

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCE



Adam Kosík

### Interakce proudící tekutiny a elastického tělesa

Katedra numerické matematiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc., dr. h. c.

Studijní program: Matematika, obor numerická a výpočtová matematika

2010

Rád bych srdečně poděkoval především vedoucímu práce panu prof. RNDr. Miloslavu Feistauerovi, DrSc., dr. h. c., který mi byl vždy ochoten pomoci a dobře poradit. Také bych rád poděkoval za cenné rady Ing. Jaromíru Horáčkovi, DrSc. a doc. RNDr. Petru Sváčkovi, Ph.D., který mi navíc poskytl jeho program FEMFLUID. Z ostatních bych rád zmínil prof. Ing. Miloslava Okrouhlíka, CSc., Jakuba Malého a Petra Šimánka. Konečně velké poděkování patří mým rodičům a mým blízkým, kteří mě podporovali.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne

Adam Kosík

# Obsah

Úvod	6
<b>1 Rovnice popisující proudění tekutiny v časově závislé oblasti</b>	<b>8</b>
1.1 Rovnice popisující proudění tekutiny	8
1.1.1 Popis proudění	9
1.1.2 Zákony zachování	9
1.2 ALE metoda	14
1.2.1 ALE zobrazení	14
1.2.2 Rovnice popisující proudění tekutiny v ALE tvaru	15
1.3 Zjednodušený model pro dvourozměrné vazké nestlačitelné proudění	17
1.3.1 Model pro vazké nestlačitelné proudění tekutiny	17
1.3.2 Počáteční a okrajové podmínky	18
1.4 Diskretizace problému proudění tekutiny v časově závislé oblasti	20
1.4.1 Diskretizace v čase	20
1.4.2 Diskretizace v prostoru	22
1.4.3 Stabilizace metody konečných prvků	24
<b>2 Rovnice elastického tělesa</b>	<b>27</b>
2.1 Statické rovnice elastického tělesa	27
2.1.1 Tenzor napětí, rovnice rovnováhy	27
2.1.2 Tenzor deformace	28
2.1.3 Zobecněný Hookeův zákon	30
2.1.4 Formulace okrajových úloh teorie pružnosti	31
2.2 Dynamická úloha pružnosti	33
2.2.1 Dynamické rovnice izotropního elastického tělesa	33
2.2.2 Řešení dynamického problému pružnosti	34
<b>3 Diskretizace dynamické úlohy pružnosti</b>	<b>38</b>
3.1 Diskretizace problému v prostoru	39
3.2 Diskretizace problému v čase	46
3.2.1 Newmarkova metoda	46
3.2.2 Numerické řešení počáteční úlohy	47
3.3 Interakce proudící tekutiny a elastického tělesa	49

<b>4</b>	<b>Numerické experimenty</b>	<b>51</b>
4.1	Implementace . . . . .	52
4.1.1	Generování sítí . . . . .	52
4.1.2	Program pro řešení problému deformace elastického tělesa . . . . .	53
4.1.3	Tahová a tlaková zkouška . . . . .	55
4.1.4	Model hlasivky . . . . .	56
4.2	Modální analýza a Fourierova transformace . . . . .	61
4.2.1	Modální analýza . . . . .	61
4.2.2	Fourierova transformace . . . . .	63
4.3	Příklad interakce proudící tekutiny a elastického tělesa . . . . .	68
	<b>Závěr</b>	<b>71</b>
	<b>Literatura</b>	<b>72</b>

Název práce: Interakce proudící tekutiny a elastického tělesa

Autor: Adam Kosík

Katedra: Katedra numerické matematiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc., dr. h. c.

e-mail vedoucího: feist@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci se zabýváme numerickou simulací interakce mezi proudící tekutinou a elastickým tělesem. Jedná se tedy o sdružený problém řešení rovnic popisujících proudění a rovnic popisujících dynamické chování elastického tělesa, které je částečně obtékáno tekutinou. Pro tyto dva systémy navrhneme vhodné přechodové podmínky. Proudění tekutiny je modelováno pomocí Navierových-Stokesových rovnic, které musí být kvůli deformaci výpočetní oblasti způsobené pohybem tělesa přeformulovány tzv. ALE metodou. Také pro pohyb elastického tělesa je vytvořen matematický model, který vychází ze zobecněného Hookeova zákona. Rovnice řešíme metodou konečných prvků. Vypracované metody testujeme na fyzikálním modelu lidských hlasivek.

Klíčová slova: interakce proudící tekutiny a elastického tělesa, Navierovy-Stokesovy rovnice, ALE metoda, dynamická úloha pružnosti, biomechanika hlasu

Title: Interaction of flow and an elastic body

Author: Adam Kosík

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc., dr. h. c.

Supervisor's e-mail address: feist@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the submitted work we are concerned with the numerical simulation of fluid flow and elastic body interaction. This is a coupled problem of the equations of two kinds, equations describing the flow and equations describing dynamical behaviour of the elastic body, which is partly surrounded by the fluid. These systems are coupled by suitable transmission conditions. The fluid flow is described by the Navier-Stokes equations, which are reformulated by the ALE method because of the deformation of the computational domain caused by the body movement. The deformation of the elastic body is described by the linear elasticity system with the generalized Hooke's law. We solve the problem by the finite element method. The developed methods are tested on the physical model of human vocal folds.

Keywords: interaction of flow and an elastic body, Navier-Stokes equations, ALE method, dynamic problem of elasticity, biomechanics of voice

# Úvod

Interakce proudící tekutiny (kapaliny nebo vzduchu) a elastického (pružného) tělesa je téma, které zasahuje do různých vědních oborů. Řadu zajímavých aplikací najdeme v technice, např. návrhy letadel, mostů nebo různých konstrukcí ve strojírenství. Velmi důležitou oblastí, ve které se setkáváme se vzájemným působením elastických těles a tekutin, je biomechanika. Aplikace v biomechanice jsou např. modelování výdutí tepny nebo zkoumání chování hlasivek a tvorby hlasu. V této práci se budeme zabývat problémem interakce elastického tělesa a proudění právě s ohledem na aplikaci při modelování hlasivek.

Přístup, který zvolíme, je takový, že budeme odděleně řešit rovnice popisující proudění tekutiny a rovnice popisující deformaci tělesa. Můžeme tak použít metody, které jsou více efektivní pro daný typ úlohy proudění resp. elasticity. V této práci se věnujeme více problému deformace elastického tělesa, jelikož jsme vyvinuli vlastní software, který byl potom zařazen jako programový modul do stávajícího programu FEMFLUID [18], který řeší problém proudění tekutiny v oblastech, které se v průběhu času mění.

V části věnované problému pružnosti jsme motivováni cílem popsat co nejlépe pohyb hlasivky jakožto elastického tělesa. Vytvoříme matematický model, který vychází z rovnic teorie elastických těles, jejímž základem jsou pojmy tenzor napětí, tenzor deformace a jejich vzájemný vztah, který popisuje Hookeův zákon. Budeme uvažovat několik zjednodušujících předpokladů, jelikož obecně lze popsat pohyb elastických těles poměrně velmi složitě. Uvažujeme např. pouze malé deformace tělesa a specifické materiálové vlastnosti. Zatímco teorií elastických těles se zabýváme obecně v třírozměrném prostoru, při samotném numerickém řešení problému se omezíme pouze na dvojrozměrný případ. Ovšem i přes tato různá zjednodušení získáme dostatečně přesnou představu o chování lidských hlasivek. Výsledný matematický model tvoří soustava parciálních diferenciálních rovnic. Tyto rovnice, doplněné okrajovými a počátečními podmínkami, nám dávají úlohu, kterou řešíme numericky. Řešení okrajové úlohy hledáme pomocí metody konečných prvků, proto definujeme pojem slabé řešení. K řešení počáteční úlohy použijeme Newmarkovu metodu pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu.

V první kapitole je podrobně popsán matematický model proudění tekutin. Tento model představuje soustava parciálních diferenciálních rovnic. Abychom zohlednili deformaci výpočetní oblasti vyplněné tekutinou, popíšeme ALE metodu a aplikujeme ji na systém

rovníc popisujících proudění. Úlohu zjednodušíme pro případ vazkého nestlačitelného proudění a provedeme diskretizaci úlohy formulované v ALE tvaru.

Teorii elastického tělesa obsahuje druhá kapitola. Nejprve se v ní věnujeme statickému popisu problému, ze kterého přejdeme k dynamické úloze pružnosti. Definujeme klasické řešení problému a odvodíme slabé řešení. V závěru této kapitoly uvedeme výsledky o existenci a jednoznačnosti řešení.

Diskretizaci úlohy pružnosti se věnujeme ve třetí kapitole. Podrobně popíšeme diskretizaci v prostoru pomocí metody konečných prvků a diskretizaci v čase pomocí Newmarkovy metody. V této kapitole také uvedeme vhodné přechodové podmínky, které nám zajistí propojení systémů proudění tekutiny a deformace elastického tělesa. Popíšeme i způsob jejich implementace.

V poslední kapitole představíme několik výsledků numerických experimentů a provedeme jejich analýzu. Nejprve je zde několik ukázek pohybu elastického tělesa bez interakce s proudící tekutinou. Na dalších obrázcích již najdeme znázorněnou interakci proudící tekutiny a elastického tělesa. Na příloženém disku se nachází tyto i jiné grafické výstupy.

# Kapitola 1

## Rovnice popisující proudění tekutiny v časově závislé oblasti

V této kapitole se věnujeme vytvoření modelu proudění tekutiny v oblasti závislé na čase. Vzhledem k uvažované deformaci výpočetní oblasti použijeme tzv. ALE metodu (z angl. the arbitrary Lagrangian-Eulerian method).

Úvodem zavedeme některá označení. Poznamenejme, že ve snaze odlišit teorii týkající se tekutin a pevného tělesa, používáme ve značení pro proudění tekutin index  $f$  (fluid, angl. tekutina) a v teorii pevných elastických těles  $b$  (body, angl. těleso).

Uvažujeme časový interval proudění  $(0, T)$ , kde  $T > 0$ . Oblast vyplněnou tekutinou označme tedy  $\Omega_t^f \subset \mathbb{R}^3$ , kde  $t$  vyjadřuje závislost oblasti na čase:

$$\Omega_t^f = \Omega^f(t), \quad t \in (0, T). \quad (1.1)$$

Funkce prostorových souřadnic a času popisující proudění jsou definovány na množině, kterou označíme  $\mathcal{M}^f$ :

$$\mathcal{M}^f = \left\{ (\mathbf{x}, t) ; \mathbf{x} \in \Omega_t^f, t \in (0, T) \right\} \subset \mathbb{R}^4. \quad (1.2)$$

Navíc předpokládáme, že  $\mathcal{M}^f$  je otevřená množina.

### 1.1 Rovnice popisující proudění tekutiny

Pro proudící tekutinu existují dva klasické popisy proudění, Lagrangeův a Eulerův. Třetí přístup je založen na kombinaci Lagrangeova a Eulerova popisu a využívá jej ALE metoda. K té se ovšem dostaneme později, nejprve představme uvedené dva klasické popisy proudění.



### 1.1.1 Popis proudění

*Lagrangeův popis* vychází z myšlenky sledovat pohyb každé jednotlivé částice tekutiny. Trajektorie částice je popsána rovnicí

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t_0; t), \quad \mathbf{X} \in \Omega_{t_0}^f. \quad (1.3)$$

$\mathbf{X}$  reprezentuje referenci částice bodem, v němž se částice nachází v čase  $t_0$ . Zobrazení  $\varphi$  určuje pozici  $\mathbf{x} \in \Omega_t^f$  této částice v čase  $t$ . Referenční čas  $t_0$  dále vynecháváme. Rychlost částice dané referenčním bodem  $\mathbf{X}$  je definována jako

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{X}, t), \quad (1.4)$$

za předpokladu, že uvedená derivace existuje.

*Eulerův popis* se soustředí na částice tekutiny, které procházejí pevným bodem výpočetní oblasti. Nezaměřujeme se tedy na konkrétní částici, ale vybereme bod výpočetní oblasti. Částice se v tomto bodě s časem mění. Eulerův popis se používá pro formulaci *zákonů zachování*, jak uvidíme dále. Rychlost částice tekutiny procházející bodem  $\mathbf{x}$  v čase  $t$  můžeme vyjádřit s použitím zobrazení  $\varphi$  definovaného v (1.3) a definice rychlosti (1.4):

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{X}, t), \quad (1.5)$$

kde  $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ . Požadujeme, aby tato funkce rychlosti splňovala následující předpoklad:

$$\mathbf{v} \in [\mathcal{C}^1(\mathcal{M}^f)]^3. \quad (1.6)$$

### 1.1.2 Zákony zachování

Následně představíme matematickou formulaci základních fyzikálních zákonů: zákona zachování hmoty, zákona zachování hybnosti, zákona zachování momentu hybnosti a zákona zachování energie, ze kterých odvodíme diferenciální rovnice dynamiky tekutin. Tyto rovnice jsou odvozeny za použití tzv. *věty o transportu*, kterou v dalším zformulujeme.

Nechť funkce  $F = F(\mathbf{x}, t) : \mathcal{M}^f \rightarrow \mathbb{R}$  je Eulerova reprezentace nějaké fyzikální veličiny. Uvažujme množinu částic vyplňující omezenou oblast  $\mathcal{V}(t) \subset \Omega_t^f$  v čase  $t$ . Označíme  $\mathcal{F}$  celkové množství veličiny dané funkcí  $F$  obsažené v objemu tekutiny  $\mathcal{V}(t)$ :

$$\mathcal{F}(t) = \int_{\mathcal{V}(t)} F(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}. \quad (1.7)$$

**Věta 1.1 (Věta o transportu)** *Nechť  $t_0 \in (0, T)$ ,  $\mathcal{V}(t_0)$  je omezená oblast a nechť  $\overline{\mathcal{V}(t_0)} \subset \Omega_{t_0}^f$ . Nechť  $\varphi$  definuje změnu oblasti  $\mathcal{V}(t_0)$  v čase a nechť je  $\varphi$  spojitě diferencovatelné vzájemně jednoznačné zobrazení oblasti  $\mathcal{V}(t_0)$  na  $\mathcal{V}(t)$  s jakobiánem  $J$ , který je spojitý, omezený a splňuje podmínku:  $J(\mathbf{X}, t) > 0$ ,  $\forall \mathbf{X} \in \mathcal{V}(t_0)$ ,  $\forall t \in (t_1, t_2)$ . Nechť  $F = F(\mathbf{x}, t)$  má spojitě a omezené derivace prvního řádu na množině  $\{(\mathbf{x}, t); t \in (t_1, t_2), \mathbf{x} \in \mathcal{V}(t)\}$ . Pak  $\forall t \in (t_1, t_2)$  existuje konečná derivace*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} F(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{V}(t)} \left( \frac{\partial F}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(F\mathbf{v})(\mathbf{x}, t) \right) d\mathbf{x}. \quad (1.8)$$

Důkaz viz [5].

*Hustota tekutiny* je funkce

$$\varrho^f : \mathcal{M}^f \rightarrow (0, +\infty), \quad (1.9)$$

pomocí které vyjádříme hmotnost  $m(\mathcal{V}(t))$  tekutiny vyplňující libovolnou oblast  $\mathcal{V}(t) \subset \Omega_t^f$ :

$$m(\mathcal{V}(t)) = \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho^f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (1.10)$$

Předpokládejme, že  $\varrho^f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}^f)$  a platí (1.6). Zákon zachování hmoty můžeme formulovat tímto způsobem: Hmotnost části tekutiny reprezentované oblastí  $\mathcal{V}(t)$  nezávisí na čase  $t$ . To znamená, že

$$\frac{dm(\mathcal{V}(t))}{dt} = 0, \quad t \in (t_1, t_2), \quad (1.11)$$

kde  $(t_1, t_2)$  je dostatečně malý časový interval a obsahuje  $t_0 \in (0, T)$ . Za použití věty o transportu (1.1) úpravou dostáváme tzv. *rovnici kontinuity*.

$$\frac{\partial \varrho^f}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho^f \mathbf{v}) = 0. \quad (1.12)$$

*Pohybové rovnice* jsou odvozeny ze zákona zachování hybnosti, který formulujeme takto: Okamžitá změna celkové hybnosti objemu tekutiny tvořeného stejnými částicemi v každém časovém okamžiku a vyplňujícího v čase  $t$  oblast  $\mathcal{V}(t)$  je rovna síle působící na  $\mathcal{V}(t)$ .

Nechť  $\varrho^f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}^f)$  a (1.6). Celková hybnost objemu tekutiny  $\mathcal{V}(t)$  je dána jako

$$\mathcal{H}(\mathcal{V}(t)) = \int_{\mathcal{V}(t)} \varrho^f(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (1.13)$$

Označíme-li  $\mathcal{F}(\mathcal{V}(t))$  sílu působící na objem  $\mathcal{V}(t)$ , lze zákon zachování hybnosti zapsat ve tvaru

$$\frac{d\mathcal{H}(\mathcal{V}(t))}{dt} = \mathcal{F}(\mathcal{V}(t)), \quad t \in (t_1, t_2). \quad (1.14)$$

Síly v tekutinách dělíme na objemové a plošné. Objemová síla je vyjádřena svou hustotou  $\mathbf{f} \in \mathcal{C}(\mathcal{M}^f)^3$ , plošná síla tenzorem napětí  $\mathcal{T}^f = (\tau_{ji}^f)_{i,j=1}^3$ ,  $\tau_{ji}^f = \tau_{ji}^f(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}^f)$ . Podrobněji o těchto silách opět v [5], kde najdeme také odvození pohybových rovnic obecné

tekutiny za použití věty o transportu (1.1), hustoty objemových sil  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  a tenzoru napětí plošných  $\mathcal{T}^f = \left(\tau_{ij}^f\right)_{i,j=1}^3$  sil ve tvaru:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho^f v_i) + \operatorname{div}(\varrho^f v_i \mathbf{v}) = \varrho^f f_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ji}^f}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.15)$$

Tyto rovnice můžeme zapsat také takto:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho^f \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\varrho^f \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \varrho^f \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathcal{T}^f, \quad (1.16)$$

kde  $\otimes$  označuje tenzorový součin a

$$\operatorname{div}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i b_1), \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i b_2), \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i b_3) \right)^T. \quad (1.17)$$

V [5] najdeme důkaz následujícího důležitého výsledku: Zákon zachování momentu hybnosti platí právě tehdy, když je tenzor napětí  $\mathcal{T}^f$  symetrický.

Vztahy mezi tenzorem napětí a ostatními veličinami popisujícími proudění tekutin popisují tzv. *reologické rovnice*. Tlak  $p$  a vazká část tenzoru napětí  $\tilde{\mathcal{T}}^f$  charakterizují tenzor napětí vazké tekutiny:

$$\mathcal{T}^f = -p\mathbb{I} + \tilde{\mathcal{T}}^f, \quad (1.18)$$

kde  $\mathbb{I}$  je jednotkový tenzor.

K vyjádření vazké části tenzoru napětí  $\tilde{\mathcal{T}}^f$  používáme *Stokesovy postuláty*, které najdeme v [5]. Z nich plyne, že tenzor napětí má následující tvar

$$\mathcal{T}^f = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v})\mathbb{I} + 2\mu \mathbb{D}(\mathbf{v}), \quad (1.19)$$

kde  $\lambda$  a  $\mu$  jsou konstanty nebo skalární funkce termodynamických veličin.  $\mathbb{D}(\mathbf{v})$  je tenzor rychlosti deformace

$$\mathbb{D}(\mathbf{v}) = (d_{ij})_{i,j=1}^3, \quad d_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.20)$$

Pokud tenzor napětí závisí lineárně na tenzoru rychlosti deformace  $\mathbb{D}$  jako v (1.19), pak mluvíme o *newtonské tekutině*. Předpokládejme, že  $\varrho^f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}^f)$ ,  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \in [\mathcal{C}(\mathcal{M})]^3$  a  $\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_i \partial x_j} \in [\mathcal{C}(\mathcal{M})]^3$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Dosazením rovnice (1.19) do rovnice (1.16) dostaneme tzv. *Navierovy-Stokesovy rovnice*:

$$\frac{\partial(\varrho^f \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho^f \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \varrho^f \mathbf{f} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}). \quad (1.21)$$

Nyní k rovnici kontinuity a Navierovým-Stokesovým rovnicím přidáme *rovnici energie*,

kteřou získáme ze zákona zachování energie, který formulujeme takto: Okamžitá změna celkové energie objemu tekutiny tvořené v každém časovém okamžiku týmiž částicemi a vyplňujícího objem  $\mathcal{V}(t)$  v čase  $t$  je rovna součtu výkonu objemových a povrchových sil a množství tepla dodaného systému. Definujeme celkovou energii

$$E = \varrho^f (e + |\mathbf{v}|^2 / 2), \quad (1.22)$$

kde  $e$  je specifická vnitřní energie. Rovnice energie má tvar

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} (E\mathbf{v}) = \varrho^f \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \operatorname{div} (\mathcal{T}^f \mathbf{v}) + \varrho^f q - \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (1.23)$$

Pro *newtonskou tekutinu* je pak ve tvaru

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} (E\mathbf{v}) = \varrho^f \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \operatorname{div} (p\mathbf{v}) + \operatorname{div} (\lambda \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v}) + \operatorname{div} (2\mu \mathbb{D}(\mathbf{v})\mathbf{v}) + \varrho^f q - \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (1.24)$$

Veličina  $q$  reprezentuje hustotu tepelných zdrojů a  $\mathbf{q}$  je tepelný tok, který závisí na absolutní teplotě  $\theta$  dle Fourierova zákona:

$$\mathbf{q} = -k \nabla \theta, \quad (1.25)$$

kde  $k > 0$  je koeficient tepelné vodivosti.

Abychom doplnili systém rovnic popisující proudění tekutin, musíme přidat další termodynamické vztahy pro *stavové veličiny*: absolutní teplotu, hustotu a tlak. Uvažujeme tzv. *dokonalý plyn* jehož stavové veličiny splňují stavovou rovnici ve tvaru

$$p = R\theta\varrho^f. \quad (1.26)$$

$R$  je *plynová konstanta*, kterou lze vyjádřit ve tvaru

$$R = c_p - c_v, \quad (1.27)$$

kde  $c_p$  označuje specifické teplo při konstantním tlaku a  $c_v$  specifické teplo při konstantním objemu. Experimenty ukazují, že  $c_p > c_v$  a dále že  $c_p$  a  $c_v$  jsou konstanty pro relativně velký rozsah teplot. Veličina

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1 \quad (1.28)$$

se nazývá Poissonova adiabatická konstanta (pro vzduch  $\gamma = 1.4$ ). Vnitřní energie pro dokonalý plyn je

$$e = c_v \theta. \quad (1.29)$$

Kompletní systém rovnic popisujících proudění tekutiny je složen z rovnic (1.12), (1.21), (1.24), (1.26) a (1.29). Poslední dvě rovnice upravíme ze vztahů (1.22), (1.27) a (1.28). Výsledný tvar vypadá takto:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varrho^f}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho^f \mathbf{v}) &= 0, \\
\frac{\partial(\varrho^f \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho^f \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) &= \varrho^f \mathbf{f} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}), \\
\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(E \mathbf{v}) &= \varrho^f \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \operatorname{div}(p \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\lambda \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v}) \\
&\quad + \operatorname{div}(2\mu \mathbb{D}(\mathbf{v})) + \varrho^f q - \operatorname{div} \mathbf{q}, \\
p &= (\gamma - 1) \left( E - \frac{1}{2} \varrho^f |\mathbf{v}|^2 \right), \\
\theta &= \left( \frac{E}{\varrho^f} - \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) / c_v.
\end{aligned}$$

## 1.2 ALE metoda

System rovnic popisující proudění tekutiny, který jsme odvodili v předchozí části není vhodný, když předpokládáme pohyblivé hranice oblasti, což je náš případ. K řešení proudění v oblasti závislé na čase můžeme použít ALE metodu (angl. the arbitrary Lagrangian - Eulerian method). Tato metoda je založena na zobrazení  $\mathcal{A}_t$  vhodně vybrané oblasti  $\Omega_{ref} \subset \mathbb{R}^3$ , kterou budeme nazývat *referenční oblast*, na výpočetní oblast  $\Omega_t^f \subset \mathbb{R}^3$  v čase  $t$ .

### 1.2.1 ALE zobrazení

Mějme tedy množinu difeomorfních zobrazení  $\mathcal{A}_t$  pro  $t \in [0, T]$ :

$$\mathcal{A}_t : \overline{\Omega}_{ref} \subset \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{na}} \overline{\Omega}_t^f \subset \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathcal{A}_t(\mathbf{X}) \in \overline{\Omega}_t^f, \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}_{ref}. \quad (1.30)$$

Dále budeme předpokládat, že zobrazení  $\mathcal{A}_t$  splňuje následující dvě podmínky pro všechna  $t \in [0, T]$

$$\frac{\partial \mathcal{A}_t}{\partial t} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}_{ref}), \quad (1.31a)$$

$$\mathcal{A}_t(\partial\Omega_{ref}) = \partial\Omega_t. \quad (1.31b)$$

Takovéto zobrazení  $\mathcal{A}_t$  nazýváme *ALE zobrazením*. Je důležité poznamenat, že ALE zobrazení nevyjadřuje skutečný pohyb tekutiny jako u Lagrangeova popisu, pouze odpovídá změně výpočetní oblasti, viz obr. 1.1.

