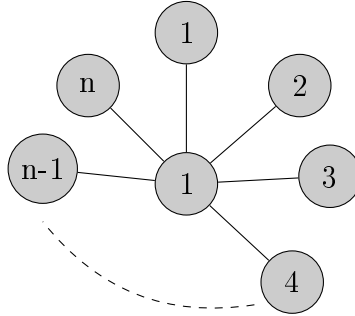
Tvrzení 3.4. *Pro problém klastrové rovinnosti je nedeterministický algoritmus, jehož časová složitost je $\mathcal{O}(n)$.*

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení je pouze doplněním důkazu, že klastrová rovinnost je v NP. Pro důkaz je třeba ukázat, že umíme ověřit souvislost všech klastrů v čase $\mathcal{O}(n)$, a pak že klastrová rovinnost se dá otestovat v lineárním čase, pokud jsou klastry souvislé. Druhá část viz věta 2.1.

Prosté otestování všech klastrů zvlášť na souvislost vede na algoritmus s časovou složitostí $\mathcal{O}(n^2)$, protože klastrů je až lineárně mnoho a jejich celková velikost je až kvadratická. Pro zlepšení půjdeme cestou, kdy budeme testovat souvislost klastrů od nejmenších k největším. A po otestování klastru na souvislost daný klastr zkontraujeme do jediného vrcholu, abychom při testování nadklastrů nemuseli opětovně procházet přes vrcholy otestovaného klastru.

Při testování klastru na souvislost použijeme klasický algoritmus na testování souvislosti. Hrany, které vedou ven z klastru, si při průchodu jen zapamatujeme, a po doběhnutí testu je aktualizujeme, tedy nasměrujeme je do nového vrcholu vzniklého kontrakcí klastru. Časová složitost pro jeden klastř C je $\mathcal{O}(n_C + m_C + \text{počet hran ven z klastru})$, kde n_C je počet vrcholů klastru a m_C je počet hran mezi vrcholy klastru. Problémem je, že tohle stále

vede na algoritmus s kvadratickou časovou složitostí (viz obrázek 3.1). Je to způsobeno tím, že se hrany můžou aktualizovat příliš často.



Obrázek 3.1: Klastrový graf, pro který poběží kvadraticky dlouho vzhledem k počtu vrcholů algoritmus s aktualizací hran. Je to hvězda, kde i -tý klastr je tvořen vrcholy s čísly nejvýše i . Důvodem neefektivity je to, že kontrakce vždy zasáhne středový vrchol hvězdy a všechny hrany se musí přesměrovat do nového vrcholu vzniklého kontrakcí.

Nyní uvedeme algoritmus s lineární časovou složitostí. Ten vychází z předchozího pokusu, kde jsme si zdánlivě nepomohli. Pro zlepšení musíme dosáhnout toho, že hrany opakovaně nenavštěvujeme. To provedeme následovně, pro každý klastr K budeme mít pomocný graf (označme jej G_K), kde vrcholy představují maximální podklastry daného klastru. Hrany v těchto pomocných grafech představují hrany jdoucí mezi klastry. Každé hraně $\{x, y\}$ v grafu G odpovídá hrana v právě jednom pomocném grafu. Abychom mohli určit, do kterého pomocného grafu hrana patří, tak potřebujeme určit nejmenší klastr, který sdílí vrcholy příslušné hrany. Navíc také potřebujeme znát podklastry, kam vrcholy patří. To je ale problém nejmenšího společného předka v zakoreněném stromu, kdy potřebné dotazy se provádí v konstantním čase a s lineárním předvýpočtem a využívající lineární prostor. Jednoduchou úpravou získáme i ty potřebné informace (ty podklastry). (viz [15] a [16])

Náš algoritmus tedy napřed provede předvýpočet potřebný pro problém hledání minimálního společného předka, kde se hrany rozdělí do pomocných grafů. Následně se pro každý pomocný graf provede test souvislosti. První část algoritmu pracuje v čase $\mathcal{O}(n)$ díky tomu, že umístění hrany do pomocného grafu umíme provést v konstantním čase a hran je pouze $\mathcal{O}(n)$. Druhá část algoritmu pracuje v čase $\sum_{C \in \mathcal{C}} (n_{G_C} + m_{G_C}) = \sum_{C \in \mathcal{C}} n_{G_C} + \sum_{C \in \mathcal{C}} m_{G_C} \leq$

počet klastrů $+ m = \mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n)$, zde n_{G_C} značí počet vrcholů pomocného grafu a m_{G_C} počet jeho hran. \square

3.3 Prostorová složitost

Z výsledků o časové složitosti můžeme říci, že můžeme klastrovou rovinnost rozhodovat v nedeterministickém prostoru o velikosti $\mathcal{O}(n)$. Ze Savitchovy věty (viz [17]) plyne, že v deterministickém prostoru stačí nejvýše prostor velikosti $\mathcal{O}(n^2)$. Lepšího výsledku ve smyslu, že potřebujeme méně prostoru, dosáhneme využitím vztahu tříd NTIME a DSPACE, který je $NTIME(t(n)) \subseteq DSPACE(t(n))$. Jelikož máme nedeterministický algoritmus pro klastrovou rovinnost pracující v lineárním čase, tak díky předěšlému víme, že existuje deterministický algoritmus využívající pouze lineárně mnoho prostoru.

Tvrzení 3.5. *Klastrová rovinnost lze rozhodovat na RAMu s lineárně omezeným prostorem.*

Důkaz.

