Univerzita Karlova v Praze Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Milan Šrámek

Částice se spinem v algebraicky speciálních prostoročasech

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, Dr., DSc.
Studijní program: Fyzika
Studijní obor: teoretická fyzika

Praha 2013

Rád bych poděkoval svému školiteli panu doc. O. Semerákovi za úsilí a čas, které mi věnoval při diskuzích týkajících se zpracovaného tématu a za cenné připomínky, rady a korektury, bez kterých by tato práce nevznikla.
Mé díky patří i mým rodičům a Mgr. Radce Ondrové, kteří mě po celý čas studia podporovali a pomáhali mi.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle par. 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 12. dubna 2013. Podpis autora

Název práce: Částice se spinem v algebraicky speciálních prostoročasech

Autor: Milan Šrámek

Katedra: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, Dr., DSc., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt:
Pohyb částice se spinem je v rámci pól-dipólové aproximace uvažován v algebraicky speciálních prostoročasech typu N, III a D. Jsou rozebrány vlastnosti interakce spinu a gravitace při Piraniho a Tulczyjewovově dodatečné podmínce a pro typy N a D je dána do souvislosti s relativním zrychlením blízkých pozorovatelů separovaných ve směru spinu částice. V rámci Tulczyjewovy podmínky je rovněž zkoumán pro algebraické typy N, III a D vztah mezi 4-hybností částice s tečným vektorem světočáry částice a jeho přízpěvek do interakce spinu a gravitace. Nakonec je popsán pohyb částice, při kterém jsou obě dodatečné podmínky ekvivalentní.

Klíčová slova: *obecná teorie relativity, algebraická klasifikace prostoročasů, pohyb částic*

Title: Spinning particles in algebraically special space-times

Author: Milan Šrámek

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: doc. RNDr. Oldřich Semerák, Dr., DSc., Institute of Theoretical Physics

Abstract:
Spinning-particle motion is studied, within the pole-dipole approximation, in algebraically special space-times of type N, III and D. The spin-curvature interaction is analysed for the Pirani and Tulczyjew spin supplementary conditions; for N and D types, the condition is related to a relative acceleration of two near observers separated in the direction of particle's spin. For Tulczyjew's condition, the momentum-velocity relation is also studied as well as its consequences for the spin-curvature interaction. Finally, the type of motion is mentioned for which both the supplementary conditions considered are equivalent.

Keywords: *general relativity, algebraic classification of space-times, motion of particles*

Obsah

Úvod

M. Abramowicz (1982): „*There is only a slight hope that it will ever be possible to construct an analytical solution of Einstein's field equations describing a realistic, material, rotating body.*"

V obecné teorii relativity je otázka vývoje daného uspořádání zdrojů gravitačního pole koncepčně jednodušší než v Newtonově teorii gravitace, protože obě informace — jak o konfiguraci pole, tak o chování zdrojů — jsou obsaženy v Einsteinových rovnicích. *Právě proto* je však obecně relativistický problém ve skutečnosti podstatně složitější: gravitační pole je totiž v této teorii projevem (netriviální) geometrie prostoročasu, takže chování zdroje je v obecné relativitě provázáno s vývojem prostoročasu, který tento zdroj (a případně další přítomné zdroje) budí. Úloha není analyticky řešitelná ani za poměrně vysokých symetrií (shora uvedený výrok se primárně týká stacionární a osově symetrické situace), a to ani v případě, kdy „mikrofyzika", která do problému vstupuje uvnitř zdrojů, *není* provázána s gravitační částí úlohy (s Einsteinovými rovnicemi), tedy kdy všechny charakteristické délky významné pro fyziku uvnitř zdrojů jsou podstatně menší než charakteristický poloměr křivosti prostoročasu.

Při popisu zdrojů se proto předpokládá řada zjednodušujících okolností. Především bývá velmi zjednodušena samotná zdrojová konfigurace — na jedné straně se uvažuje spojité rozložení (v kosmologii), na druhé straně jednoduché tenké zdroje v podobě slupek, disků, prstenců či dokonce bodových částic. Mezi těmito krajními možnostmi leží obtížná oblast „rozlehlých těles". Nejpodstatnějším z obvyklých předpokladů je, že zdroje jsou považovány za *testovací*, tj. zanedbává se jejich vliv na prostoročas, a tedy i zpětný vliv na sebe sama (v literatuře se hovoří o tom, že zdroje nejsou „self-gravitující", že se zanedbává *back reaction*). Dále se většinou předpokládá, že zdroje gravitačně nevyzařují, každopádně se neuvažuje vliv tohoto vyzařování na pohyb zdroje, tzv. radiační reakce. Konečně, aby fyzika významná uvnitř zdrojů nebyla závislá na křivosti prostoročasu, tedy aby rovnice této „mikrofyziky" nebyly ještě navíc provázány s Einsteinovými rovnicemi gravitačního pole, klade se již výše zmíněný předpoklad, že zdrojové těleso je podstatně menší než charakteristická vzdálenost spojená s křivostí prostoročasu.[1]

Problém nevyzařujících, testovacích rozlehlých (ale v uvedeném smyslu „malých") těles bývá řešen metodou multipólového rozvoje. O jeho uvedení na půdu obecné relativity se zasloužil především Myron Mathisson ve svém článku [12] z roku 1937. Mathisson tam nahrazuje tenzor energie a hybnosti rozlehlého tělesa sadou momentů, které jsou definovány jen podél určité časupodobné světočáry,

[1] Z Einsteinových rovnic však pro charakteristický poloměr křivosti protoročasu vychází hodnota $c/(8\pi G\rho)^{1/2}$, kde ρ je klidová hustota hmotnosti-energie, takže zmíněný předpoklad může být v případě tenkých zdrojů problematický.

a na základě zákonů zachování odvozuje variačním způsobem pohybové rovnice pro tyto implicitně zavedené multipóly. V přiblížení, kdy se z multipólů vezmou v úvahu jen monopól (hmotnost) a dipól (rotační moment hybnosti, „spin“), mají rovnice podobu (2.1), (2.2). V letech 1945-46 se těmito rovnicemi zabýval ve dvou článcích [20] S. Shanmugadhasan (práce „komunikoval“ do časopisu P. Dirac), především je zobecnil na případ nabité částice v elektromagnetickém poli.

V roce 1951 navrhnul A. Papapetrou jiný postup řešení problému rozlehlých těles, inspirovaný prací V. A. Focka z roku 1939. V článku [15] zavádí podobně jako Mathisson sadu multipólových momentů, avšak definuje je „přímo“, pomocí integrálů tenzoru energie a hybnosti přes objem tělesa. Postup je – na rozdíl od Mathissonova – nekovariantní, avšak jak Papapetrou ukazuje na transformačních vlastnostech, vede nakonec též k tenzorovému popisu a ke stejným pohybovým rovnicím, jaké předtím obdržel Mathisson. Další významnou prací z oblasti je článek [23], ve kterém W. Tulczyjew navázal na Mathissonovu metodu a zjednodušil ji použitím distribucí (δ-distribuce). Dodejme, že přístup Tulczyjewa byl v nedávné práci [21] doveden do zcela konkrétní podoby, s pohybovými rovnicemi odvozenými explicitně pro monopólové, dipólové a kvadrupólové přiblížení.

V 60. letech zahájil systematické studium dynamiky rozlehlých těles W. Dixon. V roce 1964 nejdříve navázal článkem [3] na postup A. Papapetroua a v 70. letech se pak v sérii prací [4] více přiklonil k metodě M. Mathissona a dopracoval ji do manifestačně kovariantní a geometricky detailně založené podoby. Práce Dixona dále rozvinul např. článek [6]. Ačkoli Dixonův „redukovaný multipólový popis“ je konečný, pro jeho uzavření je třeba doplnit předpoklady o vnitřní struktuře tělesa (konstituční zákony) a zvolit reprezentativní světočáru, vzhledem k níž budou momenty tenzoru energie a hybnosti počítány.

Pohybové rovnice multipólového popisu se standardně označují jako MP(D) rovnice, podle Mathissona, Papapetroua (a Dixona). Jejich konkrétní řešení se dají hledat jen v nejjednodušších aproximačních úrovních, tj. pokud se uvažuje jen několik nejnižších multipólů. Naprostá většina prací v této oblasti uvažuje tzv. pól-dipólovou verzi schématu, kdy se zanedbávají všechny momenty kromě monopólového a dipólového. Úloha je v tom případě nedourčená a je třeba přidat dodatečnou spinovou podmínku, která efektivně vybírá reprezentativní světočáru v rámci světotrubice „částice“. Velká část historie pól-dipólového problému je tvořena diskusí dodatečné spinové podmínky. Při její volbě totiž ihned vznikají otázky, zda jí určená reprezentativní světočára vždy existuje, zda je jednoznačná, zda leží v nějakém smyslu „uvnitř tělesa“…

Na tyto otázky odpověděli (kladně) především Beiglböck [1], Madore [11] a Schattner [19]. Uvažovali přitom konkrétně Tulczyjewovu podmínku, která podmiňuje určitou závislost mezi celkovou 4-hybností a celkovým vlastním rotačním momentem tělesa. Obě tyto veličiny jsou vágně řečenou integrály tenzoru energie a hybnosti přes nějakou nadplochu v prostoročasu. Samozřejmě obě jsou na volbě této nadplochy závislé a Tulczyjewova podmínka implicitně předpokládá, že je možné volit tuto nadplochu tak, aby zadaná 4-rychlost byla na ni kolmá. Matematicky rigorózní definici 4-hybnosti, vnitřního momentu hybnosti a dalších multipólů je možno najít např. v Dixonových pracích [3], [4], [5]. (Problémem, jež je především nutno překonat, je vhodné definování integrálu tenzorové veličiny a polohového vektoru.)

Následující text je rozdělen do tří kapitol. První kapitola je věnována základnímu matematickému aparátu a demonstruje na něm použité značení. Úvodní část druhé kapitoly nejprve představuje Mathissonovy-Papapetrouovy rovnice a shrnuje jejich základní vlastnosti. Dále se pak postupně věnuje nejběžnějším dodatečným podmínkám – Piraniho a Tulczyjewově. Navíc je přidána podmínka $\boldsymbol{P} \parallel \boldsymbol{V}$, která je mírně zobecněna a je zjednodušen důkaz rovnoběžnosti $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{V}$. V poslední kapitole jsou podrobně zkoumány vlastnosti první Mathissonovy-Papapetrouovy rovnice ve vakuových algebraicky speciálních prostoročasech typu N, III a D v závislosti na dodatečné spinové podmínce. 4-síla působící na částici díky interakci spinu a křivosti je dána do souvislosti s relativním zrychlením blízkých pozorovatelů separovaných ve směru 4-spinu částice a za Tulczyjewovy podmínky je rovněž diskutováno odchýlení se 4-hybnosti od tečného směru reprezentativní světočáry. Vývojem částice se spinem, při němž k tomuto odchýlení nedojde, se zabývá závěrečná část textu. Hlavní pozornost je zde soustředěna na nejjednodušší případ – geodetický pohyb, pro který je podána postačující podmínka.

Kapitola 1

Matematický aparát

Následující kapitola je věnována matematickému aparátu, který je v tomto textu využíván, a ilustraci užitých konvencí a značení.

Prostoročasem $(\mathcal{P}, \boldsymbol{g}, \nabla)$, dále již pouze $\mathcal{P}$, budeme vždy myslet 4-dimenzionální diferencovatelnou varietu spolu s hladkou (Pseudo-)Riemannovou metrikou $\boldsymbol{g} : \mathcal{X}(\mathcal{P}) \times \mathcal{X}(\mathcal{P}) \to \mathcal{F}(\mathcal{P})$ se signaturou $(-,+,+,+)$ a Riemannovou konexí $\nabla : \mathcal{X}(\mathcal{P}) \times \mathcal{X}(\mathcal{P}) \to \mathcal{X}(\mathcal{P})$, tj. konexí, pro niž platí

$$\mathrm{Tor}[\nabla] = 0 \quad \text{a} \quad \nabla \boldsymbol{g} = 0. \tag{1.1}$$

Symbol $\mathcal{X}(\mathcal{P})$ zde označuje hladká vektorová pole a $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ hladké funkce na $\mathcal{P}$. Přejímáme obvyklou notaci a pod označením $\boldsymbol{g}$ budeme rovněž rozumět inverzní metriku $\boldsymbol{g}^{-1} : \mathcal{X}^*(\mathcal{P}) \times \mathcal{X}^*(\mathcal{P}) \to \mathcal{F}(\mathcal{P})$, ($\mathcal{X}^*(\mathcal{P})$ je prostor diferenciálních forem na $\mathcal{P}$), protože obě lze jednoduše rozlišit podle kontextu.

1.1 Komplexní nulová tetráda

Uvažujme 4-dimenzionální vektorový prostor se skalárním součinem $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_V)$ signatury $(-,+,+,+)$ a mějme lineárně nezávislou množinu dvou nulových vektorů $\{\boldsymbol{K}, \widetilde{\boldsymbol{L}}\} \subset V$, tj. $\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{K} \rangle_V = \langle \widetilde{\boldsymbol{L}}, \widetilde{\boldsymbol{L}} \rangle_V = 0$. Nedegenerovanost skalárního součinu zaručuje, že

$$\langle \boldsymbol{K}, \widetilde{\boldsymbol{L}} \rangle_V = \alpha \neq 0, \tag{1.2}$$

a proto můžeme $\widetilde{\boldsymbol{L}}$ vždy přeškálovat tak, že $\boldsymbol{L} = \widetilde{\boldsymbol{L}}/\alpha$ a

$$\langle \boldsymbol{L}, \boldsymbol{L} \rangle_V = 0, \quad \langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle_V = -1. \tag{1.3}$$

Doplněním $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L})$ ortonormální bází $(\boldsymbol{E_2}, \boldsymbol{E_3}) \subset \mathrm{Ln}(\{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}\})^{\perp}$ získáme tzv. *nulovou bázi* ve V. Snadno ověříme, že vektory

$$\boldsymbol{E_0} := \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L}) \quad \boldsymbol{E_1} := \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{K} - \boldsymbol{L}) \tag{1.4}$$

spolu s $\boldsymbol{E_2}$ a $\boldsymbol{E_3}$ dále tvoří ortonormální bázi prostoru V.

Definujeme vektory $\boldsymbol{M}, \overline{\boldsymbol{M}}$ vztahy:

$$\boldsymbol{M} := \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{E_2} + \mathrm{i}\boldsymbol{E_3}), \quad \overline{\boldsymbol{M}} := \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{E_2} - \mathrm{i}\boldsymbol{E_3}), \tag{1.5}$$

kde i značí imaginární jednotku. Tyto vektory mezi sebou zřejmě splňují obdobné vztahy jako $\boldsymbol{K}$ a $\boldsymbol{L}$,

$$\begin{gathered} \langle \boldsymbol{M}, \boldsymbol{M} \rangle_V = \langle \overline{\boldsymbol{M}}, \overline{\boldsymbol{M}} \rangle_V = 0, \\ \langle \boldsymbol{M}, \overline{\boldsymbol{M}} \rangle_V = 1, \end{gathered} \tag{1.6}$$

navíc lineární kombinací

$$\overline{\alpha}\,\boldsymbol{M} + \alpha\,\overline{\boldsymbol{M}} = 2\mathrm{Re}\,\alpha\,\boldsymbol{E_2} + 2\mathrm{Im}\,\alpha\,\boldsymbol{E_3}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \tag{1.7}$$

$\boldsymbol{M}$ a $\overline{\boldsymbol{M}}$ generují $\mathrm{Ln}(\{\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}\})^{\perp}$, a proto čtveřici $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \overline{\boldsymbol{M}})$ nazýváme *komplexní nulovou bází* prostoru V.

Relaci $\sim$ mezi ortonormálními, nulovými a komplexními nulovými bázemi prostoru V:

$$(\boldsymbol{E_i})_{i=0}^{3} \sim (\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{E_2}, \boldsymbol{E_3}) \sim (\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \overline{\boldsymbol{M}}), \tag{1.8}$$

budeme nazývat *přirozeně asociované báze.*

Nechť $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \overline{\boldsymbol{m}} \in V^*$ tak, že

$$i_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{k} = 1, \quad i_{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{l} = 1, \quad i_{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{m} = 1, \quad i_{\overline{\boldsymbol{M}}}\overline{\boldsymbol{m}} = 1, \tag{1.9}$$

a ostatní vzájemná úžení jsou nulová. (Pro $\boldsymbol{\omega} \in \Lambda^{p+1}V^*$, $p \leq \dim V - 1$, $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{W}_1, \ldots, \boldsymbol{W}_p \in V$,

$$(i_{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{W}_1, \ldots, \boldsymbol{W}_p) := \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{W}_1, \ldots, \boldsymbol{W}_p).) \tag{1.10}$$

Skalární součin na V pak můžeme vyjádřit pomocí symetrického tenzoru

$$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_V = -\boldsymbol{k} \vee \boldsymbol{l} + \boldsymbol{m} \vee \overline{\boldsymbol{m}}. \tag{1.11}$$

Symbol „$\vee$“ značí symetrický nenormovaný tenzorový součin (např. $\boldsymbol{k} \vee \boldsymbol{l} := \boldsymbol{k} \otimes \boldsymbol{l} + \boldsymbol{l} \otimes \boldsymbol{k}$). Skalární součin indukovaný na V^* má stejný tvar,

$$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{V^*} = -\boldsymbol{K} \vee \boldsymbol{L} + \boldsymbol{M} \vee \overline{\boldsymbol{M}}. \tag{1.12}$$

Lineární transformace prostoru V zachovávající skalární součin $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_V$ tvoří, jak známo (viz [8]), Lieovu grupu zvanou Lorentzova grupa. Její působení na množině všech komplexních nulových tetrád prostotu V lze rozdělit do následujících kategorií:

Nulové rotace zachovávající směr $\boldsymbol{K}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}' &= \boldsymbol{K}, \\ \boldsymbol{L}' &= \kappa\overline{\kappa}\boldsymbol{K} + \boldsymbol{L} + \overline{\kappa}\boldsymbol{M} + \kappa\overline{\boldsymbol{M}}, \\ \boldsymbol{M}' &= \kappa\boldsymbol{K} + \boldsymbol{M}, \\ \overline{\boldsymbol{M}}' &= \overline{\kappa}\boldsymbol{K} + \overline{\boldsymbol{M}}, \end{aligned} \qquad \kappa \in \mathbb{C}, \tag{1.13}$$

Nulové rotace zachovávající směr $\boldsymbol{L}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}' &= \boldsymbol{K} + \lambda\overline{\lambda}\boldsymbol{L} + \overline{\lambda}\boldsymbol{M} + \lambda\overline{\boldsymbol{M}}, \\ \boldsymbol{L}' &= \boldsymbol{L}, \\ \boldsymbol{M}' &= \lambda\boldsymbol{L} + \boldsymbol{M}, \\ \overline{\boldsymbol{M}}' &= \overline{\lambda}\boldsymbol{L} + \overline{\boldsymbol{M}}, \end{aligned} \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.14}$$

Boosty v rovině $\boldsymbol{K} - \boldsymbol{L}$ a prostorové rotace v rovině $\boldsymbol{M} - \overline{\boldsymbol{M}}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}' &= \beta\boldsymbol{K}, \\ \boldsymbol{L}' &= \beta^{-1}\boldsymbol{L}, \\ \boldsymbol{M}' &= \exp(i\rho)\,\boldsymbol{M}, \\ \overline{\boldsymbol{M}}' &= \exp(-i\rho)\,\overline{\boldsymbol{M}}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ &\rho \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

O tom, že nově vzniklé vektory (značené čárkovaně) tvoří opět komplexní nulovou tetrádu V, se snadno přesvědčíme ověřením vztahů (1.3), (1.6).