Na základě ALE zobrazení můžeme vyjádřit rychlost deformace oblasti  $\hat{\mathbf{w}}$  pro všechny body referenční oblasti v každém časovém okamžiku:

$$\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_{ref}, \quad t \in [0, T]. \quad (1.32)$$

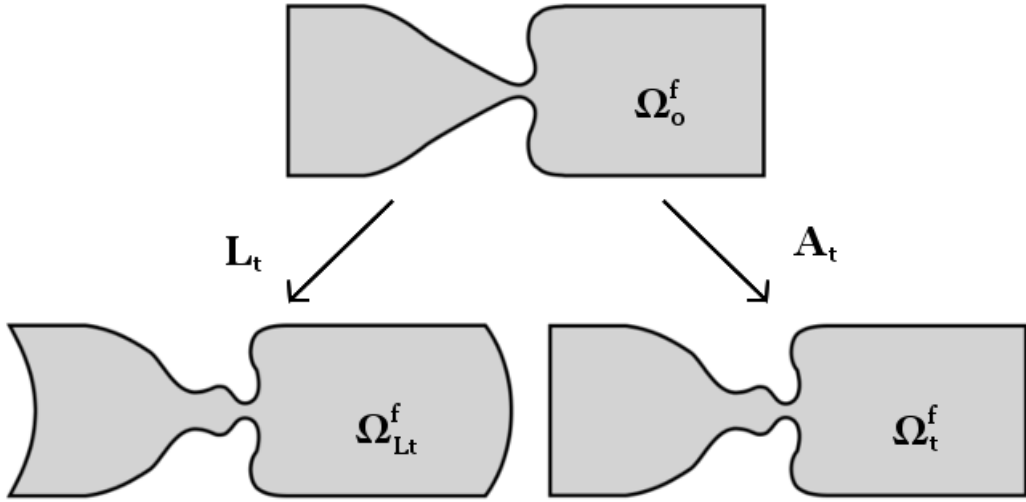
Rychlost oblasti snadno převedeme do souřadnic příslušné oblasti  $\Omega_t^f$  použitím inverzního zobrazení  $\mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x}) : \Omega_t^f \rightarrow \Omega_{ref}$ :

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{w}}(\mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x}), t) \quad \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad t \in [0, T]. \quad (1.33)$$

Abychom mohli odvodit formulaci rovnic popisujících pohyb tekutiny pomocí ALE metody zavedeme některé pojmy a tvrzení.

Definujeme *ALE trajektorii*  $T_{\mathbf{X}}$  pro každé  $\mathbf{X} \in \Omega_{ref}$  jako množinu bodů

$$T_{\mathbf{X}} = \{\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad t \in [0, T]\}. \quad (1.34)$$



Obrázek 1.1: Srovnání Lagrangeova popisu a ALE zobrazení proudění tekutiny.

Nechť je dána reálná funkce  $F : \mathcal{M}^f \rightarrow \mathbb{R}$ . Příslušnou referenční funkci na ALE referenční oblasti získáme přepisem

$$\hat{F} : \Omega_{ref} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{F}(\mathbf{X}, t) = F(\mathcal{A}_t(\mathbf{X}), t). \quad (1.35)$$

ALE derivaci funkce  $F$  definujeme jako časovou derivaci podél trajektorie  $T_{\mathbf{X}}$

$$\frac{D^A}{Dt} F(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{F}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad \mathbf{x} = \mathcal{A}_t(\mathbf{X}), \quad t \in [0, T], \quad (1.36)$$

za předpokladu, že derivace na pravé straně existuje. To znamená, že ALE derivace vyjadřuje množství změny veličiny  $F$  podél trajektorie  $T_{\mathbf{X}}$ . Použitím věty o derivaci složené funkce dostaneme

$$\frac{D^A}{Dt} F(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} F(\mathbf{x}, t) + \mathbf{w} \cdot \nabla F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad t \in [0, T]. \quad (1.37)$$

## 1.2.2 Rovnice popisující proudění tekutiny v ALE tvaru

Nyní již můžeme provést úpravy rovnic popisujících proudění tekutiny do ALE tvaru. Začneme rovnicí kontinuity, kterou jsme odvodili ve tvaru (1.12). Pomocí (1.37) ji můžeme přepsat následujícím způsobem:

$$\frac{D^A \varrho^f}{Dt} + \operatorname{div}(\varrho^f \mathbf{v}) - \mathbf{w} \cdot \nabla \varrho^f = 0. \quad (1.38)$$

Někdy se chceme zbavit členu  $(\mathbf{w} \cdot \nabla \varrho^f)$ . Jednoduchou úpravou dostaneme

$$\frac{D^A \varrho^f}{Dt} + \operatorname{div}(\varrho^f(\mathbf{v} - \mathbf{w})) + \varrho^f \operatorname{div} \mathbf{w} = 0. \quad (1.39)$$

Dále přeformulujeme Navierovy-Stokesovy rovnice (1.21) do ALE tvaru. Použijeme pohybové rovnice (1.15), abychom se vyhnuli složitějším výrazům na pravé straně. Podobně jako u odvození rovnice kontinuity v ALE tvaru je přepíšeme pomocí (1.37):

$$\frac{D^A(\varrho^f v_i)}{Dt} - \mathbf{w} \cdot \nabla(\varrho^f v_i) + \operatorname{div}(\varrho^f v_i \mathbf{v}) = \varrho^f f_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ji}^f}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.40)$$

Úpravou dostaneme:

$$\frac{D^A(\varrho^f v_i)}{Dt} + \operatorname{div}(\varrho^f v_i(\mathbf{v} - \mathbf{w})) + (\varrho^f v_i) \operatorname{div} \mathbf{w} = \varrho^f f_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ji}^f}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.41)$$

Rovnice převedeme do vektorového tvaru a pravou stranu upravíme pomocí konstitutivních vztahů podobně jako u odvození rovnic (1.21):

$$\frac{D^A(\varrho^f \mathbf{v})}{Dt} + \operatorname{div}(\varrho^f \mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{w})) + (\varrho^f \mathbf{v}) \operatorname{div} \mathbf{w} = \varrho^f \mathbf{f} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}). \quad (1.42)$$

Rovnice energie v ALE tvaru získáme opět podle stejného postupu jako u odvození rovnice kontinuity a Navierových-Stokesových rovnic v ALE tvaru. Výsledkem je rovnice

$$\begin{aligned} \frac{D^A E}{Dt} + \operatorname{div}(E(\mathbf{v} - \mathbf{w})) + E \operatorname{div} \mathbf{w} &= \varrho^f \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \operatorname{div}(p \cdot \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\lambda \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v}) + \\ &+ \operatorname{div}(2\mu \mathbb{D}(\mathbf{v})\mathbf{v}) + \varrho^f q - \operatorname{div} \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Jelikož uvažované termodynamické vztahy se nemění se změnou tvaru výpočetní oblasti, kompletní systém popisující proudění tekutiny s pomocí ALE zobrazení je tvořen rovnicemi:

$$\begin{aligned} \frac{D^A \varrho^f}{Dt} + \operatorname{div}(\varrho^f(\mathbf{v} - \mathbf{w})) + \varrho^f \operatorname{div} \mathbf{w} &= 0, \\ \frac{D^A \varrho^f \mathbf{v}}{Dt} + \operatorname{div}(\varrho^f \mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{w})) + (\varrho^f \mathbf{v}) \operatorname{div} \mathbf{w} &= \varrho^f \mathbf{f} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + (\mu + \lambda) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{v}), \\ \frac{D^A E}{Dt} + \operatorname{div}(E(\mathbf{v} - \mathbf{w})) + E \operatorname{div} \mathbf{w} &= \varrho^f \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \operatorname{div}(p \cdot \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\lambda \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v}) + \\ &+ \operatorname{div}(2\mu \mathbb{D}(\mathbf{v})\mathbf{v}) + \varrho^f q - \operatorname{div} \mathbf{q}, \\ p &= (\gamma - 1) \left( E - \frac{1}{2} \varrho^f |\mathbf{v}|^2 \right), \\ \theta &= \left( \frac{E}{\varrho^f} - \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) / c_v. \end{aligned}$$



## 1.3 Zjednodušený model pro dvourozměrné vazké nestlačitelné proudění

V této části zjednodušíme výše odvozený matematický model proudění tekutiny pomocí několika předpokladů. Nadále uvažujeme pouze případ dvourozměrného proudění. Předpokládáme tedy, že pro každé  $t \in [0, T)$  máme  $\Omega_t^f \subset \mathbb{R}^2$  a  $v_3(\mathbf{x}, t) = w_3(\mathbf{x}, t) = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega_t^f$ . Mimoto mějme  $\frac{\partial}{\partial x_3} = 0$  a všechny funkce nechť závisí pouze na  $x_1, x_2$  a  $t$ .

### 1.3.1 Model pro vazké nestlačitelné proudění tekutiny

V předcházejících částech této kapitoly jsme odvodili systém rovnic pro stlačitelné proudění tepelně vodivého dokonalého plynu ve tvaru ALE. Předpokládejme speciální případ nestlačitelného proudění se zanedbáním objemových sil  $\mathbf{f}$  a přenosu tepla. Tento model lze použít pro proudění tekutin, ale také pro proudění plynů za předpokladu, že rychlost plynu není příliš vysoká. Matematicky můžeme shrnout naše předpoklady takto:

$$\frac{\partial \varrho^f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1.44a)$$

$$\frac{\partial \varrho^f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.44b)$$

$$f_i(\mathbf{x}, t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.44c)$$

$$q(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1.44d)$$

$$(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t))_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1.44e)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega_t^f, \quad t \in (0, T).$$

Vidíme, že hustota  $\varrho^f$  je kladná konstanta. Dále již nepotřebujeme termodynamické vztahy, protože absolutní teplota je při našich úvahách nadbytečná a pro zbývající proměnné  $\mathbf{v}$  a  $p$  nám stačí Navierovy-Stokesovy rovnice spolu s rovnicí kontinuity. Obejdeme se také bez rovnice energie.

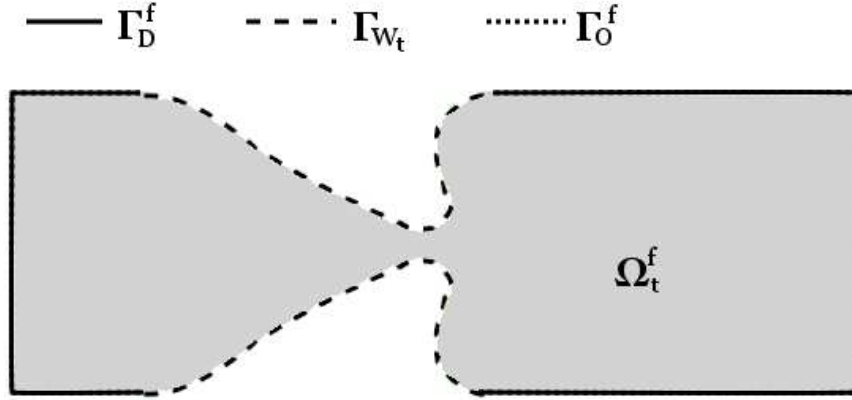
Přepíšeme rovnici (1.39), za předpokladu, že  $\varrho^f$  je kladná konstanta, do tvaru

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.45)$$

Budeme používat dále zápis divergence pomocí operátoru  $\nabla$ :  $\nabla \cdot \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ .

Stejně upravíme Navierovy-Stokesovy rovnice v ALE tvaru (1.42), pro které předpokládáme také zanedbání objemových sil:

$$\varrho^f \left( \frac{D^A \mathbf{v}}{Dt} + \operatorname{div} (\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{w})) + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{w} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + (\mu + \lambda) \nabla (\operatorname{div} \mathbf{v}). \quad (1.46)$$



Obrázek 1.2: Hranice oblasti.

Tento tvar upravíme pomocí (1.45) a získáme rovnici

$$\varrho^f \left( \frac{D^A \mathbf{v}}{Dt} + \operatorname{div} (\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{w})) + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{w} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}. \quad (1.47)$$

Můžeme psát  $\operatorname{div} (\mathbf{v} \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{w})) + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{w} = ((\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \nabla) \mathbf{v}$ . Dále místo dynamického tlaku zavedeme kinematický tlak, který budeme opět značit  $p$ . Kinematický tlak získáme podílem dynamického tlaku a hustoty tekutiny. Nahradíme také dynamický koeficient vazkosti  $\mu$  kinematickým koeficientem vazkosti  $\nu$  opět tak, že jej dělíme hustotou tekutiny. Výsledný systém rovnic popisujících vazké nestlačitelné proudění vypadá takto:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.48a)$$

$$\frac{D^A \mathbf{v}}{Dt} + ((\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{v} = 0. \quad (1.48b)$$

### 1.3.2 Počáteční a okrajové podmínky

Uvedený problém je nutné doplnit stanovením počátečních a okrajových podmínek. Počáteční podmínka předepisuje rychlost v čase  $t = 0$ :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_0^f. \quad (1.49)$$

Hranice  $\partial \Omega_t^f$  oblasti  $\Omega_t^f$  se skládá ze vzájemně disjunktních částí  $\Gamma_D^f$ ,  $\Gamma_O^f$  a  $\Gamma_{W_t}$ , na kterých jsou předepsány různé okrajové podmínky, viz obr. 1.2.

Část hranice  $\Gamma_D^f$  představuje neprostupné pevné stěny a vstup, kterým proudí tekutina do oblasti  $\Omega_t^f$ . Na této hranici předepisujeme Dirichletovu okrajovou podmínku:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_D(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D^f, \quad t \in (0, T). \quad (1.50)$$

Na části hranice  $\Gamma_O^f$  uvažujeme výstup, kde tekutina proudí ven z oblasti a máme zde tzv. "do-nothing" okrajovou podmínku

$$-(p(\mathbf{x}, t) - p_{ref})\mathbf{n}(\mathbf{x}) + \nu \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0^f, \quad t \in (0, T), \quad (1.51)$$

kde  $p_{ref}$  je daná hodnota referenčního tlaku.

Část hranice, která se pohybuje, značíme  $\Gamma_{W_i}$ . Předpokládáme, že hranice  $\Gamma_D^f$  a  $\Gamma_O^f$  jsou nezávislé na čase na rozdíl od  $\Gamma_{W_i}$ . Uvažujeme, že na této hranici odpovídá rychlost proudění tekutiny rychlosti pohybu hranice oblasti tělesa:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{W_i}, \quad t \in (0, T). \quad (1.52)$$

Poznamenejme, že explicitně nezadááme žádnou okrajovou nebo počáteční podmínku pro kinematický tlak. Jelikož Navierovy-Stokesovy rovnice zahrnují jenom jeho gradient, je tlak jednoznačně určen na základě referenčního tlaku v podmínce (1.51) na  $\Gamma_O^f$ .

## 1.4 Diskretizace problému proudění tekutiny v časově závislé oblasti

Začněme shrnutím našeho problému proudění tekutiny v časově závislé oblasti, který budeme chtít řešit pomocí numerických metod. Chceme najít  $\mathbf{v}$  a  $p$  takové, že splňují tyto rovnice

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1.53a)$$

$$\frac{D^A}{Dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + ((\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)) \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla p(\mathbf{x}, t) - \nu \Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1.53b)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega_t^f, \quad t \in (0, T),$$

kde rychlost deformace oblasti  $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$  je definována v (1.32) a ALE derivace  $\frac{D^A}{Dt}$  je definována v (1.36). Tento systém je doplněn počátečními a okrajovými podmínkami

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_0^f, \quad (1.54a)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_D(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D^f, \quad (1.54b)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{w}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{W_t}, \quad (1.54c)$$

$$-(p(\mathbf{x}, t) - p_{ref})\mathbf{n}(\mathbf{x}) + \nu \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_O^f, \quad (1.54d)$$

$$t \in (0, T),$$

kde  $\mathbf{v}_0 : \Omega_0^f \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{v}_D : \Gamma_D^f \rightarrow \mathbb{R}^2$  jsou dané funkce a  $p_{ref}$  je předepsaná hodnota referenčního tlaku.

Je několik způsobů, jak provést diskretizaci v prostoru a čase. Abychom vyvinuli stabilní a přesnou metodu, která bude snadno zacházet se složitými tvary hranice, k prostorové diskretizaci použijeme metodu konečných prvků.

### 1.4.1 Diskretizace v čase

Diskretizaci problému v čase provedeme metodou konečných diferencí. Uvažujeme dělení  $0 = t_0 < t_1 < \dots < T$ ,  $t_k = k\tau$ , s časovým krokem  $\tau > 0$ , intervalu  $[0, T]$ , aproximace přesného řešení  $\mathbf{v}(t_n) \approx \mathbf{v}^n$ ,  $p(t_n) \approx p^n$  a aproximace rychlosti deformace oblasti  $\mathbf{w}(t_n) \approx \mathbf{w}^n$ . V čase  $t_0 = 0$  použijeme počáteční podmínku (1.54a).

Nejprve aproximujme ALE derivaci rychlosti tekutiny, která je definovaná vztahy

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{v}(\mathcal{A}_t(\mathbf{X}), t), \quad \frac{D^A}{Dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} = \mathcal{A}_t^{-1}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_t^f, \quad (1.55)$$

$\mathbf{X}$  představuje bod z oblasti  $\Omega_0^f$  v čase  $t_0$ , kterou použijeme jako referenční oblast  $\Omega_{ref} = \Omega_0^f$ . Pomocí daného ALE zobrazení  $\mathcal{A}_t$  a pro dané časové okamžiky  $t_{n-1}$ ,  $t_n$  a  $t_{n+1}$  máme

$$\mathcal{A}_{t_{n-1}}(\mathbf{X}) = \mathbf{x}_{n-1}, \quad \mathcal{A}_{t_n}(\mathbf{X}) = \mathbf{x}_n, \quad \mathcal{A}_{t_{n+1}}(\mathbf{X}) = \mathbf{x}_{n+1}. \quad (1.56)$$

Nyní definujeme aproximace ALE derivace v čase  $t_{n+1}$  a v bodě  $x_{n+1}$  pomocí implicitní dvoukrokové metody zpětných diferencí druhého řádu, kterou odvodíme použitím Taylova rozvoje pro funkci  $\mathbf{F} \in (\mathcal{C}^3([t_{n-1}, t_{n+1}]))^2$ :

$$\mathbf{F}(t_n) = \mathbf{F}(t_{n+1}) - \tau \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(t_{n+1}) + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2}(t_{n+1}) + \mathcal{O}(\tau^3), \quad (1.57)$$

$$\mathbf{F}(t_{n-1}) = \mathbf{F}(t_{n+1}) - 2\tau \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(t_{n+1}) + 2\tau^2 \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2}(t_{n+1}) + \mathcal{O}(\tau^3). \quad (1.58)$$

První rovnici vynásobíme 4 a od výsledku odečteme druhou rovnici. Po úpravě dostaneme aproximaci

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(t_{n+1}) = \frac{3\mathbf{F}(t_{n+1}) - 4\mathbf{F}(t_n) + \mathbf{F}(t_{n-1})}{2\tau} + \mathcal{O}(\tau^2). \quad (1.59)$$

Poslední výraz zanedbáme, napíšeme  $\approx$  místo  $=$  a použijeme tuto aproximaci v (1.55):

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t_{n+1}) \approx \frac{3\hat{\mathbf{v}}^{n+1}(\mathbf{X}) - 4\hat{\mathbf{v}}^n(\mathbf{X}) + \hat{\mathbf{v}}^{n-1}(\mathbf{X})}{2\tau}. \quad (1.60)$$

A tedy

$$\begin{aligned} \frac{D^{\mathcal{A}}}{Dt} \mathbf{v}(\mathbf{x}_{n+1}, t_{n+1}) &\approx \frac{3\hat{\mathbf{v}}^{n+1}(\mathbf{X}) - 4\hat{\mathbf{v}}^n(\mathbf{X}) + \hat{\mathbf{v}}^{n-1}(\mathbf{X})}{2\tau} \\ &= \frac{3\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{x}_{n+1}) - 4\mathbf{v}^n(\mathbf{x}_n) + \mathbf{v}^{n-1}(\mathbf{x}_{n-1})}{2\tau}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Použitím tohoto výsledku se dostaneme k implicitnímu schématu pro neznámé funkce  $\mathbf{v}^{n+1} : \Omega_{t_{n+1}}^f \rightarrow \mathbb{R}^2$  a  $p^{n+1} : \Omega_{t_{n+1}}^f \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} &\frac{3\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{x}_{n+1}) - 4\mathbf{v}^n(\mathbf{x}_n) + \mathbf{v}^{n-1}(\mathbf{x}_{n-1})}{2\tau} + \\ &+ ((\mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{x}_{n+1}) - \mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}_{n+1})) \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{x}_{n+1}) + \end{aligned} \quad (1.62a)$$

$$+ \nabla p^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) - \nu \Delta \mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{x}_{n+1}) = 0. \quad (1.62b)$$

Tato soustava je doplněna okrajovými podmínkami (1.54b) - (1.54d) na  $\partial\Omega_{t_{n+1}}^f$ . Vezmeme-li v úvahu, že  $\mathcal{A}_{t_{n+1}}(\mathcal{A}_{t_i}^{-1}(\mathbf{x}_i)) \in \Omega_{t_{n+1}}^f$ , můžeme převést rovnice (1.62) kompletně do oblasti  $\Omega_{t_{n+1}}^f$ :

$$\frac{3\mathbf{v}^{n+1} - 4\tilde{\mathbf{v}}^n + \tilde{\mathbf{v}}^{n-1}}{2\tau} + ((\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{v}^{n+1} - \nu \Delta \mathbf{v}^{n+1} + \nabla p^{n+1} = 0, \quad (1.63a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+1} = 0 \quad \text{v } \Omega_{t_{n+1}}^f, \quad (1.63b)$$

za předpokladu, že funkce  $\mathbf{v}^{n-1}$  a  $\mathbf{v}^n$  již známe a  $\tilde{\mathbf{v}}^i = \mathbf{v}^i \circ \mathcal{A}_{t_i} \circ \mathcal{A}_{t_{n+1}}^{-1}$ . Tuto soustavu znovu doplníme okrajovými podmínkami (1.54b) - (1.54d).

## 1.4.2 Diskretizace v prostoru

V následující části provedeme diskretizaci v prostoru s cílem najít aproximace funkcí  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{n+1}$  a  $p = p^{n+1}$  definovaných na oblasti  $\Omega_{t_{n+1}}^f$ , které splňují systém (1.63) a okrajové podmínky (1.54b) - (1.54d). Tuto úlohu formulujeme ve slabém smyslu, abychom mohli použít metodu konečných prvků. Položme  $\Omega^f = \Omega_{t_{n+1}}^f$ ,  $\Gamma_W = \Gamma_{W_{t_{n+1}}}$  a definujme prostory pro rychlost

$$W = (H^1(\Omega^f))^2, \quad X = \left\{ \mathbf{y} \in W; \mathbf{y}|_{\Gamma_D \cup \Gamma_W} = 0 \right\} \quad (1.64)$$

a prostor pro funkci tlaku

$$M = L^2(\Omega^f). \quad (1.65)$$

$L^2(\Omega^f)$  značí Lebesgueův prostor:

$$L^2(\Omega^f) = \left\{ F : \Omega_f \rightarrow \mathbb{R} \mid F \text{ je měřitelná v } \Omega_f, \int_{\Omega^f} |F|^2 \, d\mathbf{x} < \infty \right\} \quad (1.66)$$

a  $H^1(\Omega^f)$  je Sobolevův prostor:

$$H^1(\Omega^f) = \left\{ F \in L^2(\Omega^f); \frac{\partial F}{\partial x_i} \in L^2(\Omega^f), i = 1, 2 \right\}, \quad (1.67)$$

kde  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  jsou zobecněné derivace. V prostoru  $L^2(\Omega^f)$ , resp. v  $(L^2(\Omega^f))^2$ , definujeme skalární součiny  $(\cdot, \cdot)$ :

$$(u, v) = \int_{\Omega^f} uv \, d\mathbf{x}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega^f} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \quad (1.68)$$

Rovnice (1.63) přepíšeme pomocí jednoduššího značení do tvaru

$$\frac{3}{2\tau} \mathbf{v} + ((\mathbf{v} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + \nabla p = \frac{1}{2\tau} (4\tilde{\mathbf{v}}^n - \tilde{\mathbf{v}}^{n-1}), \quad (1.69a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{v } \Omega^f. \quad (1.69b)$$

Nyní vynásobíme rovnici (1.69a) testovací funkcí  $\mathbf{y} \in X$  a rovnici (1.69b) testovací funkcí  $q \in M$  a oba získané vztahy integrujeme přes oblast  $\Omega^f$ :

$$\begin{aligned} \frac{3}{2\tau} \int_{\Omega^f} \mathbf{v} \cdot \mathbf{y} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^f} ((\mathbf{v} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \mathbf{y} \, d\mathbf{x} - \\ - \nu \int_{\Omega^f} \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{y} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^f} \nabla p \cdot \mathbf{y} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2\tau} \int_{\Omega^f} (4\tilde{\mathbf{v}}^n - \tilde{\mathbf{v}}^{n-1}) \cdot \mathbf{y} \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (1.70a)$$

$$\int_{\Omega^f} (\nabla \cdot \mathbf{v}) q \, d\mathbf{x} = 0. \quad (1.70b)$$

Třetí a čtvrtý výraz rovnice (1.70a) upravíme pomocí Greenovy věty. Pro třetí výraz zároveň použijeme okrajovou podmínku (1.54d) a skutečnost, že funkce  $\mathbf{y} \in X$  je nulová na

$\Gamma_D^f \cup \Gamma_W$ :

$$\begin{aligned} -\nu \int_{\Omega^f} \Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{y} \, d\mathbf{x} &= -\nu \int_{\partial\Omega^f} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{y} \, dS + \nu \int_{\Omega^f} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{y} \, d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\Gamma_O^f} (p - p_{ref}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{y} \, dS + \nu \int_{\Omega^f} \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{y} \, d\mathbf{x}, \\ \int_{\Omega^f} \nabla p \cdot \mathbf{y} \, d\mathbf{x} &= \int_{\Gamma_O^f} p(\mathbf{n} \cdot \mathbf{y}) \, dS - \int_{\Omega^f} p(\nabla \cdot \mathbf{y}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Rovnice (1.70) upravíme dle získaných vztahů a sečteme je. Za použití značení (1.68) získáme rovnici

$$\begin{aligned} \frac{3}{2\tau} (\mathbf{v}, \mathbf{y}) + (((\mathbf{v} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{y}) + \nu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{y}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{y}) + (\nabla \cdot \mathbf{v}, q) = \\ = \frac{1}{2\tau} (4\tilde{\mathbf{v}}^n - \tilde{\mathbf{v}}^{n-1}, \mathbf{y}) - \int_{\Gamma_O^f} p_{ref}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{y}) \, dS. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Nyní zavedeme formy

$$\begin{aligned} a(V^*, V, Y) &= \frac{3}{2\tau} (\mathbf{v}, \mathbf{y}) + (((\mathbf{v}^* - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{y}) + \nu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{y}) - (p, \nabla \cdot \mathbf{y}) + (\nabla \cdot \mathbf{v}, q), \\ f(Y) &= \frac{1}{2\tau} (4\tilde{\mathbf{v}}^n - \tilde{\mathbf{v}}^{n-1}, \mathbf{y}) - \int_{\Gamma_O^f} p_{ref}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{y}) \, dS. \end{aligned}$$

kde  $V = (\mathbf{v}, p) \in W \times M$ ,  $Y = (\mathbf{y}, q) \in X \times M$ ,  $V^* = (\mathbf{v}^*, p) \in W \times M$ .