\square

Kapitola 4

Minorové operace

V této kapitole zavedeme operace s klastrovým grafem, které zachovávají klastrovou rovinnost. V závěru kapitoly zavedeme pojem klastrového minoru, jakožto hlavní pojem této kapitoly, jenž v následující kapitole použijeme pro charakterizaci zakázaných minorů omezených problémů klastrové rovinnosti.

Definice 4.1. Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) . *Minorové operace* na klastrových grafech jsou následující:

(Pozn.: Pokud se neřekne jinak, operace se smí provést v nakreslené i ne-nakreslené verzi)

Odebráním vrcholu v z klastrového grafu (G, \mathcal{C}) vznikne klastrový graf (G', \mathcal{C}') , kde $G' = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{f \mid \text{hrana } f \text{ obsahovala vrchol } v\})$ a \mathcal{C}' je klastrová hierarchie, kde se z klastrů odebere vrchol v , pokud v nich byl.

Odebráním hrany e z klastrového grafu (G, \mathcal{C}) vznikne klastrový graf (G', \mathcal{C}') , kde $G' = (V, E \setminus \{e\})$.

Odebráním klastru K z klastrového grafu (G, \mathcal{C}) vznikne klastrový graf (G, \mathcal{C}') , kde $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \setminus K$.

Kontrakcí hrany $e = \{x, y\}$ z klastrového grafu (G, \mathcal{C}) vznikne klastrový graf (G', \mathcal{C}') , kde G' je graf, který obdržíme kontrakcí hrany e a \mathcal{C}' získáme nahrazením vrcholů x a y ve všech klastrech, kde byly, vrcholem vzniklým kontrakcí. Kontrakci můžeme provést za předpokladu, že koncové vrcholy x, y leží ve stejných klastrech.

Nahrazením klastru $K = \{x, y\}$ o velikosti 2 hranou e z klastrového grafu klastrového grafu (G, \mathcal{C}) vznikne klastrový graf (G', \mathcal{C}') , kde $G' = (V, E \cup e)$ a $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \setminus K$. Předpokládáme, že vrcholy x, y nejsou spojeny hranou, neboť v tom případě tato operace není potřebná. U nakreslené verze navíc předpokládáme, že e má jednoznačně dané kombinatorické nakreslení.

Odebráním vrcholu v z klastru K z klastrového grafu (G, \mathcal{C}) vznikne klastrový graf (G, \mathcal{C}') , kde \mathcal{C}' vznikne nahrazením klastru K klastrem $K \setminus \{v\}$. Tuto operaci lze provést za předpokladu, že z vrcholu v vychází právě jedna hrana ven z K a K je nejmenší (vzhledem k inkluzi) klastr obsahující v .

Sjednocení disjunktích klastrů K_1 a K_2 z klastrového grafu (G, \mathcal{C}) vznikne klastrový graf (G, \mathcal{C}') , kde $\mathcal{C}' := (\mathcal{C} \setminus \{K_1, K_2\}) \cup \{K_1 \cup K_2\}$. Sjednocení klastrů můžeme provést za předpokladů, že K_1, K_2 jsou dva minimální klastry (nemají podklastry) se společným rodičem, $K_1 \cup K_2$ neindukuje kružnici s vrcholem mimo $K_1 \cup K_2$ uvnitř. Jinými slovy $K_1 \cup K_2$ nemá díru v G (v nakreslené verzi). V nenakreslené verzi je podmínkou, že existuje nakreslení ρ grafu G takové, že $K_1 \cup K_2$ nemá díru v ρ . Posledním předpokladem je, že existuje hrana spojující K_1 s K_2 .

Název minorové operace je užít proto, že každá operace zjednodušuje daný vstupní klastrový graf. U sjednocení klastrů v nenakresleném klastrovém grafu je obtížné říci, kdy potřebné nakreslení existuje, to činí operaci méně použitelnou. Kromě nahrazení klastru hranou můžeme uvážit i nahrazení hrany klastrem velikosti 2. To můžeme provést v případě, že konce hrany patří do stejných klastrů. Nyní vyzkoumáme dopad minorových operací na klastrový graf, konkrétně dopad na existenci klastrového nakreslení.

Tvrzení 4.2. *Nechť (G', \mathcal{C}') vznikne z (G, \mathcal{C}) minorovou operací. Potom pokud (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný, tak (G', \mathcal{C}') je klastrově rovinný.*

Důkaz. Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) a jeho klastrové nakreslení ρ .

Odebrání vrcholu, hrany či klastru zachovává klastrovou rovinnost: Mějme dáno klastrové nakreslení. Odebrání hrany zapříčiní jedině to, že se nemusí v daném nakreslení hrana kreslit. Podobně pro odebraný vrchol, kdy se odeberou hrany vedoucí do něj. Odebraný klastr se též prostě nenakreslí.

Kontrakce hrany zachovává klastrovou rovinnost:

Mějme dáno klastrové nakreslení. Kontrakce je jen vlastně smrštění hrany do jediného bodu, jenž zastupuje vrchol vzniklý kontrakcí.

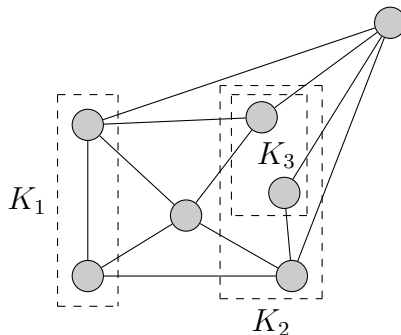
Nahrazení klastru $K = \{x, y\}$ hranou e zachovává klastrovou rovinnost: Jelikož (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný, tak máme saturátor S . Jelikož K je podle předpokladu nespojitý, tak po přidání saturátoru jsou vrcholy x, y spojeny hranou. Tato hrana ze saturátoru spojující x, y je hledanou hranou e . V nakreslené verzi je požadavek na jednoznačnost z toho důvodu, že by se mohlo stát, že nahrazením klastru hranou vznikne díra.