Zavedeme zobrazení *snížení indexu* $\flat : V \to V^*$ a *zvýšení indexu* $\sharp : V^* \to V$:

$$i_{\boldsymbol{X}} \flat \boldsymbol{Y} := \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle_V, \quad i_{\boldsymbol{\alpha}} \sharp \boldsymbol{\beta} := \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle_{V^*}. \tag{1.16}$$

Na prostoru $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_V)$ zadáme ještě orientaci Levi-Civitovým tenzorem (kompatibilním s $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_V$)

$$\boldsymbol{\varepsilon} := \mathrm{i} \cdot \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{m} \wedge \overline{\boldsymbol{m}}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} \in \Lambda^4 V^* \tag{1.17}$$

a přidáme definici Hodgeova duálního zobrazení $* : \Lambda V^* \to \Lambda V^*$: nechť $\boldsymbol{\omega}$ je antisymetrická p-forma, $p = 1, \dots, 4$, a nechť ${}^\sharp\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\alpha^1}, \dots, \boldsymbol{\alpha^p}) := \boldsymbol{\omega}(\sharp\boldsymbol{\alpha^1}, \dots, \sharp\boldsymbol{\alpha^p})$, $\boldsymbol{\alpha^1}, \dots, \boldsymbol{\alpha^p} \in V^*$, pak

$$*\,\boldsymbol{\omega} := \frac{1}{p!} \boldsymbol{\varepsilon}({}^\sharp\boldsymbol{\omega}, \underbrace{\cdot, \dots, \cdot}_{4-p}). \tag{1.18}$$

Druhý Hodgeův obraz je až na znaménko identickým zobrazením,

$$**\boldsymbol{\omega} = \mathrm{sign}(\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_V) \hat{\boldsymbol{\eta}}^{(\mathrm{dim}V+1)} \boldsymbol{\omega}, \tag{1.19}$$

kde $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ je lineární operátor, $\hat{\boldsymbol{\eta}} : \Lambda V^* \to \Lambda V^*$, $\boldsymbol{\omega} \mapsto (-1)^p \boldsymbol{\omega}$, viz [7]. Toto je důsledkem zajímavé vlastnosti Levi-Civitova tenzoru, jmenovitě

$$\mathrm{C}_{(k)}(\boldsymbol{\varepsilon}, \sharp\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathrm{sign}(\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_V)\,(\mathrm{dim}V - k)!\, k! \mathcal{A}^{[\mathrm{dim}V-k]}, \quad 0 \le k \le \mathrm{dim}V. \tag{1.20}$$

Zde $\mathrm{C}_{(k)}$ značí operátor úžení posledních k indexů, $\mathcal{A}$ je projektor do $\Lambda^{[\mathrm{dim}V-k]} V^{(*)}$.

Nyní se zaměřme na 2-formy

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &:= \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{m}, & \boldsymbol{v} &:= \overline{\boldsymbol{m}} \wedge \boldsymbol{l}, & \boldsymbol{w} &:= \overline{\boldsymbol{m}} \wedge \boldsymbol{m} - \boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{k}, \\ \overline{\boldsymbol{u}} &:= \boldsymbol{k} \wedge \overline{\boldsymbol{m}}, & \overline{\boldsymbol{v}} &:= \boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{l}, & \overline{\boldsymbol{w}} &:= \boldsymbol{m} \wedge \overline{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{k}, \end{aligned} \tag{1.21}$$

Kromě toho, že $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{w}})$ tvoří bázi $\Lambda^2 V^*$, platí

$$\begin{aligned} *\boldsymbol{u} &= \mathrm{i}\boldsymbol{u}, & *\boldsymbol{v} &= \mathrm{i}\boldsymbol{v}, & *\boldsymbol{w} &= \mathrm{i}\boldsymbol{w}, \\ *\overline{\boldsymbol{u}} &= -\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{u}}, & *\overline{\boldsymbol{v}} &= -\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{v}}, & *\overline{\boldsymbol{w}} &= -\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{w}}, \end{aligned} \tag{1.22}$$

a tedy $(\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{w}})$ a $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ jsou postupně báze self-duálního a antiself-duálního podprostoru $\Lambda^2 V^*$. Dodejme, že pokud zavedeme zobrazení $\{\cdot, \cdot\}$ následovně:

$$\{\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}\}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) := \langle i_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\xi}, i_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{\eta} \rangle_{V^*} + \langle i_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{\xi}, i_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\eta} \rangle_{V^*} \tag{1.23}$$

(kde $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \Lambda^2 V^*$; $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in V$), pak platí:

$$\begin{gathered} \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}\} = \{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\} = \{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\} = 0, \\ \{\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{u}}\} = \{\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{w}}\} = \{\overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{v}}\} = \{\overline{\boldsymbol{v}}, \overline{\boldsymbol{w}}\} = 0, \\ \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} = \{\overline{\boldsymbol{u}}, \overline{\boldsymbol{v}}\} = -\tfrac{1}{2}\{\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}\} = -\tfrac{1}{2}\{\overline{\boldsymbol{w}}, \overline{\boldsymbol{w}}\} = -\boldsymbol{k} \vee \boldsymbol{l} + \boldsymbol{m} \vee \overline{\boldsymbol{m}} \end{gathered} \tag{1.24}$$

a také

$$\begin{gathered} \{\boldsymbol{u}, \overline{\boldsymbol{v}}\} = 2\boldsymbol{m}\boldsymbol{m}, \qquad \{\boldsymbol{v}, \overline{\boldsymbol{u}}\} = 2\overline{\boldsymbol{m}}\,\overline{\boldsymbol{m}}, \\ \{\boldsymbol{u}, \overline{\boldsymbol{w}}\} = 2\boldsymbol{k} \vee \boldsymbol{m}, \quad \{\boldsymbol{v}, \overline{\boldsymbol{w}}\} = 2\boldsymbol{l} \vee \overline{\boldsymbol{m}}, \\ \{\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{v}}\} = 2\boldsymbol{l} \vee \boldsymbol{m}, \quad \{\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{u}}\} = 2\boldsymbol{k} \vee \overline{\boldsymbol{m}}, \\ \{\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{w}}\} = 2\boldsymbol{k} \vee \boldsymbol{l} + 2\boldsymbol{m} \vee \overline{\boldsymbol{m}}. \end{gathered} \tag{1.25}$$

Závěrem čehož je, že prostor bezestopých tenzorů typu $\binom{0}{4}$ nad V se symetriemi

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q};\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \begin{cases} -\boldsymbol{N}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P};\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}), \\ \ \ \boldsymbol{N}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y};\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}), \end{cases} \tag{1.26}$$

(kde $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in V$), může být generován nejvýše tenzory vytvořenými pomocí dvojic 2-forem z (1.24): $\boldsymbol{u}\vee\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}\vee\boldsymbol{w}$, … (zobrazení $\vee : \Lambda^2V^*\times\Lambda^2V^*\to V_4$ nyní definujeme jako

$$\boldsymbol{\alpha}\vee\boldsymbol{\beta} := \boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}\otimes\boldsymbol{\alpha}); \tag{1.27}$$

tj. libovolný tenzor $\boldsymbol{N}$ splňující předešlé podmínky má nutně tvar

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N} = {} & \overline{N_1}\,\boldsymbol{u}\vee\boldsymbol{u}+\overline{N_2}\,\boldsymbol{u}\vee\boldsymbol{w}+\overline{N_3}\,\boldsymbol{v}\vee\boldsymbol{v}+\overline{N_4}\,\boldsymbol{v}\vee\boldsymbol{w}+ \\ & + N_1\,\overline{\boldsymbol{u}}\vee\overline{\boldsymbol{u}}+N_2\,\overline{\boldsymbol{u}}\vee\overline{\boldsymbol{w}}+N_3\,\overline{\boldsymbol{v}}\vee\overline{\boldsymbol{v}}+N_4\,\overline{\boldsymbol{v}}\vee\overline{\boldsymbol{w}}+ \\ & + \overline{N_5}\,\boldsymbol{u}\vee\boldsymbol{v}+N_5\,\overline{\boldsymbol{u}}\vee\overline{\boldsymbol{v}}+\overline{N_6}\,\boldsymbol{w}\vee\boldsymbol{w}+N_6\,\overline{\boldsymbol{w}}\vee\overline{\boldsymbol{w}}, \end{aligned} \tag{1.28}$$

$$\operatorname{Re}N_5 = 2\operatorname{Re}N_6,$$

$(N_1,\dots,N_6\in\mathbb{C})$. Členy $\boldsymbol{u}\vee\overline{\boldsymbol{w}}$, $\boldsymbol{v}\vee\overline{\boldsymbol{w}}$,…, nemohou být v $\boldsymbol{N}$ obsaženy, protože nemají dalšího do páru, aby se při „stopování $\boldsymbol{N}$“ vyrušily, viz (1.25), a ze stejného důvodu je nutná vazba mezi složkami N_5 a N_6.

Uveďme do souvislostí, že pokud pro libovolný bod $p\in\mathcal{P}$ položíme $L = \mathrm{T}_p\mathcal{P}$, můžeme tenzory typu (1.28) použít pro konstrukci úplně kontravariantního Weylova tenzoru v p, viz (1.38).

1.2 Petrovova klasifikace Weylova tenzoru

Riemannův tenzor křivosti $\boldsymbol{R}$ na prostoročase $\mathcal{P}$,

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z} := \nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{Y}}\boldsymbol{Z}-\nabla_{\boldsymbol{Y}}\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Z}-\nabla_{[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]}\boldsymbol{Z}, \tag{1.29}$$

$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\in\mathcal{X}(\mathcal{P})$, můžeme rozepsat do tří částí:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}+\boldsymbol{G}+\boldsymbol{C}. \tag{1.30}$$

Tenzory $\boldsymbol{G}$ a $\boldsymbol{E}$ jsou v libovolném bodě $p\in\mathcal{P}$ určeny rovnicemi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z}\big) := {} & \tfrac{1}{2}\big\{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Q})+\boldsymbol{s}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})- \\ & -\boldsymbol{s}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})-\boldsymbol{s}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Q})\big\}, \end{aligned} \tag{1.31}$$

$$\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z}\big) := \frac{Sc}{12}\big\{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Z})\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Q})\big\}, \tag{1.32}$$

kde $\boldsymbol{Q},\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}\in\mathrm{T}_p\mathcal{P}$, přičemž jsme označili $\boldsymbol{s}$ bezestopou část Ricciho formy $\boldsymbol{ric}$ a Sc skalární křivost,

$$\boldsymbol{s} := \boldsymbol{ric}-\frac{Sc}{4}\boldsymbol{g},\quad Sc := \mathrm{Tr}(\boldsymbol{Ric}). \tag{1.33}$$

Ricciho operátor $\boldsymbol{Ric}$ a Ricciho formu $\boldsymbol{ric}$ jsou definovány běžným způsobem; nechť $(\boldsymbol{E_i})_{i=0}^3$ je libovolná ortonormální báze v $\mathrm{T}_p\mathcal{P}$ a $(\boldsymbol{e^i})_{i=0}^3$ báze v $\mathrm{T}_p^*\mathcal{P}$ k ní duální, $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\mathrm{T}_p\mathcal{P}$,

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{X}),\boldsymbol{Y}) := \boldsymbol{ric}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \quad \text{a} \quad \boldsymbol{ric}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) := \sum_{i=0}^{3}\langle\boldsymbol{e^i},\boldsymbol{R}(\boldsymbol{E_i},\boldsymbol{X})\boldsymbol{Y}\rangle. \tag{1.34}$$

Tenzor $\boldsymbol{C}$, *Weylův tenzor*, je dán přímo rozkladem (1.30). Tenzory $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{C}$ splňují v každém bodě $p \in \mathcal{P}$ vztahy

$$\operatorname{Tr}\big(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\big) = \frac{Sc}{4}\boldsymbol{g},\ \operatorname{Tr}\big(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\big) = \boldsymbol{s},\ \operatorname{Tr}\big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\big) = 0, \tag{1.35}$$

$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathrm{T}_p\mathcal{P}$. Weylův tenzor je tedy úplně bezestopou částí Riemannova tenzoru. Protože navíc $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{C}$ zdědily symetrie tenzoru křivosti, platí

$$\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z}\big) = \begin{cases} -\,\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})\boldsymbol{Z}\big), \\ -\,\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Q}\big), \\ \quad \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{X},\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{Z})\boldsymbol{Y}\big), \end{cases} \tag{1.36}$$

kde $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathrm{T}_p\mathcal{P}$, a můžeme tedy

$$^\flat\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Q},\boldsymbol{Z}) \equiv i_{\boldsymbol{Q}}\,\flat\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z} := \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z}\big) \tag{1.37}$$

s ohledem na (1.28) hledat ve tvaru

$$^\flat\boldsymbol{C} = \Psi_0\boldsymbol{uu} + \Psi_1\boldsymbol{u}\vee\boldsymbol{w} + \Psi_2(\boldsymbol{v}\vee\boldsymbol{u} + \boldsymbol{ww}) + \Psi_3\boldsymbol{v}\vee\boldsymbol{w} + \Psi_4\boldsymbol{vv} + c.c. \tag{1.38}$$

($\Psi_0 \ldots \Psi_4 \in \mathbb{C}$), který je ve schodě se zažitou konvencí označující nezávislé složky Weylova tenzoru:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &:= {}^\flat\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{M},\boldsymbol{K},\boldsymbol{M}), \\ \Psi_1 &:= {}^\flat\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{L},\boldsymbol{K},\boldsymbol{M}), \\ \Psi_2 &:= {}^\flat\boldsymbol{C}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{M},\overline{\boldsymbol{M}},\boldsymbol{L}), \\ \Psi_3 &:= {}^\flat\boldsymbol{C}(\boldsymbol{L},\boldsymbol{K},\boldsymbol{L},\overline{\boldsymbol{M}}), \\ \Psi_4 &:= {}^\flat\boldsymbol{C}(\boldsymbol{L},\overline{\boldsymbol{M}},\boldsymbol{L},\overline{\boldsymbol{M}}), \end{aligned} \tag{1.39}$$

$\Psi_0 \ldots \Psi_4$ jsou obvykle nazývány *Weylovými skaláry.*

Uvažujme v prostoročase $\mathcal{P}$ dvoudimenzionální plochu $\Upsilon(\tau,\alpha)$, vloženou podvarietu se souřadnicemi (τ,α); označme vektorová pole na této ploše

$$\Upsilon_*\left(\tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial\tau}}\right) = \boldsymbol{X} \quad \text{a} \quad \Upsilon_*\left(\tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial\alpha}}\right) = \boldsymbol{\xi} \tag{1.40}$$

a předpokládejme, že

$$\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X} = 0, \tag{1.41}$$

(Přehlížíme zde, jakož to budeme činit i nadále, těžkosti, které přináší formální vztah (1.41), jelikož $\boldsymbol{X}$ je definováno pouze podél Υ, a tak $\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}$ nemá dobrý smysl (∇ je konexe na $\mathcal{P}$). Standardně se totiž ukazuje, že kupříkladu hladká vektorová pole $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ definovaná podél Υ lze pro každé otevřené okolí $\mathrm{U}(q) \subset \Upsilon$ bodu $q \in \Upsilon$ hladce rozšířit na vektorová pole $\widetilde{\boldsymbol{V}}, \widetilde{\boldsymbol{W}}$ na otevřeném okolí $\widetilde{\mathrm{U}}(q) \subset \mathcal{P}$, $\widetilde{\mathrm{U}}(q) \cap \Upsilon = \mathrm{U}(q)$, $\widetilde{\boldsymbol{V}}|_{\mathrm{U}(q)} = \boldsymbol{V}|_{\mathrm{U}(q)}$, $\widetilde{\boldsymbol{W}}|_{\mathrm{U}(q)} = \boldsymbol{W}|_{\mathrm{U}(q)}$, ale $(\nabla_{\widetilde{\boldsymbol{V}}}\widetilde{\boldsymbol{W}})|_{\mathrm{U}(q)}$ závisí pouze na hodnotách polí $\widetilde{\boldsymbol{V}}, \widetilde{\boldsymbol{W}}$ na $\mathrm{U}(q)$.)

takže integrální křivky $\Upsilon_\alpha(\tau) := \Upsilon(\tau,\alpha)$, α pevné, pole $\boldsymbol{X}$ jsou geodetiky (v $\mathcal{P}$). Jak lze přímým výpočtem ukázat, musejí $\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{\xi}$ splňovat rovnici geodetické deviace

$$\nabla^2_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\xi}\ (= \nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{X}, \tag{1.42}$$

která dává do souvislosti relativní zrychlení $\nabla_{\boldsymbol{X}}\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{X}$ blízkých geodetik „separovaných“ vektorovým pole $\boldsymbol{\xi}$ s křivostí prostoročasu $\boldsymbol{R}$.

Omezme nyní svoji pozornost pouze na časupodobné plochy $\Upsilon(\tau,\alpha)$, pro něž je $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})<0$. Při rozkladu (1.30) je relativní zrychlení geodetik $\Upsilon_\alpha(\tau)$ dáno třemi částmi. Podíl Weylova tenzoru na tomto zrychlení je nejlépe vystižen v ortonormální tetrádě $(\boldsymbol{E_0}=|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X})|^{-1/2}\,\boldsymbol{X},\boldsymbol{E_1},\,\boldsymbol{E_2},\boldsymbol{E_3})$ definované na otevřené oblasti $\mathcal{O}\subset\mathcal{P}$, protože pokud píšeme

$$\langle \boldsymbol{e^i},\nabla^2_{\boldsymbol{E_0}}\boldsymbol{\xi}\rangle=\langle \boldsymbol{e^i},\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E_0},\boldsymbol{E_j})\boldsymbol{E_0}\rangle\,\xi^j+\dots,\tag{1.43}$$

kde $(\boldsymbol{e^i})_{i=0}^3$ je báze duální k $(\boldsymbol{E_i})_{i=0}^3$ a $\boldsymbol{\xi}=\xi^i\boldsymbol{E_i}$, je matice $\langle \boldsymbol{e^i},\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E_0},\boldsymbol{E_j})\boldsymbol{E_0}\rangle$ dána na $\mathcal{O}$ součtem pěti příspěvků: (Blížeji viz např. [16].)

Příčné gravitační vlny šířící se ve směru $\boldsymbol{E_1}$ resp. $-\boldsymbol{E_1}$

$$\frac12\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-\mathrm{Re}\,\Psi_4&\mathrm{Im}\,\Psi_4\\0&0&\mathrm{Im}\,\Psi_4&\mathrm{Re}\,\Psi_4\end{pmatrix},\;-\frac12\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\mathrm{Re}\,\Psi_0&\mathrm{Im}\,\Psi_0\\0&0&\mathrm{Im}\,\Psi_0&-\mathrm{Re}\,\Psi_0\end{pmatrix},\tag{1.44}$$

Podélné gravitační vlny šířící se ve směru $\boldsymbol{E_1}$ resp. $-\boldsymbol{E_1}$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-\mathrm{Re}\,\Psi_3&\mathrm{Im}\,\Psi_3\\0&-\mathrm{Re}\,\Psi_3&0&0\\0&\mathrm{Im}\,\Psi_3&0&0\end{pmatrix},\;\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&\mathrm{Re}\,\Psi_1&\mathrm{Im}\,\Psi_1\\0&\mathrm{Re}\,\Psi_1&0&0\\0&\mathrm{Im}\,\Psi_1&0&0\end{pmatrix},\tag{1.45}$$

Coulombický člen

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-2\mathrm{Re}\,\Psi_2&0&0\\0&0&\mathrm{Re}\,\Psi_2&0\\0&0&0&\mathrm{Re}\,\Psi_2\end{pmatrix}.\tag{1.46}$$

Petrovova klasifikace Weylova tenzoru (v bodě $p\in\mathcal{P}$) je založena na transformačních vlastnostech čtveřice skalárů $\Psi_0,\dots,\Psi_4$ při působení Lorentzovy grupy na množinu všech nulových tetrád lineárního prostoru $\mathrm{T}_p\mathcal{P}$. Dosazením vztahů (1.13) až (1.15) do (1.39) obdržíme transformační vztahy (1.47 – 1.49).