Dvojici  $V = (\mathbf{v}, p)$  nazveme slabým řešením problému (1.63), (1.54b) - (1.54d), pokud splňuje podmínky (1.54b), (1.54c) a

$$V \in W \times M, \quad a(V, V, Y) = f(Y), \quad \forall Y = (\mathbf{y}, q) \in X \times M. \quad (1.72)$$

Dvojice  $(\mathbf{v}, p)$  představuje řešení v čase  $t_{n+1}$ .

Abychom mohli použít metodu konečných prvků, musíme provést restrikcí slabé formulace úlohy na prostorech  $W, X, M$  na konečně dimenzionální podprostory  $W_h \subseteq W$ ,  $X_h \subseteq X$ ,  $M_h \subseteq M$ ,  $h \in (0, h_0)$ ,  $h_0 > 0$ , kde

$$X_h = \left\{ \mathbf{y} \in W_h; \mathbf{y}|_{\Gamma_D^f \cup \Gamma_W} = 0 \right\}. \quad (1.73)$$

Definujeme *přibližné řešení* jako dvojici  $V_h = (\mathbf{v}_h, p_h) \in W_h \times M_h$  takovou, že platí

$$a(V_h, V_h, Y_h) = f(Y_h), \quad \forall Y_h = (\mathbf{y}_h, q_h) \in X_h \times M_h \quad (1.74)$$

a  $v_h$  splňuje příslušné aproximace okrajových podmínek (1.54b) a (1.54c).

Dvojice  $(X_h, M_h)$  prostorů konečných prvků by měla splňovat Babuškovu-Brezziho podmínku (viz [2], [3], [13]), která zaručuje stabilitu metody:

$$\exists \beta > 0 : \sup_{\mathbf{w} \in X_h} \frac{(p, \nabla \cdot \mathbf{y})}{|\mathbf{y}|_{H^1(\Omega^f)}} \geq \beta \|p\|_{L^2(\Omega^f)}, \quad \forall p \in M_h, \quad h \in (0, h_0), \quad (1.75)$$

kde  $|\cdot|_{H^1(\Omega^f)}$  značí seminormu v  $H^1(\Omega^f)$ :  $|f|_{H^1(\Omega^f)} = \left( \int_{\Omega^f} |\nabla f|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2}$ .

Za předpokladu, že oblast  $\Omega^f$  je polygonální aproximace výpočetní oblasti v čase  $t_{n+1}$ , symbolem  $\mathcal{T}_h^f$  označíme triangulaci oblasti  $\Omega^f$ . Triangulace  $\mathcal{T}_h^f$  polygonu  $\Omega^f$  je rozdělení na trojúhelníky  $K$  takové, že jejich sjednocení dává uzávěr oblasti  $\Omega^f$  a průnik libovolných dvou různých trojúhelníků je společná hrana, vrchol nebo je prázdný.

Prostor funkce tlaku  $M$  je potom aproximován prostorem po částech polynomiálních funkcí stupně  $\leq k$ :

$$p \approx p_h \in M_h = \left\{ q \in C(\overline{\Omega^f}); q|_K \in P_K^k, \forall K \in \mathcal{T}_h^f \right\}. \quad (1.76)$$

Symbol  $P_K^k$  zde označuje prostor všech polynomiálních funkcí stupně nejvýše  $k$  na elementu  $K$ . Prostor funkcí rychlosti  $W$  a  $X$  je aproximován prostorem po částech polynomiálních funkcí stupně  $\leq k + 1$ :

$$\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_h \in W_h = \left\{ \mathbf{y} \in \left( C(\overline{\Omega^f}) \right)^2; \mathbf{y}|_K \in \left( P_K^{k+1} \right)^2, \forall K \in \mathcal{T}_h^f \right\}, \quad (1.77)$$

$$X_h = W_h \cap W.$$

Tato dvojice prostorů  $(X_h, M_h)$  Babuškovu-Brezziho podmínku splňuje.

V praktických výpočtech používáme Taylor-Hoodovy  $P^2/P^1$  elementy. To znamená, že složky rychlosti jsou po částech kvadratické funkce a složky tlaku jsou po částech lineární funkce.

### 1.4.3 Stabilizace metody konečných prvků

Diskretizace v prostoru (1.74) může vést na přibližná řešení, která obsahují nežádoucí oscilace pro vysoká Reynoldsova čísla. (Reynoldsovo číslo  $Re$  je definováno ve tvaru  $Re = \frac{UL}{\nu}$ , kde  $U$  je charakteristická rychlost a  $L$  je charakteristická délka.) Ve snaze předejít tomuto nedostatku, používáme stabilizace pomocí SUPG metody, zvané též metoda proudnicové difuze (angl. streamline-diffusion method), viz např. [7], [8], [10]. Definujme stabilizační



formy

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_h(V^*, V, Y) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left( \frac{3}{2\tau} \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{v} + (\overline{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p, (\overline{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \mathbf{y} \right)_K, \\
\mathcal{F}_h(Y) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left( \frac{1}{2\tau} (4\hat{\mathbf{v}}^n - \hat{\mathbf{v}}^{n-1}), (\overline{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \mathbf{y} \right)_K, \\
V &= (\mathbf{v}, p), \quad Y = (\mathbf{y}, q), \quad V^* = (\mathbf{v}^*, p),
\end{aligned} \tag{1.78}$$

kde funkce  $\overline{\mathbf{w}}$  značí transportní rychlost  $\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{v}^* - \mathbf{w}^{n+1}$ ,  $(\cdot, \cdot)_K$  skalární součin v  $L^2(K)$  a  $\delta_K \geq 0$  jsou vhodné parametry. Navíc zavedeme formu stabilizace tlaku

$$\mathcal{P}_h(V, Y) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (\nabla \cdot \mathbf{v}, \nabla \cdot \mathbf{y})_K, \quad V = (\mathbf{v}, p), \quad Y = (\mathbf{y}, q), \tag{1.79}$$

s vhodnými parametry  $\tau_K \geq 0$ .

*Stabilizovaný diskrétní problém* zní: Najděme  $V_h = (\mathbf{v}_h, p_h) \in W_h \times M_h$  takové, že  $\mathbf{v}_h$  splňuje aproximace okrajových podmínek (1.54b), (1.54c) a

$$a(V_h, V_h, Y_h) + \mathcal{L}_h(V_h, V_h, Y_h) + \mathcal{P}_h(V_h, Y_h) = f(Y_h) + \mathcal{F}_h(Y_h), \quad \forall Y_h \in X_h \times M_h. \tag{1.80}$$

Okrajové podmínky splňujeme v uzlových bodech, tj. ve vrcholech elementů a středech stran ležících na  $\Gamma_D^f$  a  $\Gamma_W$ . Parametr  $\delta_K$  je definován pomocí transportní rychlosti  $\overline{\mathbf{w}}$  vztahem

$$\delta_K = \delta^* \frac{h_K}{2\|\overline{\mathbf{w}}\|_{L^\infty(K)}} \xi(Re\overline{\mathbf{w}}), \tag{1.81}$$

kde

$$Re\overline{\mathbf{w}} = \frac{h_K \|\overline{\mathbf{w}}\|_{L^\infty(K)}}{2\nu} \tag{1.82}$$

je lokální Reynoldsovo číslo a  $h_K$  je velikost elementu  $K$  ve směru  $\overline{\mathbf{w}}$ . Faktor  $\xi(\cdot)$  je rostoucí funkce proměnné  $Re\overline{\mathbf{w}}$  taková, že pro lokálně převládající konvekci ( $Re\overline{\mathbf{w}} > 1$ )  $\xi \rightarrow 1$  a pro lokálně převládající difuzi ( $Re\overline{\mathbf{w}} < 1$ )  $\xi \rightarrow 0$ . Parametr  $\delta^* \in (0, 1]$  je další libovolně volitelný parametr. Položme např.

$$\xi(Re\overline{\mathbf{w}}) = \min\left(\frac{Re\overline{\mathbf{w}}}{6}, 1\right). \tag{1.83}$$

Volba parametru  $\tau_K$  je opět různá v oblastech s převládající difuzí nebo konvekci. Necht

$$\tau_K = \tau^* h_K \|\overline{\mathbf{w}}\|_{L^\infty(K)} \quad \text{a} \quad \tau_K = 0 \tag{1.84}$$

pro lokálně převládající konvekci, resp. pro lokálně převládající difuzi. Tato volba je založena na teoretické analýze z [7], [8] a numerických experimentech.

Nelineární problém (1.80) je (v každém časovém okamžiku  $t_{n+1}$ ) řešený iteračně. Začínáme počáteční podmínkou  $V_h^{(0)}$  a dále předpokládáme, že iterace  $V_h^{(k)}$  již byla vypočítána. Pak hledáme  $V_h^{(k+1)} \in W_h \times M_h$  takové, že splňuje aproximaci okrajových podmínek (1.54b), (1.54c) a

$$a(V_h^{(k)}, V_h^{(k+1)}, Y_h) + \mathcal{L}_h(V_h^{(k)}, V_h^{(k+1)}, Y_h) + \mathcal{P}_h(V_h^{(k+1)}, Y_h) = f(Y_h) + \mathcal{F}_h(Y_h), \quad (1.85)$$

$$\forall Y_h \in X_h \times M_h.$$

V každém časovém okamžiku  $t_{n+1}$  položíme

$$V_h^{(0)} := (2\hat{\mathbf{v}}^n - \hat{\mathbf{v}}^{n-1}, \hat{p}^n). \quad (1.86)$$

Jak ukazují numerické experimenty, jen několik iterací (1.85) musí být vypočítány v každém časovém okamžiku.

Problém (1.85) je zřejmě lineární. Je ekvivalentní se soustavou lineárních algebraických rovnic

$$\mathbb{S}\underline{v} + 2\tau\mathbb{B}\underline{p} = f, \quad \mathbb{B}^T\underline{v} = 0, \quad (1.87)$$

kde  $\underline{v} \in R^{n_h}$  a  $\underline{p} \in R^{m_h}$  jsou vektory, jejichž složky představují stupně volnosti definující rychlost  $\mathbf{v}$ , resp. tlak  $p$ ,  $\mathbb{S}$  je regulární matice  $n_h \times n_h$  a  $\mathbb{B}$  je matice  $n_h \times m_h$ . Řešení této soustavy byla uskutečněna pomocí programu UMFPACK ([11], [12], [24]).

# Kapitola 2

## Rovnice elastického tělesa

V této kapitole se seznámíme s matematickou teorií elastických těles. Naším cílem je dospět k dynamickému problému, ale začneme rovnicemi statické rovnováhy elastického tělesa. Potom teprve přejdeme od statického problému k dynamickému a budeme se zabývat způsobem jeho řešení.

Nejprve zavedeme několik základních pojmů. Připomeňme si, že odlišujeme teorii pevných těles pomocí indexu  $b$  (body, angl. těleso). Některá označení se přesto mohou shodovat s teorií proudění tekutin, protože buď vyjadřují skutečně tu samou veličinu, např. čas, nebo jsme nepokládali za důležité je odlišit při interakci.

Mějme tedy časový interval  $(0, T)$ , kde  $T > 0$ . *Těleso* představuje oblast  $\Omega^b \subset \mathbb{R}^3$ . Dále označme oblast  $\mathcal{M}^b$ , na které budou definovány funkce prostorových souřadnic a času:

$$\mathcal{M}^b = \{(\mathbf{x}, t) ; \mathbf{x} \in \Omega^b, t \in (0, T)\} \subset \mathbb{R}^4. \quad (2.1)$$

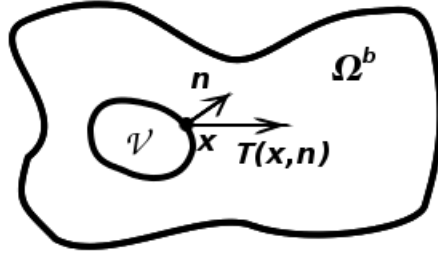
*Objemová síla*  $\mathbf{f} : \mathcal{M}^b \rightarrow \mathbb{R}^3$  je hustota sil působících na každý objemový element tělesa  $\Omega^b$ . Příkladem jsou gravitační, setrvačné nebo elektrostatické síly.

### 2.1 Statické rovnice elastického tělesa

Nyní předpokládejme, že všechny funkce jsou na čase  $t$  nezávislé.

#### 2.1.1 Tenzor napětí, rovnice rovnováhy

Nejprve definujme *tenzor napětí* a popišme jeho základní vlastnosti. Uvažujme část  $\mathcal{V}$  tělesa  $\Omega^b$  takovou, že  $\bar{\mathcal{V}} \subset \Omega^b$  a předpokládejme, že  $\mathcal{V}$  má lipschitzovsky spojitou hranici  $\partial\mathcal{V}$ . Nechť  $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{V}$  a  $\mathbf{n}$  je jednotková vnější normála v bodě  $\mathbf{x}$  k hranici  $\partial\mathcal{V}$ , viz obr. 2.1.



Obrázek 2.1: Vektor napětí.

Vektor napětí  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  charakterizuje hustotu vnitřních sil v tělese, působících ze strany části  $\Omega^b \setminus \overline{\mathcal{V}}$  tělesa na část  $\overline{\mathcal{V}}$  tělesa v bodě  $\mathbf{x}$ . Může být obecně určen pomocí jeho hodnot pro normály rovnoběžné s osami souřadnic. Definujme

$$\tau_{ji}^b = T_i(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

kde  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$  a  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ . Veličiny  $\tau_{ji}^b(\mathbf{x})$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , se nazývají *prvky tenzoru napětí*, přičemž  $\tau_{ii}^b$ ,  $i = 1, 2, 3$ , nazýváme *normálovým napětím* a  $\tau_{ji}^b$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , nazýváme *smykovými napětími*. Je možné ukázat, viz [4], že platí

$$T_i(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \sum_{j=1}^3 n_j \tau_{ji}^b(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.3)$$

Maticí  $(\tau_{ij}^b(\mathbf{x}))_{i,j=1,2,3}$  je pak určen tenzor, který nazveme *tenzorem napětí v bodě  $\mathbf{x}$* . Vektor napětí lze tedy vyjádřit pomocí tenzoru napětí a normály.

Předpokládejme, že  $\tau_{ij}^b \in C^1(\Omega^b)$  a  $f_i \in C(\Omega^b)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Vyjádřením podmínek pro rovnováhu sil můžeme dokázat, viz [4], že platí

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ji}^b}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^b, \quad (2.4)$$

což jsou tzv. *rovnice rovnováhy*. Můžeme dále dokázat, že rovnováha hybnosti je ekvivalentní symetrii tenzoru napětí. Platí tedy

$$\tau_{ij}^b(\mathbf{x}) = \tau_{ji}^b(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} \in \Omega^b. \quad (2.5)$$

## 2.1.2 Tenzor deformace

Zavedeme další pojem, *tenzor konečné deformace*, který charakterizuje změnu vzdálenosti dvou bodů tělesa. Uvažujme opět těleso  $\Omega^b$  a bod  $\mathbf{x} \in \Omega^b$ . Po deformaci přejde těleso  $\Omega^b$  na

těleso  $\widehat{\Omega}^b$  a bod  $\mathbf{x}$  do bodu  $\mathbf{y}$ . Předpokládejme, že existuje nějaká funkce bodů, popisující deformaci

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad (2.6)$$

kde  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  je tzv. *vektor posunutí*. O transformaci  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$  předpokládáme, že je to difeomorfismus a že  $u_i \in C^3(\Omega^b)$ .

Nechť  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  je nějaký vektor. Uvažujme bod  $\mathbf{x} + t\mathbf{v} \in \Omega_b$ , kde  $t \in \mathbb{R}$  a zkoumejme rozdíl druhých mocnin délky úsečky s krajními body  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$  před deformací a po ní, jako funkci  $\varphi(t)$ :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= |t\mathbf{v} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 - t^2 |\mathbf{v}|^2 = \\ &= \sum_{i=1}^3 (tv_i + u_i(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - u_i(\mathbf{x}))^2 - t^2 |\mathbf{v}|^2 = \\ &= \sum_{i=1}^3 (u_i(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - u_i(\mathbf{x}))^2 + 2t \sum_{i=1}^3 v_i (u_i(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - u_i(\mathbf{x})). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Položme  $\psi_i(\tau) = u_i(\mathbf{x} + \tau t\mathbf{v})$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Pak

$$\psi'_i(\tau) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x} + \tau t\mathbf{v}) t v_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.8)$$

Za našeho předpokladu hladkosti funkce  $\mathbf{u}$  bude platit

$$\psi_i(1) - \psi_i(0) = \int_0^1 \psi'_i(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.9)$$

Odtud plyne

$$\varphi(t) = t^2 \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 \int_0^1 \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x} + \tau t\mathbf{v}) v_j d\tau \right)^2 + 2t^2 \sum_{i,j=1}^3 \int_0^1 \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x} + \tau t\mathbf{v}) v_j v_i d\tau. \quad (2.10)$$

Funkce  $\varphi$  má v bodě 0 spojitou derivaci 2. řádu. Platí, že  $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$  a teprve  $\varphi''(0)$  může být nenulová a je nejnižší derivací, která může charakterizovat deformaci.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varphi''(0) &= \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) v_j \right)^2 + 2 \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) v_j v_i = \\ &= \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(\mathbf{x}) v_i v_j + \sum_{i,j=1}^3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right) v_i v_j \end{aligned} \quad (2.11)$$

Označíme-li

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.12)$$

bude

$$\frac{1}{2}\varphi''(0) = 2 \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij} v_i v_j. \quad (2.13)$$

Matici  $(\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^3$  nazveme *tenzor konečné deformace*.

Lineární část ve vzorci (2.12) (vzhledem ke gradientu posunutí) tenzoru konečné deformace  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)$  nazýváme *tenzorem malé deformace* a značíme  $e_{ij}$ . Je tedy

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.14)$$

### 2.1.3 Zobecněný Hookeův zákon

Nyní se budeme věnovat vztahu mezi tenzorem napětí a tenzorem deformace. Zabýváme se pouze *elastickou deformací*. Neuvažujeme tedy taková napětí, která by způsobila plastickou deformaci, tj. takovou deformaci, která by zůstala po odlehčení trvalá. Uvedeme *klasický lineární zobecněný Hookeův zákon*, který charakterizuje širokou třídu elastických materiálů.

Předpokládejme lineární vztah mezi tenzory napětí a malé deformace v bodě  $\mathbf{x} \in \Omega^b$ , tj.

$$\tau_{ij}^b = \sum_{k,l=1}^3 c_{ijkl} e_{kl}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.15)$$

V tomto vztahu není absolutní člen, neboť předpokládáme, že tenzor napětí bude nulový, pokud tenzor deformace je roven nule. Ze symetrie tenzorů napětí a deformace plyne

$$c_{ijkl} = c_{jikl}, \quad c_{ijkl} = c_{ijlk}, \quad (2.16)$$

a z energetických úvah, viz [1], plynou vztahy

$$c_{ijkl} = c_{klij}. \quad (2.17)$$

Celkem tedy existuje nejvýše 21 nezávislých parametrů  $c_{ijkl}$ , charakterizujících obecný materiál v bodě  $\mathbf{x}$ .

Materiál tělesa se nazývá *homogenní*, jestliže parametry  $c_{ijkl}(\mathbf{x})$  nezávisí na bodu  $\mathbf{x} \in \Omega^b$ . Jestliže parametry  $c_{ijkl}(\mathbf{x})$  nezávisí na volbě soustavy souřadnic, pak materiál tělesa se nazývá *izotropní* v bodě  $\mathbf{x}$ . V opačném případě se materiál tělesa nazývá *anizotropní* v bodě  $\mathbf{x}$  (např. dřevo).

Zobecněný Hookeův zákon pro izotropní materiál zní:

$$\tau_{ij}^b(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \delta_{ij} + 2\mu(\mathbf{x}) e_{ij}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.18)$$

kde  $\lambda$ ,  $\mu$  jsou tzv. *Laméovy koeficienty* a  $\delta_{ij}$  je Kroneckerovo delta. Důkaz tohoto tvrzení najdeme v [4].

Dále odvodíme určité vlastnosti Laméových koeficientů. Předpokládejme, že k zobecněnému Hookeovu zákonu existuje inverzní zákon, tj. že můžeme vypočítat složky tenzoru malé deformace pomocí tenzoru napětí. Pak soustavu (2.15) lze vyřešit jednoznačně vzhledem k  $e_{ij}$ . Uvědomme si, že  $\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 e_{ii}$ . Determinant matice soustavy (2.18) se rovná  $(2\mu)^5(3\lambda + 2\mu)$ , tedy z předpokladu jeho nenulovosti plyne

$$\mu \neq 0, \quad 3\lambda + 2\mu \neq 0. \quad (2.19)$$

Mohli bychom navíc provést rozbor několika myšlených pokusů, abychom určili znaménka Laméových koeficientů (opět viz [4]):

$$\mu > 0, \quad \lambda > 0. \quad (2.20)$$

V praxi se místo Laméových koeficientů  $\lambda$  a  $\mu$  častěji používají *Youngův modul pružnosti*  $E$  a *Poissonova konstanta*  $\sigma$ , které jsou definovány vztahy

$$\frac{1}{E} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (2.21)$$

Laméovy koeficienty můžeme vyjádřit pomocí Youngova modulu pružnosti  $E$  a Poissonovy konstanty  $\sigma$ :

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}, \quad \lambda = \frac{E\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}. \quad (2.22)$$

Zřejmě platí ekvivalence

$$(\lambda > 0 \wedge \mu > 0) \Leftrightarrow \left( E > 0 \wedge 0 < \sigma < \frac{1}{2} \right). \quad (2.23)$$

## 2.1.4 Formulace okrajových úloh teorie pružnosti

V této části se věnujeme odvození základních diferenciálních rovnic lineární teorie pružnosti, a to soustavy Laméových rovnic. Dále formulujeme základní okrajové úlohy pružnosti.

Předpokládejme, že platí zobecněný Hookeův zákon izotropního materiálu (2.18), kde  $\lambda \in C^1(\overline{\Omega^b})$ ,  $\mu \in C^1(\overline{\Omega^b})$ . Dále nechť posunutí  $u_i \in C^2(\overline{\Omega^b})$ ,  $i = 1, 2, 3$ , a jsou splněny rovnice rovnováhy (2.4) na oblasti  $\Omega^b$ . Dosadíme-li do rovnic rovnováhy ze zobecněného Hookeova zákona za prvky tenzoru napětí a ze vzorců (2.14) za prvky tenzoru malé deformace, odvodíme rovnice

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda\vartheta) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + f_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.24)$$

kde  $\vartheta = \operatorname{div} \mathbf{u}$ . Tyto rovnice se nazývají *obecné Laméovy rovnice*.

Předpokládejme nyní, že  $\mu$  a  $\lambda$  jsou konstantní. Dostaneme

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i + f_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.25)$$

což jsou tzv. *Laméovy rovnice*, které platí pro homogenní a izotropní materiál.