Odebrání vrcholu z klastru zachovává klastrovou rovinnost: Jednoduchý překreslovací argument, kdy podél hrany protáhneme hranici klastru až ji přetáhneme přes vyjímáný vrchol.

Sjednocení klastřů zachovává klastrovou rovinnost: Nechť S je minimální saturátor (G, \mathcal{C}) takový, že $(G \cup S, \mathcal{C})$ nemá díru. S je saturátorem i pro klastrový graf (G, \mathcal{C}') , kde ale může být díra. Nechť S' je minimální saturátor (G, \mathcal{C}') a $S' \subseteq S$. Tvrdíme, že $(G \cup S', \mathcal{C}')$ nemá díru. To dokážeme sporem.

Nechť D je díra. Ta musí být ve sjednocení klastřů K_1 a K_2 , neboť kdyby byla jinde, bylo by to ve sporu s předpokladem, že $(G \cup S, \mathcal{C})$ nemá díru. Díra D má neprázdný průnik se saturátorem S' . Kdyby průnik byl prázdný, znamenalo by to, že příslušná díra byla v původním klastrovém grafu. Označme tuto hranu $e = \{x, y\}$, kde x a y jsou její koncové vrcholy. Jako S'' označme $S' \setminus e$. Množina S'' je saturátorem, protože každý klastř $K \in \mathcal{C}$ obsahující vrcholy x a y obsahuje i cestu $D \setminus \{e\}$. Dostali jsme tedy spor s minimalitou S' . S' tedy neobsahuje díry. \square

Sjednocení klastřů má dost předpokladů, a proto uvedeme, proč jsou tyto předpoklady nutné. Předpoklad o společném rodiči je z důvodu zachování klastrové hierarchie. Klastrový graf z obrázku 4.1 ukazuje, proč je nutný předpoklad o tom, že sjednocované klastry nesmějí mít podklastry.



Obrázek 4.1: Klastř K_3 brání sjednocení klastřů K_1 a K_2 , neboť jeho saturováním (nahrazení hranou) by v $K_1 \cup K_2$ vznikla díra. Kdybychom vynechali K_3 , pak už je snadné najít klastrové nakreslení.

Nyní se podíváme na dva speciální případy sjednocení klastřů. Jeden případ je přidání vrcholu do klastru, který je vlastně inverzí k odebrání vrcholu z klastru.

Tvrzení 4.3. *Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) a vrchol $v \in V(G)$ a klastř $K \in \mathcal{C}$. Nechť K neobsahuje podklastř a každý klastř obsahující v obsahuje i K , v sousedí s K , tedy v je spojen s nějakým vrcholem v K hranou a $K \cup \{v\}$ neindukuje kružnici s vrcholem mimo K uvnitř. $\mathcal{C}' = (\mathcal{C} \setminus \{K\}) \cup \{K \cup \{v\}\}$ Potom (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný $\implies (G, \mathcal{C}')$ je klastrově rovinný.*

Důkaz. Jednoduše budeme vrchol vydávat za jednovrcholový klastř. Zbytek plyne z toho, že sjednocení zachovává klastrovou rovinnost, jelikož jsou splněny všechny předpoklady. \square

Podobně pro nenakreslenou verzi. Druhý případ je, když klastř spojuje právě jedna hrana. Tento případ nám dává příklad, kdy můžeme provést sjednocení klastřů i pro nenakreslené klastrové grafy.

Tvrzení 4.4. *Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) a dva disjunktní klastř K_1 a K_2 , které spojuje právě jedna hrana e . Nechť K_1 a K_2 mají společného rodiče a nemají podklastř. Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}') , kde $\mathcal{C}' := (\mathcal{C} \setminus \{K_1, K_2\}) \cup \{K_1 \cup K_2\}$. Potom (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný $\implies (G, \mathcal{C}')$ je klastrově rovinný.*

Důkaz. Pro použití výsledku o sjednocení klastřů nám stačí ukázat, že $K_1 \cup K_2$ neobsahuje díru. Protože klastř K_1 a K_2 spojuje právě jedna hrana, tak jediné kružnice ve sjednocení jsou buď K_1 nebo v K_2 . Podle předpokladu, že (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný, tak K_1 ani K_2 neobsahují díru. Podle tvrzení 4.2 je $\implies (G, \mathcal{C}')$ klastrově rovinný. \square

Vyzbrojení minorovými operacemi můžeme definovat pojem klastrového minoru.

Definice 4.5. *Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) . Klastrový graf (G', \mathcal{C}') je klastrovým minorem, pokud jej lze získat konečnou posloupností minorových operací z klastrového grafu (G, \mathcal{C}) .*

Důsledek 4.6. *Klastrový minor klastrově rovinného klastrového grafu je klastrově rovinný.*

Důkaz. Důkaz se provede indukcí podle délky posloupnosti, kde se využije toho, že minorové operace zachovávají klastrovou rovinnost. \square

Kapitola 5

Speciální instance

V této kapitole se podíváme na omezené instance klastrové rovinnosti. Klastrová rovinnost se dá omezit dvěma způsoby, jednak omezením o jakých grafech budeme uvažovat, a jednak omezením klastrové hierarchie. První omezenou třídou klastrových grafů jsou kružnice s klastry velikosti 2 a druhou třídou budou cesty s klastry velikosti 2. Pro oba případy uvedeme věty o počtu zakázaných minorů.