Nulové rotace zachovávající směr $\boldsymbol{K}$

$$\begin{aligned}\Psi_0'&=\Psi_0,\\ \Psi_1'&=\overline{\kappa}\Psi_0+\Psi_1,\\ \Psi_2'&=\overline{\kappa}^2\Psi_0+2\overline{\kappa}\Psi_1+\Psi_2,\\ \Psi_3'&=\overline{\kappa}^3\Psi_0+3\overline{\kappa}^2\Psi_1+3\overline{\kappa}\Psi_2+\Psi_3,\\ \Psi_4'&=\overline{\kappa}^4\Psi_0+4\overline{\kappa}^3\Psi_1+6\overline{\kappa}^2\Psi_2+4\overline{\kappa}\Psi_3+\Psi_4,\end{aligned}\tag{1.47}$$

Nulové rotace zachovávající směr $\boldsymbol{L}$

$$\begin{aligned}\Psi_4'&=\Psi_4,\\ \Psi_3'&=\lambda\Psi_4+\Psi_3,\\ \Psi_2'&=\lambda^2\Psi_4+2\lambda\Psi_3+\Psi_2,\\ \Psi_1'&=\lambda^3\Psi_4+3\lambda^2\Psi_3+3\lambda\Psi_2+\Psi_1,\\ \Psi_0'&=\lambda^4\Psi_4+4\lambda^3\Psi_3+6\lambda^2\Psi_2+4\lambda\Psi_1+\Psi_0,\end{aligned}\tag{1.48}$$

Boosty v rovině $\boldsymbol{K}-\boldsymbol{L}$ a prostorové rotace v rovině $\boldsymbol{M}-\overline{\boldsymbol{M}}$

$$\begin{aligned} \Psi_0' &= \beta^2 \exp(2i\rho)\, \Psi_0, \\ \Psi_1' &= \beta \exp(i\rho)\, \Psi_1, \\ \Psi_2' &= \Psi_2, \\ \Psi_3' &= \beta^{-1} \exp(-i\rho)\, \Psi_3, \\ \Psi_4' &= \beta^{-2} \exp(-2i\rho)\, \Psi_4. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Nechť tedy je v libovolném bodě p prostoročasu $\boldsymbol{C} \neq 0$ a v dané nulové tetrádě $\Xi = (\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \overline{\boldsymbol{M}})$ BÚNO i $\Psi_4 \neq 0$ (pokud $\Psi_4 = 0$, přejdeme k jiné nulové tetrádě vhodnou nulovou rotací (1.13) stávající tetrády Ξ tak, aby $\Psi_4 \neq 0$ díky (1.47)). Pak existují díky základní větě algebry právě čtyři (ne nutně různé) kořeny rovnice

$$\lambda^4\Psi_4 + 4\lambda^3\Psi_3 + 6\lambda^2\Psi_2 + 4\lambda\Psi_1 + \Psi_0 = 0, \tag{1.50}$$

a tedy čtyři nulové rotace tetrády Ξ zachovávající směr $\boldsymbol{L}$, (1.14), při nichž $\Psi_0 \mapsto \Psi_0' = 0$. Nulové směry $\boldsymbol{K}_i'$ vzniklé těmito transformacemi jsou nazývány *hlavními nulovými směry* Weylova tenzoru $\boldsymbol{C}|_p$. *Petrovova algebraická klasifikace* Weylova tenzoru $\boldsymbol{C}|_p$ vychází z toho, kolik z těchto směrů koinciduje. Dále uveďme souhrn podstatných výsledků – konfigurace nulových směrů, Weylovy skaláry, které lze vhodnou volbou nulové tetrády najednou vynulovat, a jejich invariantnost vůči Lorentzovým transformacím. Podrobný rozbor lze najít např. v monografii [9].

Petrovův typ I

- Čtyři různé hlavní nulové směry
- $\Psi_0 = \Psi_4 = 0$ — Neměnné při boostech a prostorových transformacích (1.15)

Petrovův typ II

- $\boldsymbol{K}_1' = \boldsymbol{K}_2' \neq \boldsymbol{K}_3' \neq \boldsymbol{K}_4'$, $\boldsymbol{K}_3' \neq \boldsymbol{K}_4'$ — Tři různé hlavní nulové směry
- $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_4 = 0$ — Neměnné při boostech a prostorových transformacích (1.15)

Petrovův typ D

- $\boldsymbol{K}_1' = \boldsymbol{K}_2' \neq \boldsymbol{K}_3' = \boldsymbol{K}_4'$ — Dva různé hlavní nulové směry
- $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$ — Neměnné při boostech a prostorových transformacích (1.15)

Petrovův typ III

- $\boldsymbol{K}_1' = \boldsymbol{K}_2' = \boldsymbol{K}_3' \neq \boldsymbol{K}_4'$ — Dva různé hlavní nulové směry
- $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_4 = 0$ — Neměnné při boostech a prostorových transformacích (1.15)

Petrovův typ N

- $\boldsymbol{K}_1' = \boldsymbol{K}_2' = \boldsymbol{K}_3' = \boldsymbol{K}_4'$ — Jeden hlavní nulový směr
- $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0$ — Neměnné při boostech a prostorových transformacích (1.15) a nulových rotacích (1.13)

Přidejme ještě běžně užívané označení pro Riemannův tenzor:

Petrovův typ O

- $\boldsymbol{C} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{R} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{G}$ — Konformně plochý Riemannův tenzor.

Zběžně se ještě zmiňme o vztahu lokální a globální klasifikace Weylova tenzoru. Bližší analýzu lze nalézt např. v [8], zde jen uveďme bez důkazu dvě důležité věty:

Věta 1 Nechť je $\boldsymbol{C}$ hladký Weylův tenzor na $\mathcal{P}$ a nechť je v každém bod $p \in \mathcal{P}$ stejného algebraického typu. Pak vždy existuje okolí $U_p \subset \mathcal{P}$ bodu p takové, že na něm lze najít hladká vektorová pole, která jsou v každém bodě $q \in U_p$ hlavními nulovými směry $\boldsymbol{C}|_q$. Pokud je $\mathcal{P}$ navíc jednoduše souvislý, existují globální hladká vektorová pole, která jsou v každém bodě $p \in \mathcal{P}$ hlavní nulové směry $\boldsymbol{C}|_p$.

Věta 2 Nechť **I**, **II**, **III**, **D**, **N**, **O** značí podmnožiny prostoročasu $\mathcal{P}$, na nichž je Weylův tenzor příslušného konstantního algebraického typu, $\mathcal{P}$ pak lze zapsat jako disjunktní sjednocení

$$\mathcal{P} = \mathbf{I} \cup \operatorname{int} \mathbf{II} \cup \operatorname{int} \mathbf{III} \cup \operatorname{int} \mathbf{D} \cup \operatorname{int} \mathbf{N} \cup \operatorname{int} \mathbf{O} \cup X, \tag{1.51}$$

kde množina X je přímo definována tímto sjednocením a platí, že $\operatorname{int} X = \emptyset$.

Kapitola 2

Mathissonovy-Papapetrouovy rovnice

Mějme v prostoročase $\mathcal{P}$ volnou testovací částici charakterizovanou pouze monopólovým a dipólový momentem (tj. hmotností a vlastním momentem hybnosti), přičemž označením „volná“ myslíme, že částice se svým okolím neinteraguje jinak než gravitačně. Podél její (libovolné) reprezentativní světočáry γ jsou pak vždy splněny následující Mathissonovy-Papapetrouovy rovnice

$$\nabla_{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{P} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{J}) \boldsymbol{V}, \tag{2.1}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{J} = \boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{V}. \tag{2.2}$$

Zde vystupující veličiny jsou tečné vektorové pole $\boldsymbol{V}$ ke světočáře γ, též „kinematická“ 4-rychlost částice,

$$\boldsymbol{V}|_{\gamma(\tau)} := \frac{\mathbf{D}\gamma}{\mathrm{d}\tau}(\tau), \qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V})|_{\gamma(\tau)} = -1, \tag{2.3}$$

(zobecněná) 4-hybnost částice $\boldsymbol{P} \in \mathcal{X}(\gamma)$ a bivektor spinu $\boldsymbol{J} \in \mathcal{X}^2(\gamma)$. Zdůrazněme, že mezi $\boldsymbol{P}(\tau) := \boldsymbol{P}|_{\gamma(\tau)}$ a $\boldsymbol{V}(\tau)$ obecně neplatí klasická úměra, nýbrž, jak lze snadno nahlédnout úžením (2.2) s $\flat\boldsymbol{V}$,

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{V} + i_{\flat\boldsymbol{V}} \nabla_{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{J}, \tag{2.4}$$

kde funkce $m(\tau) := -\boldsymbol{g}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{V})|_{\gamma(\tau)}$ značí hmotnost částice vůči systému definovanému $\boldsymbol{V}$, „kinematickou“ hmotnost částice. Kromě toho zavádíme rovněž hmotnost částice vůči systému určenému $\boldsymbol{P}$, „dynamickou“ hmotnost, a odpovídající „dynamickou“ 4-rychlost částice,

$$\mathcal{M}(\tau) := \sqrt{-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P})}|_{\gamma(\tau)}, \qquad \boldsymbol{U} := \frac{\boldsymbol{P}}{\mathcal{M}}. \tag{2.5}$$

Ačkoliv se to nemusí na první pohled jevit, rovnice (2.2) je přímočarým zobecněním „klasického“ třírozměrného vztahu popisujícího vývoj bivektoru spinu hmotného systému vztaženého vůči libovolnému referenčnímu bodu, obecně rozdílnému od hmotného středu tohoto systému; (3-)vektory $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{V}$ zde určují celkovou hybnost systému a rychlost referenčního bodu, a nejsou proto na sobě obecně nijak závislé. A tak pouze první Mathissonova-Papapetrouova rovnice (2.1) obsahuje „nenewtonovský“ člen $-1/2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J})\boldsymbol{V}$, jež bývá označován jako interakce mezi spinem a křivostí. Blíže např. v [5].

Sama soustava (2.1), (2.2) však ani spolu s příslušnými počátečními podmínkami nemůže reprezentativní světočáru částice určit jednoznačně. Zapíšeme-li ji totiž v libovolném bodě $p \in \gamma$ a v libovolné bázi $\mathrm{T}_p\mathcal{P}$, zjistíme, že se skládá z deseti nezávislých rovnic (po čtyřech rovnicích z (2.1) a po šesti z (2.2)), naproti tomu obsahuje třináct nezávislých složek polí (čtyři od $\boldsymbol{P}$, tři od $\boldsymbol{V}$ a konečně šest od $\boldsymbol{J}$). Nedourčenost této soustavy souvisí právě s faktem, že je splněna podél jakékoliv reprezentativní světočáry částice a není spojena s žádnou význačnou. Doplňuje se proto různými algebraickými podmínkami, které tuto světočáru blíže specifikují. Jejich společným znakem je, že zajistí, aby hodnost zobrazení $\boldsymbol{J}(\tau) : \mathrm{T}^*_{\gamma(\tau)}\mathcal{P} \to \mathrm{T}_{\gamma(\tau)}\mathcal{P}$, $\boldsymbol{J}(\tau) : \boldsymbol{\eta} \mapsto i_{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{J}(\tau)$ byla pro všechna příslušná τ rovna *dvěma* a patřičně tomu klesl počet nezávislých proměnných v (2.1), (2.2). Tato degenerace $\boldsymbol{J}(\tau)$ také umožňuje názornější geometrickou interpretaci dipólového momentu, jak uvidíme v konkrétních případech.

2.1 Piraniho spinová podmínka

$$i_{\flat\boldsymbol{V}}\boldsymbol{J} = 0, \quad \text{na} \quad \gamma. \tag{2.6}$$

Jejím přímým důsledkem je zachování kinematické hmotnosti m (podél γ). K důkazu vyjdeme z toho, že

$$\dot{m} \equiv -\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{V}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J})\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}\right) - \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{P},\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}\right) = -\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{P},\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}\right). \tag{2.7}$$

Použili jsme nejprve první Mathissonovy-Papapetrouovu rovnici (2.1) a následně symetrii Riemannova tenzoru. Díky Piraniho podmínce (2.6) však

$$\nabla_{\boldsymbol{V}} i_{\flat\boldsymbol{V}}\boldsymbol{J} = 0 \implies i_{\flat\boldsymbol{V}}\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{J} = i_{\flat\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}}\boldsymbol{J}. \tag{2.8}$$

Můžeme proto vztah (2.4) přepsat do tvaru

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{V} + i_{\flat\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}}\boldsymbol{J} \tag{2.9}$$

a spolu s $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{V},\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}) = 0$ jej použít pro úpravu (2.7),

$$\dot{m} = \boldsymbol{g}(i_{\flat\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}}\boldsymbol{J},\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{J}(\flat\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V},\flat\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}) = 0. \qquad \text{CBD.} \tag{2.10}$$

Definujme 4-vektor spinu ve tvaru

$$\boldsymbol{S} := *(\boldsymbol{J}\wedge\boldsymbol{V}) = i_{\flat\boldsymbol{V}} * \boldsymbol{J}. \tag{2.11}$$

Označení tohoto pole ospravedlňuje fakt, že rozřešením (2.11) pro $\boldsymbol{J}$ snadno získáme

$$\boldsymbol{J} = *(\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{S}), \tag{2.12}$$

a tudíž je dipólový moment jednoznačně určen právě pomocí $\boldsymbol{S}$ a $\boldsymbol{V}$. 4-vektor spinu je z definice kolmý ke kinematické 4-rychlosti,

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{V}) = 0, \tag{2.13}$$

navíc vzhledem k (2.12) jistě platí i

$$i_{\flat\boldsymbol{S}}\boldsymbol{J} = 0. \tag{2.14}$$

Tak jako $\boldsymbol{J}$ splňuje podél γ rovnici (2.2), podléhá $\boldsymbol{S}$ obdobnému vztahu, který nejsnáze odvodíme z (2.12). Kovariantně jej zderivujme ve směru $\boldsymbol{V}$ a pišme rovnou Hodgeův obraz výsledku:

$$-\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{S}-\boldsymbol{V}\wedge\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{S}=*\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{J}. \tag{2.15}$$

Cílem je vyjádřit člen $\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{S}$. Vezmeme-li proto na zřetel při úžení předchozího vztahu s $\flat\boldsymbol{V}$ kolmost polí $\boldsymbol{S}$, $\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{V}$ a z toho plynoucí rovnost $\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{S},\boldsymbol{V})=-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S},\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V})$, obdržíme

$$\begin{aligned}\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{S},\boldsymbol{V})&=-i_{\flat\boldsymbol{V}}*\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{J}\equiv 0\\ \implies\quad \nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{S}&=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S},\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}).\end{aligned} \tag{2.16}$$

4-vektor spinu je tedy fermiovsky přenášen podél světočáry γ, důsledkem čehož je existence další zachovávající se veličiny podél γ: velikosti spinu $S:=\sqrt{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S})}$,

$$\nabla_{\boldsymbol{V}}\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S})\big)=2\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{S},\boldsymbol{S})=0. \tag{2.17}$$

Vadou na kráse Piraniho podmínky však je, že principiálně neexistuje algebraický vztah mezi kinematickou 4-rychlostí $\boldsymbol{V}$ a 4-hybností $\boldsymbol{P}$. Jinými slovy, světočáru částice γ nelze jednoznačně určit pomocí $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{J}$. Závislost lze nalézt pouze mezi $\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}$ a $\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P}$, [13]:

$$\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}=\frac{1}{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S})}\left(\frac{1}{m}\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P},\boldsymbol{S})\boldsymbol{S}+i_{\flat\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J}\right). \tag{2.18}$$

Toto má za následek, jak lze nejsnáze vidět v případě plochého prostoročasu, tzv. *helical motion*, kvůli čemuž bývá často Piraniho dodatečná spinová podmínka shledávána nevhodnou.

Ilustrujme tento jev a následujme [13]: Nechť je tedy $\boldsymbol{R}=0$ na otevřené oblasti $\mathcal{O}\subset\mathcal{P}$, na níž existuje ortogonální souřadnicový systém $\{x^i\}_{i=0}^3$, tj. $\boldsymbol{g}(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x^i}},\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x^j}})=\eta_{ij}$ na $\mathcal{O}$ ($\eta=\mathrm{diag}(-1,1,1,1)\Rightarrow\nabla_{\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x^i}}}=0$, $i=0,\dots,3$), a řešme pohybové rovnice (2.1), (2.16), za pomoci (2.18), s počátečními podmínkami v $\gamma(0)=b$, $b\in\mathcal{O}$,

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{P}|_{\gamma(0)}=\boldsymbol{P}_0\equiv {P_0}^i\tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x^i}}|_{\gamma(0)},\quad \boldsymbol{S}|_{\gamma(0)}={S_0}^i\tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x^i}}|_{\gamma(0)},\\ &\boldsymbol{V}|_{\gamma(0)}=\boldsymbol{V}_0\equiv\boldsymbol{V}_{0,\parallel}+\boldsymbol{V}_{0,\perp}=V^i_{0,\parallel}\tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x^i}}|_{\gamma(0)}+V^i_{b,\perp}\tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x^i}}|_{\gamma(0)}\end{aligned} \tag{2.19}$$

kde $\boldsymbol{V}_{0,\parallel}$ značí průmět $\boldsymbol{V}_0$ na $\boldsymbol{P}_0$,

$$\boldsymbol{V}_{0,\parallel}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{V}_0,\boldsymbol{P}_0)\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_0)^{-1}\boldsymbol{P}_0 \tag{2.20}$$

a $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{V}_{0,\perp},\boldsymbol{P}_0)=0$. Jistě nyní platí

$$\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P}=\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{S}=0\quad\text{a}\quad\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}=\frac{1}{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S})}\,i_{\flat\boldsymbol{P}}*(\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{S})\quad\text{na}\quad\gamma. \tag{2.21}$$

Takže pokud $\boldsymbol{P}|_{\gamma(\tau)}=P^i(\tau)\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x^i}}|_{\gamma(\tau)}$, $\boldsymbol{S}|_{\gamma(\tau)}=S^i(\tau)\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x^i}}|_{\gamma(\tau)}$, $\boldsymbol{V}|_{\gamma(\tau)}=V^i(\tau)\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x^i}}|_{\gamma(\tau)}$, předešlé rovnice implikují

$$P^i(\tau)=P^i_0,\quad S^i(\tau)=S^i_0,\quad \frac{\mathrm{d}V^i}{\mathrm{d}\tau}(\tau)=A^i_j\,V^j(\tau), \tag{2.22}$$

kde $A^i_j = \dfrac{(\eta^{-1})^{ik}\varepsilon_{kjlm}P^l_0 S^m_0}{\eta_{pq}\, S_0{}^p S_0{}^q}$. Řešením této soustavy se zadanými počátečními podmínkami je

$$V^i(\tau) = V^i_{0\|} + V^i_{0\perp}\cos(\omega\tau) + \omega^{-1}A^i_j\, V^j_{0\perp}\sin(\omega\tau), \quad \omega \in \mathbb{R}. \tag{2.23}$$

Ježto vzhledem k (2.3) platí

$$V^i(\tau)\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x^i}}|_{\gamma(\tau)} = \frac{\mathrm{d}(x^i\circ\gamma)}{\mathrm{d}\tau}(\tau)\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x^i}}|_{\gamma(\tau)} \equiv \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}\tau}(\tau)\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x^i}}|_{\gamma(\tau)} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}\tau}(\tau) = V^i(\tau), \tag{2.24}$$

získáme nakonec integrováním (2.23)

$$\gamma^i(\tau) = b^i + V^i_{0\|}\tau + \omega^{-1}V^i_{0\perp}\sin(\omega\tau) + \omega^{-2}A^i_j V^j_{0\perp}(1-\cos(\omega\tau)). \tag{2.25}$$

Na první pohled je zřejmé, že nenulovost posledních dvou členů vede k „ovíjení“ světočáry částice kolem $\tilde{\gamma}^i(\tau) = b^i + V^i_{0\|}\tau$, tedy helical motion.

Poznamenejme, že skutečnost, že bylo možné zadat počáteční podmínky na 4-rychlost $\boldsymbol{V}$ nezávisle na počátečních podmínkách kladených na 4-hybnost $\boldsymbol{P}$, dokazuje neexistenci lokálního explicitního vztahu spojujícího tyto dvě veličiny.

Příjemnějším důsledkem vztahu pro 4-zrychlení světočáry částice je skutečnost, že po jeho substituci do (2.16) zjišťujeme

$$\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{V}\cdot\frac{1}{m}\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P},\boldsymbol{S}) \tag{2.26}$$

— vývoj 4-vektoru spinu částice lze vyjádřit pouze v závislosti na kovariantní derivaci 4-hybnosti podél světočáry částice.