Nyní formulujeme základní okrajové úlohy pružnosti. Předpokládáme, že  $\mu, \lambda \in C^1(\overline{\Omega^b})$ ,  $\mathbf{u} \in (C^2(\Omega^b))^3$ , a nechť hranice  $\partial\Omega^b$  je lipschitzovská. Uvažujme obecné Laméovy rovnice (2.24), kde  $f \in (C^1(\Omega^b))^3$ . Hledáme posunutí  $\mathbf{u}$ , které vyhovuje těmto rovnicím a okrajovým podmínkám některého z následujících typů.

Nechť na hranici  $\partial\Omega^b$  jsou dány povrchové síly  $\mathbf{T}$ , kde složky  $T_i \in C(\partial\Omega^b)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Pro tenzor napětí to znamená, že

$$\sum_{j=1}^3 \tau_{ij}^b(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) = T_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega^b, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.26)$$

Dosadíme-li ze zobecněného Hookeova zákona pro izotropní materiál (2.18), dostaneme

$$\lambda \vartheta n_i + 2\mu \sum_{j=1}^3 e_{ij} n_j = T_i, \quad \text{na } \partial\Omega^b, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.27)$$

kde  $\vartheta = \operatorname{div} \mathbf{u}$ . Je-li zadána okrajová podmínka (2.27) a obecné Laméovy rovnice (2.24), mluvíme o *první základní úloze pružnosti*. Přitom hledáme složky  $u_i \in C^1(\overline{\Omega^b}) \cap C^2(\Omega^b)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , které splňují rovnice (2.27) a (2.24).

Dále definujeme *druhou základní úlohu pružnosti*. Při této úloze je na hranici předepsáno posunutí

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^d(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega^b, \quad (2.28)$$

přičemž předpokládáme, že  $u_i^d \in C(\partial\Omega^b)$ , a hledáme složky  $u_i \in C(\overline{\Omega^b}) \cap C^2(\Omega^b)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , které splňují tyto podmínky a obecné Laméovy rovnice.

Poslední základní okrajová úloha pružnosti spojuje předchozí dvě, nazýváme ji *kombinovaná základní úloha pružnosti*. Nechť jsou dány takové množiny  $\Gamma_W, \Gamma_D^b$ , disjunktní a otevřené v množině  $\partial\Omega^b$ , že

$$\partial\Omega^b = \Gamma_W \cup \Gamma_D^b \cup \mathcal{R}, \quad (2.29)$$

kde  $\mathcal{R}$  má plošnou míru nula. Hledáme složky

$$u_i \in C^1(\Omega^b \cup \Gamma_W) \cap C(\Omega^b \cup \Gamma_D^b) \cap C^2(\Omega^b), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.30)$$

kteřé splňují rovnice (2.24), na množině  $\Gamma_W$  splňují podmínku (2.27) a na množině  $\Gamma_D^b$  splňují podmínku (2.28), přičemž  $T_i \in C(\Gamma_W)$ ,  $u_i^d \in C(\Gamma_D^b)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .



## 2.2 Dynamická úloha pružnosti

Zatím jsme uvažovali pouze podmínky statické rovnováhy, nyní chceme odvodit pohybové rovnice izotropního elastického tělesa. Při dynamických problémech předpokládáme, že  $u_i$ ,  $\tau_{ij}^b$  a  $f_i$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , jsou obecně funkcemi nejen souřadnic  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , ale i času  $t$ , a že mají spojité derivace potřebného řádu.

### 2.2.1 Dynamické rovnice izotropního elastického tělesa

Od rovnic statické rovnováhy snadno dospějeme k rovnicím dynamickým, použijeme-li d'Alembertův princip, viz [9]. Podle něho dostáváme pohybové rovnice připojením síly setrvačnosti k působícím objemovým a plošným silám. Síla setrvačnosti části  $\mathcal{V}$  tělesa se rovná záporné hodnotě součinu jeho hmoty a jeho zrychlení. Je tedy silou objemovou. Je-li  $\varrho^b(t, \mathbf{x})$  hustota tělesa a  $\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , zrychlení uvažované části tělesa, je jeho hmota  $\varrho^b|\mathcal{V}|$  a pro sílu setrvačnosti dostáváme výraz

$$-\varrho^b|\mathcal{V}|\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.31)$$

Rovnice (2.4) se vztahují na objemovou jednotku. To znamená, že nám stačí i sílu setrvačnosti vztáhnout na objemovou jednotku a připojit k  $f_i$  v rovnicích (2.4). Tak dostáváme pohybové rovnice

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}^b}{\partial x_j} + f_i = \varrho^b \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.32)$$

Pomocí Hookeova zákona můžeme tyto rovnice upravit tak, že v nich budou vystupovat buď jen posunutí, anebo jen napětí. Zpravidla se používá prvního způsobu. Tedy vyjádříme  $\tau_{ij}^b$  pomocí rovnic (2.18) a (2.14) jako lineární funkce posunutí  $\mathbf{u}$ . Pro  $\lambda$  a  $\mu$  konstantní dospíváme po jednoduchých úpravách k rovnicím

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i + f_i = \varrho^b \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.33)$$

Funkce  $\mathbf{u}$ , která je řešením rovnic (2.32), musí splňovat okrajové a počáteční podmínky. Okrajové podmínky vyjadřují jako v předešlé části, jakým způsobem jsou rozloženy plošné síly anebo elastická posunutí na povrchu uvažovaného tělesa. Jsou-li dána posunutí musí funkce  $\mathbf{u}$  na  $\partial\Omega^b$  splňovat rovnici analogickou s rovnicí (2.28), tj.

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^d(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega^b, \quad t \in (0, T). \quad (2.34)$$

Jsou-li na povrchu tělesa dány plošné síly  $\mathbf{T}^n$ , musíme z funkce  $\mathbf{u}$  získané integrací rovnice (2.32) vypočítat pomocí zobecněného Hookeova zákona napětí  $\tau_{ij}^b$  a ta musí na  $\partial\Omega^b$  splňovat rovnici analogickou s rovnicí (2.26), tj.

$$\sum_{j=1}^3 \tau_{ij}^b(t, \mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) = T_i^n(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega^b, \quad t \in (0, T), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.35)$$

Podobným způsobem bychom postupovali i při úloze kombinované.

Doplníme navíc podmínky charakterizující polohu a rychlost v každém bodě tělesa v čase  $t = t_0$ , v našem případě  $t_0 = 0$ . To znamená, že funkce  $\mathbf{u}$  a její časová derivace  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$  musí splňovat počáteční podmínku

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^b, \quad (2.36a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{z}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega^b, \quad (2.36b)$$

kde  $\mathbf{u}^0, \mathbf{z}^0 \in C(\Omega^b)$ .

Okrajovými i počátečními podmínkami je výrazně omezen výběr funkcí, které splňují pohybovou rovnici (2.32).

V řadě případů zavádíme zjednodušující předpoklad, že těleso i jeho deformace jsou rovinné. Pak klademe  $u_3 = 0$ ,  $\tau_{i3}^b = \tau_{3i}^b = 0$  pro  $i = 1, 2, 3$ ,  $f_3 = 0$  a  $T_3^n = 0$ . Potom dostaneme rovnice (2.32) a (2.33) pro  $i = 1, 2$  a platí

$$\vartheta = \operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \quad (2.37)$$

## 2.2.2 Řešení dynamického problému pružnosti

Nechť  $\Omega^b$  je oblast s lipschitzovskou hranicí, její hranice  $\partial\Omega^b$  je rozdělena na disjunktní množiny  $\Gamma_D^b$ ,  $\Gamma_W$  a  $R$  a platí

$$\partial\Omega^b = \Gamma_D^b \cup \Gamma_W \cup R, \quad (2.38)$$

přičemž  $R$  má plošnou míru nula a každá z množin  $\Gamma_D^b$ ,  $\Gamma_W$  je buď prázdná nebo otevřená v  $\partial\Omega^b$ .

Naším úkolem je řešit problém zadaný rovnicí (2.32) doplněný o počáteční a okrajové podmínky. Pro dané funkce  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{u}^d$ ,  $\mathbf{u}^0$ ,  $\mathbf{z}^0$ ,  $\mathbf{T}^n$  a parametry  $\varrho^b$ ,  $\lambda$  a  $\mu$  hledáme řešení  $\mathbf{u}$  úlohy

$$\varrho^b \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}^b}{\partial x_j} = f_i, \quad \text{na } \mathcal{M}^b, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.39a)$$

$$\mathbf{u}(0, \cdot) = \mathbf{u}^0, \quad \text{v } \Omega^b, \quad (2.39b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(0, \cdot) = \mathbf{z}^0, \quad \text{v } \Omega^b, \quad (2.39c)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^d \quad \text{na } (0, T) \times \Gamma_D^b, \quad (2.39d)$$

$$\sum_{j=1}^3 \tau_{ij}^b n_j = T_i^n \quad \text{na } (0, T) \times \Gamma_W, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.39e)$$

přičemž předpokládáme, že všechny funkce jsou dostatečně hladké. Tuto úlohu nyní formulujeme ve slabém smyslu.

Pro jednoduchost uvažujeme  $\mathbf{u}^d = 0$ . O formulaci případu s nehomogenní okrajovou podmínkou se zmíníme později v poznámce 2.2.

V rovnicích (2.39) má časová proměnná  $t$  odlišné postavení od prostorové proměnné  $\mathbf{x}$ . Pro každé  $u : \mathcal{M}^b \rightarrow \mathbb{R}$  a  $t \in [0, T]$  označuje symbol  $u(t)$  zobrazení

$$\mathbf{x} \rightarrow u(t, \mathbf{x}). \quad (2.40)$$

Pro (skoro) každé  $t$  je  $u(t)$  prvkem nějakého prostoru funkcí. Nechť  $X$  je Banachův prostor. Prostory funkcí definovaných na  $[0, T]$  s hodnotami v  $X$  se nazývají *Bochnerovy prostory*. Prostor  $\mathcal{C}^k(0, T; X)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , obsahuje všechny spojité funkce  $u : [0, T] \rightarrow X$  takové, že všechny časové derivace do řádu  $k$  jsou spojitá zobrazení intervalu  $[0, T]$  do prostoru  $X$ . Výraz

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k(0, T; X)} = \sum_{i=0}^k \sup_{t \in [0, T]} \|u^{(i)}(t)\|_X \quad (2.41)$$

je konečný a definuje normu v  $\mathcal{C}^k(0, T; X)$ .

Symbolem  $L^p(0, T; X)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , označme prostor všech měřitelných funkcí  $u : [0, T] \rightarrow X$ , pro které je norma

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left( \int_0^T \|u^{(i)}(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p < \infty \quad (2.42)$$

resp.

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|u^{(i)}(t)\|_X \quad (2.43)$$

konečná.

Nechť  $F$  je funkce definovaná na  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  a nechť  $M$  je množina těch bodů  $\mathbf{x} \in \Omega$ , pro které je  $F(\mathbf{x}) \neq 0$ . Uzávěr množiny  $M$  označíme  $\operatorname{supp} F$  a nazveme *nosičem* funkce  $F$ .

Definujeme prostor  $\mathcal{V}$  jako

$$\mathcal{V} = \left\{ \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega^b}) \mid \operatorname{supp} \varphi \subset \Omega^b \cup \Gamma_W \right\}. \quad (2.44)$$

Nyní již aplikujeme obvyklý postup pro odvození slabé formulace. Rovnice (2.32) vynásobíme složkami libovolné testovací funkce  $\mathbf{y} \in \mathcal{V}^3$  a integrujeme přes oblast  $\Omega^b$ :

$$\int_{\Omega^b} \varrho^b \frac{\partial^2 u_i(t)}{\partial t^2} y_i \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega^b} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}^b(\mathbf{u}(t))}{\partial x_j} y_i \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega^b} f_i(t) y_i \, d\mathbf{x}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.45)$$

Použijeme-li Greenovu větu na druhý integrál na levé straně rovnic (2.45) a rovnice upravíme podle okrajové podmínky (2.39e), dostaneme

$$\int_{\Omega^b} \varrho^b \frac{\partial^2 u_i(t)}{\partial t^2} y_i \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega^b} \sum_{j=1}^3 \tau_{ij}^b(\mathbf{u}(t)) \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega^b} f_i(t) y_i \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_W} T_i^n(t) y_i \, dS, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.46)$$

Tyto rovnice sečteme a dostaneme identitu, která je splněna pro všechna  $\mathbf{y} \in \mathcal{V}^3$ . Tato identita platí i v obecnějším tvaru

$$\frac{d^2}{dt^2} (\varrho^b \mathbf{u}(t), \mathbf{y})_{0, \Omega^b} + a(\mathbf{u}, \mathbf{y}; t) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{y})_{0, \Omega^b} + (\mathbf{T}^n(t), \mathbf{y})_{0, \Gamma_W}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{V}, \quad (2.47)$$

kde stačí aby  $\varrho^b \in \mathcal{C}(\overline{\Omega^b})$ ,  $\lambda, \mu \in L_\infty(\Omega^b)$ ,  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega^b)$ ,  $\mathbf{T}^n \in \mathbf{L}^2(\Gamma_W)$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega^b)$ . Testovací funkce  $y_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , bereme z prostoru, který je uzávěrem množiny  $\mathcal{V}$  v prostoru  $H^1(\Omega^b)$  a označme  $\mathbf{V} = (\overline{\mathcal{V}})^3$ . Nyní vysvětlíme další použitá označení. Definujeme formu  $a$ :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{y}; t) = \int_{\Omega^b} \sum_{i,j=1}^3 \tau_{ij}^b(\mathbf{u}(t)) \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \, d\mathbf{x}, \quad (2.48)$$

dosadíme ze zobecněného Hookeova zákona pro izotropní materiál (2.18)

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{y}; t) = \int_{\Omega^b} \sum_{i,j=1}^3 (\lambda \vartheta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}(\mathbf{u}(t))) \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \, d\mathbf{x}. \quad (2.49)$$

Definujme skalární součin

$$(\mathbf{u}, \mathbf{y})_{0, \Omega^b} = \int_{\Omega^b} \mathbf{u} \cdot \mathbf{y} \, d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega^b} u_i y_i \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}^2(\Omega^b), \quad (2.50)$$

v prostoru  $\mathbf{L}^2(\Omega^b) = (L^2(\Omega_b))^3$  a skalární součin

$$(\mathbf{u}, \mathbf{y})_{0, \Gamma_W} = \int_{\Gamma_W} \mathbf{u} \cdot \mathbf{y} \, dS = \sum_{i=1}^3 \int_{\Gamma_W} u_i v_i \, dS, \quad \mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}^2(\Gamma_W), \quad (2.51)$$

v prostoru  $\mathbf{L}^2(\Gamma_W) = (L^2(\Gamma_W))^3$ . Dále  $\frac{d^2}{dt^2}$  značí zobecněnou derivaci reálné funkce na  $(0, T)$ , takže platí

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\varrho^b \mathbf{u}(t), \mathbf{y})_{0, \Omega^b} \varphi''(t) \, dt + \int_0^T a(\mathbf{u}, \mathbf{y}; t) \varphi(t) \, dt = \\ & = \int_0^T (\mathbf{f}(t), \mathbf{y})_{0, \Omega^b} \varphi(t) \, dt + \int_0^T (\mathbf{T}^n(t), \mathbf{y})_{0, \Gamma_W} \varphi(t) \, dt, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, T). \end{aligned} \quad (2.52)$$

**Definice 2.1** Řekneme, že funkce  $\mathbf{u}$  se nazývá slabé řešení dynamické úlohy pružnosti, jestliže platí

$$\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}), \quad \mathbf{u}' \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega^b)), \quad \mathbf{u}'' \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}^*), \quad (2.53a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\varrho^b \mathbf{u}(t), \mathbf{y})_{0, \Omega^b} + a(\mathbf{u}, \mathbf{y}; t) &= (\mathbf{f}(t), \mathbf{y})_{0, \Omega^b} + (\mathbf{T}^n(t), \mathbf{y})_{0, \Gamma_W}, \\ \forall \mathbf{y} \in \mathbf{V}, \quad \text{s.v. } t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.53b)$$

a platí počáteční podmínky

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_b, \quad (2.54a)$$

$$\mathbf{u}'(0, \mathbf{x}) = \mathbf{z}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_b. \quad (2.54b)$$

Budeme požadovat, aby platilo

$$\mathbf{u}^0 \in \mathbf{H}^1(\Omega^b), \quad \mathbf{z}^0 \in \mathbf{L}^2(\Omega_b), \quad \mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega^b)). \quad (2.55)$$

**Poznámka 2.2** Poznamenejme, že slabá formulace obsahuje i okrajové podmínky. Podmínka (2.35) je skryta v identitě (2.53b) a podmínka (2.34) je reprezentována volbou prostoru  $\mathbf{V}$ , resp. obecně pro  $\mathbf{u}^d$  nenulovou, bychom požadovali podmínku

$$\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}^d \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega^b)) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}), \quad (2.56)$$

kde  $\tilde{\mathbf{u}}^d \in \mathbf{L}^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega^b)) \cap \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega^b))$  s  $(\tilde{\mathbf{u}}^d)' \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{H}^{-1}(\Omega^b))$  a  $\tilde{\mathbf{u}}^d(t) = \mathbf{u}^d(t)$  na  $\Gamma_D^b$  ve smyslu stop pro skoro všechna  $t \in [0, T]$ .

Nyní se krátce zabývejme existencí a jednoznačností řešení problému s homogenní Dirichletovou podmínkou. Formulujeme větu, jejíž důkaz najdeme v knize [16]. Tato věta zajišťuje existenci i jednoznačnost řešení.

**Věta 2.3** Nechť  $\Omega^b$  je omezená oblast v  $\mathbb{R}^3$  a  $T > 0$ . Předpokládejme, že je dána hustota tělesa  $\varrho^b \in \mathcal{C}(\overline{\Omega^b})$ , hustota vnějších sil  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{M}^b)$ , počáteční poloha  $\mathbf{u}^0 \in \mathbf{V}$  a počáteční rychlost  $\mathbf{z}^0 \in \mathbf{L}^2(\Omega^b)$ . Pak úloha (2.53b) má jednoznačné slabé řešení.

# Kapitola 3

## Diskretizace dynamické úlohy pružnosti

V předešlé kapitole jsme zformulovali dynamickou úlohu pružnosti. Také jsme definovali slabé řešení (2.53b) této úlohy. Na základě slabé formulace budeme diskretizovat okrajovou úlohu v prostoru metodou konečných prvků. Dále provedeme časovou diskretizaci Newmarkovou metodou. V závěru kapitoly se věnujeme sdruženému problému interakce proudící tekutiny a elastického tělesa.

V této kapitole se omezíme pouze na dvojrozměrný případ. To znamená, že uvažujeme omezenou oblast  $\Omega^b \subset \mathbb{R}^2$  s lipschitzovsky spojitou hranicí a časoprostorovou oblast  $\mathcal{M}^b = \Omega^b \times [0, T]$  jako podmnožinu prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Položíme  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ ,  $\mathbf{u}^0 = (u_1^0, u_2^0)^T$ ,  $\mathbf{z}^0 = (z_1^0, z_2^0)^T$ ,  $\tau_{i3}^b = \tau_{3i}^b = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T$  a  $\mathbf{T}^n = (T_1^n, T_2^n)^T$ . Dále všechny prostory funkcí uvažujeme pouze pro dvojrozměrný případ.

Uveďme znovu slabou formulaci dynamické úlohy pružnosti. Nechť  $\mathbf{u}^0 \in \mathbf{H}^1(\Omega^b)$ ,  $\mathbf{z}^0 \in \mathbf{L}^2(\Omega_b)$ ,  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega^b))$ . Chceme najít  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V})$  slabé řešení dynamické úlohy pružnosti, které splňuje  $\mathbf{u}' \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega^b))$ ,  $\mathbf{u}'' \in \mathbf{L}^2(0, T; \mathbf{V}^*)$ , rovnici

$$\frac{d^2}{dt^2}(\varrho^b \mathbf{u}(t), \mathbf{y})_{0, \Omega^b} + \frac{d}{dt}(C \varrho^b \mathbf{u}(t), \mathbf{y})_{0, \Omega^b} + a(\mathbf{u}, \mathbf{y}; t) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{y})_{0, \Omega^b} + (\mathbf{T}^n(t), \mathbf{y})_{0, \Gamma_W},$$
$$\forall \mathbf{y} \in \mathbf{V}, \quad \text{s.v. } t \in [0, T] \quad (3.1)$$

a počáteční podmínky

$$\mathbf{u}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_b, \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{u}'(0, \mathbf{x}) = \mathbf{z}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_b. \quad (3.2b)$$

Přičemž  $\mathbf{V} = V^2$ , kde

$$V = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega^b) \mid \varphi|_{\Gamma_D^b} = 0 \right\}. \quad (3.3)$$

Forma  $a(\mathbf{u}, \mathbf{y}; t)$  je definována

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{y}; t) = \int_{\Omega^b} \sum_{i,j=1}^2 (\lambda \vartheta \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}(\mathbf{u}(t))) \frac{\partial y_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} \quad (3.4)$$

a skalární součiny jsou definovány v prostoru  $\mathbf{L}^2(\Omega^b) = (L^2(\Omega_b))^2$  resp. v prostoru  $\mathbf{L}^2(\Gamma_W) = (L^2(\Gamma_W))^2$  jako

$$(\mathbf{u}, \mathbf{y})_{0,\Omega^b} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega^b} u_i y_i d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}^2(\Omega^b), \quad (3.5a)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{y})_{0,\Gamma_W} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_W} u_i y_i dS, \quad \mathbf{u}, \mathbf{y} \in \mathbf{L}^2(\Gamma_W). \quad (3.5b)$$

Vidíme, že jsme v rovnici (3.1) přidali výraz  $C \varrho^b \mathbf{u}'$ , kde  $C \geq 0$ , který představuje tlumení.

Postup diskretizace zadaného problému rozdělíme na dvě části. Nejprve budeme aproximovat funkci  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  funkcí  $\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t)$  takovou, že  $\mathbf{u}_h(t) \in \mathbf{V}_h$ , pro všechna  $t \in [0, T]$ . Jedná se tedy o diskretizaci vzhledem k prostorové proměnné. Ve druhé části provedeme diskretizaci v čase.

### 3.1 Diskretizace problému v prostoru

Přibližné řešení uvažované úlohy budeme hledat pomocí metody konečných prvků. Nechť  $\Omega_h^b$  značí polygonální aproximaci oblasti  $\Omega^b$ . Sestrojíme triangulaci  $\mathcal{T}_h^b$  oblasti  $\Omega_h^b$  takovou, že jejími prvky jsou uzavřené trojúhelníky  $K \in \mathcal{T}_h^b$  s disjunktními vnitřky takovými, že  $\bar{\Omega}_h^b = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h^b} K$ . Průnikem dvou prvků je buď společný vrchol, hrana nebo prázdná množina. Přibližné řešení  $u_h(t)$  bude závislé na  $h > 0$ , které charakterizuje velikost trojúhelníků triangulace. Dále definujeme systém konečně dimenzionálních prostorů  $X_h$ , kde

$$X_h = \left\{ v_h \in C(\bar{\Omega}_h^b) \mid v_h|_K \in P^1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h^b \right\} \quad (3.6)$$

a položíme  $\mathbf{X}_h = X_h \times X_h$ .

Předpokládejme, že triangulace  $\mathcal{T}_h^b$  je taková, že  $\bar{\Gamma}_N \cap \bar{\Gamma}_D$  jsou vrcholy jejích trojúhelníků a pro každý vrchol  $P \in \partial\Omega_h^b$  platí také, že  $P \in \partial\Omega^b$ . Označme  $\Gamma_{Wh}$  a  $\Gamma_{Dh}^b$  lomené čáry takové, že vrcholy  $P \in \Gamma_W$  určují  $\Gamma_{Wh}$ , resp. vrcholy  $P \in \Gamma_D$  určují  $\Gamma_{Dh}^b$ . Na těchto částech hranice  $\partial\Omega_h^b$  definujeme okrajové podmínky analogické podmínkám (2.39d) a (2.39e):

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{0} \quad \text{na } (0, T) \times \Gamma_{Dh}^b, \quad (3.7a)$$

$$\sum_{j=1}^3 \tau_{ij}^b n_j = T_{hi}^n \quad \text{na } (0, T) \times \Gamma_{Wh}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.7b)$$

kde  $\mathbf{T}_h^n$  je aproximace  $\mathbf{T}^n$ .

Definujeme systém  $V_h$ , kde  $V_h \subset X_h$  a platí

$$V_h = \left\{ y_h \in X_h \mid y_h|_{\bar{\Gamma}_{Dh}^b} = 0 \right\} \quad (3.8)$$

a  $\mathbf{V}_h = V_h \times V_h$ .

Pro tyto konečně dimenzionální prostory platí  $X_h \subset H^1(\Omega_b)$  a  $V_h \subset V$ . Provedeme restrikcí slabé formulace úlohy na konečně dimenzionální prostory  $\mathbf{X}_h, \mathbf{V}_h$ .