5.1 Kružnice s klastry velikosti 2

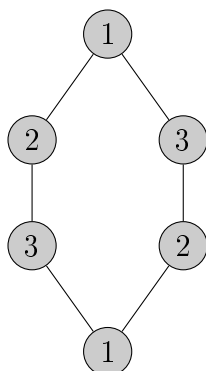
Hlavním výsledkem této části je výsledek ukazující, že jediným zakázaným minimálním minorem pro kružnice s klastry velikosti 2 je šesticykus se třemi klastry, kde se vrcholy střídají v jakém klastru jsou (viz obrázek 5.1). Výsledek je jak pro nakreslenou, tak i nenakreslenou verzi, protože kružnice má až na symetrii jen jedno nakreslení.

Věta 5.1. *Nechť (G, \mathcal{C}) je instance, kde G je kružnice a všechny klastry mají velikost 2. (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný $\iff (G, \mathcal{C})$ neobsahuje C_6^Z jako minor.*

Před důkazem věty ukážeme, že C_6^Z není klastrově rovinný.

Lemma 5.2. *C_6^Z není klastrově rovinný.*

Důkaz. Důkaz provedeme pro nenakreslenou verzi. Jelikož klastry jsou velikosti 2, můžeme nahrazovat klastry hranami. Nahrazení všech klastrů hranami však vede přímo na $K_{3,3}$. A protože $K_{3,3}$ není rovinný graf, tak nemůže C_6^Z být klastrově rovinný. \square



Obrázek 5.1: Čísla označují, do jakého klastru vrchol patří. Dále v textu bude tento graf označován jako C_6^Z , kde Z značí, že se jedná o zakázaný minor.

U kružnice můžou saturátorové hrany vést pouze vnitřkem nebo vnějškem (myšleno v nakreslení). Pro dvě hrany ze saturátoru má smysl se bavit o tom, zda mohou vést na stejné straně kružnice nebo nikoliv. To nás vede k pojmu grafu konfliktů, který reprezentuje konflikty mezi hranami ze saturátoru.

Definice 5.3. Klastry $\{x_1, x_2\}$ a $\{y_1, y_2\}$ mají spolu *konflikt*, pokud se na kružnici vyskytují v následujícím pořadí $x_1, \dots, y_1, \dots, x_2, \dots, y_2, \dots$. Graf konfliktů je reprezentací konfliktů saturátorových hran, kde vrcholy jsou klastry a hrany představují konfliktní klastry. Graf konfliktů pro klastrový graf (G, \mathcal{C}) budeme značit $GK_{(G, \mathcal{C})}$

Získáváme ihned kritérium, kdy kružnice s klastry velikosti 2 je klastrově rovinný graf. Je to právě tehdy, když graf konfliktů je bipartitní. Dokážeme si to jako lemma.

Lemma 5.4. *Kružnice s klastry velikosti 2 je klastrově rovinná právě tehdy, když graf konfliktů je bipartitní.*

Důkaz. Klastř, jenž je tvořen sousedními vrcholy, zjevně nemůže být s jiným klastrem v konfliktu podle definice. Vrchol příslušného klastru v grafu konfliktů je izolovaný. Stačí tedy uvažovat, že vrcholy v klastru nejsou sousedními.

\implies

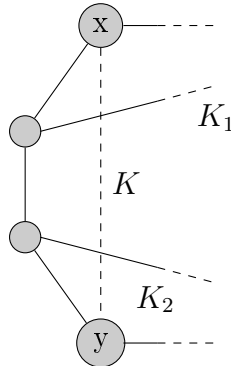
Místo klastřů uvažujme hrany saturátoru, ty mohou vést, buď vnitřní stěnou kružnice, nebo vnější stěnou kružnice. Hrana v grafu konfliktů vede

mezi jeho vrcholy právě tehdy, pokud satureované hrany příslušných klastrů vedou různými stěnami. To proto, že podle definice konfliktu, kdyby vedly stejnou stěnou, tak by se musely křížit, což by byl spor s tím, že máme klastrové nakreslení. Jako partity označíme klastry, jež vedou, buď vnější stěnou (jedna partita), nebo vnitřní stěnou (druhá partita). Izolované vrcholy dáme libovolně partity.

Opačná implikace se dokáže obdobně. □

Uvedeme ještě jedno lemma, ukazující vztah mezi kružnicí v grafu konfliktů a odpovídající strukturou v klastrovém grafu.

Lemma 5.5. *Nechť (G, \mathcal{C}) je klastrový graf, G je kružnice a \mathcal{C} má klastry velikosti 2. Nechť Q je indukovaná kružnice v grafu konfliktů $GK_{(G, \mathcal{C})}$ a nechť $K = \{x, y\}$ klastř obsažený v Q . Nechť A, B jsou dvě cesty v G spojující x, y a K_1, K_2 jsou sousedi K v Q . Když se omezíme na vrcholy klastrů z Q , pak BÚNO jediné dva vrcholy v A jsou z klastrů K_1 a K_2 (po jednom vrcholu z každého klastru a zbylé vrcholy leží v B).*



Obrázek 5.2: Znázornění, čemu odpovídá kružnice v grafu konfliktů. Nalevo od K je část A , napravo je část B .