2.2 Tulczyjewova spinová podmínka

$$i_{\flat\boldsymbol{U}}\boldsymbol{J} = 0, \quad \text{na} \quad \gamma. \tag{2.27}$$

Opět je jejím důsledkem zachování tentokráte ale dynamické hmotnosti $\mathcal{M}$ (podél γ). V důkazu postupujeme obdobně jako u Piraniho podmínky — úžení druhé Mathissonovy-Papapetrouovy rovnice (2.2) s $\flat\boldsymbol{P}$ implikuje

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{m}\left(\mathcal{M}^2\boldsymbol{V} + i_{\flat\boldsymbol{P}}\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{J}\right) \tag{2.28}$$

a díky Tulczyjewově podmínce (z jejíž kovariantní derivací ve směru $\boldsymbol{V}$ plyne $i_{\flat\boldsymbol{P}}\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{J} = -i_{\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J}$)

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{m}\left(\mathcal{M}^2\boldsymbol{V} - i_{\flat\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J}\right). \tag{2.29}$$

Když nyní počítáme

$$2\mathcal{M}\dot{\mathcal{M}} = \nabla_{\boldsymbol{V}}\mathcal{M}^2 = \nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}) = 2\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}) \tag{2.30}$$

a použijeme (2.29), dojdeme k výsledku

$$\begin{aligned} 2\mathcal{M}\dot{\mathcal{M}} &= 2\frac{\mathcal{M}^2}{m}\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P},\boldsymbol{V}) - \frac{2}{m}\boldsymbol{g}\left(\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P}, i_{\flat\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J}\right) \\ &= \frac{2}{m}\boldsymbol{J}(\flat\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P},\flat\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P}) = 0. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Jestliže tedy $\mathcal{M} \neq 0$, musí se $\dot{\mathcal{M}} = 0$. CBD.

Poznamenejme, že jsme rovněž dokázali platnost výroku

$$\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}) = 0 \qquad \text{resp.}\, (\dot{\mathcal{M}} = 0) \qquad \boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}) = 0. \tag{2.32}$$

Opět využijme degenerovanosti $\boldsymbol{J}$ a zaveďme 4-vektor spinu

$$\boldsymbol{S} := *(\boldsymbol{J} \wedge \boldsymbol{U}) = i_{\flat\boldsymbol{U}} * \boldsymbol{J}. \tag{2.33}$$

(Jeho označení je totožné s označením 4-vektoru spinu v případě Piraniho podmínky. Věříme ale, že je oba vždy rozlišíme podle kontextu.) Nyní již nepřekvapí, když po obdobném postupu jako u Piraniho podmínky rovnou napíšeme

$$\boldsymbol{J} = *(\boldsymbol{U} \wedge \boldsymbol{S}), \tag{2.34}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{U}) = 0, \tag{2.35}$$

$$i_{\flat\boldsymbol{S}}\boldsymbol{J} = 0, \tag{2.36}$$

když využijeme kovariantní derivace (2.34) ve směru $\boldsymbol{V}$,

$$* \nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{J} = -\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{U} \wedge \boldsymbol{S} + \boldsymbol{U} \wedge \nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{S}, \tag{2.37}$$

a tuto rovnici pak zúžíme s $\flat\boldsymbol{U}$, abychom vyjádřili $\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{S}$:

$$\begin{aligned} \nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{S} &= -\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{S}, \boldsymbol{U}) - \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}) = \\ &= \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{S}, \nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{U}). \end{aligned} \tag{2.38}$$

Pro poslední úpravu byl použit vztah (2.32) a kovariantní derivace ve směru $\boldsymbol{V}$ výrazu (2.35). Interpretace tohoto výsledku však není úplně přímočará jako u jeho obdoby pro Piraniho podmínku, (2.16). Avšak i jeho důsledkem je zachování velikosti spinu $S := \sqrt{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S})}$.

V případě Tulczyjewovy podmínky je možné nalézt explicitní vyjádření kinematické 4-rychlost v závislosti na 4-hybnosti a světočára částice v prostoročase je tak plně určena. Sledujme návod z [18], použijme rovnici (2.29) a vyjádřeme z něj kinematickou 4-rychlost $\boldsymbol{V}$,

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{\mathcal{M}^2}(m\boldsymbol{P} + i_{\flat\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J}). \tag{2.39}$$

Dále počítejme, čemu je roven člen úměrný $\boldsymbol{J}$,

$$i_{\flat\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J} \overset{(2.1)}{=} -\frac{1}{2} i_{\flat\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J})\boldsymbol{V}}\boldsymbol{J}, \tag{2.40}$$

a dosaďme za $\boldsymbol{V}$ z (2.39),

$$i_{\flat\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J} = -\frac{m}{2\mathcal{M}^2} i_{\flat\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J} - \frac{1}{2\mathcal{M}^2}\boldsymbol{J}\big(\flat\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J}) i_{\flat\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J}, \,\cdot\,\big). \tag{2.41}$$

Výraz obsahuje nepříliš vzhledný druhý člen, uvědomme si ale, že díky symetrii Riemannova tenzoru $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\boldsymbol{Q}) = -\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\boldsymbol{P})$ a antisymetrii $\boldsymbol{J}$ je roven

$$\frac{1}{2\mathcal{M}^2}\boldsymbol{J}\big(\flat\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J}) i_{\flat\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J}, \,\cdot\,\big) = \frac{{}^\flat\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{J})}{4\mathcal{M}^2}\, i_{\flat\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J}. \tag{2.42}$$

Takže již nic nebrání přímému vyjádření $i_{\flat\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J}$,

$$i_{\flat\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J} = -\frac{2m}{4\mathcal{M}^2 + {}^\flat\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{J})} i_{\flat\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J}, \tag{2.43}$$

a po jeho zpětném dosazení do (2.39) dospět k hledanému vztahu

$$\boldsymbol{V} = \frac{m}{\mathcal{M}^2}\left(\boldsymbol{P} + \frac{2}{4\mathcal{M}^2 + {}^\flat\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{J})}\boldsymbol{J}\big(\,\cdot\,, \flat\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}\big)\right). \tag{2.44}$$

Mohlo by se zdát, že jeho pravá strana obsahuje stále člen závislý na $\boldsymbol{V}$, $m = -\boldsymbol{g}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{P})$. Tento je ale fixován normováním $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}) = -1$.

2.3 Podmínka $\boldsymbol{P} \,\|\, \boldsymbol{V}$

Nechť $\boldsymbol{W} \in \mathcal{X}(\gamma)$ je libovolné pole, které podél γ splňuje

$$\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{W} = \alpha\boldsymbol{W}, \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{W}) \leq 0, \quad \alpha \in \mathcal{F}(\gamma). \tag{2.45}$$

Podmínkou $\boldsymbol{P} \,\|\, \boldsymbol{V}$ nazveme

$$i_{\flat\boldsymbol{W}}\boldsymbol{J} = 0 \quad \text{na} \quad \gamma. \tag{2.46}$$

Jedná se o drobně zobecněnou podmínku publikovanou v [13], se kterou je ekvivalentní v případě, že je $\boldsymbol{W}$ časupodobné. Motivací pro přidání nulových polí $\boldsymbol{W}$ je skutečnost, že většina typů holonomních grup prostoročasu zaručuje existenci globálních rekurentním resp. kovariantně konstantním polím, která je možno přirozeně použít v právě definované dodatečné spinové podmínce. A ve vakuových prostoročasech jsou tato pole bez výjimky nulová. Blíže viz [8].

Podmínka $\boldsymbol{P} \,\|\, \boldsymbol{V}$ má velmi specifický rys, 4-hybnost částice je vždy tečná ke světočáře částice. Původní důkaz pro případ časupodobného pole $\boldsymbol{W}$ můžeme nalézt v [13]. Zde uveďme kratší alternativní přistup, který bude platný i pro nulová pole $\boldsymbol{W}$. Z kovariantní derivace (2.46) podle $\boldsymbol{V}$:

$$\nabla_{\boldsymbol{V}}\left(i_{\flat\boldsymbol{W}}\boldsymbol{J}\right) = i_{\flat\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{W}}\boldsymbol{J} + i_{\flat\boldsymbol{W}}\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{J} = 0, \tag{2.47}$$

což upravíme použitím vlastností $\boldsymbol{W}$ (2.45), podmínky $\boldsymbol{P} \,\|\, \boldsymbol{V}$ a druhé Mathissonovy-Papapetrouovy rovnice (2.2) na

$$i_{\flat\boldsymbol{W}}\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{P}. \tag{2.48}$$

Jelikož je $\boldsymbol{W}$ v každém bodě γ neprostorupodobný vektor ($\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{V}$ jsou vždy časupodobné), je $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{W}) \neq 0$ i $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) \neq 0$ a tak musí být

$$\boldsymbol{P} \propto \boldsymbol{V}. \qquad \text{CBD.} \tag{2.49}$$

Důsledkem je zachovávající se hmotnost $m := -\boldsymbol{g}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{V})$:

$$\dot{m} = -2\boldsymbol{g}(\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P},\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J})\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}) = 0, \tag{2.50}$$

a paralelní přenos bivektoru spinu:

$$\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{J} = m\,\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{V} = 0. \tag{2.51}$$

Problematickým bodem je ovšem definování 4-vektoru spinu. Vztah

$$\boldsymbol{S} := *(\boldsymbol{J} \wedge \boldsymbol{W}) \tag{2.52}$$

je vyhovujícím, jestliže je $\boldsymbol{W}$ časupodobné. Pokud je ale nulové, musí vzhledem k současné dodatečné podmínce platit

$$\boldsymbol{J} = \mu\, \boldsymbol{W} \wedge \boldsymbol{M} + \overline{\mu}\, \boldsymbol{W} \wedge \overline{\boldsymbol{M}} + \mathrm{i}\, \varsigma\, \boldsymbol{M} \wedge \overline{\boldsymbol{M}}, \tag{2.53}$$

kde $(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \overline{\boldsymbol{M}})$ je komplexní nulová tetráda a $\mu \in \mathbb{C}$, $\varsigma \in \mathbb{R}$, takže

$$\boldsymbol{S} = \varsigma \boldsymbol{W}. \tag{2.54}$$

— 4-vektor spinu je rovněž nulový a ke všemu neurčuje zpětně jednoznačně $\boldsymbol{J}$. Komponenta μ může být volena libovolně, nezávisle na $\boldsymbol{S}$. Pro bližší informace o významu μ viz [2]. Spinový 4-vektor definovaný vztahem (2.52) se tudíž při nulovém poli $\boldsymbol{W}$ nehodí pro popis dipólového momentu částice pohybující se podsvětelnou rychlostí.

Alternativně proto zaveďme

$$\boldsymbol{S} := *(\boldsymbol{J} \wedge \boldsymbol{V}). \tag{2.55}$$

Nutno poznamenat, že takto definovaný 4-vektor spinu má smysl především, popisujeme-li *bodovou* testovací částici s dodatečnou „matematickou" strukturou, tzn. nejsou-li 4-hybnost a bivektor spinu vázány k rozložení hmoty v prostoročase. Je pak přirozenější postupovat opačně — zadat 4-vektor spinu a z něj určit bivektor spinu:

$$\boldsymbol{J} = *(\boldsymbol{S} \wedge \boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{V})^{-1}. \tag{2.56}$$

Kapitola 3

MP rovnice v algebraicky speciálních prostoročasech

Ačkoliv dodatečné spinové podmínky vnášejí do soustavy Mathissonových-Papapetrouových rovnic vazby mezi neznámými a tím komplikují úlohu jejího vyřešení, zároveň umožňují definování spinových 4-vektorů, s jejichž pomocí jsou zmíněné vazby automaticky splněny. Protože jsou spinové 4-vektory v jednoznačné korespondenci se spinovým bivektorem a jejich vývoj je podél světočar částice určen vztahy (2.26), (2.38), zastupuje jeden z těchto vztahů v závislosti na dané dodatečné podmínce druhou Mathissonovu-Papapetrouovu rovnici (2.2). Abychom soustavu uzavřeli, uveďme nyní i první Mathissonovu-Papapetrouovu rovnici (2.1) v závislosti na dodatečné spinové podmínce do tvaru, ve kterém bude explicitně vyjádřena závislost na $\boldsymbol{S}$. Dosaďme do její pravé strany postupně vyjádření spinových bivektorů (2.12) a (2.34), současně si uvědomme, že pro libovolný konečně dimenzionální vektorový prostor $(V, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_V)$ a Hodgeovo zobrazení $* : \Lambda^2 V \to \Lambda^2 V$ existuje duální Hodgeovo zobrazení $* : \Lambda^2 V^* \to \Lambda^2 V^*$, tj. pro $\boldsymbol{\eta} \in \Lambda^2 V^*$, $\Xi \in \Lambda^2 V$ platí: $\langle *\boldsymbol{\eta}, \Xi\rangle = \langle \boldsymbol{\eta}, *\Xi\rangle$, takže

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J})\boldsymbol{V} = \begin{cases} -1/2\,{}^*\!\boldsymbol{R}(\boldsymbol{V}\wedge\boldsymbol{S})\boldsymbol{V} = -{}^*\!\boldsymbol{R}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{S})\boldsymbol{V}, & \textit{Piraniho podmínka} \\ -1/2\,{}^*\!\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U}\wedge\boldsymbol{S})\boldsymbol{V} = -{}^*\!\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S})\boldsymbol{V}. & \textit{Tulczyjewova podmínka} \end{cases} \tag{3.1}$$

kde jsme označili ${}^*\!\boldsymbol{R}$ levý Hodgeův obraz Riemannova tenzoru.

3.1 Piraniho spinová podmínka

V případě Piraniho podmínky je (3.1) velmi podobná pravé straně rovnice geodetické deviace (1.42). Pokud by (3.1) měla tvar $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{S})\boldsymbol{V}$, popisovala by relativní zrychlení blízkých geodetik obsažených v kongruenci křivek konstruované například následujícím způsobem, viz [7].

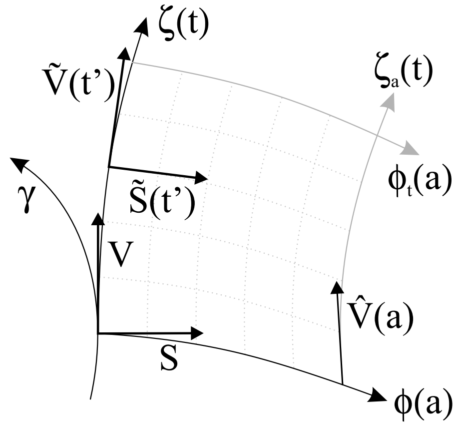
Předpokládejme, že v bodě $p \in \mathcal{P}$ nacházejícím se na světočáře částice γ je kinematická 4-rychlost částice (tečný vektor křivky γ v p) rovna $\boldsymbol{V}|_p$ a 4-spin roven $\boldsymbol{S}|_p$. Veďme bodem p libovolnou hladkou křivku $\phi(a)$ rovnoběžnou v $p = \phi(0)$ s vektorem $\boldsymbol{S}|_p$, tj. $\dot{\phi}(0) = \boldsymbol{S}|_p$, viz Obrázek 3.1. Podél $\phi(a)$ uvažme libovolné hladké vektorové pole $\widehat{\boldsymbol{V}}(a)$, jež je v bodě p shodné s $\boldsymbol{V}|_p$ ($\widehat{\boldsymbol{V}}(0) = \boldsymbol{V}|_p$). Konečně, každým bodem $\phi(a)$ veďme geodetiky $\zeta_a(t)$ ve směru $\widehat{\boldsymbol{V}}(a)$, $\zeta_a(0) = \phi(a)$. Upozorněme na fakt, že křivka $\zeta_0(t) \overset{\text{ozn.}}{=} \zeta(t)$ má v bodě p tečný vektor $\boldsymbol{V}|_p$. Protože na dostatečně blízkém okolí bodu p jsou $\phi_t(a) := \zeta_a(t)$, t fixní, hladké křivky, vytváří třída geodetik $\zeta_a(t)$ časupodobnou dvoudimenzionální plochu $\Upsilon(t,a) := \zeta_a(t)$, na které jsou přirozeně dána dvě vektorová pole $\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}}$ a $\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial a}}$. Integrálními křivkami těchto polí jsou postupně $\zeta_a(t)$ a $\phi_t(a)$ a pole sama musejí splňovat rovnici (1.42):

$$\nabla^2_{\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}}} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial a}} = \boldsymbol{R}\left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}}, \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial a}}\right) \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}}. \tag{3.2}$$

Jelikož ale $\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}}|_p = \boldsymbol{V}|_p$ a $\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial a}}|_p = \boldsymbol{S}|_p$, máme v bodě p

$$\nabla^2_{\widetilde{\boldsymbol{V}}} \widetilde{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{R}\,(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{S})\,\boldsymbol{V}, \tag{3.3}$$

kde jsme označili $\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}}|_{\zeta(t)} = \widetilde{\boldsymbol{V}}(t)$, $\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial a}}|_{\zeta(t)} = \widetilde{\boldsymbol{S}}(t)$ — rozšíření vektorů $\boldsymbol{V}|_p$ a $\boldsymbol{S}|_p$ podél geodetiky ζ.



Obrázek 3.1: Ke konstrukci geodetické kongruence $\zeta_a(t)$.

Srovnejme oba vztahy $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{S})\boldsymbol{V}$ a ${}^*\boldsymbol{R}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{S})\boldsymbol{V}$, nejprve ale zjednodušme situaci a předpokládejme vakuový prostoročas (bez kosmologické konstanty), tj. $\boldsymbol{ric} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{R} = \boldsymbol{C}$. Rozbor vztahu $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{S})\boldsymbol{V}$ byl již podán v odstavci obsahujícím rovnici (1.43), nastavíme-li $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{S}$; udělejme totéž pro vztah ${}^*\boldsymbol{C}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{S})\boldsymbol{V}$. Poznamenejme, že se bude jednat o lokální diskuzi v libovolném bodě p prostoročasu $\mathcal{P}$, aniž by byla tato zkutečnost dále nějak zdůrazňována.

Levý Hodgeův duál úplně kovariantního Weylova tenzoru ${}^{*\flat}\boldsymbol{C}$ odpovídá, díky jeho tvaru (1.38) a (anti)self-duálnosti dvouforem (1.21), zobrazení

$$\Psi_j \mapsto \mathrm{i}\Psi_j, \qquad j = 0 \ldots 4, \tag{3.4}$$

kde Ψ_j, $j = 0 \ldots 4$, jsou Weylovy skaláry v *libovolné* komplexní nulové tetrádě. Užijeme-li proto ortonormální tetrádu $(\boldsymbol{E_0} = \boldsymbol{V}, \boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}, \boldsymbol{E_3})$ a rozepíšeme-li do ní pole $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{S} = S^j \boldsymbol{E_j}$, jsou složky $\langle \boldsymbol{e^i}, {}^*\boldsymbol{C}(\boldsymbol{E_0}, \boldsymbol{E_j})\boldsymbol{E_0}\rangle S^j$ dány součtem součinů matic (1.44 – 1.46), v nichž aplikujeme (3.4), s $\vec{S} = (S^i)^3_{i=0}$.