Předpokládejme, že zobrazení  $t \in [0, T] \rightarrow \mathbf{f}(t)$  a  $t \in [0, T] \rightarrow \mathbf{T}_h^n(t)$  jsou spojitá v  $[0, T]$ . Přibližné řešení definujeme jako funkci  $\mathbf{u}_h(t) \in \mathbf{V}_h$  takovou, že existují  $\mathbf{u}'_h(t), \mathbf{u}''_h(t)$ , je splněna identita

$$\begin{aligned} (\varrho^b \mathbf{u}''_h(t), \mathbf{y}_h)_{0, \Omega_h^b} + (C \varrho^b \mathbf{u}'_h(t), \mathbf{y}_h)_{0, \Omega_h^b} + a(\mathbf{u}_h, \mathbf{y}_h; t) &= (\mathbf{f}(t), \mathbf{y}_h)_{0, \Omega_h^b} + (\mathbf{T}_h^n(t), \mathbf{y}_h)_{0, \Gamma_{Wh}}, \\ \forall \mathbf{y}_h \in \mathbf{V}_h, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned} \quad (3.9)$$

a počáteční podmínky

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_h^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_h^b, \quad (3.10a)$$

$$\mathbf{u}'_h(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{z}_h^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_h^b. \quad (3.10b)$$

V knize [16] najdeme důkaz konvergence přibližných řešení  $\mathbf{u}_h$  k řešení  $\mathbf{u}$  vzhledem k  $h$ .

Zadanou úlohu najít přibližné řešení (3.9) převedeme na soustavu lineárních obyčejných diferenciálních rovnic. Začneme definicí báze prostorů  $X_h$  a  $V_h$ . Označme  $m$  počet všech vrcholů v  $\mathcal{T}_h^b$  a  $n$  počet všech vrcholů v  $\Omega_h^b \cup \Gamma_{Wh}$ . Očíslování vrcholů provedeme tak, že  $P_1, \dots, P_n$  jsou vrcholy v  $\Omega_h^b \cup \Gamma_{Wh}$  a  $P_{n+1}, \dots, P_m$  jsou vrcholy z  $\bar{\Gamma}_{Dh}^b$ . Definujeme bázi v  $X_h$ :

$$\varphi_j \in X_h : \varphi_j(P_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, m \quad (3.11)$$

a bázi ve  $V_h$ :

$$\varphi_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.12)$$

Označme  $u_{hi} \in V_h$ ,  $i = 1, 2$  složky funkce  $\mathbf{u}_h$ . Funkce  $u_{hi}$ ,  $i = 1, 2$ , vyjádříme v čase  $t \in [0, T]$  pomocí báze funkcí prostoru  $X_h$  ve tvaru

$$u_{hi}(t) = \sum_{j=1}^n d_j^{(i)}(t) \varphi_j, \quad i = 1, 2, \quad d_j^{(i)}(t) = u_{hi}(P_j, t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.13)$$

Každou funkci  $\mathbf{u}_h \in V_h$  je tedy možné vyjádřit pomocí  $2n$  koeficientů  $d_j^{(i)}(t) \in \mathbb{R}$ , které se rovnají hodnotám funkce  $\mathbf{u}_h$  ve vrcholech. Máme tedy celkem  $N = 2n$  neznámých funkcí  $d_j^{(i)}(t)$ ,  $i = 1, 2, j = 1, \dots, n$ . Definujeme

$$\mathbf{d} = (d_1^{(1)}, \dots, d_n^{(1)}, d_1^{(2)}, \dots, d_n^{(2)})^T. \quad (3.14)$$



Podobně vyjádříme časové derivace funkce  $\mathbf{u}_h$ , pomocí časových derivací funkce  $\mathbf{d}(t)$ :

$$u'_{hi}(t) = \sum_{j=1}^n d'_{(i)j}(t)\varphi_j, \quad (3.15a)$$

$$u''_{hi}(t) = \sum_{j=1}^n d''_{(i)j}(t)\varphi_j, \quad i = 1, 2, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.15b)$$

$$(3.15c)$$

Rovnici diskrétního problému (3.9) nyní převedeme do tvaru s bázovými funkcemi. Za testovací funkce  $\mathbf{y}_h$  dosadíme postupně bázové funkce  $(\varphi_j, 0)$ ,  $j = 1, \dots, n$  a  $(0, \varphi_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$  a pomocí bázových funkcí vyjádříme také funkce  $\mathbf{u}_h$ ,  $\mathbf{u}'_h$  a  $\mathbf{u}''_h$ . Budeme postupovat po jednotlivých výrazech rovnice (3.9). Nejprve upravíme první výraz

$$(\varrho^b(\mathbf{u}''_h(t) + C\mathbf{u}'_h(t)), (\varphi_j, 0))_{0, \Omega_h^b} = \sum_{i=1}^n (\varrho^b\varphi_i, \varphi_j)_{0, \Omega_h^b} (d''_{(1)i}(t) + Cd'_{(1)i}(t)), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.16)$$

Podobně získáme

$$(\varrho^b(\mathbf{u}''_h(t) + C\mathbf{u}'_h(t)), (0, \varphi_j))_{0, \Omega_h^b} = \sum_{i=1}^n (\varrho^b\varphi_i, \varphi_j)_{0, \Omega_h^b} (d''_{(2)i}(t) + Cd'_{(2)i}(t)), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.17)$$

Nechť  $N = 2n$  a definujme prvky  $m_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  jako

$$m_{ij} = m_{(i+n)(j+n)} = (\varrho^b\varphi_i, \varphi_j)_{0, \Omega_h^b}, \quad (3.18a)$$

$$m_{(i+n)j} = m_{i(j+n)} = 0, \quad (3.18b)$$

$$i, j = 1, \dots, n.$$

Druhý výraz nejprve rozepíšeme ve tvaru:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{y}_h) &= \int_{\Omega_h^b} \lambda \left( \frac{\partial u_{h1}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{h2}}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial y_{h1}}{\partial x_1} + \frac{\partial y_{h2}}{\partial x_2} \right) d\mathbf{x} \\ &\quad + 2 \int_{\Omega_h^b} \mu \left( \frac{\partial u_{h1}}{\partial x_1} \frac{\partial y_{h1}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{h2}}{\partial x_2} \frac{\partial y_{h2}}{\partial x_2} \right) d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega_h^b} \mu \left( \frac{\partial u_{h1}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_{h2}}{\partial x_1} \right) \left( \frac{\partial y_{h1}}{\partial x_2} + \frac{\partial y_{h2}}{\partial x_1} \right) d\mathbf{x}. \quad (3.19) \end{aligned}$$

Pak za testovací funkce  $\mathbf{y}_h$  v (3.19) dosadíme postupně bázové funkce  $(\varphi_j, 0)$ ,  $j = 1, \dots, n$  a  $(0, \varphi_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Po úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, (\varphi_j, 0)) &= \int_{\Omega_h^b} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_{h1}}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u_{h1}}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega_h^b} \lambda \frac{\partial u_{h2}}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u_{h2}}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.20a)$$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, (0, \varphi_j)) &= \int_{\Omega_h^b} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_{h2}}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial u_{h2}}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega_h^b} \lambda \frac{\partial u_{h1}}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial u_{h1}}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.20b)$$

$j = 1, \dots, n.$

Konečně funkci  $\mathbf{u}_h$  vyjádříme ve tvaru (3.13), načež dostaneme

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, (\varphi_j, 0)) &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_h^b} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} \, d\mathbf{x} \, d_i^{(1)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_h^b} \lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} \, d\mathbf{x} \, d_i^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.21a)$$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, (0, \varphi_j)) &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_h^b} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \, d\mathbf{x} \, d_i^{(2)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_h^b} \lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \, d\mathbf{x} \, d_i^{(1)}, \end{aligned} \quad (3.21b)$$

$j = 1, \dots, n.$

Definujeme prvky  $k_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  jako

$$k_{ij} = \int_{\Omega_h^b} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} \, d\mathbf{x}, \quad (3.22a)$$

$$k_{(i+n)j} = \int_{\Omega_h^b} \lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} \, d\mathbf{x}, \quad (3.22b)$$

$$k_{i(j+n)} = \int_{\Omega_h^b} \lambda \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \, d\mathbf{x}, \quad (3.22c)$$

$$k_{(i+n)(j+n)} = \int_{\Omega_h^b} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \, d\mathbf{x}, \quad (3.22d)$$

$$i, j = 1, \dots, n.$$

Zbývá nám pravá strana. Definujeme koeficienty  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , následujícím způsobem

$$g_i(t) = (f_1(t), \varphi_i)_{0, \Omega_h^b} + (T_{h1}^n(t), \varphi_i)_{0, \Gamma_{Wh}}, \quad (3.23a)$$

$$g_{i+n}(t) = (f_2(t), \varphi_i)_{0, \Omega_h^b} + (T_{h2}^n(t), \varphi_i)_{0, \Gamma_{Wh}}, \quad (3.23b)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Označme  $\mathbb{M} = (m_{ij})_{i,j=1}^N$  tzv. *hmotnostní matici*,  $\mathbb{K} = (k_{ij})_{i,j=1}^N$  tzv. *matici tuhosti* a vektor pravé strany  $\mathbf{G}(t) = (g_1(t), \dots, g_N(t))$ . Pak diskrétní problém (3.9) lze ekvivalentně zapsat jako soustavu  $N$  lineárních obyčejných diferenciálních rovnic

$$\mathbb{M}(\mathbf{d}'(t) + C\mathbf{d}'(t)) + \mathbb{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{G}(t), \quad \mathbf{d} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{G} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N. \quad (3.24)$$

K soustavě (3.24) přidáme počáteční podmínky. Nechť

$$\mathbf{u}_h^0(\mathbf{x}) = \left( \sum_{i=1}^n d_{(1)}^0 \varphi_i(\mathbf{x}), \sum_{i=1}^n d_{(2)}^0 \varphi_i(\mathbf{x}) \right)^T, \quad (3.25a)$$

$$\mathbf{z}_h^0(\mathbf{x}) = \left( \sum_{i=1}^n \eta_{(1)}^0 \varphi_i(\mathbf{x}), \sum_{i=1}^n \eta_{(2)}^0 \varphi_i(\mathbf{x}) \right)^T, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_h^b. \quad (3.25b)$$

Pak systém (3.24) můžeme doplnit podmínkami

$$\mathbf{d}(0) = \mathbf{d}^0, \quad \mathbf{d}^0 \in \mathbb{R}^N, \quad (3.26a)$$

$$\mathbf{d}'(0) = \boldsymbol{\eta}^0, \quad \boldsymbol{\eta}^0 \in \mathbb{R}^N, \quad (3.26b)$$

kteří jsou ekvivalentní s podmínkami (3.10).

Abychom mohli vyjádřit jednoduše prvky matic  $\mathbb{M}$ ,  $\mathbb{K}$  a vektoru  $\mathbf{G}(t)$ , použijeme k aproximaci integrálů numerickou integraci. Pro výpočet integrálu přes libovolný prvek  $K \in \mathcal{T}_h^b$  použijeme aproximaci

$$\int_K \psi \, d\mathbf{x} \approx \frac{1}{3} |K| \sum_{i=1}^3 \psi(P_i^K), \quad (3.27)$$

kde  $P_i^K$  jsou vrcholy trojúhelníka  $K \in \mathcal{T}_h^b$  a  $|K|$  je jeho plocha. K vyjádření pravé strany rovnice použijeme navíc aproximaci

$$\int_{\Gamma} \psi \, d\mathbf{x} \approx \frac{1}{2} |\Gamma| (\psi(P_1^{\Gamma}) + \psi(P_2^{\Gamma})), \quad (3.28)$$

kde  $\Gamma \subset \bar{\Gamma}_{Wh}$  taková, že je stranou některého trojúhelníka,  $P_1^{\Gamma}, P_2^{\Gamma}$  jsou její koncové body a  $|\Gamma|$  je její délka.

Určíme nejprve prvky  $m_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , hmotnostní matice  $\mathbb{M}$ . Platí

$$m_{ij} = \int_{\Omega_h^b} \varrho^b \varphi_i \varphi_j \, d\mathbf{x} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h^b} \int_K \varrho^b \varphi_i \varphi_j \, d\mathbf{x}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.29)$$

Vzhledem k tomu, že použijeme numerickou integraci (3.27), bude matice  $\mathbb{M}$  diagonální a prvky na diagonále určuje hustota  $\varrho^b$  v příslušném vrcholu triangulace a velikost nosiče bázové funkce. Navíc obvykle je možné uvažovat hustotu  $\varrho^b$  jako konstantu. Je tedy

$$m_{ij} = \delta_{ij}m_i, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.30)$$

kde

$$m_i = \frac{1}{3}\varrho^b|\text{supp}(\varphi_i)| = \frac{1}{3}\varrho^b \sum_{K \in \mathcal{T}_h^b; P_i \in K} |K|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.31)$$

Dříve než vyjádříme prvky matice  $\mathbb{K}$ , je dobré si uvědomit, že pro  $\varphi \in X_h$  jsou  $\varphi|_K$  lineární funkce a tedy  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}|_K$  jsou funkce konstantní. Dále uvažujeme, že koeficienty  $\lambda(x)$ ,  $\mu(x)$  jsou také funkce konstantní na jednotlivých prvcích triangulace. Budeme značit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \varphi_K^{(i)}, \quad \mathbf{x} \in K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^b, \quad (3.32a)$$

$$\lambda(\mathbf{x}) = \lambda_K, \quad \mathbf{x} \in K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^b, \quad (3.32b)$$

$$\mu(\mathbf{x}) = \mu_K, \quad \mathbf{x} \in K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^b, \quad (3.32c)$$

kde  $\varphi_K^{(i)}$ ,  $\lambda_K$  a  $\mu_K$  jsou reálné koeficienty.

Vzorce pro prvky matice  $\mathbb{K}$  upravíme podle následujícího postupu

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \int_{\Omega_h^b} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} \, d\mathbf{x} = \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h^b} \int_K (\lambda_K + 2\mu_K) \varphi_{iK}^{(1)} \varphi_{jK}^{(1)} + \mu_K \varphi_{iK}^{(2)} \varphi_{jK}^{(2)} \, d\mathbf{x} = \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h^b} |K| \left( (\lambda_K + 2\mu_K) \varphi_{iK}^{(1)} \varphi_{jK}^{(1)} + \mu_K \varphi_{iK}^{(2)} \varphi_{jK}^{(2)} \right) = \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h^b; P_i, P_j \in K} |K| \left( (\lambda_K + 2\mu_K) \varphi_{iK}^{(1)} \varphi_{jK}^{(1)} + \mu_K \varphi_{iK}^{(2)} \varphi_{jK}^{(2)} \right), \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Analogicky bude platit

$$k_{(i+n)j} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h^b; P_i, P_j \in K} |K| \left( \lambda_K \varphi_{iK}^{(2)} \varphi_{jK}^{(1)} + \mu_K \varphi_{iK}^{(1)} \varphi_{jK}^{(2)} \right), \quad (3.34a)$$

$$k_{i(j+n)} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h^b; P_i, P_j \in K} |K| \left( \lambda_K \varphi_{iK}^{(1)} \varphi_{jK}^{(2)} + \mu_K \varphi_{iK}^{(2)} \varphi_{jK}^{(1)} \right), \quad (3.34b)$$

$$\begin{aligned} k_{(i+n)(j+n)} &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h^b; P_i, P_j \in K} |K| \left( (\lambda_K + 2\mu_K) \varphi_{iK}^{(2)} \varphi_{jK}^{(2)} + \mu_K \varphi_{iK}^{(1)} \varphi_{jK}^{(1)} \right), \quad (3.34c) \\ & \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Prvky pravé strany  $\mathbf{G}$  aproximujeme opět pomocí numerické integrace. Aproximace pro jednoduchost opět značíme stejně a po podobných úpravách jako u prvků hmotnostní matice bude

$$g_i(t) = \frac{1}{3} \sum_{K \in \mathcal{T}_h^b; P_i \in K} |K| f_1(t, P_i) + \frac{1}{2} \sum_{\Gamma \in \Gamma_{Wh}} |\Gamma| T_{h1}^n(t, P_i), \quad (3.35a)$$

$$g_{i+n}(t) = \frac{1}{3} \sum_{K \in \mathcal{T}_h^b; P_i \in K} |K| f_2(t, P_i) + \frac{1}{2} \sum_{\Gamma \in \Gamma_{Wh}; P_i \in \Gamma} |\Gamma| T_{h2}^n(t, P_i), \quad (3.35b)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

## 3.2 Diskretizace problému v čase

Nyní se budeme zabývat otázkou, jak řešit počáteční úlohu (3.24), (3.26). Bylo by možné převést soustavu (3.24) na systém obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu a pak aplikovat nějakou standardní metodu, jako např. Rungeovu - Kuttovu metodu. Zde ale použijeme Newmarkovu metodu, která se jeví výhodná pro řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu.

### 3.2.1 Newmarkova metoda

Nejprve odvodíme *Newmarkovo schéma* pro obecnou počáteční úlohu 2. řádu

$$y''(t) = \varphi(t, y(t), y'(t)), \quad (3.36)$$

$$y(0) = y_0, \quad (3.37)$$

$$y'(0) = z_0, \quad (3.38)$$

kde  $\varphi : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá funkce a  $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ . Zvolme dělení  $D = \{t_n\}_{n=1}^N$  intervalu  $[0, T]$  tak, že  $t_0 = 0$ ,  $t_N = T$  a  $t_{n+1} = t_n + \tau_n, n = 0, \dots, N - 1$ . Dále předpokládejme, že  $y \in C^4([0, T])$ . Vyjádříme hodnotu  $y(t_{n+1})$  pomocí Taylorova rozvoje třetího řádu v bodě  $t_n$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \tau_n y'(t_n) + \frac{1}{2} \tau_n^2 y''(t_n) + \frac{1}{6} \tau_n^3 y'''(t_n) + \mathcal{O}(\tau_n^4). \quad (3.39)$$

Na pravé straně přičteme a odečteme člen  $\tau_n^2 \beta (y''(t_{n+1}) - y''(t_n))$ , kde  $\beta \in \mathbb{R}$  je parametr. Po jednoduché úpravě dostaneme rovnost

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) = & y(t_n) + \tau_n y'(t_n) + \tau_n^2 \left( \beta y''(t_{n+1}) + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) y''(t_n) \right) - \\ & - \tau_n^2 (\beta y''(t_{n+1}) - \beta y''(t_n)) + \frac{1}{6} \tau_n^3 y'''(t_n) + \mathcal{O}(\tau_n^4). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Z Taylorova rozvoje druhé derivace  $y$  podle  $t$  v bodě  $t_n$  platí

$$y''(t_{n+1}) - y''(t_n) = \tau_n y'''(t_n) + \mathcal{O}(\tau_n^2). \quad (3.41)$$

Předchozí rovnost tedy můžeme psát ve tvaru

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) = & y(t_n) + \tau_n y'(t_n) + \tau_n^2 \left( \beta y''(t_{n+1}) + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) y''(t_n) \right) + \\ & + \tau_n^3 \left( \frac{1}{6} - \beta \right) y'''(t_n) + \mathcal{O}(\tau_n^4). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Člen  $\tau_n^3 \left( \frac{1}{6} - \beta \right) y'''(t_n) + \mathcal{O}(\tau_n^4)$  budeme považovat za chybu řádu  $\mathcal{O}(\tau_n^3)$  a jelikož předpokládáme, že  $y$  je řešením uvedené počáteční úlohy získáme rovnost

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) = & y(t_n) + \tau_n y'(t_n) + \\ & + \tau_n^2 \left( \beta \varphi(t_{n+1}, y(t_{n+1}), y'(t_{n+1})) + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \varphi(t_n, y(t_n), y'(t_n)) \right) + \mathcal{O}(\tau_n^3). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Podobně můžeme z Taylorova rozvoje odvodit i vztah pro hodnotu první derivace v bodě  $t_{n+1}$ :

$$y'(t_{n+1}) = y'(t_n) + \tau_n y''(t_n) + \frac{1}{2} \tau_n^2 y'''(t_n) + \mathcal{O}(\tau_n^3). \quad (3.44)$$

Přičteme a odečteme tentokrát člen  $\gamma \tau_n (y''(t_{n+1}) - y''(t_n))$ , kde  $\gamma \in \mathbb{R}$  je další parametr. Po úpravě dostaneme rovnost

$$\begin{aligned} y'(t_{n+1}) &= y'(t_n) + \tau_n (\gamma y''(t_{n+1}) + (1 - \gamma) y''(t_n)) + \\ &+ \tau_n^2 \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) y'''(t_n) + \mathcal{O}(\tau_n^3). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Člen  $\tau_n^2 \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) y'''(t_n) + \mathcal{O}(\tau_n^3)$  můžeme považovat za chybu řádu  $\mathcal{O}(\tau_n^2)$ . Opět za předpokladu, že  $y$  je řešením uvedené počáteční úlohy, získáme rovnost

$$\begin{aligned} y'(t_{n+1}) &= y'(t_n) + \tau_n (\gamma \varphi(t_{n+1}, y(t_{n+1}), y'(t_{n+1})) + \\ &+ (1 - \gamma) \varphi(t_n, y(t_n), y'(t_n))) + \mathcal{O}(\tau_n^2). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Nyní můžeme zavést aproximace  $y_n \approx y(t_n)$ ,  $z_n \approx y'(t_n)$ ,  $\varphi_n = \varphi(t_n, y_n, z_n)$ , a zanedbat diskretizační chyby. Dostaneme tak Newmarkovo schéma v konečné podobě

$$y_{n+1} = y_n + \tau_n z_n + \tau_n^2 \left( \beta \varphi_{n+1} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \varphi_n \right), \quad (3.47a)$$

$$z_{n+1} = z_n + \tau_n (\gamma \varphi_{n+1} + (1 - \gamma) \varphi_n). \quad (3.47b)$$

Při numerických experimentech jsme volili  $\gamma = \frac{1}{2}$  a  $\beta = \frac{1}{4}$ . Pro tuto volbu  $\gamma$  dosahuje metoda řádu 2.

### 3.2.2 Numerické řešení počáteční úlohy

Z předešlé části je zřejmé, že dále řešíme počáteční problém 2. řádu. Je zadána soustava obyčejných diferenciálních rovnic (3.24) a počáteční podmínky (3.26). Přibližné řešení této úlohy získáme pomocí Newmarkovy metody.

Soustavu, kterou řešíme, převedeme nejprve do vhodnějšího tvaru

$$\mathbf{d}'' = \mathbb{M}^{-1} \mathbf{G} - \mathbb{M}^{-1} \mathbb{K} \mathbf{d} - C \mathbf{d}'. \quad (3.48)$$

Dále aproximujeme  $\mathbf{d}(t)$  v časových okamžicích  $t_n$  pomocí Newmarkova schématu. Označme  $\mathbf{d}_n \approx \mathbf{d}(t_n)$ ,  $\mathbf{z}_n \approx \mathbf{d}'(t_n)$ ,  $\mathbf{d}_0 := \mathbf{d}(0)$ ,  $\mathbf{z}_0 := \mathbf{d}'(0)$  a  $\mathbf{G}_n := \mathbf{G}(t_n)$ . Můžeme psát

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + \tau_n \mathbf{z}_n + \tau_n^2 \left( \beta (\mathbb{M}^{-1} \mathbf{G}_{n+1} - \mathbb{M}^{-1} \mathbb{K} \mathbf{d}_{n+1} - C \mathbf{z}_{n+1}) + \right. \\ &\left. + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) (\mathbb{M}^{-1} \mathbf{G}_n - \mathbb{M}^{-1} \mathbb{K} \mathbf{d}_n - C \mathbf{z}_n) \right), \end{aligned} \quad (3.49a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{n+1} &= \mathbf{z}_n + \tau_n \left( \gamma (\mathbb{M}^{-1} \mathbf{G}_{n+1} - \mathbb{M}^{-1} \mathbb{K} \mathbf{d}_{n+1} - C \mathbf{z}_{n+1}) + \right. \\ &\left. + (1 - \gamma) (\mathbb{M}^{-1} \mathbf{G}_n - \mathbb{M}^{-1} \mathbb{K} \mathbf{d}_n - C \mathbf{z}_n) \right). \end{aligned} \quad (3.49b)$$

Druhou rovnici upravíme tak, abychom vyjádřili explicitně  $\mathbf{z}_{n+1}$

$$\mathbf{z}_{n+1} = \frac{1}{1 + C\gamma\tau_n} \left( \mathbf{z}_n + \tau_n \left( \gamma (\mathbb{M}^{-1}\mathbf{G}_{n+1} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}\mathbf{d}_{n+1}) + (1 - \gamma) (\mathbb{M}^{-1}\mathbf{G}_n - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}\mathbf{d}_n - C\mathbf{z}_n) \right) \right). \quad (3.50)$$

Dosadíme za  $\mathbf{z}_{n+1}$  do první rovnice:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1} = & \mathbf{d}_n + \tau_n \mathbf{z}_n + \beta\tau_n^2 \left( \mathbb{M}^{-1}\mathbf{G}_{n+1} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}\mathbf{d}_{n+1} - \frac{C}{1 + C\gamma\tau_n} \mathbf{z}_n \right. \\ & - \frac{C\gamma\tau_n}{1 + C\gamma\tau_n} (\mathbb{M}^{-1}\mathbf{G}_{n+1} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}\mathbf{d}_{n+1}) \\ & \left. - \frac{C\tau_n}{1 + C\gamma\tau_n} (1 - \gamma) (\mathbb{M}^{-1}\mathbf{G}_n - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}\mathbf{d}_n - C\mathbf{z}_n) \right) \\ & + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \tau_n^2 (\mathbb{M}^{-1}\mathbf{G}_n - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}\mathbf{d}_n - C\mathbf{z}_n). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Pro zjednodušení definujeme

$$\xi_n = \beta\tau_n^2 \left( 1 - \frac{C\gamma\tau_n}{1 + C\gamma\tau_n} \right) = \frac{\beta\tau_n^2}{1 + C\gamma\tau_n}. \quad (3.52)$$

Dalšími úpravami a nahrazením uvedeného výrazu faktorem  $\xi_n$  dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1} = & \mathbf{d}_n + \tau_n \mathbf{z}_n - C\xi_n \mathbf{z}_n + \xi_n (\mathbb{M}^{-1}\mathbf{G}_{n+1} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}\mathbf{d}_{n+1}) \\ & + \left( \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \tau_n^2 - C(1 - \gamma)\xi_n\tau_n \right) (\mathbb{M}^{-1}\mathbf{G}_n - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}\mathbf{d}_n - C\mathbf{z}_n). \end{aligned} \quad (3.53)$$

Neznámou v této rovnici je  $\mathbf{d}_{n+1}$ . Převědeme všechny členy s  $\mathbf{d}_{n+1}$  na levou stranu a dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} (\mathbb{I} + \xi_n \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}) \mathbf{d}_{n+1} = & \mathbf{d}_n + (\tau_n - C\xi_n) \mathbf{z}_n + \xi_n \mathbb{M}^{-1}\mathbf{G}_{n+1} + \\ & + \left( C(\gamma - 1)\xi_n\tau_n + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \tau_n^2 \right) (\mathbb{M}^{-1}\mathbf{G}_n - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}\mathbf{d}_n - C\mathbf{z}_n). \end{aligned} \quad (3.54)$$



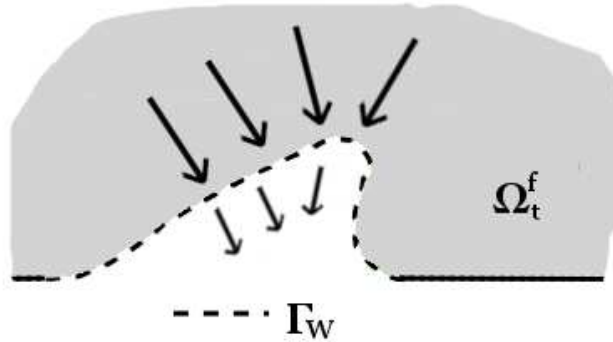
### 3.3 Interakce proudící tekutiny a elastického tělesa

Jak název napovídá, budeme se v této části snažit propojit teorii proudění tekutiny a teorii popisující pohyb elastického tělesa, což je ostatně cílem celé práce. Nezůstaneme ovšem pouze u teorie a ukážeme také způsob implementace.