Struktura v klastrovém grafu, která odpovídá kružnici v grafu konfliktů, se jinými slovy „chová slušně a není divoce rozházená po grafu“.

Důkaz. Sporem předpokládejme, že v části A , kde klastry K_1 a K_2 mají po jednom vrcholu, je ještě jeden jiný klastř K_3 . Ten musí mít v A oba své vrcholy, jinak by byl v konfliktu s K , což je spor s tím, že K má jen dva sousedy v Q . Uvažujme cestu v Q z K_1 do K_2 neobsahující K (tedy

přes K_3). Prvním krokem se z K_1 dostaneme do druhé části. Po cestě se ale musíme vrátit zpět do části A kvůli klastru K_3 pomocí klastru K_i dříve, než se vrátíme pomocí klastru K_2 . Klaster K_i ale musí být v konfliktu s klastrem K , což je spor s tím, že K má jen sousedy K_1 a K_2 , K_i by podle všeho též musel být sousedem K . \square

Tvrzení 5.6. *Graf konfliktů $GK_{(G,C)}$ obsahuje lichou kružnici \implies instance (G,C) obsahuje zakázaný minor C_6^Z .*

Důkaz. Důkaz indukcí podle velikosti nejkratší liché kružnice v $GK_{(G,C)}$. V základu indukce ukážeme, že liché kružnici velikosti 3 v grafu konfliktů odpovídá C_6^Z . V indukčním kroku pak pomocí minorových operací zredukujeme délku liché kružnice o dva klastry.

Základ indukce: Mějme trojcyklus v grafu konfliktů. Mějme příslušné klastry $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}, \{z_1, z_2\}$. Podle definice konfliktů máme následující pořadí vrcholů:

Podle konfliktu klastrů $\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}$ je pořadí x_1, y_1, x_2, y_2 .

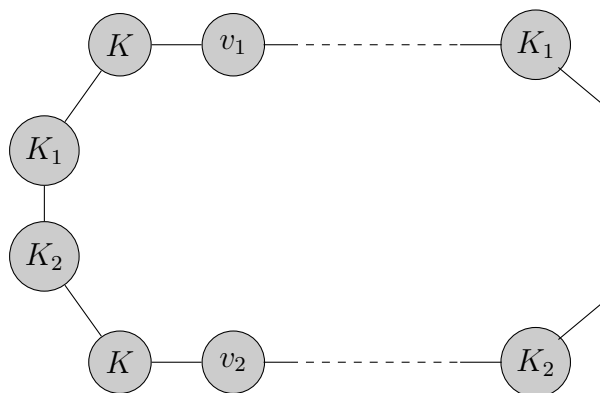
Podle konfliktu klastrů $\{y_1, y_2\}, \{z_1, z_2\}$ je pořadí y_1, z_1, y_2, z_2 .

Podle konfliktu klastrů $\{x_1, x_2\}, \{z_1, z_2\}$ je pořadí x_1, z_1, x_2, z_2 .

Dohromady máme pořadí $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, což je C_6^Z . Základ indukce je tedy dokázaný.

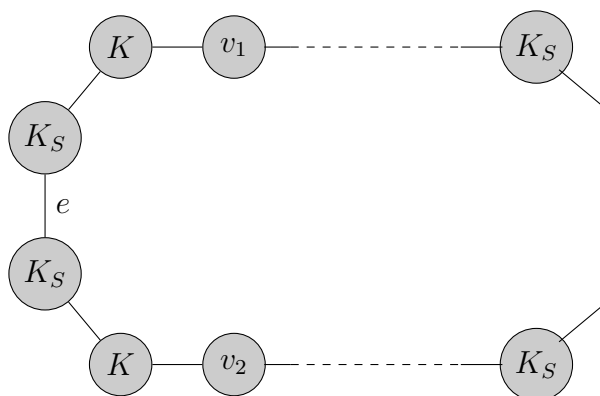
Nyní předpokládejme, že chceme dokázat tvrzení pro lichou kružnici velikosti k , a že tvrzení platí pro kružnici o 2 menší.

Indukční krok: Podle lemmatu 5.5 máme v (G, C) strukturu konfliktních klastrů odpovídající liché kružnici v grafu konfliktů. Předpokládejme, že jsme si (G, C) zjednodušili pomocí minorových operací tak, že nemáme nic jiného než klastry získané z liché kružnice v grafu konfliktů.



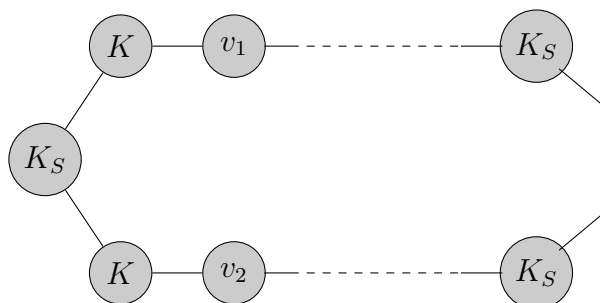
Obrázek 5.3: Výchozí stav, v_1, v_2 jsou sousedé vrcholů klastru K .

Provedeme následující posloupnost minorových operací. Vezměme libovolný klaster K . Klastery jež jsou s ním v konfliktu (K_1 a K_2), můžeme sjednotit (ubyl jeden klaster). Sjednocený klaster označme K_S .