Nyní předpokládejme, že je Weylův tenzor $\boldsymbol{C}$ algebraicky speciální.
Jedná-li se o typ N a vektor $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ je hlavním nulovým směrem Weylova tenzoru, máme pro libovolný časupodobný vektor $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}) = -1$ jednoznačně dán výjimečný prostorupodobný směr $\boldsymbol{E_1}$ průmětem $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ na ortogonální doplněk $\boldsymbol{V}$,

$$\boldsymbol{E_1} := -\boldsymbol{g}(\boldsymbol{V}, \widetilde{\boldsymbol{K}})^{-1}\,(\boldsymbol{1} + \boldsymbol{V} \otimes \flat\boldsymbol{V}) \llcorner \widetilde{\boldsymbol{K}}, \tag{3.5}$$

($\mathbf{1}$ je jednotkový tenzor a $\llcorner$ značí pravé úžení) a v komplexní nulové tetrádě přirozeně asociované s ortonormální tetrádou $\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E_i})_{i=1}^{3}$ Weylovu tenzoru $\boldsymbol{C}$ zůstává jediná nenulová složka Ψ_4, která po přihlédnutí k (1.44) určuje amplitudu a polarizaci příčné gravitační vlny šířící se ve směru $\boldsymbol{E_1}$ vzhledem k systému $\boldsymbol{\Omega}$. Pro $\boldsymbol{S} = S^j \boldsymbol{\Omega}_j$, kdy $\boldsymbol{\omega}$ značí opět duální tetrádu k $\boldsymbol{\Omega}$, máme

$$(\langle \boldsymbol{\omega}^i, {}^*\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\Omega}_0, \boldsymbol{\Omega}_j)\boldsymbol{\Omega}_0 \rangle S^j) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{Im}\Psi_4 & \operatorname{Re}\Psi_4 \\ 0 & 0 & \operatorname{Re}\Psi_4 & -\operatorname{Im}\Psi_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ S^1 \\ S^2 \\ S^3 \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

a je tak zřejmé, že zobrazení $z_{\boldsymbol{V}} : \boldsymbol{S} \mapsto {}^*\boldsymbol{C}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{S})\boldsymbol{V}$ má hodnost 2, jeho jádrem je prostor $\operatorname{Ln}(\{\boldsymbol{E_1}\})$ a oborem hodnot prostor $\operatorname{Ln}(\{\boldsymbol{E_2}, \boldsymbol{E_3}\})$. Čili, pokud $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{S}$ jsou opět speciálně pole kinematické 4-rychlosti a 4-spinu částice, 4-síla působící na částici (totiž kovariantní derivace 4-hybnosti částice podél její světočáry) leží vždy v rovině kolmé ke směru šíření příčných gravitačních vln, a je nulová tehdy a jen tehdy, když je vektor spinu rovnoběžný se směrem šíření vln, $\boldsymbol{S} \in \operatorname{Ln}(\{\boldsymbol{E_1}\})$. Je rovněž vždy ortogonální k relativnímu zrychlení geodetické kongruence $\zeta_a(t)$, poněvadž

$$\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{S})\boldsymbol{V},\, {}^*\boldsymbol{C}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{S})\boldsymbol{V}\big) = 0. \tag{3.7}$$

Situace se poněkud komplikuje v případech ostatních algebraických typů Weylova tenzoru. Proberme dále prostoročas typu III. Nechť je $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ trojnásobný hlavní nulový směr $\boldsymbol{C}$, tetrádu $\boldsymbol{\Omega}$ tvoří jako dříve jednotkový časupodobný vektor $\boldsymbol{V}$, vektor $\boldsymbol{E_1}$ získaný projekcí (3.5) a libovolné vektory $\boldsymbol{E_2}$, $\boldsymbol{E_3}$ ortonormální báze $\operatorname{Ln}(\{\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E_1}\})^{\perp}$, a $\boldsymbol{\Xi}$ je s ní asociovaná komplexní nulová tetráda. V tetrádě $\boldsymbol{\Xi}$ jsou nyní obecně nenulové dva Weylovy skaláry, Ψ_3 a Ψ_4 — podélné a příčné gravitační vlny šířící se vůči systému $\boldsymbol{\Omega}$ ve směru $\boldsymbol{E_1}$; pouze pro speciální třídu komplexních nulových bází dojde k vynulování i Ψ_4. Takže

$$(\langle \boldsymbol{\omega}^i, {}^*\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\Omega}_0, \boldsymbol{\Omega}_j)\boldsymbol{\Omega}_0 \rangle S^j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{Im}\Psi_3 & \operatorname{Re}\Psi_3 \\ 0 & \operatorname{Im}\Psi_3 & \frac{1}{2}\operatorname{Im}\Psi_4 & \frac{1}{2}\operatorname{Re}\Psi_4 \\ 0 & \operatorname{Re}\Psi_3 & \frac{1}{2}\operatorname{Re}\Psi_4 & -\frac{1}{2}\operatorname{Im}\Psi_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ S^1 \\ S^2 \\ S^3 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Hodnost zobrazení $z_{\boldsymbol{V}} : \boldsymbol{S} \mapsto {}^*\boldsymbol{C}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{S})\boldsymbol{V}$ přímo souvisí s velikostí $\operatorname{Im}\big(\overline{\Psi}_4 \Psi_3^2\big)$. V případě, že je nenulová, je $\operatorname{rank}(z_{\boldsymbol{V}}) = 3$ (a $\operatorname{Ker}(z_{\boldsymbol{V}}) = \emptyset$), což pro částici s kinematickou 4-rychlostí $\boldsymbol{V}$ znamená, že neexistuje směr spinu $\boldsymbol{S}$ takový, aby 4-síla působící na částici vymizela. Naopak je-li $\operatorname{Im}\big(\overline{\Psi}_4 \Psi_3^2\big) = 0$, je $\operatorname{rank}(z_{\boldsymbol{V}}) = 2$. Jádro $z_{\boldsymbol{V}}$ pak nejsnáze nalezneme, nastavíme-li vektory $\boldsymbol{E_2}$, $\boldsymbol{E_3}$ tak, aby $\operatorname{Im}\Psi_3 = 0$ (viz (1.49)): $\operatorname{Ker}(z_{\boldsymbol{V}}) = \operatorname{Ln}(\{-\operatorname{Re}\Psi_4\, \boldsymbol{E_1} + 2\operatorname{Re}\Psi_3\, \boldsymbol{E_2}\})$.

Za stejných zjednodušujících podmínek nalezneme i okolnosti, za kterých je splněno $\operatorname{Im}\big(\overline{\Psi}_4 \Psi_3^2\big) = 0$. Nechť $(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{E_2}, \boldsymbol{E_3})$ je takový nulový systém s $\boldsymbol{K}$ hlavním nulovým směrem $\boldsymbol{C}$, v němž zůstane nenulová pouze reálná část Ψ_3. Volme libovolný jednotkový časupodobný vektor

$$\boldsymbol{V} = (1 + c^2 + d^2)/(2b)\boldsymbol{K} + b\boldsymbol{L} + c\boldsymbol{E_2} + d\boldsymbol{E_3}, \quad b, c, d \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0, \tag{3.9}$$

a doplňme ho na ortonormální tetrádu $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}$ pomocí $\widetilde{\boldsymbol{E}}_1$ (projekce $\boldsymbol{K}$ do prostoru kolmého k $\boldsymbol{V}$) a vektorů $\widetilde{\boldsymbol{E}}_2$, $\widetilde{\boldsymbol{E}}_3$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{E}}_1 &= (1-c^2-d^2)/(2b)\boldsymbol{K} - b\boldsymbol{L} - c\boldsymbol{E_2} - d\boldsymbol{E_3},\\
\widetilde{\boldsymbol{E}}_2 &= c/b\boldsymbol{K} + \boldsymbol{E_2},\\
\widetilde{\boldsymbol{E}}_3 &= d/b\boldsymbol{K} + \boldsymbol{E_3},
\end{aligned} \tag{3.10}$$

tak, že imaginární část Weylova skaláru $\widetilde{\Psi}_3$ v komplexní bázi $\widetilde{\boldsymbol{\Xi}} \sim \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}$ je nulová. Zredukujeme tím podmínku $\mathrm{Im}\big(\overline{\widetilde{\Psi}}_4\widetilde{\Psi}_3^2\big)$ jednoduše na $\mathrm{Im}\,\widetilde{\Psi}_4 = 0$. Protože ale

$$\widetilde{\Psi}_4 = 4\sqrt{2}\,\Psi_3\cdot b\cdot(c-\mathrm{i}d), \quad (\widetilde{\Psi}_3 = \sqrt{2}\,\Psi_3\cdot b), \tag{3.11}$$

je jedinou možností pro její splnění položit $d=0$.

Můžeme tedy shrnout, že je-li $(\boldsymbol{E_i})_{i=0}^3 \sim (\boldsymbol{K},\boldsymbol{L},\boldsymbol{E_2},\boldsymbol{E_3})$ systém, pro který se rovinná gravitační vlna šíří ve směru $\boldsymbol{E_1}$ a je polarizovaná do roviny $\mathrm{Ln}(\{\boldsymbol{E_1},\boldsymbol{E_2}\})$, pak existuje směr 4-spinu částice, při kterém na částici nepůsobí žádná 4-síla, pouze v případě, že průmět její 4-rychlosti na $\boldsymbol{E_3}$ je nulový.

Není úplně bez zajímavosti, že

$$\det\big(\langle\boldsymbol{\omega}^i, \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\Omega}_0,\boldsymbol{\Omega}_j)\boldsymbol{\Omega}_0\rangle_{i,j=1}^3\big) = \mathrm{Re}\left(\overline{\Psi}_4\Psi_3^2\right), \tag{3.12}$$

a tedy relativní zrychlení geodetické kongruence $\zeta_a(t)$ a zrychlení částice se spinem nikdy nevymizí současně.

Nakonec uvažujme typ D. Nechť $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$ jsou hlavní nulové směry $\boldsymbol{C}$ normalizované na $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{L}) = -1$. V bázi $(\boldsymbol{K},\boldsymbol{L},\boldsymbol{M},\overline{\boldsymbol{M}})$ má nyní Weylův tenzor nenulovou pouze složku Ψ_2, jež nezávisí na volbě $\boldsymbol{M}$ a $\overline{\boldsymbol{M}}$. V komplexním nulovém systému $\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}$ asociovaném s ortonormální bází $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}$ tvořenou vektory tvaru (3.9), (3.10) jsou pak nenulovými složkami Weylova tenzoru $\widetilde{\Psi}_4$, $\widetilde{\Psi}_3$ a $\widetilde{\Psi}_2$ a platí

$$\widetilde{\Psi}_4 = 6\kappa^2\Psi_2, \quad \widetilde{\Psi}_3 = 3\kappa\Psi_2, \quad \widetilde{\Psi}_2 = \Psi_2, \quad \kappa = c - \mathrm{i}\,d. \tag{3.13}$$

Díky tomu pro $\boldsymbol{S} = \widetilde{S}^i\,\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_i$ vychází:

$$\begin{aligned}
&(\langle\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^i, {}^*\boldsymbol{C}(\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_0,\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_j)\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_0\rangle\widetilde{S}^j) = \\
&\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 2\,\mathrm{Im}\,\Psi_2 & 3\,\mathrm{Im}(\kappa\Psi_2) & 3\,\mathrm{Re}(\kappa\Psi_2)\\
0 & 3\,\mathrm{Im}(\kappa\Psi_2) & -\mathrm{Im}\,\Psi_2 + 3\,\mathrm{Im}(\kappa^2\Psi_2) & 3\,\mathrm{Re}(\kappa^2\Psi_2)\\
0 & 3\,\mathrm{Re}(\kappa\Psi_2) & 3\,\mathrm{Re}(\kappa^2\Psi_2) & -\mathrm{Im}\,\Psi_2 - 3\,\mathrm{Im}(\kappa^2\Psi_2)
\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ S^1\\ S^2\\ S^3\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Determinant podmatice

$$\det(\langle\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^i, {}^*\boldsymbol{C}(\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_0,\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_j)\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_0\rangle_{i,j=1}^3) = (2\,\mathrm{Im}^2\Psi_2 + 9\,|\Psi_2|^2|\kappa|^4 + 9\,|\kappa|^2)\,\mathrm{Im}\,\Psi_2, \tag{3.15}$$

takže zobrazení $z_{\boldsymbol{V}} : \boldsymbol{S} \mapsto {}^*\boldsymbol{C}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{S})\boldsymbol{V}$ má hodnost 3 tehdy a jen tehdy, pokud je $\mathrm{Im}\,\Psi_2 \neq 0$. Takováto podmínka se ovšem podstatně liší od té, ke které jsme došli pro Petrovův typy III Weylova tenzoru. V předcházejícím případě mohla být totiž splněna jednoduše vhodnou volbou souřadného systému – jednalo se o Pokud jepodmínku kladenou na časupodobný vektor báze. Nyní jsme vyšli z komplexní nulové tetrády $(\boldsymbol{K},\boldsymbol{L},\boldsymbol{M},\overline{\boldsymbol{M}})$, od které jsme požadovali jediné, aby vektory $\boldsymbol{K}$ a $\boldsymbol{L}$ byly hlavními nulovými směry $\boldsymbol{C}$. Tetrádě tedy zbyla volnost obsažená ve dvourozměrné (Abelově) grupě transformací (1.15). Působení této grupy na Ψ_2 je ovšem triviální, (1.49). Z tohoto plyne, že nulovost imaginární (a stejně tak i reálné) části složky Ψ_2 je „vnitřní“ vlastností Weylova tenzoru. Pokud je tato nenulová, není možné pro žádnou 4-rychlost částice najít směr 4-spinu takový, aby 4-síla působící na částici vymizela. Na druhou stranu, pokud je $\operatorname{Im}\Psi_2 = 0$, vymizí 4-síla ve dvou případech:

$$\operatorname{proj}_{\langle \boldsymbol{K},\boldsymbol{L}\rangle^\perp}\boldsymbol{V} \begin{cases} \neq \boldsymbol{0}: \ \operatorname{Ker}(z_{\boldsymbol{V}}) = \operatorname{Ln}(\{\|\operatorname{proj}_{\langle \boldsymbol{K},\boldsymbol{L}\rangle^\perp}\boldsymbol{V}\|^2\boldsymbol{V} + \operatorname{proj}_{\langle \boldsymbol{K},\boldsymbol{L}\rangle^\perp}\boldsymbol{V}\}), \\ = \boldsymbol{0}: \ \operatorname{Ker}(z_{\boldsymbol{V}}) = \operatorname{Ln}(\{\boldsymbol{V}\})^\perp, \end{cases} \tag{3.16}$$

kde $\operatorname{proj}_{\langle \boldsymbol{K},\boldsymbol{L}\rangle^\perp}\boldsymbol{V}$ značí ortogonální projekci $\boldsymbol{V}$ na $\operatorname{Ln}(\{\boldsymbol{K},\boldsymbol{L}\})^\perp$. Zdůrazněme, že ve druhém případě na částici se speciální 4-rychlostí $\boldsymbol{V} \in \operatorname{Ln}(\{\boldsymbol{K},\boldsymbol{L}\})$ nepůsobí žádná 4-síla při jakékoli volbě směru 4-spinu.

V obecném případě $\operatorname{Im}\Psi_2 \neq 0$ za předpokladu $\operatorname{proj}_{\langle \boldsymbol{K},\boldsymbol{L}\rangle^\perp}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$ plyne z (3.14), že 4-síla působící na částici je rovnoběžná s relativním zrychlením kongruence $\zeta_a(t)$.

Weylův skalár Ψ_2 vyčíslený v komplexní tetrádě $(\boldsymbol{K},\boldsymbol{L},\boldsymbol{M},\overline{\boldsymbol{M}})$ je úzce spjatý s invarianty Weylova tenzoru I_1 a I_2 definovanými vztahy

$$I_1 := \mathrm{C}_{(4)}({}^\flat\boldsymbol{C}, {}^\sharp\boldsymbol{C}), \tag{3.17}$$

$$I_2 := \mathrm{C}_{(4)}({}^{*\flat}\boldsymbol{C}, {}^\sharp\boldsymbol{C}), \tag{3.18}$$

kde ${}^\sharp\boldsymbol{C}(\flat\boldsymbol{X}, \flat\boldsymbol{Y}, \flat\boldsymbol{Q}, \flat\boldsymbol{Z}) := \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{C}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z})$, $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{Q} \in \mathrm{T}_p\mathcal{P}$, (${}^\sharp\boldsymbol{C}$ je úplně kontravariantní Weylův tenzor). V libovolné komplexní nulové tetrádě totiž platí, viz [10],

$$I_1 - \mathrm{i}\, I_2 = 16\big(3\,{\Psi'_2}^2 + \Psi'_0\,\Psi'_4 - 4\,\Psi'_1\,\Psi'_3\big), \tag{3.19}$$

takže v $(\boldsymbol{K},\boldsymbol{L},\boldsymbol{M},\overline{\boldsymbol{M}})$ je $I_1 - \mathrm{i}\, I_2 = 48\,{\Psi_2}^2$ a

$$I_1 = 48\ [(\operatorname{Re}\Psi_2)^2 - (\operatorname{Im}\Psi_2)^2], \quad I_2 = 96\operatorname{Re}\Psi_2\operatorname{Im}\Psi_2. \tag{3.20}$$

Je zřejmé, že

$$\operatorname{Im}\Psi_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (I_2 = 0 \,\wedge\, I_1 \geq 0)\,. \tag{3.21}$$

Dodejme, že podle [10] užitím Bianchiho identit prvního druhu a úplné bezestoposti Weylova tenzoru platí $I_2 = \mathrm{C}_{(4)}({}^{*\flat}\boldsymbol{R}, {}^\sharp\boldsymbol{R})$; $\mathrm{C}_{(4)}({}^{*\flat}\boldsymbol{R}, {}^\sharp\boldsymbol{R})$ je nazýván Chernovým-Pontryaginovým invariantem. V případě vakuového prostoročasu s nulovou kosmologickou konstantou ($\boldsymbol{R} = \boldsymbol{C}$) je navíc I_1 shodný s Kretschmannovým invariantem.

Příkladem prostoročasu typu D (tj. v každém jeho bodě je Weylův tenzor typu D), kdy je $I_2 = 0 \wedge I_1 \geq 0$ splněno globálně, uveďme Schwarzschildův prostoročas ([2],[22]), jehož metrika má ve Schwarzschildových souřadnicích (t, r, θ, ϕ), $(r > 0)$ tvar

$$\boldsymbol{g} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathbf{d}\boldsymbol{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathbf{d}\boldsymbol{r}^2 + r^2(\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\mathbf{d}\boldsymbol{\phi}^2). \tag{3.22}$$

(zde vychází $I_1 = 48M^2/r^6$). Hlavními nulovými směry odpovídajícího Riemannova tenzoru jsou

$$\boldsymbol{K} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}} + \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial r}}, \quad \boldsymbol{L} = \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}}, \tag{3.23}$$

proto pohybuje-li se v daném prostoročase částice se spinem čistě radiálně, je nezávisle na spinu působící 4-síla nulová.

Obdobným příkladem je speciální model Kasnerova anizotropního vesmíru ([2],[22]) s metriku ve tvaru $(t > 0)$

$$\boldsymbol{g} = \mathbf{d}\boldsymbol{t}^2 + t^{-2/3}\mathbf{d}\boldsymbol{x}^2 + t^{4/3}\mathbf{d}\boldsymbol{y}^2 + t^{4/3}\mathbf{d}\boldsymbol{z}^2, \tag{3.24}$$

$(I_1 = 64/(27\,t^4))$. Hlavními nulovými směry jsou

$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}} + t^{1/3}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x}}\right), \quad \boldsymbol{L} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}} - t^{1/3}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x}}\right). \tag{3.25}$$

Naproti tomu pro Kerrovo řešení (odpovídající Weylův tenzor je mimo singularitu opět globálně typu D), jehož metrikou v Boyerových-Lindquistových souřadnicích (t, r, θ, ϕ) je

$$\boldsymbol{g} = \frac{\Delta\Sigma}{\mathcal{A}}\,\mathbf{d}\boldsymbol{t}^2 + \frac{\mathcal{A}}{\Sigma}\sin^2\theta\,(\mathbf{d}\boldsymbol{\phi} - \omega\,\mathbf{d}\boldsymbol{t})^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}\,\mathbf{d}\boldsymbol{r}^2 + \Sigma\,\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}^2, \tag{3.26}$$

kde $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$ a $\mathcal{A} = \left(r^2 + a^2\right)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta$, máme $\Psi_2 = -M(r - \mathrm{i}a\cos\theta)^{-3}$ a 4-síla působící na částici může vymizet pouze na určitých nadplochách, viz např. [10].