Proudění tekutiny a deformaci elastického tělesa jsme dosud uvažovali na příslušných oblastech jako oddělené děje. Na společné hranici obou oblastí je nutné zohlednit vzájemné působení tekutiny a tělesa. Jako společnou hranici označujeme část hranice  $\Gamma_W$  oblasti  $\Omega^b$ , resp. část hranice  $\Gamma_{W_t}$  oblasti  $\Omega_t^f$ , přičemž platí

$$\Gamma_{W_t} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3; \mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(t, \mathbf{X}), \forall \mathbf{X} \in \Gamma_W \}. \quad (3.55)$$

Je tedy zřejmé, že platí  $\Gamma_W = \Gamma_{W_0}$ . Posunutí  $\mathbf{u}$  hranice  $\Gamma_W$  v čase  $t$  nám definuje oblast  $\Omega_t^f$  a můžeme takto získat vhodné zobrazení  $\mathcal{A}_t$  z definice (1.30), které splňuje podmínky (1.31). Naopak, pokud známe výpočetní oblast  $\Omega_t^f$  proudění tekutiny v čase  $t$  a umíme vyřešit problém popisující proudění, můžeme určit plošnou sílu  $\mathbf{T}^n$  působící na těleso  $\Omega_b$  na části hranice  $\Gamma_W$ , viz obr. 3.1.



Obrázek 3.1: Působení sil na společné hranici.

Tato plošná síla je definována vzorcem

$$T_i^n = - \sum_{j=1}^3 \tau_{ij}^f n_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.56)$$

kde  $\mathbf{n}$  je jednotková vnější normála k hranici oblasti  $\partial\Omega^b$  a  $\tau_{ij}^f$  jsou složky tenzoru napětí tekutiny, které určíme z rovnice

$$\tau_{ij}^f = \varrho^f \left( -p\delta_{ij} + \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.57)$$

Připomeňme, že  $\rho^f$  značí hustotu tekutiny,  $p$  kinematický tlak a  $\nu$  kinematický koeficient vazkosti.

Při implementaci postupujeme tedy následovně. Nejprve provedeme výpočet řešení problému proudění tekutiny na oblasti  $\Omega_{t_n}^f$ . Ze získané rychlosti  $\mathbf{v}_h$  a tlaku  $p_h$  vypočítáme složky tenzoru napětí  $\tau_{ij}^f$ . Můžeme tedy vypočítat plošnou sílu působící na oblast  $\Omega^b$  na hranici  $\Gamma_W$ . Provedeme výpočet posunutí  $\mathbf{u}_h$  v čase  $t_n$ . Posunutí  $\mathbf{u}_h$  určuje zobrazení  $\mathcal{A}_{t_{n+1}}$ , oblast  $\Omega_{t_{n+1}}^f$  a aproximuje rychlost deformace oblasti  $\mathbf{w}^{n+1}$ , viz část 1.4 o diskretizaci proudění tekutiny. Potom můžeme přejít k dalšímu časovému kroku  $t_{n+1}$ .

Popišme tento proces podrobněji. V diskrétním modelu představuje hranici  $\Gamma_W$  lomená čára, která je určena vrcholy na hranici. V prvním kroku jsou tyto společné vrcholy určeny jednoduše tak, že se porovnají jejich souřadnice. Výpočet tenzoru napětí provedeme v každém z těchto vrcholů zvlášť a určíme plošnou sílu, kterou získáme ze vzorce (3.56), přičemž vnější normálu ve vrcholu určíme jako aritmetický průměr vnějších normál hran, které spolu mají společný právě příslušný vrchol. Při řešení problému elasticity nás zajímá plošná síla působící na jednotlivé hrany. Tuto sílu vypočítáme tak, že tentokrát vezmeme aritmetický průměr plošných sil, které jsme určili v krajních vrcholech této hrany. Při předávání hodnot deformace je postup mnohem jednodušší. V každém kroku jsou předány hodnoty deformace ve vrcholech na společné hranici. Jak již bylo uvedeno, vzájemné přiřazení vrcholů na společné hranici jsme provedli v prvním kroku.

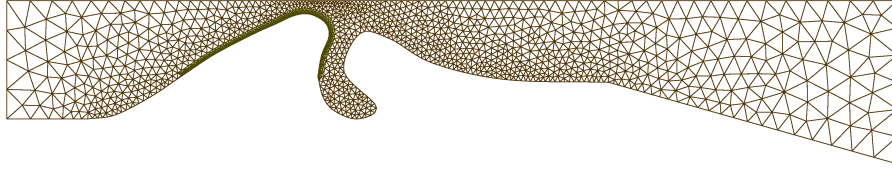
# Kapitola 4

## Numerické experimenty

Na základě teoretických výsledků byl vytvořen software, pomocí kterého lze řešit úlohy interakce proudící tekutiny a elastického tělesa. Jak jsme již poznamenali v úvodu, pro řešení problému proudění tekutiny v oblasti závislé na čase použijeme program FEMFLUID [18] a k řešení problému deformace elastického tělesa program, který jsme nově vytvořili. Tento program, který je použitelný i samostatně, jsme zakomponovali jako programový modul do programu FEMFLUID. V této kapitole je uvedeno několik poznámek k implementaci. V předchozí kapitole již byl naznačen způsob, jak realizovat přechodové podmínky interakce. Dále uvedeme možné způsoby vygenerování sítí a způsob implementace použité metody konečných prvků a Newmarkovy metody.

Tato kapitola obsahuje především obrázky, grafy a jiné numerické výsledky. Jako první jsou to výstupy programu pro řešení problému deformace elastického tělesa, který jsme použili na jednoduché obdélníkové a čtvercové modely elastických těles. Postupně jsme řešili příklady s různým časovým krokem, různými materiálovými vlastnostmi a různými okrajovými podmínkami. Na závěr jsou uvedeny vizualizace přibližných řešení úloh interakce proudění a elastického tělesa, které mají simulovat pohyb hlasivek a proudění vzduchu kolem nich. Výpočetní oblast v těchto příkladech přibližně odpovídá skutečnému tvaru hlasivky. Pro některé výsledky provedeme podrobnější analýzu.

Řada dalších výsledků se nachází na příloženém disku. Zajímavé a názorné jsou především krátké videosekvence. Další přílohou disku je vytvořený software. Poznamenejme, že k vytvoření programu byl použit programovací jazyk C.



Obrázek 4.1: Ukázka triangulace oblasti tekutiny.

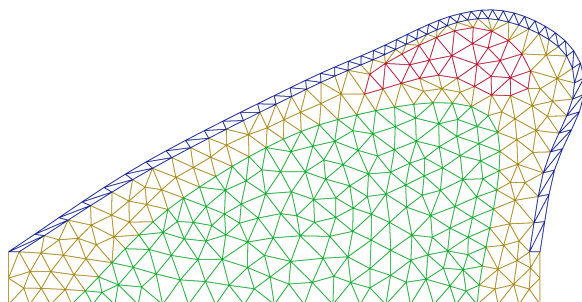
## 4.1 Implementace

V této části popíšeme možnosti generování sítí. Dále se budeme zabývat implementací programu na řešení problému deformace elastického tělesa a na závěr pomocí tohoto programu vyřešíme několik jednoduchých úloh.

### 4.1.1 Generování sítí

Při použití metody konečných prvků je důležité mít vytvořenu vhodnou triangulaci  $\mathcal{T}_h^b$  oblasti  $\Omega_h^b$  a také triangulaci  $\mathcal{T}_h^f$  oblasti  $\Omega_0^f$ . Požadujeme, aby obě triangulace měly dostatečné množství elementů, abychom získali dobré aproximace řešení úloh. Ovšem je nutno podotknout, že se vzrůstajícím počtem elementů vzrůstá výrazně složitost a čas výpočtů. Triangulace  $\mathcal{T}_h^b$  a  $\mathcal{T}_h^f$  je navíc nutné vhodně propojit, vzhledem k tomu, že oblasti tekutiny a tělesa mají společnou hranici  $\Gamma_W$ .

Existuje několik přístupů, jak sestavit triangulace oblastí. Sestrojí se např. jednoduchá hrubá síť, kterou je možné dále zjemňovat. Je vhodné mít více prvků tam, kde se řešení liší o poměrně větší hodnoty. Pro vytvoření triangulací jsme používali software ANGENER [17] a GMSH [20]. Formát souboru triangulace, se kterým pracuje ANGENER, používáme i v našem programu jako standard pro vstupní data sítě. V programu jsou využity vlastnosti tohoto formátu, které zaručují regularitu triangulace ve smyslu metody konečných prvků, kladnou orientaci vrcholů elementů, seřazení vrcholů na hranici a další. Je nutné jednoduše předávat informace mezi oblastí tekutiny a tělesa, a proto je výhodné, aby obě triangulace měly na společné hranici právě jen společné vrcholy. Pro složitější úlohy se jeví vhodnější program GMSH, který umožňuje jednoduše tuto podmínku splnit. Výstup programu GMSH převádíme do formátu programu ANGENER. V programu GMSH jsme jednoduše vytvořili různé podoblasti, na kterých je pak možné definovat např. různé materiálové vlastnosti částí tělesa. Na obrázcích 4.1 a 4.2 vidíme ukázky vytvořených triangulací. Různé podoblasti jsou barevně odlišeny.



Obrázek 4.2: Ukázka triangulace oblasti tělesa.

### 4.1.2 Program pro řešení problému deformace elastického tělesa

Podobně jako jsme nejprve provedli diskretizaci problému v prostoru a poté diskretizaci v čase, je možné i implementaci rozdělit na metodu konečných prvků a Newmarkovu metodu, ale navíc i metodu řešení soustavy lineárních algebraických rovnic.

V prvním kroku program načte vstupní data. Jedná se především o soubor triangulace, který je uložen ve tvaru, který používá program ANGENER, jak již bylo uvedeno výše. Ukládáme zvlášť souřadnice vrcholů, elementy triangulace a části hranice. U elementů triangulace jsou doplněny elastické vlastnosti materiálu, tj. Youngův modul pružnosti a Poissonova konstanta, velikost plochy elementu a gradienty bazových funkcí, jejichž nosič obsahuje příslušný element. U částí hranice je definován typ hranice, tedy přesněji typ okrajové podmínky, která je na této části hranice definována. Pro části hranice, kde je předepsána podmínka působení sil (2.26), vypočítáme její délku a složky vektoru vnější normály. Zde je důležité, aby byla hranice kladně orientovaná, jinak bychom mohli vypočítat složky opačně orientovaného vektoru. Dále rozdělíme vrcholy triangulace na ty, na kterých jsou dána posunutí, tj. náleží hranici, na které je definovaná podmínka (2.34), a na ostatní vrcholy. Ve většině příkladů uvažujeme, že podmínka (2.34) je nulová, a proto se poloha těchto vrcholů nemění. Obecně je program možné použít i s nenulovou podmínkou.

Dále vypočítáme prvky hmotnostní matice  $\mathbb{M}$ , matice tuhosti  $\mathbb{K}$  a vektoru pravé strany  $\mathbf{G}$ , abychom dostali soustavu lineárních obyčejných diferenciálních rovnic (3.24). Vzhledem k tomu, že uvažujeme konstantní hustotu  $\rho^b$  a že elastické vlastnosti materiálu jsou konstantní v čase, stačí prvky matice  $\mathbb{M}$  a  $\mathbb{K}$  vypočítat pouze v prvním kroku. Vektor pravé strany  $\mathbf{G}$  se obvykle s časem mění. Prvky hmotnostní matice vypočítáme podle vzorců (3.30) a (3.31), prvky matice tuhosti podle vzorců (3.33) a (3.34) a složky vektoru pravé strany podle vzorců (3.35). Jelikož nosiče testovacích funkcí jsou malé, budou hmotnostní matice i matice tuhosti řídké matice, tj. matice, které obsahují jen poměrně malý počet nenulových prvků. Ostatně na této myšlence je metoda konečných prvků založena. Matice

je tedy možné uložit jako řádké, čímž šetříme paměť, ale především při práci s řídkými maticemi dosáhneme mnohem větší rychlosti při dalších výpočtech. Soustavu (3.24) dále řešíme pomocí Newmarkovy metody.

Návod na implementaci Newmarkovy metody nám dává vzorec (3.54). Použitím numerické integrace získáme sice diagonální matici hmoty  $\mathbb{M}$ , ze které snadno získáme její inverzi, obecně je ovšem výhodnější vynásobit rovnici (3.54) maticí  $\mathbb{M}$ . Uvažujme obecně nerovnoměrné dělení časového intervalu  $[0, T]$  takové, že  $t_{n+1} = t_n + \tau_n$ , kde  $\tau_n > 0$  a  $t_0 = 0$ . Získáme následující soustavu:

$$\begin{aligned} (\mathbb{M} + \xi_n \mathbb{K}) \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbb{M} \mathbf{d}_n + (\tau_n - C \xi_n) \mathbb{M} \mathbf{z}_n + \xi_n \mathbf{G}_{n+1} + \\ &+ \left( C(\gamma - 1) \xi_n \tau_n + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \tau_n^2 \right) (\mathbf{G}_n - \mathbb{K} \mathbf{d}_n - C \mathbb{M} \mathbf{z}_n). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Připomeňme, že

$$\xi_n = \frac{\beta \tau_n^2}{1 + C \gamma \tau_n}. \quad (4.2)$$

Podobně jako jsme vynásobili rovnici (3.54), vynásobíme také rovnici (3.50):

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \mathbf{z}_{n+1} &= \frac{1}{1 + C \gamma \tau_n} \left( \mathbb{M} \mathbf{z}_n + \tau_n \left( \gamma (\mathbf{G}_{n+1} - \mathbb{K} \mathbf{d}_{n+1}) + \right. \right. \\ &\left. \left. + (1 - \gamma) (\mathbf{G}_n - \mathbb{K} \mathbf{d}_n - C \mathbb{M} \mathbf{z}_n) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Obvykle uvažujeme stejný časový krok  $\tau = \tau_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , můžeme psát také  $\xi = \xi_n$ . Dále definujeme  $\tilde{\mathbf{z}}_n = \mathbb{M} \mathbf{z}_n$ , pak rovnice (4.1) a (4.3) mají tvar

$$\begin{aligned} (\mathbb{M} + \xi \mathbb{K}) \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbb{M} \mathbf{d}_n + (\tau - C \xi) \tilde{\mathbf{z}}_n + \xi \mathbf{G}_{n+1} + \\ &+ \left( C(\gamma - 1) \xi \tau + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \tau^2 \right) (\mathbf{G}_n - \mathbb{K} \mathbf{d}_n - C \tilde{\mathbf{z}}_n), \end{aligned} \quad (4.4a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{z}}_{n+1} &= \frac{1}{1 + C \gamma \tau} \left( \tilde{\mathbf{z}}_n + \tau \left( \gamma (\mathbf{G}_{n+1} - \mathbb{K} \mathbf{d}_{n+1}) + \right. \right. \\ &\left. \left. + (1 - \gamma) (\mathbf{G}_n - \mathbb{K} \mathbf{d}_n - C \tilde{\mathbf{z}}_n) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.4b)$$

Při samotném výpočtu zavádíme několik dalších značení. Do paměti pak ukládáme více informací, abychom neprováděli duplicitní výpočty. Levou stranu rovnice (4.4b) není nutné počítat v každém kroku, definujeme matici  $\mathbb{B}$ :

$$\mathbb{B} = \mathbb{M} + \xi \mathbb{K}. \quad (4.5)$$

Potom definujeme dva reálné koeficienty:

$$\eta_1 = \frac{1}{1 + C \gamma \tau}, \quad \eta_2 = C(\gamma - 1) \xi \tau + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \tau^2. \quad (4.6)$$

Dále definujeme dva vektory  $\mathbf{p}_n^1$  a  $\mathbf{p}_n^2$ , které počítáme v každém kroku.

$$\mathbf{p}_n^1 = \mathbf{G}_n - \mathbb{K}\mathbf{d}_n, \quad (4.7a)$$

$$\mathbf{p}_n^2 = \mathbf{p}_n^1 - C\tilde{\mathbf{z}}_n. \quad (4.7b)$$

Upravíme rovnice (4.4) pomocí těchto značení:

$$\mathbb{B}\mathbf{d}_{n+1} = \mathbb{M}\mathbf{d}_n + (\tau - C\xi)\tilde{\mathbf{z}}_n + \xi\mathbf{G}_{n+1} + \eta_2\mathbf{p}_n^2 \quad (4.8a)$$

$$\tilde{\mathbf{z}}_{n+1} = \eta_1(\tilde{\mathbf{z}}_n + \tau(\gamma\mathbf{p}_{n+1}^1 + (1 - \gamma)\mathbf{p}_n^2)). \quad (4.8b)$$

Tento systém již v podstatě odpovídá skutečné implementaci. Připomeňme, že všechny matice ukládáme jako řídké a tímto způsobem s nimi i pracujeme.

Zbývá vyřešit soustavu (4.8a) lineárních algebraických rovnic. Nejjednodušší by bylo řešit soustavu přímo pomocí Gaussovy eliminace. Ovšem mnohem rychlejšího výpočtu dosáhneme použitím iteračních metod a získáme tak přibližné řešení se zanedbatelnou chybou. Vzhledem k tomu, že matice  $\mathbb{B}$  je symetrická a pozitivně definitní, jelikož matice  $\mathbb{K}$  je také symetrická a pozitivně definitní, použijeme pro řešení soustavy metodu sdružených gradientů. Metodu sdružených gradientů implementujeme opět pro řídké matice. Experimentální výpočty probíhaly dostatečně rychle. Ovšem jistě by bylo možné do budoucna tento výpočet ještě vylepšit, např. použitím předpokládání.

### 4.1.3 Tahová a tlaková zkouška

Častým příkladem teorie pružnosti je tahová zkouška. Uvažujeme tyč o délce  $l$  a průměru  $d$ . Předpokládáme, že osa tyče představuje osu  $x_1$ . Tyč pevně upevníme na jednom konci a na druhém konci ji zatížíme tahovou silou  $F$ .

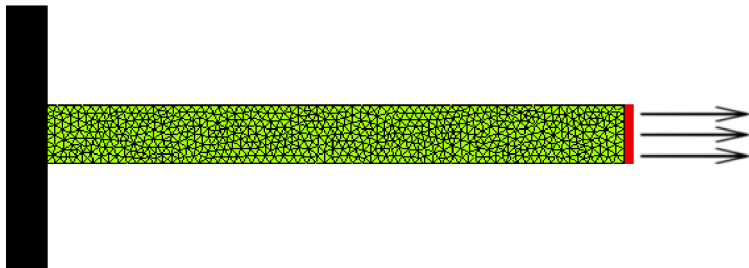
Formulujme odpovídající úlohu. Nechť  $\Omega^b = (-0.01, 0.01) \times (-0.001, 0.001)$ , jedná se tedy o obdélník o stranách 2 cm a 2 mm. Jeho hranu, jejíž krajní body jsou body  $[-0.01, -0.001]$  a  $[-0.01, 0.001]$ , označíme  $\Gamma_D^b$  a předpokládáme, že je pevně uchycena, tj. platí

$$\mathbf{u}^d = 0 \quad (4.9)$$

na  $(0, T) \times \Gamma_D^b$ . Na ostatních hranách předepíšeme okrajovou podmínku (2.39e), kde  $\mathbf{T}^n = 0$  na vodorovných hranách a na svislé hraně je tato plošná síla určena tenzorem napětí o složkách  $\tau_{11} = 2500$ ,  $\tau_{12} = \tau_{22} = 0$ , ale pouze po dobu 0.02 s, jinak je nulová.

Dále předpokládáme, že toto těleso je izotropní a homogenní a vlastnosti materiálu jsou podobné vlastnostem gumy, tj. hustota  $\varrho^b = 1100 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , Youngův modul pružnosti  $E = 10^4 \text{ Pa}$  a Poissonova konstanta  $\sigma = 0.4$ . Hustotu vnějších objemových sil zanedbáváme a předepisujeme nulové počáteční posunutí i rychlost:

$$\mathbf{u}^0 = 0, \quad \mathbf{z}^0 = 0, \quad (4.10)$$



Obrázek 4.3: Tahová zkouška.

v  $\Omega^b$ . Řešíme úlohu deformace elastického tělesa (2.39), kdy volíme  $T = 4$  s.

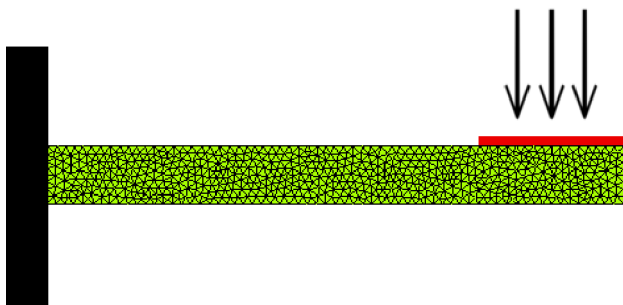
Na obrázku 4.3 je náčrt této úlohy a je také znázorněna zvolená triangulace oblasti  $\Omega_h^b$ . Při numerickém výpočtu jsme použili časový krok  $\tau = 4 \cdot 10^{-4}$  s. Vizualizace přibližného řešení posunutí v některých časových okamžicích je na obr. 4.6.

První úlohu modifikujeme, a to tak, že nyní nebudeme na těleso působit tahem, ale budeme na něj tlačit, jak je ukázáno na obr. 4.4. To znamená, že úloha je stejná, jenom plošná síla  $\mathbf{T}^n$  bude na čtvrtině horní vodorovné strany určena tenzorem napětí o složkách  $\tau_{22} = -500$ ,  $\tau_{11} = \tau_{12} = 0$ , opět pouze po dobu 0.02 s, jinak nechť je nulová. Vizualizace přibližného řešení posunutí v některých časových okamžicích jsou tentokrát na obr. 4.7.