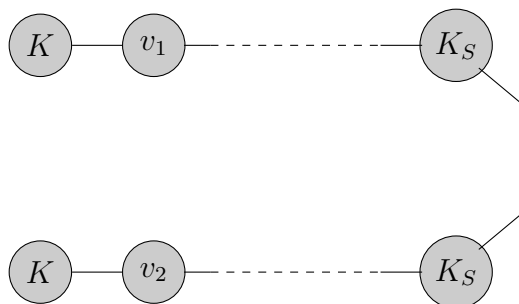
Obrázek 5.4: Sjednocení klastrů K_1 a K_2

V části, kde měly vrchol jen ony, tak sdílejí hranu e , tu můžeme po provedení sjednocení zkontrahovat.



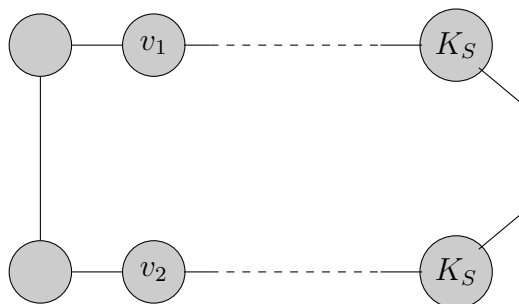
Obrázek 5.5: Kontrakce hrany e

Vrchol vzniklý kontrakcí odebereme. Nyní se nám kružnice přerušila.



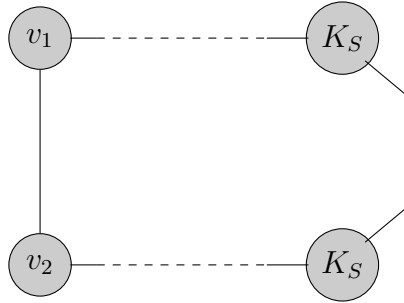
Obrázek 5.6: Odebrání vrcholu vzniklého kontrakcí

Přes rozdělení nám vede klastř K , pro nějž máme jedinou možnost, jak jej nahradit hranou, tak to učiníme (jinými slovy, je to korektní i v nakreslené verzi).



Obrázek 5.7: Nahrazení klastru K hranou

Tuto hranu můžeme rovnou zkontrahovat a vzniklý vrchol přidáme do jednoho z klastrů (opět sjednocení klastrů a ubytí druhého klastru), které s ním mají sousední vrchol. Hranu, která jej spojovala se sousedem zkontrahujeme.



Obrázek 5.8: Výsledný klastrový graf

Vzniklému klastrovému grafu (G', \mathcal{C}') odpovídá v grafu konfliktů lichá kružnice o velikosti $k - 2$. Tedy (G', \mathcal{C}') obsahuje podle indukčního předpokladu C_6^Z jako klastrový minor. A jelikož (G', \mathcal{C}') je minorem (G, \mathcal{C}) , tak C_6^Z je i minorem (G, \mathcal{C}) , čímž je důkaz hotov. \square

Nyní již můžeme dokázat hlavní větu této sekce.

Důkaz Věty 5.1. .

\implies

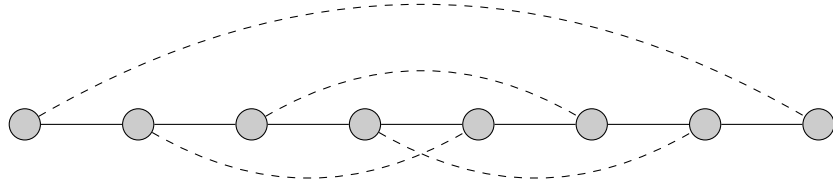
Pokud je (G, \mathcal{C}) klastrově rovinný, pak podle lemmatu 5.2 neobsahuje C_6^Z jako minor, neboť klastrový minor klastrově rovinného grafu je klastrově rovinný (viz důsledek 4.6).

\impliedby

Dokazujme sporem, tedy (G, \mathcal{C}) není klastrově rovinný, ale neobsahuje C_6^Z jako minor. Podle lemmatu 5.4 není graf konfliktů bipartitní, tedy obsahuje lichou kružnici, což podle tvrzení 5.6 říká, že (G, \mathcal{C}) má jako minor C_6^Z , což je spor s tím, že jsme předpokládali, že takový minor nemá. \square

5.2 Cesty s klastry velikosti 2

Pro cesty uvedeme o něco slabší výsledek, a to že zakázaných minorů je konečně mnoho.



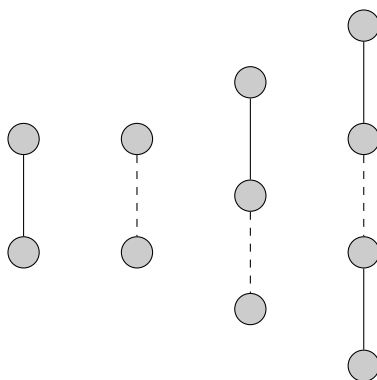
Obrázek 5.9: Příklad klastrové cesty (G, \mathcal{C}) , kde hrany jsou vyznačeny nepřerušovanou čarou a klastry přerušovanou. Po nahrazení klastrů saturátorem S graf $G \cup S$ obsahuje dělení $K_{3,3}$.

Věta 5.7. *Minimálních zakázaných minorů pro cesty s klastry velikosti 2 je konečně mnoho.*

Důkaz. Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) , kde G je cesta. Vezměme saturátor S a zkoumejme graf $G \cup S$. V tomto grafu mají vrcholy stupeň nejvýše 3. Tudíž zde nemůže být dělení K_5 , ale může být dělení $K_{3,3}$. (viz obrázek 5.9) Jako minor zde mohou být obě možnosti bránící rovinnosti. Využíváme zde, že (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný $\iff G \cup S$ rovinný.