Uvažujme dále obecnější situaci: nechť je prostoročas $\mathcal{P}$ Einsteinovým prostorem, tzn. na $\mathcal{P}$ nechť platí

$$\boldsymbol{ric} = c \cdot \boldsymbol{g}, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{3.27}$$

Protože bezestopá část Ricciho formy je nyní nulová, Riemannův tenzor má tvar

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{C} \tag{3.28}$$

a do pravé strany první Mathissonovy-Papapetrouovy rovnice (2.1) přibyde formálně další člen

$$-\frac{1}{2}\,\boldsymbol{G}(\boldsymbol{J})\boldsymbol{V} = -{}^{*}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{S})\boldsymbol{V}. \tag{3.29}$$

Jednoduchým výpočtem však ukážeme, že jeho příspěvek je nulový.
Z definice (1.32) tenzoru $\boldsymbol{G}$ je totiž

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z}) = \frac{Sc}{12}\,\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y}(\flat\boldsymbol{Q}, \flat\boldsymbol{Z}) \tag{3.30}$$

$(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \mathrm{T}_p\mathcal{P})$, takže

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{G}(*(\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y}))\boldsymbol{Z}\big) &= 2\,\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{Q}, {}^{*}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\boldsymbol{Z}\big) \\ &= Sc/12 \cdot *(\boldsymbol{X} \wedge \boldsymbol{Y})(\flat\boldsymbol{Q}, \flat\boldsymbol{Z}) \\ &= Sc/12 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Z}), \end{aligned} \tag{3.31}$$

zkráceně

$$^{*\flat}\boldsymbol{G} = \frac{Sc}{24}\,\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{3.32}$$

$^{*\flat}\boldsymbol{G}$ je tedy úplně antisymetrický a na pravé straně (2.1) se neprojeví. CBD.

Vidíme, že při Piraniho podmínce má na vývoj částice se spinem v Einsteinově prostoru vliv pouze Weylův tenzor. Pokud je $\boldsymbol{C}$ nulový na $\mathcal{P}$, což je případ prostoročasů konstantní křivosti, je světočára částice geodetikou, viz např [14].

3.2 Tulczyjewova spinová podmínka

Pravá strana první Mathissonovy-Papapetrouovy rovnice má pro Piraniho podmínku jednoduchý a snadno interpretovatelný tvar. Pro Tujczyjewovu podmínku se mírně komplikuje, obsahuje totiž současně kinematickou i dynamickou 4-rychlost. Vyjádříme-li kinetickou 4-rychlost ze vztahu (2.44), bude pravá strana sestávat ze dvou částí:

$$-\,{}^*\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S})\boldsymbol{V} = -\frac{m}{\mathcal{M}}\,{}^*\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S})\boldsymbol{U} - \frac{m}{\mathcal{M}^2}\frac{4\cdot{}^*\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S})i_{\flat\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J}}{4\mathcal{M}^2+{}^\flat\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{J})}. \tag{3.33}$$

První část svou formou odpovídá pravé straně první Mathissonovy-Papapetrouovy rovnice při Piraniho podmínce a lze pro ni použít stejný rozbor. Druhá část je korekcí „kvadratickou v křivosti“ vniklou díky odchylce kinematické 4-rychlosti od dynamické 4-rychlosti částice úměrné $i_{\flat\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J}$.

Vztah kinematické a dynamické 4-rychlosti (2.44) je možno přepsat do příhodnějšího tvaru. Nejprve opět dosadíme vyjádření bivektoru spinu dle (2.34),

$$\flat\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J})\boldsymbol{P} = 2\cdot\flat{}^*\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S})\boldsymbol{P} = -2\cdot i_{\boldsymbol{P}}{}^{*\flat}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S}). \tag{3.34}$$

Dále podle (1.19) vložíme jednotkový operátor $(-*^2) : \Lambda^2\mathrm{T}_{\gamma(t)}\mathcal{P} \to \Lambda^2\mathrm{T}_{\gamma(t)}\mathcal{P}$ a obdobně jako výše označíme ${}^\flat\boldsymbol{R}^*$ pravý Hodgeův duál (úplně kovariantního) Riemannova tenzoru,

$$\flat\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J})\boldsymbol{P} = -2\cdot i_{\boldsymbol{P}}{}^{*\flat}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S}) = 2\cdot i_{\boldsymbol{P}}{}^{*\flat}\boldsymbol{R}^{**}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S}) \overset{\text{ozn.}}{=} 2\cdot i_{\boldsymbol{P}}*\boldsymbol{\alpha}. \tag{3.35}$$

(Použili jsme označení ${}^{*\flat}\boldsymbol{R}^*(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}|_{\gamma(\tau)} \in \Lambda^2\mathrm{T}^*_{\gamma(\tau)}\mathcal{P}$, pro přehlednější zápis v následujícím textu.) Konečně dosadíme-li získaný výraz do $i_{\flat\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J}$, můžeme opět díky (2.34) postupně upravovat ($\boldsymbol{\eta}\in\mathrm{T}^*_{\gamma(\tau)}\mathcal{P}$):

$$\begin{aligned} i_{\boldsymbol{\eta}}\, i_{\flat\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J} &\equiv 2\,\boldsymbol{J}(i_{\boldsymbol{P}}*\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta}) = 2*(\boldsymbol{U}\wedge\boldsymbol{S})(i_{\boldsymbol{P}}*\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta}) \\ &= -1/2\,\big\langle(\sharp\boldsymbol{\varepsilon})(\flat\boldsymbol{U}\wedge\flat\boldsymbol{S},\boldsymbol{\eta},\,\cdot\,),\,\boldsymbol{\varepsilon}(\sharp\alpha,\boldsymbol{P},\,\cdot\,)\big\rangle, \end{aligned} \tag{3.36}$$

a použijeme-li vlastnosti Levi-Civitova tenzoru (1.20), dostáváme

$$\begin{aligned} & i_{\boldsymbol{\eta}}\, i_{\flat\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J} = \\ &= 3!\,\mathcal{A}^{[3]}\big(\flat\boldsymbol{U}\otimes\flat\boldsymbol{S}\otimes\boldsymbol{\eta}\big)(\sharp\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{P}) = -\flat\boldsymbol{U}\wedge\flat\boldsymbol{S}\wedge\boldsymbol{\eta}\,(\sharp\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{P}) \\ &= 2\,\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S})\,\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{P}) - 2\,\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{U},\sharp\boldsymbol{\eta})\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{P}) + 2\,\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{S},\sharp\boldsymbol{\eta})\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{P}) \\ &= 2\,\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S})\,\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{P}) + 2\,\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{S},\sharp\boldsymbol{\eta})\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{P}). \end{aligned} \tag{3.37}$$

Protože jsme $\boldsymbol{\eta}$ volili libovolně, můžeme výsledek zapsat ve formě

$$i_{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}}{}^\flat\boldsymbol{J} = 2\mathcal{M}\,{}^{*\flat}\boldsymbol{R}^*(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S},\boldsymbol{U},\boldsymbol{S})\,\boldsymbol{U} - 2\mathcal{M}\,i_{\boldsymbol{S}}{}^{*\flat}\boldsymbol{R}^*(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S}). \tag{3.38}$$

Označíme-li ${}^*\boldsymbol{R}^*(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S})$ operátor na $\mathrm{T}_{\gamma(\tau)}$, $\boldsymbol{X}\mapsto\sharp{}^{*\flat}\boldsymbol{R}^*(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S},\,\cdot\,,\boldsymbol{X})$, a symbolem $\hat{\boldsymbol{1}}$ jednotkový operátor na $\mathrm{T}_{\gamma(\tau)}\mathcal{P}$, můžeme psát rovněž

$$\begin{aligned} i_{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}}{}^\flat\boldsymbol{J} &= 2\mathcal{M}\big[\boldsymbol{g}\big(\boldsymbol{U},{}^*\boldsymbol{R}^*(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S})\boldsymbol{S}\big)\,\boldsymbol{U} + {}^*\boldsymbol{R}^*(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S})\boldsymbol{S}\big] \\ &= 2\mathcal{M}(\hat{\boldsymbol{1}}+\boldsymbol{U}\otimes\flat\boldsymbol{U})\llcorner{}^*\boldsymbol{R}^*(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S})\boldsymbol{S} \\ &= 2\mathcal{M}\cdot\mathrm{proj}_{\langle\boldsymbol{U}\rangle^\perp}{}^*\boldsymbol{R}^*(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S})\boldsymbol{S} \qquad (3.39) \\ &= 2\mathcal{M}\cdot\mathrm{proj}_{\langle\boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp}{}^*\boldsymbol{R}^*(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S})\boldsymbol{S}. \qquad (3.40) \end{aligned}$$

Zde $\mathrm{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp}$ má význam projektoru na podprostor kolmý k $\boldsymbol{U}$ a $\boldsymbol{S}$. V posledním kroku jsme mohli přidat projektor na podprostor kolmý k $\boldsymbol{S}$ díky symetrii Riemannova tenzoru. Vztah (2.44) udávající závislost mezi kinematickou a dynamickou rychlostí částice získává nyní tvar

$$\boldsymbol{V} = \frac{m}{\mathcal{M}}\left(\boldsymbol{U} + \frac{1}{\mathcal{M}^2 + {}^{*\flat}\boldsymbol{R}^*(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S},\boldsymbol{U},\boldsymbol{S})}\,\mathrm{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp}{}^*\boldsymbol{R}^*(\boldsymbol{S},\boldsymbol{U})\boldsymbol{S}\right).\text{[1]} \tag{3.41}$$

Ruseho-Lanczosovou identitou ([8], str. 184) můžeme ještě přepsat ${}^*\boldsymbol{R}^*(\boldsymbol{S},\boldsymbol{U})\boldsymbol{S}$ a ${}^{*\flat}\boldsymbol{R}^*(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S},\boldsymbol{U},\boldsymbol{S})$ do podoby

$$\begin{aligned}
{}^*\boldsymbol{R}^*(\boldsymbol{S},\boldsymbol{U})\boldsymbol{S} &= -\boldsymbol{R}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{U})\boldsymbol{S} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S})\cdot\boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{U}) + \\
&\quad +\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S})\cdot\boldsymbol{S} - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S})\cdot\boldsymbol{U}, && (3.42)\\
{}^{*\flat}\boldsymbol{R}^*(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S},\boldsymbol{U},\boldsymbol{S}) &= -{}^\flat\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{S},\boldsymbol{U},\boldsymbol{S}) - \boldsymbol{s}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S})\,\boldsymbol{s}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}). && (3.43)
\end{aligned}$$

Připomeňme, že $\boldsymbol{s}$ je bezestopá část Ricciho formy a $\boldsymbol{G}$ je Einsteinův tenzor (2-forma),

$$\boldsymbol{G} := \boldsymbol{ric} - \frac{Sc}{2}\,\boldsymbol{g}. \tag{3.44}$$

Při projekci ${}^*\boldsymbol{R}^*(\boldsymbol{S},\boldsymbol{U})\boldsymbol{S}$ na $\mathrm{Ln}(\{\boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\})^\perp$ zřejmě hrají roli pouze první dva členy (3.42), takže zavedením $\widetilde{\boldsymbol{S}} := \boldsymbol{S}/\sqrt{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S})}$ obdržíme

$$\boldsymbol{V} = \frac{m}{\mathcal{M}}\Big[\boldsymbol{U} - A\cdot\mathrm{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp}\big(\boldsymbol{R}(\widetilde{\boldsymbol{S}},\boldsymbol{U})\widetilde{\boldsymbol{S}} + \boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{U})\big)\Big]. \tag{3.45}$$

A zkracuje výraz $[\mathcal{M}^2/\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}) - \boldsymbol{s}(\widetilde{\boldsymbol{S}},\widetilde{\boldsymbol{S}}) + \boldsymbol{s}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U},\widetilde{\boldsymbol{S}})\widetilde{\boldsymbol{S}})]^{-1}$. Dále, Ricciho operátor je skrze Einsteinovy rovnice jednoznačně určen tenzorem energie a hybnosti $\boldsymbol{T}$ (zde je $\boldsymbol{T}$ tenzorem typu $\binom{1}{1}$),

$$\boldsymbol{Ric} = 8\pi\left(\boldsymbol{T} - \frac{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{T})}{2}\boldsymbol{1}\right) + \Lambda\boldsymbol{1}, \tag{3.46}$$

čímž je zřejmé, že

$$\mathrm{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp}\boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{U}) = 8\pi\cdot\mathrm{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{U}). \tag{3.47}$$

Jiným, ekvivalentním tvarem (3.45) proto je

$$\boldsymbol{V} = \frac{m}{\mathcal{M}}\Big[\boldsymbol{U} - A\cdot\mathrm{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp}\big(\boldsymbol{R}(\widetilde{\boldsymbol{S}},\boldsymbol{U})\widetilde{\boldsymbol{S}} + 8\pi\,\boldsymbol{T}(\boldsymbol{U})\big)\Big] \tag{3.48}$$

a $A = [\mathcal{M}^2/\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}) - 8\pi\,{}^\flat\boldsymbol{T}_{\mathbf{bs}}(\widetilde{\boldsymbol{S}},\widetilde{\boldsymbol{S}}) + 8\pi\,{}^\flat\boldsymbol{T}_{\mathbf{bs}}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{R}(\boldsymbol{U},\widetilde{\boldsymbol{S}})\widetilde{\boldsymbol{S}})]^{-1}$; označili jsme ${}^\flat\boldsymbol{T}_{\mathbf{bs}}$ bezestopou část formy energie a hybnosti.

Odchýlení hybnosti $\boldsymbol{P} = \mathcal{M}\,\boldsymbol{U}$ od kinematické 4-rychlosti je dáno dvěma příspěvky. „Látkový“ příspěvek úměrný

$$\mathrm{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{U}),\quad \big(\mathrm{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp}\boldsymbol{Ric}(\boldsymbol{U})\big), \tag{3.49}$$

[1] Upozorněme na chybný vztah (2.8) v [17], který oproti (3.41) neobsahuje projektor na podprostor $\mathrm{Ln}(\{\boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\})^\perp$. Rozdíl mezi $\boldsymbol{V}$ a $(m/\mathcal{M})\,\boldsymbol{U}$ pak není kolmý na $\boldsymbol{U}$, což ovšem vyžaduje původní vztah (2.44) vzhledem k dodatečné Tulczyjewově podmínce. Oprava výrazu (2.8) se ale na závěrech učiněních v [17] nijak neprojeví.

je generován pro systém určený $\boldsymbol{U}$ toky energie vytvářejícími gravitační pole v rovině kolmé k $\boldsymbol{S}$. Můžeme o něm jistým způsobem uvažovat jako o „strhávání“ energie částice (zdůrazněme, že neuvažujeme žádnou přímou interakci testovací částice se zdroji gravitačního pole). Příkladem uveďme jako zdroj křivosti ideální tekutinu,

$$\boldsymbol{T} = (\rho + p)\, \boldsymbol{Q} \otimes \flat \boldsymbol{Q} + p\, \mathbf{1}, \tag{3.50}$$

kde ρ, p jsou klidová hustota a tlak, $\boldsymbol{Q}$ je 4-rychlost tekutiny. Pak

$$\operatorname{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{U}) = (\rho + p)\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{Q}) \operatorname{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp} \boldsymbol{Q}, \tag{3.51}$$

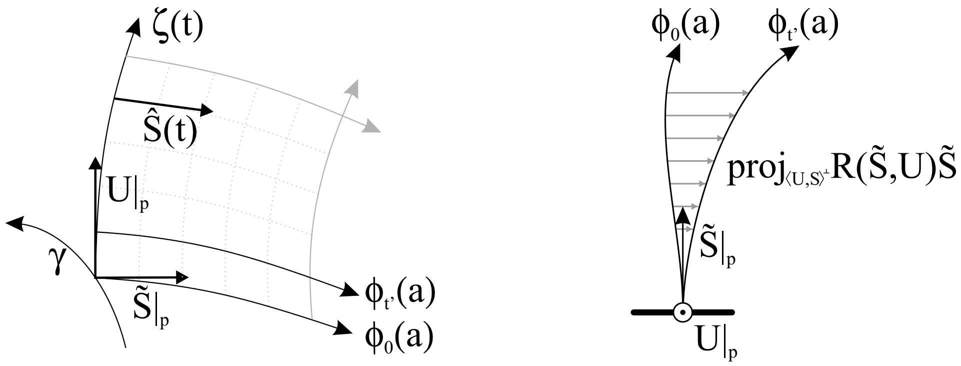
což vymizí, pokud je $\boldsymbol{Q}$ prvkem $\mathrm{Ln}(\{\boldsymbol{U}, \boldsymbol{S}\})$, tj. pokud je kapalina v klidu vůči částici nebo se vůči ní pohybuje ve směru jejího spinu. Jiným speciálním případem, kdy je tento příspěvek identicky roven nule jsou Einsteinovy prostory, (3.27), speciálně prostoročasy s konstantní křivostí (pro které vymizí i „geometrický člen“ (viz následující odstavec), a světočára částice se spinem je proto omezena pouze na geodetiky, podrobněji např. [14]).

„Geometrickým“ příspěvkem nazýváme druhý člen (3.48)

$$\operatorname{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp} \boldsymbol{R}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{U})\widetilde{\boldsymbol{S}}. \tag{3.52}$$

Pro jeho interpretaci je vhodná konstrukce podobná té, již jsme uplatnili pro vytvoření geodetické kongruence $\zeta_a(t)$ (odstavec obsahující rovnice (3.2) a (3.3)). Mějme opět v bodě $p = \gamma(t)$ částici se 4-spinem ve směru $\widetilde{\boldsymbol{S}}|_p$ a dynamickou 4-rychlostí $\boldsymbol{U}|_p$, viz Obrázek (3.2a). Ať $\zeta(t)$ je hladká křivka taková, že $\zeta(0) = p$ a $\dot{\zeta}(0) = \boldsymbol{U}|_p$; dále vytvořme $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{S}}} \in \mathcal{X}(\zeta)$, $\widehat{\boldsymbol{\mathcal{S}}}(0) = \widetilde{\boldsymbol{S}}|_p$. Každým bodem $\zeta(t)$ veďme geodetickou křivku $\phi_t(a)$, $\dot{\phi}_t(0) = \widehat{\boldsymbol{\mathcal{S}}}(t)$. I nyní pro dostatečně malé okolí bodu p jsou $\zeta_a(t) := \phi_t(a)$, (a je pevné), hladké křivky, které tvoří dvoudimenzionální plochu $\Upsilon(a, t) := \phi_t(a)$ spolu s vektorovými poli $\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial a}}$, $\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}}$:

$$\tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial a}}|_p = \widetilde{\boldsymbol{S}}|_p, \quad \tfrac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}}|_p = \boldsymbol{U}|_p. \tag{3.53}$$



(a) Konstrukce geodetické kongruence $\phi_t(a)$.

(b) Stáčení prostoru pozorovatele (pohled v „časovém“ směru)

Obrázek 3.2: K interpretaci členu $\operatorname{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp} \boldsymbol{R}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{U})\widetilde{\boldsymbol{S}}$.

Na této je v p splněna rovnice geodetické deviace (1.42) ve tvaru ($\widehat{\boldsymbol{\mathcal{U}}}(a) := \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}}|_{\phi_0(a)}$)

$$\nabla^2_{\widetilde{\boldsymbol{S}}} \widehat{\boldsymbol{\mathcal{U}}} = \boldsymbol{R}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{U})\widetilde{\boldsymbol{S}}. \tag{3.54}$$

Dále uvažujme následovně. Spojme s křivkou ζ pozorovatele. Jeho současností v čase t' je třírozměrná nadplocha v blízkém okolí $\zeta(t')$ tvořená geodetikami vycházejícími ze $\zeta(t')$ všemi prostorupodobnými směry kolmými k tečnému vektoru $\dot{\zeta}(t') = \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}}|_{\zeta(')}$, speciálně i směrem $\bar{\boldsymbol{S}}(t') := \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial a}}|_{\zeta(t')}$. Vskutku, křivky $\phi_t(a)$ pro každý čas t vyznačují část pozorovatelovy současnosti a jejich vzájemné zrychlení (3.54) vystihuje stáčení současnosti pozorovatele v průběhu jeho vývoje, viz Obrázek (3.2b). Zdůrazněme, že tento efekt není nikterak ovlivněn „změnou“ směru, ve kterém křivky ϕ_t v jednotlivých časech t vedou od pozorovatele — pole $\widehat{\boldsymbol{S}}$ podél ζ bylo voleno libovolně, pouze s podmínkou $\widehat{\boldsymbol{S}}|_p = \widetilde{\boldsymbol{S}}|_p$ (a hladkostí). Výchylka $\boldsymbol{P}$ od $\boldsymbol{V}$ je však citlivá pouze na stáčení ve směru kolmém na $\boldsymbol{U}$.