#### 4.1.4 Model hlasivky

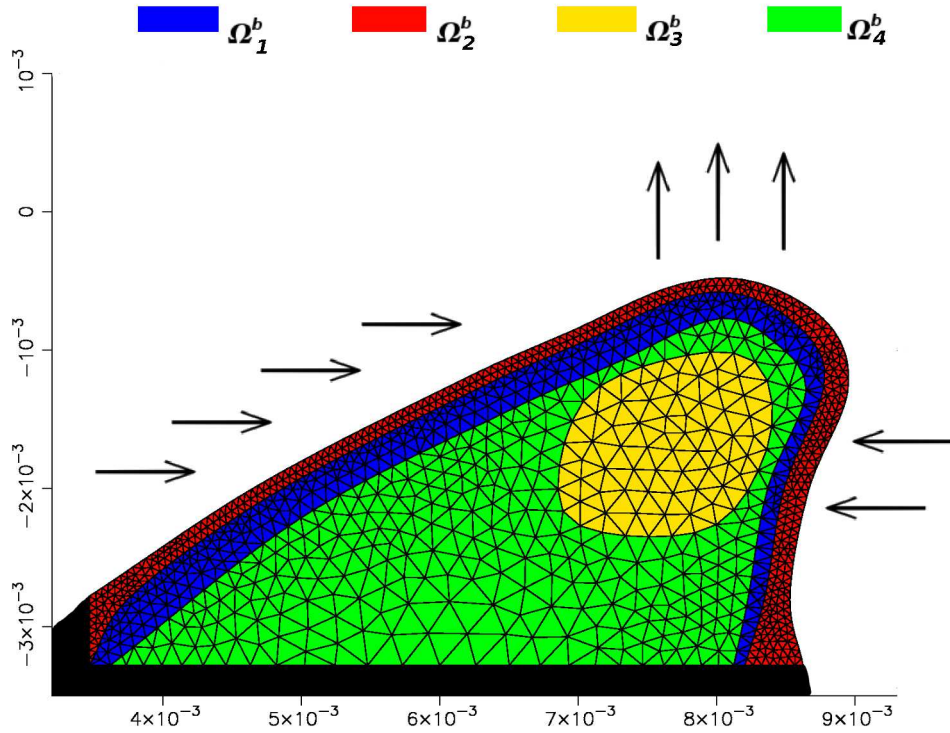
Na obr. 4.5 je oblast, která představuje přibližně tvar hlasivky. Barevně jsme odlišili různé podoblasti, které mají různé materiálové vlastnosti. Uvažujeme sice všude stejnou hustotu  $\rho^b = 1040 \text{ kg.m}^{-3}$ , ale různé hodnoty Youngova modulu pružnosti a Poissonovy konstanty viz tab. 4.1. Na části hranice  $\Gamma_D^b$ , která je na obr. 4.5 zvýrazněna černou barvou, je předepsána okrajová podmínka

$$\mathbf{u}^d = 0. \quad (4.11)$$



Obrázek 4.4: Tlaková zkouška.





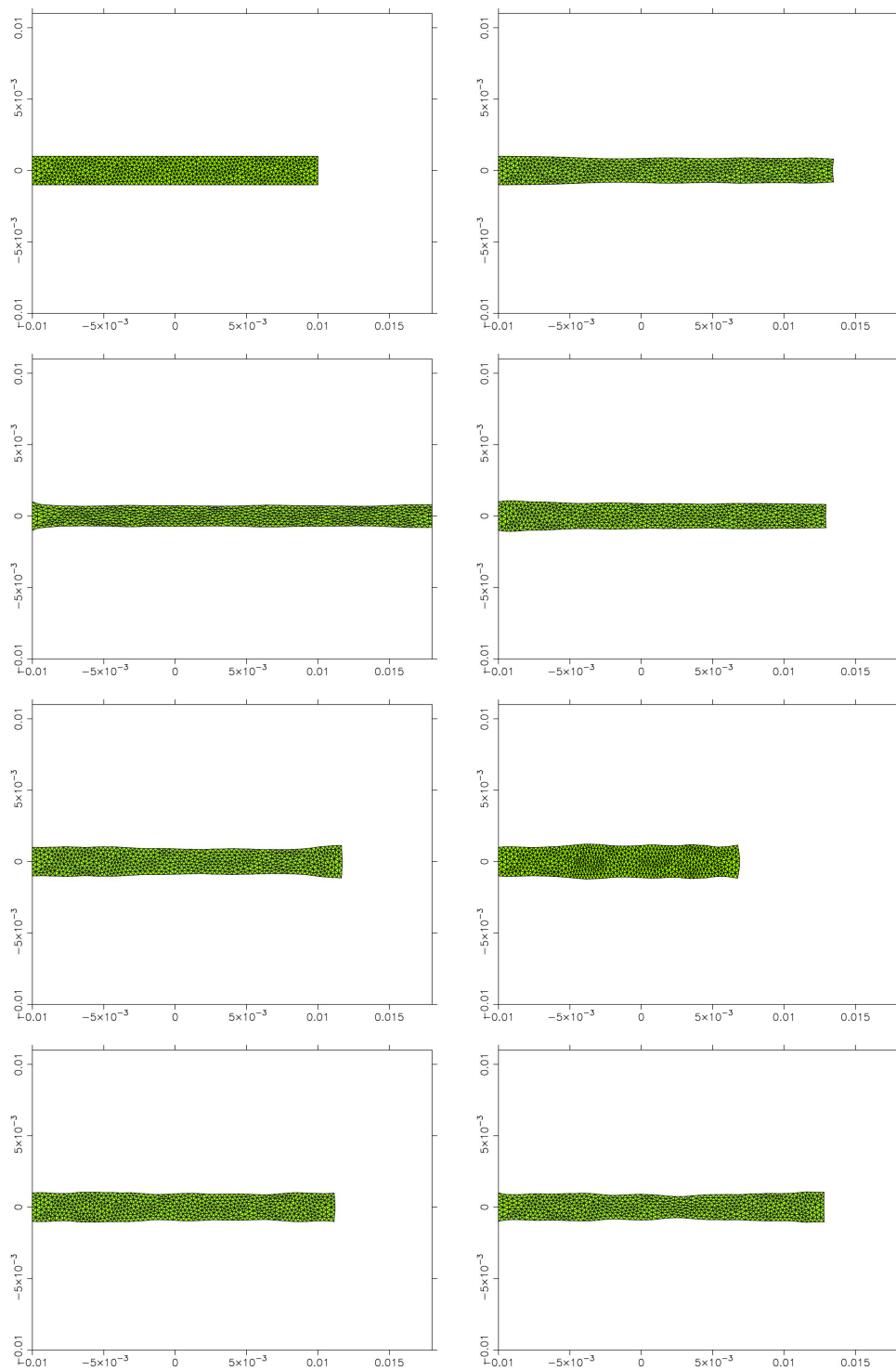
Obrázek 4.5: Přibližný tvar hlasivky.

Na zbylé části hranice  $\Gamma_W$  předepíšme okrajovou podmínku (2.39e). Působení plošných sil  $\mathbf{T}^n$  je naznačeno na obr. 4.5. Tyto síly budou působit po dobu 0.002 s a jsou určeny tenzorem napětí o složkách  $\tau_{11} = \tau_{22} = 1000$ ,  $t_{12} = 0$  na části hranice  $\Gamma_W$ , pro jejíž body platí  $x_1 < 0.0065$ , tenzorem napětí o složkách  $\tau_{11} = \tau_{22} = -800$ ,  $\tau_{12} = 0$  na části hranice  $\Gamma_W$ , pro jejíž body platí  $0.0065 < x_1 < 0.0081$  a tenzorem napětí o složkách  $\tau_{11} = \tau_{22} = -200$ ,  $\tau_{12} = 0$  na zbylé části hranice  $\Gamma_W$ .

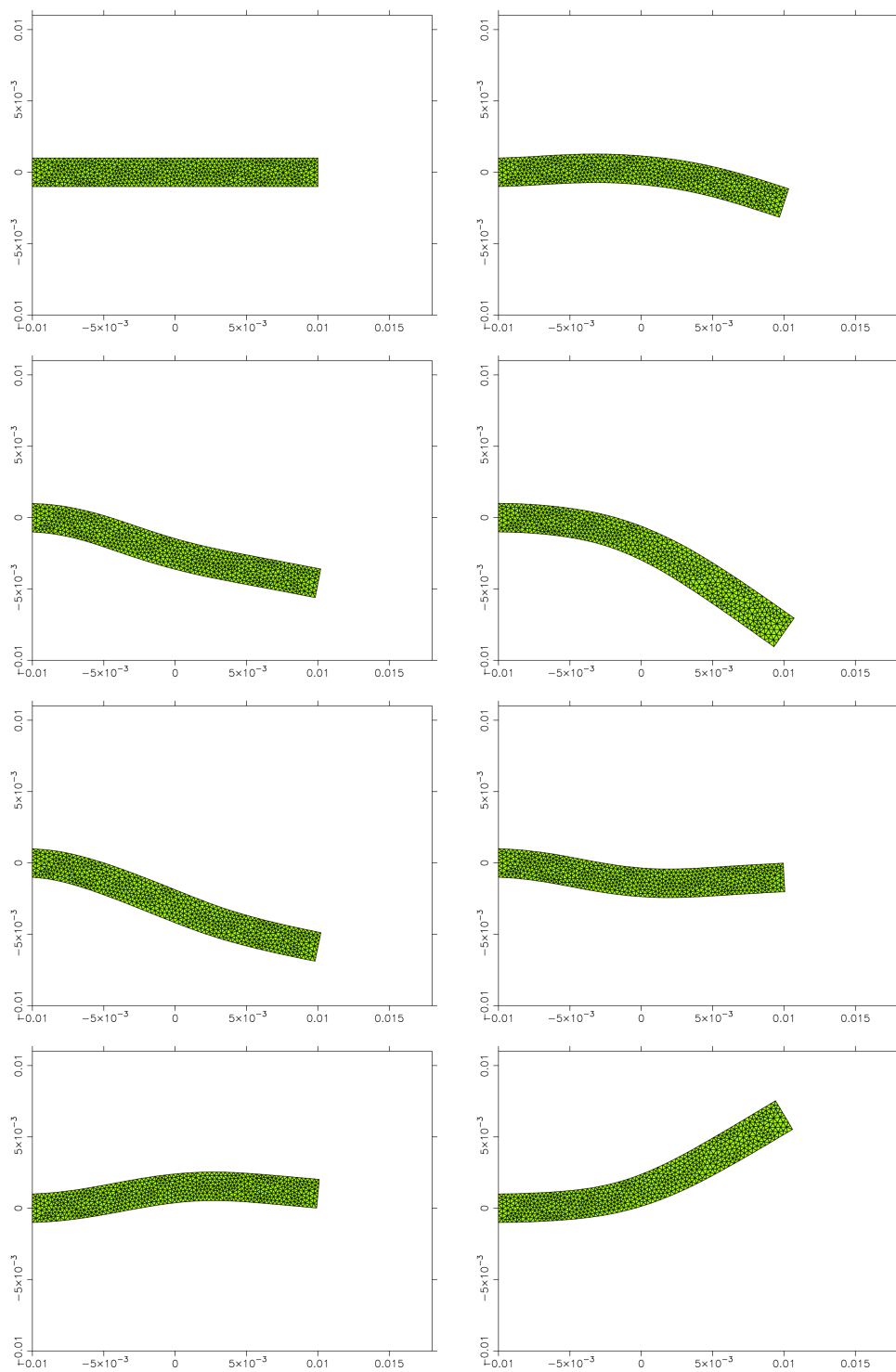
Opět zanedbáváme vnější objemové síly a předepisujeme nulové počáteční posunutí i rychlost. Při numerickém výpočtu zvolíme časový krok  $\tau = 10^{-5}$  s. Vizualizace přibližného řešení posunutí v některých časových okamžicích je na obr. 4.8.

podoblast	$E$	$\sigma$
$\Omega_1^b$	1000	0.495
$\Omega_2^b$	100000	0.4
$\Omega_3^b$	12000	0.4
$\Omega_4^b$	8000	0.4

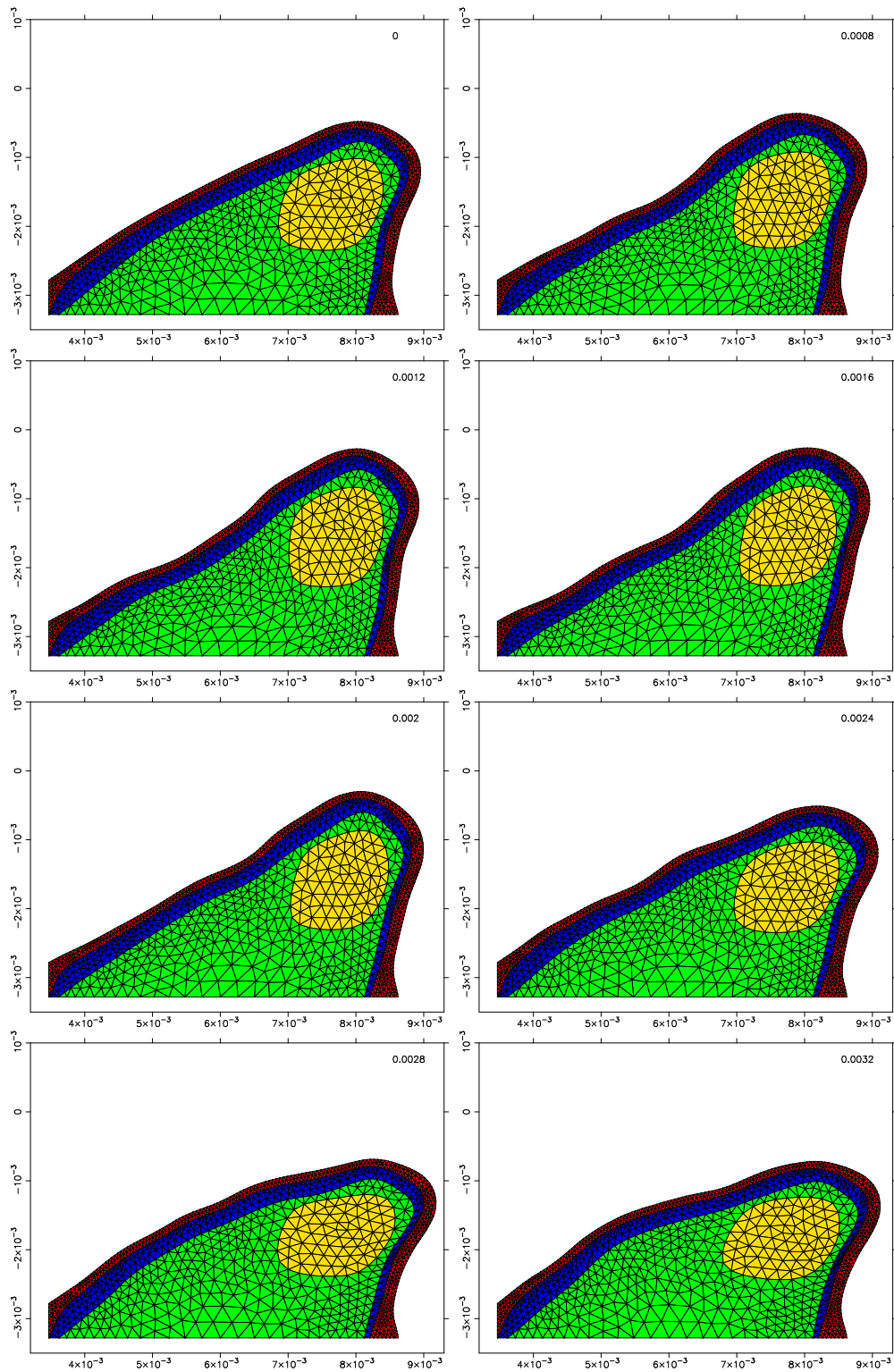
Tabulka 4.1: Materiálové vlastnosti.



Obrázek 4.6: Tahová zkouška.



Obrázek 4.7: Tlaková zkouška.



Obrázek 4.8: Pohyb modelu hlasivky.

## 4.2 Modální analýza a Fourierova transformace

Pohyb elastického tělesa bez působení plošných sil na jeho povrchu a při zanedbání vnitřních sil a tlumení je dle (3.24) popsán maticovou pohybovou rovnicí

$$\mathbb{M}\mathbf{d}'' + \mathbb{K}\mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad (4.12)$$

při počátečních podmínkách

$$\mathbf{d}(0) = \mathbf{d}^0, \quad \mathbf{d}'(0) = \mathbf{z}^0. \quad (4.13)$$

Toto je úloha, která popisuje volné kmitání netlumených soustav.

### 4.2.1 Modální analýza

Řešení problému (4.12) chceme najít ve tvaru

$$\mathbf{d}(t) = \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_j e^{-i\omega_j t}. \quad (4.14)$$

Uvažujeme-li, že pro  $k \in \mathbb{N}$  je  $\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$  pro všechna  $j \neq k$ , pak

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{v}_k e^{-i\omega_k t}. \quad (4.15)$$

Zřejmě

$$\mathbf{d}''(t) = -\omega_k^2 \mathbf{v}_k e^{-i\omega_k t}, \quad (4.16)$$

takže dosazením do (4.12) získáme

$$(-\mathbb{M}\omega_k^2 + \mathbb{K}) \mathbf{v}_k e^{-i\omega_k t} = \mathbf{0}, \quad (4.17)$$

odtud

$$(-\mathbb{M}\omega_k^2 + \mathbb{K}) \mathbf{v}_k = \mathbf{0}. \quad (4.18)$$

Rovnice (4.18) představuje tzv. *zobecněný problém vlastních čísel* přiřazený k maticím  $\mathbb{M}$  a  $\mathbb{K}$ . Rovnice (4.18) je soustavou homogenních lineárních algebraických rovnic pro neznámé vektoru  $\mathbf{v}_k$ . Tato soustava má netriviální řešení, právě když její determinant je nulový. Rovnice

$$\det(-\mathbb{M}\omega_k^2 + \mathbb{K}) = 0 \quad (4.19)$$

je tzv. *charakteristická rovnice* soustavy (4.12). Kořeny charakteristické rovnice nazýváme vlastní čísla soustavy  $\lambda_j = \omega_j^2$ . Protože hmotnostní matice je vždy pozitivně definitní a matice tuhosti pozitivně semidefinitní, jsou vlastní čísla nezáporná a můžeme je v reálném oboru odmocnit, čímž dostaneme  $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$ . Těmto veličinám říkáme vlastní frekvence soustavy. Protože podle základní věty algebry kořenů rovnice  $N$ -tého stupně je právě  $N$ , existuje pro soustavu s  $N$  stupni volnosti  $N$  vlastních frekvencí. Uspořádáme je podle velikosti  $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_N$ . Dosadíme-li určené vlastní frekvence do (4.18), získáme homogenní soustavu lineárních rovnic pro neznámý vektor  $\mathbf{v}_j$ , příslušící vlastní frekvenci

frekvence	[Hz]
$f_1$	0.19
$f_2$	1.25
$f_3$	4.09
$f_4$	4.29
$f_5$	7.36
$f_6$	11.23
$f_7$	12.38
$f_8$	15.38

Tabulka 4.2: Frekvence vlastních kmitů nosníku.

frekvence	[Hz]
$f_1$	192.50
$f_2$	337.88
$f_3$	366.45
$f_4$	507.39
$f_5$	538.96
$f_6$	614.99
$f_7$	675.84
$f_8$	680.34

Tabulka 4.3: Frekvence vlastních kmitů modelu hlasivky.

$\omega_j$ . Matice soustavy je však singulární. Soustava (4.18) má proto nekonečně mnoho netriviálních řešení. Každému takovému řešení  $\mathbf{v}_j$  říkáme *vlastní vektor* příslušící k vlastní frekvenci  $\omega_j$ . Předpokládejme, že vlastní frekvence jsou po dvou různé, což je obvyklý případ. Hodnota matice soustavy je  $N - 1$ , takže stačí, když zvolíme libovolně jednu souřadnici vlastního vektoru. Jednoznačně máme určený směr vektoru a volíme pouze vhodně jeho velikost. Tyto výpočty jsme provedli za použití softwaru GNU Octave [21].

Prakticky vypočítáme při našich experimentech pouze prvních pár nejmenších vlastních frekvencí a k nim příslušné vlastní vektory. Škálováním jednotlivých vektorů můžeme simulovat vlastní kmity tělesa. Tyto kmity při experimentech zobrazíme na obrázcích. Dále uvedeme příslušné frekvence  $f_j$ , které vypočítáme z hodnot vlastních frekvencí  $\omega_j$ :

$$f_j = \frac{\omega_j}{2\pi}. \quad (4.20)$$

Vrátíme se k příkladům z odstavců 4.1.3 a 4.1.4. Vizualizace vlastních kmitů tělesa z tahové a tlakové zkoušky jsou na obr. 4.11 a příslušné frekvence jsou v tabulce 4.2. Vizualizace vlastních kmitů modelu hlasivky jsou na obr. 4.12 a příslušné frekvence jsou v tabulce 4.3.

## 4.2.2 Fourierova transformace

Výsledky modální analýzy srovnáme s výsledky diskrétní Fourierovy transformace. Definujeme *diskrétní Fourierovu transformaci* jako vztah

$$a_k = \sum_{j=0}^m b_j e^{-\frac{2\pi i}{m} j m}, \quad (4.21)$$

který převádí  $n$  komplexních čísel  $b_j$  na  $m$  komplexních čísel  $a_k$ .

Zvolíme libovolný bod oblasti elastického tělesa  $\mathbf{x} \in \Omega_h^b$ . Složky vektoru  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$  budou hodnoty posunutí  $\mathbf{u}_h$  v horizontálním nebo vertikálním směru, tedy platí  $b_j = u_{h1}(\mathbf{x}, t_j)$  nebo  $b_j = u_{h2}(\mathbf{x}, t_j)$ , kde  $m$  je počet časových okamžiků, ve kterých jsme vypočítali přibližné řešení  $\mathbf{u}_h$ . Jestliže zvolený bod  $\mathbf{x}$  je vrcholem triangulace, pak  $b_j = d_i^{(1)}(t_j)$ , resp.  $b_j = d_i^{(2)}(t_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ , kde  $i$  je index vrcholu triangulace. Pro diskrétní Fourierovu transformaci použijeme program GNU Octave [21]. Hodnoty vektoru  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$  jsou přiřazeny frekvencím

$$f_j = (j - 1) \frac{1}{\tau(m - 1)}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4.22)$$

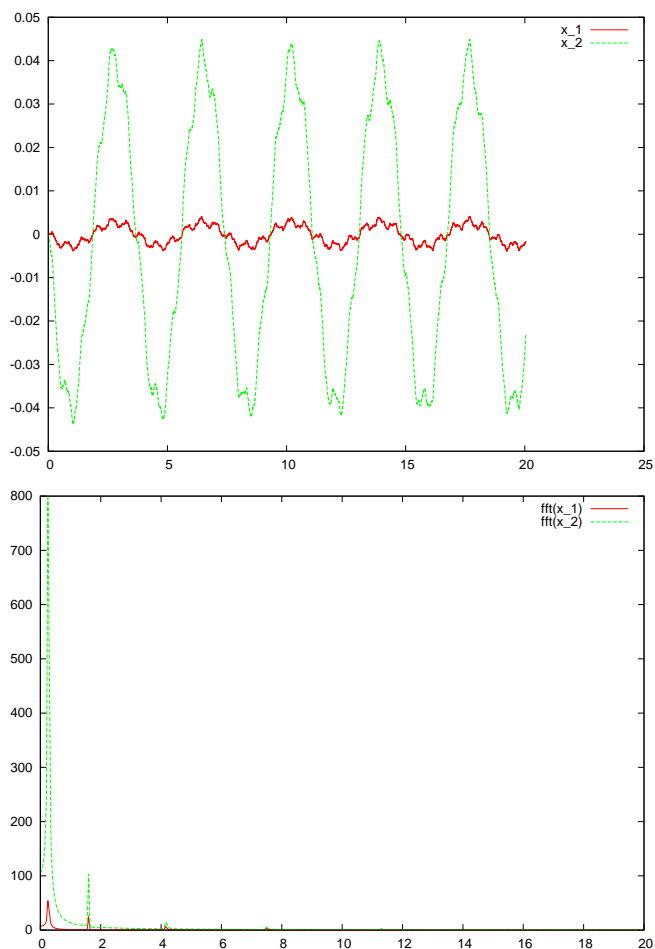
Frekvence pro nejvyšší hodnoty  $a_i$  vypíšeme do tabulky a srovnáme s výsledky z odstavce 4.2.1.

V příkladu tlakové zkoušky z odstavce 4.1.3 zvolíme vrchol triangulace, který je pravým horním rohem oblasti  $\Omega_h^b$ . Hodnota posunutí ve vertikálním a horizontálním směru v tomto bodě je zaznačena do grafu na obr. 4.9 vlevo a graf diskrétní Fourierovy transformace je na obr. 4.9 vpravo. Hodnoty frekvencí příslušné maximálním hodnotám jsou v tabulce 4.4 a můžeme je srovnat s výsledky v tabulce 4.2.

Podobně u příkladu modelu hlasivky z odstavce 4.1.4 zvolíme vrchol triangulace s nejvyšší hodnotou souřadnice  $x_2$ . Hodnota posunutí ve vertikálním a horizontálním směru v tomto bodě je zaznačena do grafu na obr. 4.10 vlevo a graf diskrétní Fourierovy transformace je na obr. 4.10 vpravo. Opět hodnoty frekvencí příslušné maximálním hodnotám zaznamenáme do tabulky 4.5 a srovnáme s výsledky z tabulky 4.3.

frekvence	[Hz]
$f_1$	0.25
$f_2$	1.6
$f_3$	4.15
$f_4$	7.5
$f_5$	11.3
$f_6$	12.35
$f_7$	15.35
$f_8$	19.7

Tabulka 4.4: Frekvence kmitů nosníku.