Stačí se ptát, jak vypadají spojnice v dělení $K_{3,3}$ a jak je můžeme zredukovat pomocí minorových operací. Pomocí minorových operací dosáhneme nejprve, že se zbavíme všeho nepotřebného, tedy vrcholů, hran a klastrů (resp. saturovaných hran) nepodílejících se na dělení $K_{3,3}$. Dále si spojnice zjednodušíme do podoby takové, že to jsou cesty, kde se střídají hrany a klastry. Pokud totiž máme na spojnici více hran za sebou, tak pomocí kontrakcí se zbavíme nadbytečných hran. Nyní tvrdíme, že spojnice dokážeme zredukovat pomocí minorových operací do jednoho z následujících 4 typů:

- 1) jedna hrana
- 2) jeden klastř
- 3) klastř a hrana
- 4) hrana, klastř a hrana



Obrázek 5.10: Typy spojnic v dělení $K_{3,3}$. Plná čára představuje hranu, čárkovaná znamená klastr.

Toho dosáhneme následovně. Pokud máme na spojnici následující situaci, že máme klastr $K_1 = \{x, y\}$, hranu $e = \{y, z\}$ a klastr $K_2 = \{z, w\}$ za sebou (viz obrázek 5.11), tak sjednotíme klastry K_1 a K_2 . Ty spojuje právě jedna hrana, takže sjednocení můžeme provést bez problémů. Nyní jen smažeme vrcholy y a z a zbyde nám jen klastr $\{x, w\}$. Opakováním tohoto postupu každou spojnicí zredukujeme na jeden ze čtyř výše uvedených typů. Grafů, jenž jsou dělením $K_{3,3}$ a mají tyto typy spojnic, je konečně mnoho. \square



Obrázek 5.11: Hledaná struktura, která jde zjednodušit pomocí minorových operací.

5.3 Vztah klastrových kružnic a klastrových cest

Na závěr kapitoly ukážeme, že klastrová rovinnost pro klastrové kružnice lze převést na ekvivalentní problém klastrové rovinnosti pro klastrové cesty, tedy kružnice jsou v tomto smyslu jednodušší. V této části nemáme omezení pro klastrovou hierarchii. V teorii grafů je tento výsledek trochu protiintuitivní, neboť obvykle grafové problémy jsou snadnější pro cesty než pro kružnice.

Napřed ale ještě potřebuje definovat jednu operaci s klastrovými grafy.

Definice 5.8. Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) , kde $G = (V, E)$, a hranu $e = \{x, y\}$. Dělením hrany e označujeme operaci, kdy z G odebereme e a nahradíme ji dvěma hranami $e' = \{x, w\}, e'' = \{w, y\}$, kde w je nový vrchol. Obdržíme tedy klastrový graf (G', \mathcal{C}') , kde $G' = (V \cup \{w\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{e', e''\})$. \mathcal{C}' obdržíme z \mathcal{C} následovně:

Označme L nejmenší klastř, kam přijde w . Jestliže x a y patřili do stejných klastřů (nejmenší označme K), tak $L = K$. Pokud však e vedla mezi dvěma klastřy K_1 a K_2 , tak v případě, že jeden z klastřů je potomkem druhého (ne nutně přímým), tak pro L platí $K_1 \subseteq L \subseteq K_2$, a v případě, že klastřy K_1 a K_2 jsou disjunktní, tak pro L platí, buď $K_1 \subseteq L \subseteq K_{1,2}$, nebo platí $K_2 \subseteq L \subseteq K_{1,2}$, kde $K_{1,2}$ je nejmenší klastř obsahující K_1 a K_2 .

Takto definované dělení zachovává klastrovou rovinnost.

Lemma 5.9. *Pokud (G, \mathcal{C}) vznikne z (G', \mathcal{C}') operací dělení hrany a (G', \mathcal{C}') je klastrově rovinný, potom i (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný.*

Důkaz. Vezměme klastrové nakreslení (G', \mathcal{C}') . Vrchol w vzniklý dělením hrany e jednoduše dokreslíme na její nakreslení tam podle toho, do jakých klastřů jsme jej zařadili. Podle toho, kam jsme podle definice vrchol w mohli přiřadit, jsme obdrželi klastrové nakreslení (G, \mathcal{C}) . \square

Pro následující větu předpokládejme, že každý vrchol tvoří jednovrcholový klastř a že máme teč klastř obsahující všechny vrcholy. To nám zajišťuje, že množina všech vrcholů je rozdělena aspoň do dvou maximální podklastřů.

Věta 5.10. *Mějme klastrový graf (G, \mathcal{C}) , kde G je kružnice, pak existuje klastrový (G', \mathcal{C}') , kde G' je cesta a takový, že (G, \mathcal{C}) je klastrovým minorem (G', \mathcal{C}') . Navíc (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný $\iff (G', \mathcal{C}')$ je klastrově rovinný.*

Důkaz. Vezměme si dva maximální podklastřy klastř obsahujícího všechny vrcholy (značme je K) takové, že mezi nimi vede hrana (takové existují, protože G je souvislý), označme ji e . Tuto hranu dvakrát podrozdělíme a vzniklé vrcholy w, w' přiřadíme do K . Hranu spojující w a w' můžeme nahradit klastřem velikosti 2, neboť w a w' jsou obsažené ve stejných klastřech. Tento výsledný klastrový graf je hledaným (G', \mathcal{C}') , neboť G' je cesta a (G, \mathcal{C}) je klastrovým minorem (G', \mathcal{C}') (provedou se inverzní operace, tedy nahrazení klastřu hranou, kontrakce, přiřazení vrcholu do klastřu a opět kontrakce).