Nyní prostudujme vztah závislosti kinematické 4-rychlosti $\boldsymbol{V}$ na dynamické 4-rychlosti $\boldsymbol{U}$ důkladněji v rámci vakuových algebraicky speciálních prostoročasů. S ohledem k (3.48), resp. k vlastnosti Weylova tenzoru ${}^{*\flat}\boldsymbol{C}^{*} = -\boldsymbol{C}$ odvozené buďto obecně Ruseho-Lanczosovou identitou nebo speciálně pomocní (anti) selfduálnosti forem (1.21), se vztah (3.41) redukuje na

$$\boldsymbol{V} = \frac{m}{\mathcal{M}}\left(\boldsymbol{U} - \frac{1}{\mathcal{M}^2/S^2 - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}, \widetilde{\boldsymbol{S}})\widetilde{\boldsymbol{S}})}\operatorname{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp}\boldsymbol{C}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{U})\widetilde{\boldsymbol{S}}\right); \tag{3.55}$$

„geometrický“ člen je škálovaný rozdílem mezi podél světočáry částice konstantním poměrem kvadrátů dynamické hmotnosti a velikosti 4-spinu a $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}, \widetilde{\boldsymbol{S}})\widetilde{\boldsymbol{S}})$ — tedy *sekcionální křivostí* $\mathcal{P}$ v daném bodě ve dvojsměru $\operatorname{Ln}(\{\boldsymbol{U}, \widetilde{\boldsymbol{S}}\})$.

Nechť je Weylův tenzor $\boldsymbol{C}$ v $p \in \mathcal{P}$ algebraického typu N a vektor $\boldsymbol{K}$ je jeho čtyřnásobný hlavní nulový směr. Za předpokladu, že $\boldsymbol{g}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{K}) \neq 0$, existuje časupodobný vektor,

$$\boldsymbol{E_0} := \boldsymbol{g}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{K})^{-1}(\boldsymbol{1} - \widetilde{\boldsymbol{S}} \otimes \flat\widetilde{\boldsymbol{S}}) \llcorner \boldsymbol{K}, \tag{3.56}$$

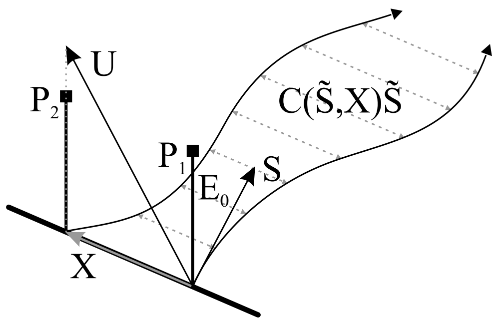
takový, že v komplexní nulové tetrádě asociované s ortonormální tetrádou $\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{E_0}, \widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{E_2}, \boldsymbol{E_3})$ má $\boldsymbol{C}$ jedinou nenulovou složku Ψ_4. $\boldsymbol{\Omega}$ je právě tím systémem, v němž se ve směru 4-spinu šíří příčné gravitační vlny. Výraz $\boldsymbol{C}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{U})\widetilde{\boldsymbol{S}}$ v něm má při volbě $\boldsymbol{U} = \sum_{i=0,2,3} U^i \boldsymbol{\Omega}_i$ složky

$$(\langle \boldsymbol{\omega}^i, \boldsymbol{C}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{\Omega}_j)\widetilde{\boldsymbol{S}}\rangle\, U^j) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\operatorname{Re}\Psi_4 & \operatorname{Im}\Psi_4 \\ 0 & 0 & \operatorname{Im}\Psi_4 & \operatorname{Re}\Psi_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U^0 \\ 0 \\ U^2 \\ U^3 \end{pmatrix}. \tag{3.57}$$

Vidíme, že výsledek závisí pouze na průmětu $\boldsymbol{U}$ do prostoru kolmého k $\boldsymbol{E_0}$. Označíme-li tento průmět $\boldsymbol{X}$, můžeme $\boldsymbol{C}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{U})\widetilde{\boldsymbol{S}}$ nahradit $\boldsymbol{C}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{X})\widetilde{\boldsymbol{S}}$. Rozšířením vektorů $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ a $\boldsymbol{X}$ na pole podél prostorupodobné geodetické kongruence procházející p s tečným vektorem $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ a separujícím vektorem $\boldsymbol{X}$ (její konstrukce by byla obdobná těm, jimiž jsme vytvořili kongruence $\zeta_a(t)$ a $\phi_t(a)$) získá úžení $\boldsymbol{C}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{X})\widetilde{\boldsymbol{S}}$ opět významu relativního zrychlení zmíněné kongruence. Ve fyzikálním smyslu pak prostorového „zhušťování“ resp. „zřeďování“ prostoru blízkých pozorovatelů P_1 a P_2, viz Obrázek (3.3), které odchyluje 4-hybnost od kinematické 4-rychlosti částice.

Pro úplnost, pokud $\boldsymbol{g}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{K}) = 0$, doplníme systém

$$\{\boldsymbol{U}, \widehat{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{1}} := -\boldsymbol{g}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{K})^{-1}\operatorname{proj}_{\langle \boldsymbol{U}\rangle^\perp}\boldsymbol{K}, \widetilde{\boldsymbol{S}}\} \tag{3.58}$$



Obrázek 3.3: „Zhušťování“ resp. „zřeďování“ současností blízkých pozorovatelů.

snadno na ortonormální bázi $\widehat{\mathbf{\Omega}} = (\boldsymbol{U}, \widehat{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{1}}, \widetilde{\boldsymbol{S}}, \widehat{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{3}})$, jejíž vlastností opět je, že se vůči ní ve směru $\widehat{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{1}}$ šíří příčná gravitační vlna a v komplexní tetrádě $\widehat{\mathbf{\Xi}} \sim \widehat{\mathbf{\Omega}}$ je nenulovou složkou $\boldsymbol{C}$ pouze Ψ_4. Přímým výpočtem pak zjistíme směrovou nezávislost „geometrického“ členu:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{U})\widetilde{\boldsymbol{S}} &= 1/2 \cdot \mathrm{Re}\,\Psi_4\,(\boldsymbol{U} + \widehat{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{1}}) = \beta/\sqrt{2} \cdot \mathrm{Re}\,\Psi_4\,\boldsymbol{K} \quad \Rightarrow \\ \mathrm{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp} \boldsymbol{C}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{U})\widetilde{\boldsymbol{S}} &= 1/2 \cdot \mathrm{Re}\,\Psi_4\,\widehat{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{1}} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}, \widetilde{\boldsymbol{S}})\widetilde{\boldsymbol{S}}) \cdot \widehat{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{1}}. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Nutno dodat, že $\mathrm{Re}\,\Psi_4$ závisí na $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ — rotací $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ v rovině $\mathrm{Ln}(\{\widetilde{\boldsymbol{S}}, \widehat{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{3}}\})$ docílíme rotace Ψ_4 v komplexní rovině, viz (1.49); existuje proto směr 4-spinu různý od směru šíření gravitačních vln, pro který je „geometrický“ člen nulový.

Poslední rovnost má pro typ N Weylova tenzoru v jistém smyslu obecnější platnost. Vzhledem k rovnicím (3.59) a (3.57) není pochyby, že

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}, \widetilde{\boldsymbol{S}})\widetilde{\boldsymbol{S}}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{g}(\widehat{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{1}}, \boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}, \widetilde{\boldsymbol{S}})\widetilde{\boldsymbol{S}}) = -\boldsymbol{g}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}, \widetilde{\boldsymbol{S}})\widetilde{\boldsymbol{S}}), \tag{3.60}$$

takže pro ortonormální bázi $\ddot{\mathbf{\Omega}} = (\boldsymbol{U}, \widehat{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{1}}, \ddot{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{i}})_{i=2}^{3}$ odpovídá složka $\boldsymbol{C}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{U})\widetilde{\boldsymbol{S}}$ vůči $\widehat{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{1}}$ vždy hodnotě sekcionální křivosti $\mathcal{P}$ v daném bodě ve dvojsměru $\mathrm{Ln}(\{\boldsymbol{U}, \widetilde{\boldsymbol{S}}\})$,

$$\mathrm{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp} \boldsymbol{C}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{U})\widetilde{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}, \widetilde{\boldsymbol{S}})\widetilde{\boldsymbol{S}}) \cdot \widehat{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{1}} + \ldots \cdot \ddot{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{2}} + \ldots \cdot \ddot{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{3}}. \tag{3.61}$$

Rozvinutím $\widetilde{\boldsymbol{S}} = \widetilde{S}^1\,\widehat{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{1}} + \widetilde{S}^2\,\ddot{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{2}} + \widetilde{S}^3\,\ddot{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{3}}$ zrekonstruujeme předešlé kompletně:

$$\begin{aligned} \widetilde{S}^i \cdot \mathrm{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp} \boldsymbol{C}(\ddot{\mathbf{\Omega}}_i, \boldsymbol{U})\ddot{\mathbf{\Omega}}_j \cdot \widetilde{S}^j &= -1/2 \begin{pmatrix} \widetilde{S}^2 & \widetilde{S}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{Re}\,\Psi_4 & \mathrm{Im}\,\Psi_4 \\ \mathrm{Im}\,\Psi_4 & \mathrm{Re}\,\Psi_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{S}^2 \\ \widetilde{S}^3 \end{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{1}} + \\ +1/2 \left(\mathrm{Im}\,\Psi_4 \cdot \widetilde{S}^3 - \mathrm{Re}\,\Psi_4 \cdot \widetilde{S}^2\right) \widetilde{S}^1 \ddot{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{2}} &+ 1/2 \left(\mathrm{Im}\,\Psi_4 \cdot \widetilde{S}^2 + \mathrm{Re}\,\Psi_4 \cdot \widetilde{S}^3\right) \widetilde{S}^1 \ddot{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{3}}. \end{aligned} \tag{3.62}$$

„Geometrický“ člen podle své definice vymizí pokud

$$\boldsymbol{C}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{U})\widetilde{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}, \widetilde{\boldsymbol{S}})\widetilde{\boldsymbol{S}}) \cdot \boldsymbol{U}, \tag{3.63}$$

pro typ N musí být navíc nulová sekcionální křivost ve dvojsměru $\mathrm{Ln}(\{\boldsymbol{U}, \widetilde{\boldsymbol{S}}\})$; dohromady tak zjišťujeme, že:

$$\boldsymbol{C}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{U})\widetilde{\boldsymbol{S}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp} \boldsymbol{C}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{U})\widetilde{\boldsymbol{S}} = 0. \tag{3.64}$$

Bez důkazu, který je ovšem snadno vykonatelný pomocí (3.62) a (3.6), uveďme ještě, že

$$^{*}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}, \widetilde{\boldsymbol{S}})\boldsymbol{U} = \alpha\widetilde{\boldsymbol{S}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp} \boldsymbol{C}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{U})\widetilde{\boldsymbol{S}} = 0, \tag{3.65}$$

kde

$$\alpha \begin{cases} = 0, \text{ pokud } \ \widetilde{\boldsymbol{S}} \in \mathrm{Ln}(\{\boldsymbol{V}, \boldsymbol{K}\}), \\ \neq 0, \text{ pokud } \widetilde{\boldsymbol{S}} \in \mathrm{Ln}(\{\boldsymbol{V}, \boldsymbol{K}\})^{\perp}. \end{cases} \tag{3.66}$$

($\boldsymbol{K}$ je stále čtyřnásobný hlavní nulový směr $\boldsymbol{C}$). Explicitně zdůrazněme, že $\widehat{\boldsymbol{E}}_{\mathbf{1}}$, směr šíření vln vůči systému určenému $\boldsymbol{U}$, je tím směrem 4-spinu částice s dynamickou 4-rychlostí $\boldsymbol{U}$, při kterém po částech vymizí (3.33), a tedy 4-síla působící na částici je nulová.

Algebraické typy III a D odbudeme tím, že vypíšeme pouze příspěvky Weylových skalárů Ψ_3 a Ψ_2 do $\mathrm{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp} \boldsymbol{C}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{U})\widetilde{\boldsymbol{S}}$. Totiž pokud je $\boldsymbol{K}$ hlavní nulový směr Weylova tenzoru typu III resp. D, v komplexní bázi Ξ asociované s ortonormální bází $\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{U}, -\boldsymbol{g}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{K})\mathrm{proj}_{\langle \boldsymbol{U}\rangle^\perp}\boldsymbol{K}, \boldsymbol{E}_{\mathbf{2}}, \boldsymbol{E}_{\mathbf{3}})$ přispívají do „geometrického“ členu skaláry Ψ_4 a Ψ_3, resp. Ψ_4, Ψ_3 a Ψ_2. Díky linearitě projektoru proto můžeme $\mathrm{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp} \boldsymbol{C}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{U})\widetilde{\boldsymbol{S}}$ obecně sestavit vhodným sečtením (3.62) (zde je samozřejmě potřeba nahradit bázi $\ddot{\boldsymbol{\Omega}}$ bází $\boldsymbol{\Omega}$), (3.67) a (3.68). Rozložíme-li $\widetilde{\boldsymbol{S}} = \widetilde{S}^i\,\boldsymbol{\Omega}_i$, je příspěvek Ψ_3 roven

$$\begin{aligned} \widetilde{S}^1(\mathrm{Re}\,\Psi_3 \cdot \widetilde{S}^2 - \mathrm{Im}\,\Psi_3\,\widetilde{S}^3)\boldsymbol{E}_{\mathbf{1}} + \left[\mathrm{Re}\,\Psi_3 \cdot \left(\left(\widetilde{S}^3\right)^2 - \left(\widetilde{S}^1\right)^2\right) + \mathrm{Im}\,\Psi_3 \cdot \widetilde{S}^2\widetilde{S}^3\right]\boldsymbol{E}_{\mathbf{2}} - \\ - \left[\mathrm{Im}\,\Psi_3 \cdot \left(\left(\widetilde{S}^2\right)^2 - \left(\widetilde{S}^1\right)^2\right) + \mathrm{Re}\,\Psi_3 \cdot \widetilde{S}^2\widetilde{S}^3\right]\boldsymbol{E}_{\mathbf{3}} \end{aligned} \tag{3.67}$$

a příspěvek Ψ_2 je roven

$$3 \cdot \mathrm{Im}\,\Psi_2 \cdot \widetilde{S}^1\widetilde{S}^3\boldsymbol{E}_{\mathbf{2}} - 3 \cdot \mathrm{Im}\,\Psi_2 \cdot \widetilde{S}^1\widetilde{S}^2\boldsymbol{E}_{\mathbf{3}}. \tag{3.68}$$

Všimněme si, že jsou-li $\boldsymbol{K}$ a $\boldsymbol{L}$ dva různé hlavní nulové směry $\boldsymbol{C}$ typu D a $\boldsymbol{U} \in \mathrm{Ln}(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L})$, pročež se $\mathrm{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp} \boldsymbol{C}(\widetilde{\boldsymbol{S}}, \boldsymbol{U})\widetilde{\boldsymbol{S}}$ přímo rovná (3.68), je tento „geometrický“ člen nulový pro všechny 4-spiny kolmé na význačný směr $\mathrm{proj}_{\langle \boldsymbol{U}\rangle^\perp}\boldsymbol{K}$.

Nečiní dále žádné potíže ověřit, že je-li $\boldsymbol{C}$ typu III nebo D, obrazem jádra $\mathrm{Ker}(z_{\boldsymbol{U}})$, $z_{\boldsymbol{U}} : \boldsymbol{S} \mapsto {}^*\!\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{S})\boldsymbol{U}$ při zobrazení $\boldsymbol{S} \mapsto \mathrm{proj}_{\langle \boldsymbol{U},\boldsymbol{S}\rangle^\perp} \boldsymbol{C}(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{U})\boldsymbol{S}$ je rovněž nulový vektor. Závěr je tedy stejný jako pro algebraický typ N: vymizí-li první člen vztahu (3.33) popisující 4-sílu působící na částici, je už (3.33) nulový celý.

3.3 Pohyb s $\boldsymbol{P} \parallel \boldsymbol{V}$ za Piraniho/Tulczyjewovy podmínky

Nejjednodušším a zároveň fyzikálně nejlépe interpretovatelným pohybem částice se spinem je případ, kdy splývají její kinematická a dynamická 4-rychlost. Je zřejmé, že obě dodatečné podmínky jsou v takovém případě ekvivalentní.

Aby byly $\boldsymbol{U}$ a $\boldsymbol{V}$ při Tulczyjewově podmínce kolineární podél světočáry částice γ, musí s ohledem ke vztahu (2.38) platit

$$i_{\flat \boldsymbol{R}(\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J} = 0 \quad \text{na} \quad \gamma. \tag{3.69}$$

Ukažme, že to co, je pro Tulczyjewa postačující podmínkou, je pro Piraniho podmínkou nutnou. Především, za daných předpokladů ($\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{V}$ podél γ) musí být na γ splněno

$$i_{\flat \boldsymbol{P}}\boldsymbol{J} = 0. \tag{3.70}$$

Kovariantním derivováním tohoto vztahu ve směru $\boldsymbol{V}$ a použitím obou Mathissonových-Papapetrovouvých rovnic (2.1), (2.2) získáme

$$0 = i_{\flat\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J} + i_{\flat\boldsymbol{P}}\nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{J} = i_{-1/2\cdot\flat\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J})\boldsymbol{V}}\boldsymbol{J} + i_{\flat\boldsymbol{P}}\boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{V} \\ \Rightarrow \quad i_{\flat\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}}\boldsymbol{J} = 0. \tag{3.71}$$

Popišme tedy vlastnosti trajektorie částice se 4-spinem $\boldsymbol{S}$ a hybností $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{V}$. Pro zachování kolineárnosti $\boldsymbol{P}$ a $\boldsymbol{V}$ musejí obě veličiny podléhat stejným evolučním rovnicím. Dle vztahů (3.1) a (2.18) tak musí na γ být

$$^{*}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{S})\boldsymbol{V} = -f\boldsymbol{S}, \quad f \in \mathcal{F}(\gamma). \tag{3.72}$$

Čemu je f rovno, získáme jednoduše skalárním součinem s $\boldsymbol{S}$:

$$f = -\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S},{}^{*}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{S})\boldsymbol{V})/\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{V},{}^{*}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{V},\widetilde{\boldsymbol{S}})\widetilde{\boldsymbol{S}}). \tag{3.73}$$

kde $\widetilde{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}/\sqrt{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S})}$. Mathissonova-Papapetrouvova soustava napsaná sugestivně ve tvaru

$$\frac{\mathbf{D}}{\mathrm{d}\tau}\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}(\tau)\\ \boldsymbol{S}(\tau)\end{pmatrix} = \frac{f(\tau)}{m}\begin{pmatrix}0 & 1\\ S^2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}(\tau)\\ \boldsymbol{S}(\tau)\end{pmatrix} \tag{3.74}$$

(τ je afinní parametr γ a $S^2 = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{S})$) nabízí možnost vyjádřit její řešení s počátečními podmínkami $\boldsymbol{V}(0) = \boldsymbol{V}_0$ a $\boldsymbol{S}(0) = \boldsymbol{S}_0$ ve tvaru

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}(\tau)\\ \boldsymbol{S}(\tau)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cosh A(\tau) & \sinh A(\tau)/S\\ S\cdot\sinh A(\tau) & \cosh A(\tau)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}_P(\tau)\\ \boldsymbol{S}_P(\tau)\end{pmatrix}, \tag{3.75}$$

$A(\tau) \in \mathcal{F}(\gamma)$, $\boldsymbol{V}_P, \boldsymbol{S}_P \in \mathcal{X}(\gamma)$, přičemž $\boldsymbol{V}_P(0) = \boldsymbol{V}_0$, $\boldsymbol{S}_P(0) = \boldsymbol{S}_0$ a

$$A(\tau) = \frac{S}{m}\int_0^\tau f(\widetilde{\tau})\mathrm{d}\widetilde{\tau}, \quad \nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{V}_P = 0, \quad \nabla_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{S}_P = 0. \tag{3.76}$$

4-rychlost $\boldsymbol{V}$ a 4-spin $\boldsymbol{S}$ jsou zřejmě boostem paralelně přenášených počátečních podmínek $\boldsymbol{V}_0$, $\boldsymbol{S}_0$; parametr této transformace závisí na průběhu $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{V},{}^{*}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{V},\widetilde{\boldsymbol{S}})\widetilde{\boldsymbol{S}})$ podél γ.