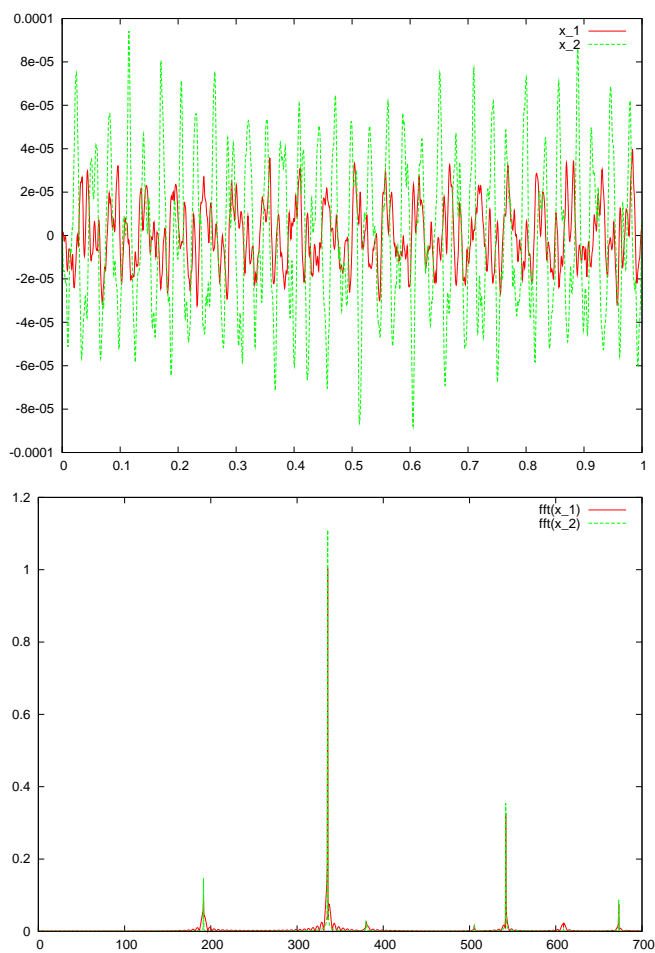


Obrázek 4.9: Graf pohybu bodu nosníků a graf příslušné diskrétní Fourierovy transformace.

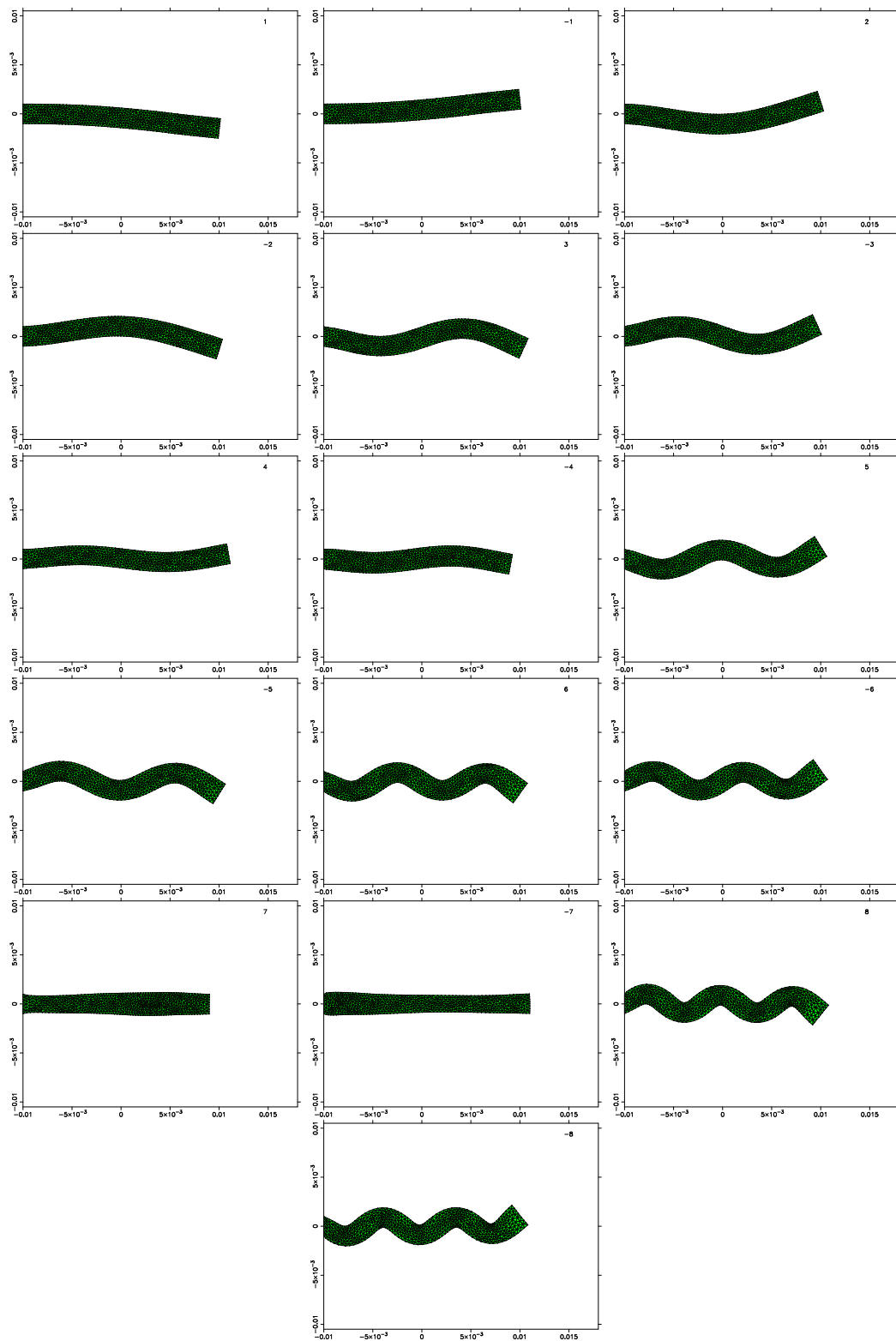


frekvence	[Hz]
$f_1$	191.5
$f_2$	335.5
$f_3$	379.5
$f_4$	505.5
$f_5$	542.0
$f_6$	605.0
$f_7$	673.0
$f_8$	682.0

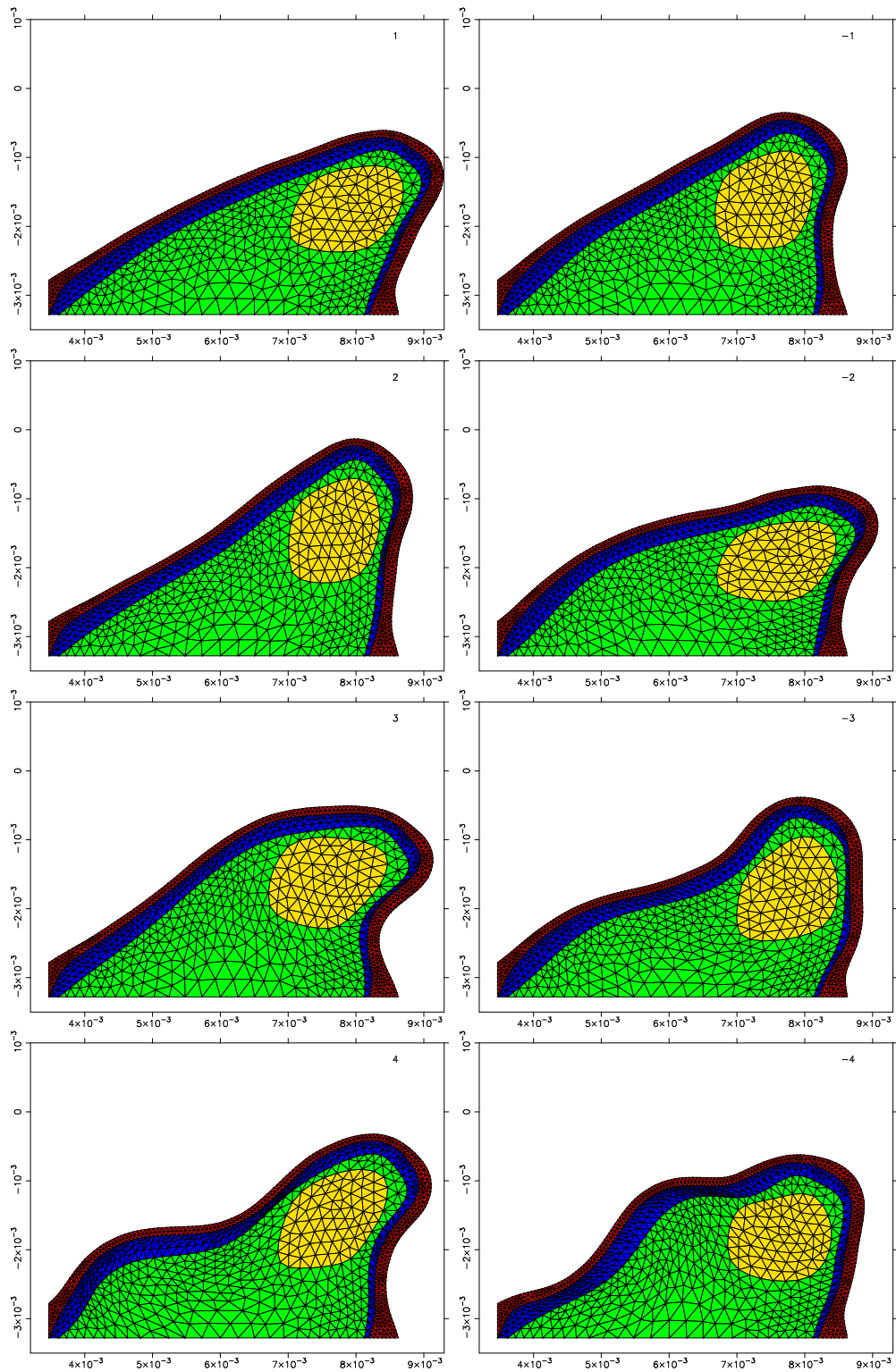
Tabulka 4.5: Frekvence kmitů modelu hlasivky.



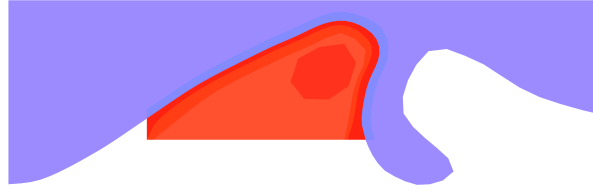
Obrázek 4.10: Graf pohybu bodu modelu hlasivky a graf příslušné diskretní Fourierovy transformace.



Obrázek 4.11: Vlastní kmity nosníku.



Obrázek 4.12: Vlastní kmity modelu hlasivky.



Obrázek 4.13: Detail oblasti modelu hlasivky (červeně), která se deformuje, a části oblasti vyplněné tekutinou, která ji obtéká.

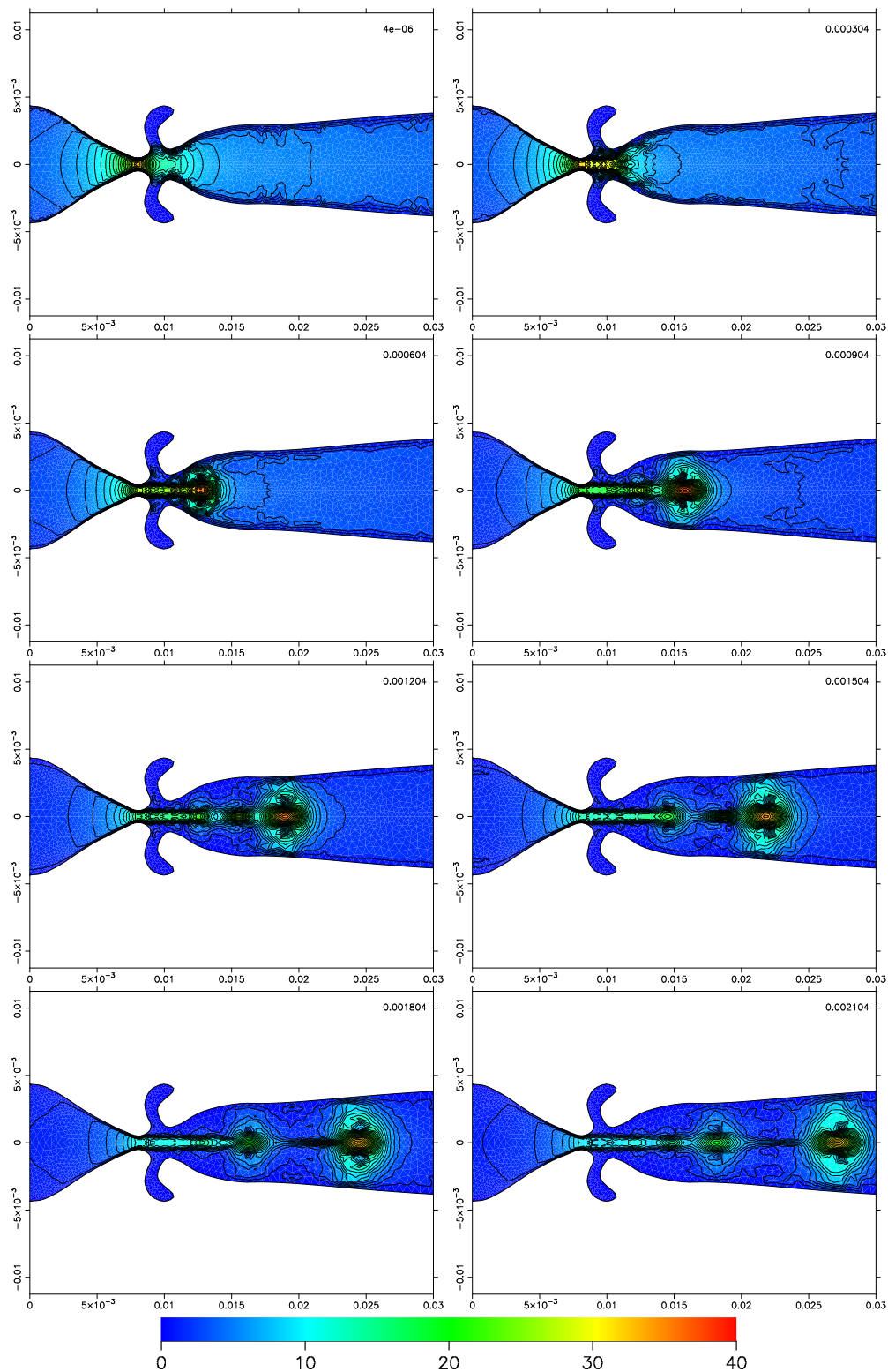
### 4.3 Příklad interakce proudící tekutiny a elastického tělesa

V závěru se budeme zabývat příkladem, který byl motivací celé této práce. Uvažujme zjednodušený model lidských hlasivek, který je složený z materiálů s různými elastickými vlastnostmi. Proudící tekutinu představuje vzduch. Oblast  $\Omega^b$  představuje elastické těleso tedy hlasivku a  $\Omega_t^f$  je oblast vyplněná tekutinou v čase  $t$ . Jako pohyblivou hranici  $\Gamma_{W_t}$  uvažujeme společnou hranici obou oblastí, viz obr. 4.13, ostatní hranice obou oblastí nechtě jsou pevné. Definujme hranici  $\Gamma_D^f$ , na které předepisujeme vstupní podmínku a výstupní hranici  $\Gamma_O^f$ , na které předepisujeme "do nothing" podmínku. Hranice oblasti  $\Omega_t^f$  jsou rozlišeny podobně jako na obrázku 1.2. Na svislé části hranice  $\Gamma_D^f$  předepíšme vstupní podmínku rychlosti ve směru rovnoběžném s osou  $x_1$  ve tvaru kvadratické funkce vzhledem k souřadnici  $x_2$ . Tato kvadratická funkce je v krajních bodech této svislé části nulová a určuje ji hodnota  $v_{max}$  ve středu této části. Na zbylé části hranice  $\Gamma_D^f$  předepíšme nulovou podmínku. Při výpočtu uvažujeme, že se jedná o symetrickou úlohu vzhledem k ose  $x_1$ .

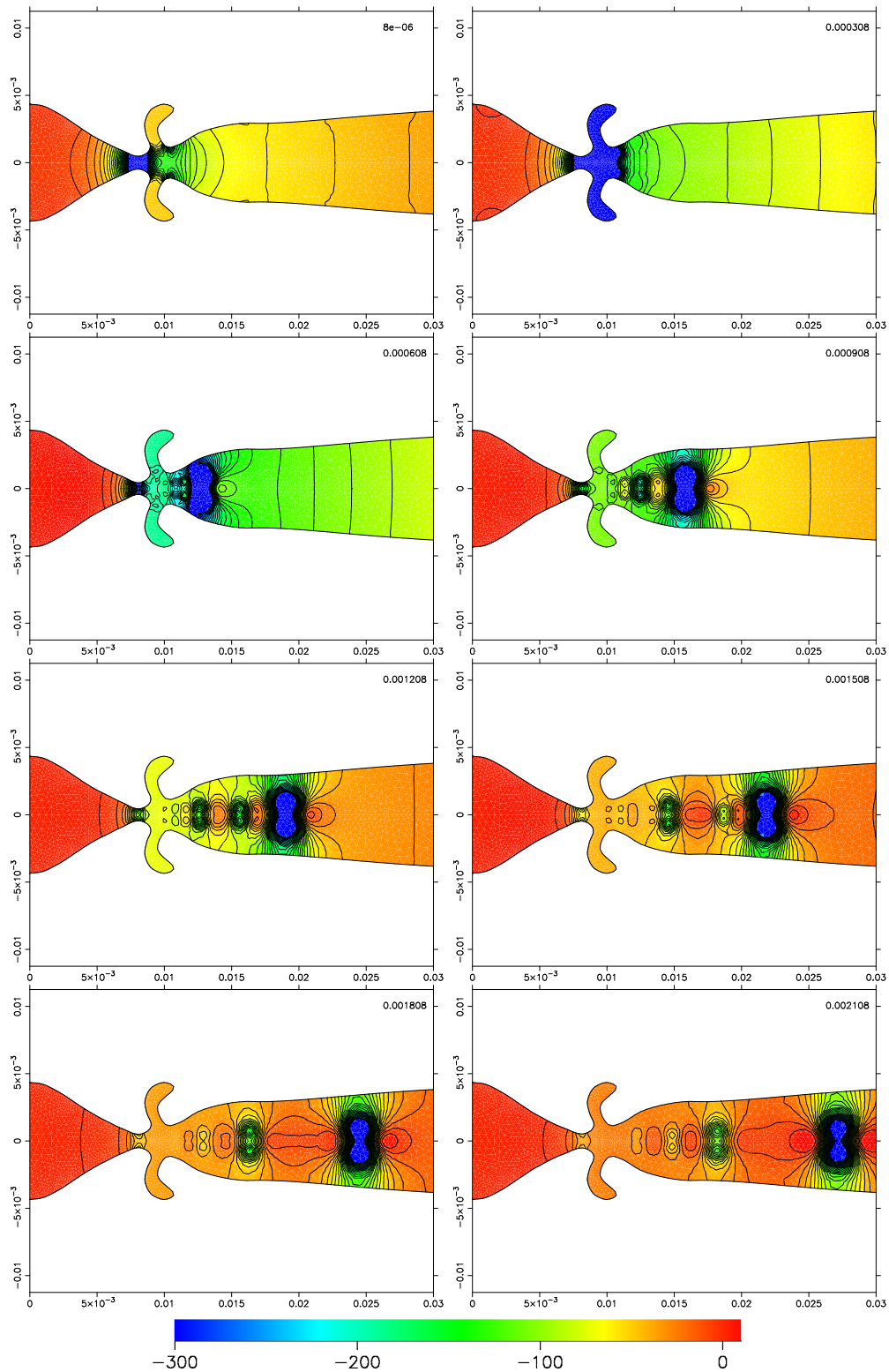
Společnou hodnotou pro výpočet rovnic popisující deformaci tělesa i proudění je časový krok  $\tau$ . V čase  $t > 0$  bude probíhat výpočet interakce tělesa a tekutiny. Předtím proběhne několik iterací výpočtu proudění bez deformace výpočetní oblasti od daného času  $t_\alpha < 0$ . Pro tekutinu předepisujeme kinematický koeficient vazkosti  $\nu$  a hustotu tekutiny  $\rho^f$ . Pro těleso musí být dána hustota tělesa  $\rho^b$ , Youngův modul pružnosti  $E$  a Poissonova konstanta  $\sigma$ . Neuvažujeme homogenní těleso, hodnoty uvedených veličin předepisujeme na podoblastech oblasti  $\Omega^b$  analogicky s příkladem v odstavci 4.1.4. Případně můžeme definovat konstantu tlumení  $C$ . Charakteristiky modelu hlasivky jsou v tabulce 4.1 v odstavci 4.1.4. Uveďme výčet ostatních zadaných hodnot:

$$\begin{array}{ll}
 v_{max} = 6 \text{ m.s}^{-1}, & C = 0, \\
 \tau = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}, & t_\alpha = -5 \cdot 10^{-5} \text{ s}, \\
 \rho^f = 1.17 \text{ kg.m}^{-3}, & \nu = 1.5 \cdot 10^{-5}.
 \end{array}$$

Vizualizace velikosti rychlosti v některých časových okamžicích je na obr. 4.14. Vizualizace tlaku je na obr. 4.15.



Obrázek 4.14: Interakce proudící tekutiny a elastického tělesa, velikost rychlosti v časech  $t = 0.000004, 0.000304, 0.000604, 0.000904, 0.001204, 0.001504, 0.001804$  a  $0.002104$  s.



Obrázek 4.15: Interakce proudící tekutiny a elastického tělesa, tlak v časech  $t = 0.000008$ ,  $0.000308$ ,  $0.000608$ ,  $0.000908$ ,  $0.001208$ ,  $0.001508$ ,  $0.001808$  a  $0.002108$  s.

# Závěr

V diplomové práci jsme se zabývali formulací a numerickým řešením interakce proudící tekutiny a elastického tělesa. Na základě popsané teorie jsme vytvořili program, který spolu s programem FEMFLUID je možné použít pro různé aplikace na problém interakce tekutin a struktur. Vypracovaná metoda a programový systém jsou vhodné pro aplikaci na modelování hlasivek, což bylo motivací této práce. Pomocí několika testů jsme ověřili, že vypracovaná metoda je dostatečně robustní a je možné ji aplikovat na řešení konkrétních komplikovaných úloh. Numerické experimenty jsme prováděli na běžném osobním počítači, jehož výkon byl pro řešení problémy dostatečný.

# Literatura

- [1] Brdička M.: *Mechanika kontinua*, ČSAV, Praha, 1959.
- [2] Brezzi F., Falk R. S.: Stability of higher-order Hood-Taylor methods, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1991, 28, 581-590.
- [3] Brezzi F., Fortin M.: *Mixed and hybrid finite element method*, Springer Series in Computational Mathematics 15, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [4] Nečas J., Hlaváček I.: *Úvod do pružných a pružně plastických těles*, SNTL, Praha, 1983.
- [5] Feistauer M.: *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*, Logman Scientific & Technical, Harlow, 1993.
- [6] Merta M.: *Newmarkova metoda pro numerické řešení počátečních problémů 2. řádu*, bakalářská práce, VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2009.
- [7] Lube G.: Stabilized Galerkin finite element methods for convection dominated and incompressible flow problems, *Num. Anal. and Math. Model.*, Banach Center publications (29), Warszawa, 1994.
- [8] Gelhard T., Lube G., Olshanskii M. A.: *Stabilized finite element schemes with LBB-stable elements for incompressible flows* (preprint)
- [9] Trkal V.: *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa*, Praha, 1956.
- [10] Turek S.: *Efficient Solvers for Incompressible Flow Problems*, Springer Berlin 1998.
- [11] Davis T. A.: A column pre-ordering strategy for the unsymmetric-pattern multifrontal method, Technical report TR-03-006. Submitted to *ACM Trans. Math. Software*.
- [12] Davis T. A., Duff I. S.: A combined unifrontal/multifrontal method for unsymmetric sparse matrices, *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 25, no. 1, 1-19, 1999.
- [13] Verfürth R.: Error estimates for mixed finite element approximation of the Stokes equations. *R.A.I.R.O. Analyse numérique/Numerical analysis*, 18(2), 175-182, 1984.



- [14] Wathen A., Silvester D.: Fast iterative solution of stabilised Stokes systems, part I: Using simple diagonal preconditioners. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30(5), pp. 630-649, 1993.
- [15] Wathen A., Silvester D.: Fast iterative solution of stabilised Stokes systems, part II: Using general block preconditioners. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31, pp. 1352-1367, 1994.
- [16] Zeidler E.: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, Springer-Verlag New York Inc., 1990.
- [17] ANGENER, <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~dolejsi/free.htm>
- [18] FEMFLUID, <http://marian.fsik.cvut.cz/~svacek/femfluid.html>
- [19] GIMP, <http://www.gimp.org>
- [20] GMSH, <http://www.geuz.org/gmsh>
- [21] GNU Octave, <http://www.gnu.org/software/octave/>
- [22] ParaView, <http://www.paraview.org>
- [23] PGPLOT Graphics Subroutine Library, <http://www.astro.caltech.edu/~tjp/pgplot/>
- [24] UMFPACK, <http://www.cise.ufl.edu/resarch/sparse/umfpack/>