Jelikož všechny použité operace zachovávají klastrovou rovinnost, tak máme relativně zdarma, že (G, \mathcal{C}) je klastrově rovinný právě tehdy, když (G', \mathcal{C}') je klastrově rovinný. \square

Kapitola 6

Závěr

Nyní shrňme výsledky této práce. Ukázali jsme, že klastrovou rovinnost lze řešit v lineárním nedeterministickém čase, což nám navíc dalo i, že pokud by nás zajímala prostorová složitost, tak lze klastrovou rovinnost řešit v lineárním deterministickém prostoru. K sestrojení algoritmu jsme využili fakt, že v případě souvislých klastrů umíme rozhodnout klastrovou rovinnost v lineárním čase. Nedeterminismus nám vydal saturátor a jen jsme museli ověřit, že všechny klastry jsou skutečně souvislé.

Dívat se na klastrovou rovinnost pomocí minimálních klastrově nerovinných minorů je směr, který se ještě nezkoušel (co je známo). Něco podobného se zkoušelo pro příbuzný problém rovinnosti částečně nakreslených grafů (viz [10] a hlavně [11]). Pomocí minimálních zakázaných klastrových minorů jsme charakterizovali případy klastrových grafů s klastry velikosti 2, kde grafem je kružnice nebo cesta.

Pro další práci s charakterizací pomocí minimálních klastrově nerovinných minorů je směrem rozšířit výsledky na obecnější klastrové grafy. Tedy kružnice či cesty s méně omezenou (nebo bez omezení) klastrovou hierarchií nebo jiná třída grafů.

Literatura

- [1] Cortese, P.F., Di Battista, G., Frati, F., Patrignani, M., Pizzonia, M.: C-planarity of cconnected clustered graphs. *J. Graph Alg. Appl.* 12(2), 225–262 (2008).
- [2] Cornelsen, S., Wagner, D.: Completely connected clustered graphs. *Journal of Discrete Algorithms*, 4(2):313–323, 2006.
- [3] Jelínek, V., Jelínková, E., Kratochvíl, J., Lidický, B.: Clustered Planarity: Embedded Clustered Graphs with Two-Component Clusters (extended abstract), *Proceedings of Graph Drawing 2008*, LNCS 5417 (2009), 121–132.
- [4] Gutwenger, C., Jünger, M., Leipert, S., Mutzel, P., Percan, M., Weiskircher, R.: Advances in c-planarity testing of clustered graphs. In: Goodrich, M.T., Kobourov, S.G. (eds.) *GD'02*. LNCS, vol. 2528, pp. 220–235. Springer (2002).
- [5] Goodrich, M.T., Lueker, G.S., Sun, J.Z.: C-planarity of extrovert clustered graphs. In: Healy, P., Nikolov, N.S. (eds.) *GD'05*. LNCS, vol. 3843, pp. 211–222. Springer (2006).
- [6] Jelínková, E., Kára, J., Kratochvíl, J., Pergel, M., Suchý, O., Vyskočil, T.: Clustered planarity: Small clusters in cycles and eulerian graphs. *J. Graph Alg. Appl.* 13(3), 379–422 (2009).
- [7] Cortese, P. F., Di Battista, G., Patrignani, M., Pizzonia, M.: Clustering cycles into cycles of clusters. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 9(3):391–413, 2005.
- [8] Cortese, P. F., Di Battista, G., Patrignani, M., Pizzonia, M.: On embedding a cycle in a plane graph. In *Proceedings of 13th International*

Symposium on Graph Drawing 2005, volume 3843 of LNCS, pages 49–60. Springer, Heidelberg, 2006.

- [9] Di Battista, G., Frati, F.: Efficient c-planarity testing for embedded flat clustered graphs with small faces. In: Hong, S.H., Nishizeki, T., Quan, W. (eds.) GD'07. LNCS, vol. 4875, pp. 291–302. Springer (2008).
- [10] Angelini, P., Di Battista, G., Frati, F., Jelínek, V., Kratochvíl, J., Patrignani, M., Rutter, I.: Testing Planarity of Partially Embedded Graphs, Proceedings of SODA 2010, 202-221.
- [11] Jelínek, V., Kratochvíl, J., Rutter, I.: A Kuratowski-Type Theorem for Planarity of Partially Embedded Graphs, Computational Geometry - Theory and Applications, 46(4) (2013), 466-492.
- [12] Biedl, T.: Drawing planar partitions I; LL-drawings and LH-drawings. Technical Report RRR 11-98, RUTCOR, Rutgers University, 1998.
- [13] Biedl, T., Kaufmannl, M., Mutzel, P.: Drawing planar partitions II: HH-drawings. Technical Report RRR 12-98, RUTCOR, Rutgers University, 1998.
- [14] Biedl, T.: Drawing planar partitions I; LL-drawings and LH-drawings. Technical Report RRR 11-98, RUTCOR, Rutgers University, 1998.
- [15] Lowest common ancestor — Wikipedia, The Free Encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Lowest_common_ancestor, Online; accessed 16-May-2015.
- [16] Range minimum query — Wikipedia, The Free Encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Range_minimum_query, Online; accessed 16-May-2015.
- [17] Savitch's theorem — Wikipedia, The Free Encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Savitch's_theorem, Online; accessed 16-May-2015.