Může se stát, že podmínka (3.72) nepůjde v daném bodě prostoročasu splnit pro žádný 4-spin $\boldsymbol{S}$. Ve vakuovém prostoročase je však operátor $z_{\boldsymbol{V}} : \boldsymbol{X} \mapsto {}^{*}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{X})\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{X} \in \mathrm{Ln}(\{\boldsymbol{V}\})^{\perp}$, v každém bodě $\mathcal{P}$ samoadjungovaný:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Q}, z_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{X})) = \boldsymbol{g}(z_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{Q}),\boldsymbol{X}), \tag{3.77}$$

což je důsledkem standardních symetrií Weylova tenzoru (1.36) a rovnosti,

$$^{*\flat}\boldsymbol{C} = {}^{\flat}\boldsymbol{C}^{*} \tag{3.78}$$

prokazatelné Ruseho-Lanczosovou identitou [8] či přímo ze tvaru Weylova tenzoru (1.38). Operátor $z_{\boldsymbol{V}}$ má proto právě tři navzájem ortogonální vlastní vektory s reálnými vlastními čísly.

Nechť je navíc $\boldsymbol{C}$ (v $p \in \mathcal{P}$) algebraického typu N, III nebo D, pak nutné podmínky (3.71) a (3.72) nejsou na sobě navzájem nezávislé, platí totiž

$$^{*}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{S})\boldsymbol{V} = \alpha\boldsymbol{S} \;\;\Rightarrow\;\; \mathrm{proj}_{\langle\boldsymbol{V},\boldsymbol{S}\rangle^{\perp}}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{V})\boldsymbol{S} = 0. \tag{3.79}$$

Vyzdvihněme dále některá specifika pohybu typu (3.75) částice se spinem v prostoročase typu N, tj. v jehož každém bodě $p \in \mathcal{P}$ je $\boldsymbol{C}|_p$ algebraického typu N; pole $\boldsymbol{K} \in \mathcal{X}(\mathcal{P})$ je v p čtyřnásobný hlavní nulový směr $\boldsymbol{C}|_p$. Připomeňme vztah (3.65): díky němu je zřejmě vývoj částice se spinem $\boldsymbol{S}$ a 4-hybností $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{V}$ omezen tak, aby sekcionální křivost ve dvousměru $\mathrm{Ln}(\{\boldsymbol{V}, \boldsymbol{S}\})$ byla nulová. Navíc, pro 4-spin rovnoběžný se směrem šíření příčných gravitačních vln $\mathrm{proj}_{\langle \boldsymbol{V} \rangle^\perp} \boldsymbol{K}$ (vůči pozorovateli $\boldsymbol{V}$) je světočára částice vždy geodetikou.

Obecně k nalezení geodetického řešení Mathissonových-Papapetrouových rovnic s $\boldsymbol{P} \propto \boldsymbol{V}$ na vakuovém prostoročase je postačující hledat takové časupodobné geodetiky ϱ, podél nichž je Weylův tenzor rekurentní (tzn. $\nabla_{\dot{\boldsymbol{\rho}}} \boldsymbol{C} = \beta \boldsymbol{C}$, $\beta \in \mathcal{F}(\rho)$) a zvolit vhodné počáteční podmínky $\boldsymbol{P}_0 = m\boldsymbol{V}_0$, $\boldsymbol{S}_0$, tak aby ${}^*\boldsymbol{C}(\boldsymbol{V}_0, \boldsymbol{S}_0)\boldsymbol{V}_0 = 0$. Platí totiž následující tvrzení:

Jsou-li na analytické pseudo-Riemannově varietě $\rho(a)$ analytická (afinně parametrizovaná) geodetika, $\boldsymbol{S}$ vektorové pole paralelně přenášené podél ρ takové, že $({}^*\boldsymbol{C}(\dot{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{S})\dot{\boldsymbol{\rho}})|_{\rho(0)} = 0$ a Weylův tenzor splňuje: $(\nabla_{\dot{\boldsymbol{\rho}}} \boldsymbol{C})|_{\rho(0)} = \beta(0)\boldsymbol{C}|_{\rho(0)}$, $\beta \in \mathcal{F}(\rho)$, pak existuje otevřené okolí U nuly, na kterém $(\nabla_{\dot{\boldsymbol{\rho}}} \boldsymbol{C})|_{\rho(a)} = \beta(a)\boldsymbol{C}|_{\rho(a)}$ $(a \in U)$.

Pro důkaz tohoto tvrzení mějme na ρ další libovolné vektorové pole $\boldsymbol{X}$, $\nabla_{\dot{\boldsymbol{\rho}}} \boldsymbol{X} = 0$. Funkce $h(a) := \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}, {}^*\boldsymbol{C}(\dot{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{S})\dot{\boldsymbol{\rho}})|_{\rho(a)}$ musí být díky předpokladům analytická. Její derivace v $a \in \mathbb{R}$ jsou:

$$\begin{aligned} h^{(1)} &= \nabla_{\dot{\boldsymbol{\rho}}} \left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}, {}^*\boldsymbol{C}(\dot{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{S})\dot{\boldsymbol{\rho}})\right) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}, {}^*(\nabla_{\dot{\boldsymbol{\rho}}} \boldsymbol{C})(\dot{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{S})\dot{\boldsymbol{\rho}}) = \\ &= \beta\, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}, {}^*\boldsymbol{C}(\dot{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{S})\dot{\boldsymbol{\rho}}) \quad \Longrightarrow \\ h^{(i)} &\propto \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}, {}^*\boldsymbol{C}(\dot{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{S})\dot{\boldsymbol{\rho}}), \quad i \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{3.80}$$

a v $a = 0$ všechny vymizí. Z Taylorova rozvoje funkce h v nule, konvergujícího k h na U, tak vidíme, že h je identicky nulová. Protože pole $\boldsymbol{X}$ bylo voleno libovolně, musí rovněž platit $({}^*\boldsymbol{C}(\dot{\boldsymbol{\rho}}, \boldsymbol{S})\dot{\boldsymbol{\rho}})\,|_{\rho(a)} = 0$ na U. CBD.

Jako explicitní příklady uveďme třídy světočar ve Schwarzschildově (3.22) a Kasnerově (3.24) prostoročase. V prvním případě jsou těmito třídami integrální křivky polí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}^{\mathrm{Schw}}_{E;\pm} &= E\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}} \pm E\,\vartheta(r)\,\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial r}} = \\ &= \frac{E}{2}\,(1 \pm \vartheta(r))\,\boldsymbol{K} + E\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (1 \mp \vartheta(r))\,\boldsymbol{L}, \end{aligned} \tag{3.81}$$

přičemž konstanta $E > 0$,

$$\vartheta(r) = \sqrt{1 - \frac{m^2}{E^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \tag{3.82}$$

a $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$ jsou hlavními nulovými směry (3.23). Ve druhém případě jsou těmito třídami integrální křivky polí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}^{\mathrm{Kas}}_{E;\pm} &= E\,\phi(r)\,\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial t}} \pm E\,t^{2/3}\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial x}} = \\ &= 2^{-1/2}\,E\left(\phi(r) \pm t^{1/3}\right)\boldsymbol{K} + 2^{-1/2}E\left(\phi(r) \mp t^{1/3}\right)\boldsymbol{L}, \end{aligned} \tag{3.83}$$

kde opět $E > 0$, $\phi(r) = \sqrt{t^{2/3} + m^2/E^2}$ a $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$ jsou hlavní nulové směry (3.25). V obou případech je $\nabla_{\boldsymbol{V}_{E;\pm}} \boldsymbol{V}_{E;\pm} = 0$ a

$$\nabla_{\boldsymbol{V}_{E;\pm}^{\mathrm{Schw}}} \boldsymbol{C}^{\mathrm{Schw}} = \mp \frac{r}{3E\vartheta(r)} \boldsymbol{C}^{\mathrm{Schw}}, \qquad \nabla_{\boldsymbol{V}_{E;\pm}^{\mathrm{Kas}}} \boldsymbol{C}^{\mathrm{Kas}} = -\frac{t}{2E\phi(r)} \boldsymbol{C}^{\mathrm{Kas}}. \tag{3.84}$$

Jak již bylo řečeno v odstavcích obsahujících vztahy (3.22) a (3.24), oba prostoročasy jsou typu D, Chernův-Pontryaginův invariant I_2 je na nich identicky nulový a Kretschmannův invariant I_1 je vždy větší než nula. Navíc v obou těchto prostoročasech lze pole $\boldsymbol{V}_{E;\pm}$ napsat jako lineární kombinaci (nad $\mathcal{F}(\mathcal{P})$) hlavních nulových směrů. Díky (3.16) je tak ${}^{*}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{V}_{E;\pm}, \boldsymbol{S})\boldsymbol{V}_{E;\pm} = 0$ pro libovolný 4-spin $\boldsymbol{S}$.

Nakonec zmiňme geodetická řešení Mathissonových-Papapetrouových rovnic nalezená ze symetrií prostoročasu. Předpokládejme, že je $\mathcal{P}$ jednoduše souvislý, pak podle [8] (str.242) (přejímáme zde jeho značení) platí: Je-li holonomní grupa $\mathcal{P}$ typu R_1, R_4 nebo R_{13}, připouští $\mathcal{P}$ globální kovariantně konstantní časupodobné vektorové pole $\boldsymbol{\Pi}$: $\nabla\boldsymbol{\Pi} = 0$ na $\mathcal{P}$. Tato pole musejí evidentně splňovat

$$\nabla_{\boldsymbol{X}} \nabla_{\boldsymbol{Y}} \boldsymbol{\Pi} - \nabla_{\boldsymbol{Y}} \nabla_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{\Pi} - \nabla_{[\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}]} \boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\boldsymbol{\Pi} = 0 \tag{3.85}$$

pro libovolná $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in \mathcal{X}(\mathcal{P})$ a rovněž i

$${}^{*}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})\boldsymbol{\Pi} = 0. \tag{3.86}$$

Vidíme, že pro Tulczyjewovu podmínku volbou $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\Pi}/\sqrt{-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Pi})}$ díky (3.45) získáváme $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{V} = m\,\boldsymbol{\Pi}/\sqrt{-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Pi})}$ a $\nabla_{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{P} = 0$, nezávisle na 4-spinu $\boldsymbol{S}$. Pohyb částice s libovolným 4-spinem podél integrálních křivek pole $\boldsymbol{\Pi}$ tak vyhovuje Mathissonovým-Papapetrouovým rovnicím. Obdobnou úvahu můžeme opakovat i pro Piraniho spinovou podmínku, musíme ale navíc vzhledem k volnosti mezi kinematickou a dynamickou 4-rychlostí přidat počáteční podmínku $\boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{V}_0$.

Závěr

V této práci jsme studovali pohyb částice s vlastním rotačním momentem hybnosti v algebraicky speciálních prostoročasech. Soustředili jsme se především na vakuové prostoročasy s Weylovým tenzorem algebraického typu N, III a D. Nejdříve byly pro Piraniho podmínku rozebrány vlastnosti pravé strany první Mathissonovy-Papapetrouovy rovnice. V případě algebraického typu N bylo zjištěno, že 4-síla působící na částici je vždy kolmá na význačný směr, ve kterém se šíří gravitační vlny, a na relativní zrychlení geodetické kongruence pozorovatelů separovaných ve směru 4-spinu částice. Tato 4-síla je nulová pouze v případě, že 4-spin částice leží ve směru šíření vln. Algebraický typ III Weylova tenzoru umožňuje částici pohybovat se volně jen tehdy, leží-li její pohyb vůči význačnému pozorovateli, který vnímá čistě podélné gravitační vlny, v rovině polarizace těchto vln.

Typ D Weylova tenzoru se ukázal být v tomto ohledu výjimečný. Ve vakuovém případě tam 4-zrychlení částice může vymizet jen tehdy, pokud je Kretschmannův invariant nezáporný a jeho „duál“, Chernův-Pontryaginův invariant, nulový. Při splnění tohoto předpokladu pak dokonce existuje podprostor 4-rychlostí, při kterých je 4-zrychlení částice nulové, zcela nezávisle na jejím spinu.

Pro Tulczyjewovu podmínku se pravá strana první Mathissonovy-Papapetrouovy rovnice skládá ze dvou členů. První z nich je vizuálně podobný pravé straně při Piraniho podmínce; místo kinematických 4-rychlostí ovšem obsahuje dynamické 4-rychlosti. Druhý pak je korekcí „kvadratickou v křivosti“ a vzniká díky odchýlení 4-hybnosti částice od tečného směru k reprezentativní světočáře. Tato vlastnost 4-hybnosti byla proto podrobena bližšímu zkoumání. Obecně jsme zjistili, že vymizení prvního členu implikuje vymizení i členu druhého. Nejpřímočařejší výsledky pak byly získány pro algebraický typ N, pro který můžeme důvody odchylky 4-hybnosti hledat v nehomogenitě současností blízkých pozorovatelů, vůči nimž se ve směru spinu šíří rovinná gravitační vlna.

Nakonec byla věnována pozornost výjimečnému typu pohybu, při kterém jsou Piraniho a Tulczyjewova podmínka ekvivalentní. K tomuto dochází, je-li 4-hybnost stále tečná ke světočáře částice. Ukázalo se, že v takovém případě jsou 4-hybnost a 4-spin dány boostem svých po světočáře paralelně přenášených počátečních hodnot. Pro algebraický typ N je podél celé světočáry sekcionální křivost ve dvousměru určeném 4-hybností a 4-spinem nulová. Zvláštní místo zde zaujaly geodetické pohyby – byla stanovena postačující podmínka, která mezi všemi možnými geodetickými křivkami vybere ty, po kterých je možný pohyb částice se spinem.

Dodejme, že téma pohybu částic se spinem v algebraicky speciálních prostoročasech zpracovává rovněž článek [2]. Na rozdíl od této práce jsou tam ovšem předmětem zájmu *nehmotné* částice. Jak je v tom případě obvyklé, jejich pohyb se studuje za Piraniho dodatečné spinové podmínky. Ve zmíněném článku je 4-rychlost částic volena speciálně ve směru hlavního nulového pole Weylova tenzoru; nutně proto musí být i 4-spin nulový – vzpomeňme na vztah (2.11). Tím dochází k významné redukci soustavy Mathissonových-Papapetrouových rovnic (2.1), (2.2) a lze pak najít i její analytické řešení pro obecný algebraicky speciální prostoročas. Je tak učiněno za pomoci Newmanových-Penroseových spinových koeficientů (viz např. [22]).

Literatura

[1] Beiglböck W., The center-of-mass in Einstein's theory of gravitation, *Commun. Math. Phys.* 1967, roč: **5**, s. 106-130.

[2] Bini D., Cherubini C., Geralico A. a Jantzen R. T., Massless spinning test particles in algebraically special vacuum spacetimes. *Int. J. Mod. Phys. D.* 2006, roč. **15**, s. 737–758. DOI: 10.1142/S0218271806008498.

[3] Dixon W. G., A covariant multipole formalism for extended test bodies in general relativity. *Il Nuovo Cim.* 1964, roč. **34**, s. 317–339.
DOI: 10.1007/BF02734579.

[4] Dixon W. G., Dynamics of Extended Bodies in General Relativity. I. Momentum and Angular Momentum, *Proc. Roy. Soc. London A*, 1970, roč. **314**, s. 499–527. DOI: 10.1098/rspa.1970.0020.

Dynamics of Extended Bodies in General Relativity. II. Moments of the Charge-Current Vector, *Proc. Roy. Soc. London A*, 1970, roč. **319**, s. 509–547. DOI: 10.1098/rspa.1970.0191.

The definition of multipole moments for extended bodies, *Gen. Rel. Grav.* 1973, roč. **4**, s. 199–209. DOI: 10.1007/BF02412488.

Dynamics of Extended Bodies in General Relativity. III. Equations of Motion, *Philos. Trans. Roy. Soc. London A*, 1974, roč. **277**, s. 59–119.
DOI: 10.1098/rsta.1974.0046 .

[5] Dixon W. G., Extended bodies in general relativity; their description and motion, in *Isolated Gravitational Systems in General Relativity*, Proc. Int. School of Physics "E. Fermi"(Course LXVII), ed. J. Ehlers (Soc. Ital. di Fisica, Bologna 1979) s. 156–219.

[6] Ehlers J. a Rudolph E., Dynamics of extended bodies in general relativity: center-of-mass description and quasirigidity, *Gen. Rel. Grav.* 1977, roč. **8**, s. 197-217. DOI: 10.1007/BF00763547.

[7] Fecko M., *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists.* Leiden: Cambridge Univ. Press, 2006. ISBN 978-051-1245-213.

[8] Hall G. S., *Symmetries and curvature structure in general relativity.* World Sci. Lect. Notes Phys. 2004. ISBN 98-102-1051-5.

[9] Chandrasekhar S., *The mathematical theory of black holes.* New York: Oxford Univ. Press, 1983. ISBN 01-985-1291-0

[10] Cherubini C., Bini D., Capozziello S. a Ruffini R., Second Order Scalar Invariants of the Riemann Tensor: Applications to Black Hole Spacetimes. *Int. J. Mod. Phys. D.* 2003, roč. **11**, s. 827–841.
DOI: 10.1142/S0218271802002037.

[11] Madore J., The Equations of Motion of an Extended Body in General Relativity, *Ann. Inst. Henri Poincaré.* 1969, roč: **11**, s. 221-237.

[12] Mathisson M., Neue Mechanik materieller systemes, *Acta Phys. Polon.* 1937, roč. **6**, s. 163–200.

[13] Kyrian K. a Semerák O., Spinning test particles in a Kerr field — II, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2007, roč. **382**, s. 1922–1932
DOI: 10.1111/j.1365-2966.2007.12502.x

[14] Obukhov Y. N. a Puetzfeld D., Dynamics of test bodies with spin in de Sitter spacetime. *Phys. Rev. D.* 2011, roč. **83**, 044024.
DOI: 10.1103/PhysRevD.83.044024.

[15] Papapetrou A., Spinning Test-Particles in General Relativity. I, *Proc. Roy. Soc. London A.* roč. **209**, s. 248–258. DOI: 10.1098/rspa.1951.0200.

[16] Podolský J. a Švarc R., Interpreting spacetimes of any dimension using geodesic deviation. *Phys. Rev. D.* 2012, roč. **85**, 044057.
DOI: 10.1103/PhysRevD.85.044057.

[17] Rüdiger R., Conserved Quantities of Spinning Test Particles in General Relativity. I, *Proc. Roy. Soc. London A.* 1981, roč. **375**, s. 185–193.
DOI: 10.1098/rspa.1981.0046.

[18] Semerák O., Spinning test particles in a Kerr field - I, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 1999, roč. **308**, s. 863–875. DOI: 10.1046/j.1365-8711.1999.02754.x.

[19] Schattner R., The center of mass in general relativity, *Gen. Rel. Grav.* 1979, roč: **10**, s. 377-393. DOI: 10.1007/BF00760221;
The uniqueness of the center of mass in general relativity, *Gen. Rel. Grav.* 1979, roč. **10**, s. 395-399. DOI: 10.1007/BF00760222.

[20] Shanmugadhasan S. a Dirac P. A. M., On Mathisson's variational equation of relativistic dynamics, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1946, roč. **42**, s. 54-61.
DOI: 10.1017/S0305004100022738;

On the theory of spinning particles, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1947, roč. **43**, s. 106-117. DOI: 10.1017/S0305004100023240.

[21] Steihoff J. a Puetzfeld D., Multipolar equations of motion for extended test bodies in general relativity, *Phys. Rev. D*, 2010, roč. **81** (2010), 044019.
DOI: 10.1103/PhysRevD.81.044019.

[22] Stephani H., *Exact solutions of Einstein's field equations.* 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 2003, **19**, ISBN 05-214-6136-7.

[23] Tulczyjew W., Motion of multipole particles in general relativity theory, *Acta Phys. Polon.* 1959, roč. **18**, s. 393–409.