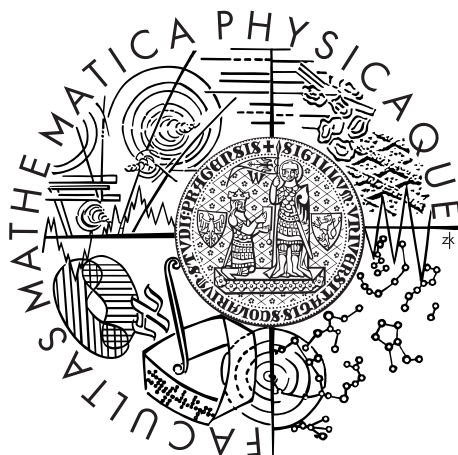


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Jakub Haláček

Struktura černoděrových prostoročasů

Ústav teoretické fyziky MFF UK

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Tomáš Ledvinka Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Teoretická fyzika

Praha 2011

Děkuji Mgr. Tomášovi Ledvinkovi Ph.D. za obětavou pomoc, bez které by tato práce nevznikla. Velký dík patří i mé rodině za dlouhodobou podporu.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 15. dubna 2011

Jakub Haláček

Název práce: Struktura černoděrových prostoročasů

Autor: Jakub Haláček

Katedra: Ústav teoretické fyziky MFF UK

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Tomáš Ledvinka Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: V předložené práci studujeme převzatá řešení kompaktifikačních metod na Schwarzschildově prostoročase a rozebíráme jejich vlastnosti a analytickou strukturu. Dále zavádíme metodu konstrukce souřadnic založenou na analytických požadavcích kladených na výslednou metriku. Tento postup aplikujeme a diskutujeme na Schwarzschildově prostoročase. Dále jej použijeme ke kompaktifikaci Reissnerova–Nordströмова prostoročasu a diskutujeme analytické pokrytí tohoto prostoročasu. V neposlední řadě ukazujeme metodu založenou na teorii diferenciálních rovnic k ověření analytické struktury metrických koeficientů na \mathcal{I}^\pm .

Klíčová slova: konformní metrika, kompaktifikace, analytičnost metrických koeficientů, asymptotická struktura, Schwarzschildův prostoročas

Title: The structure of black hole spacetimes

Author: Jakub Haláček

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: Mgr. Tomáš Ledvinka Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: In the presented thesis we study taken over solutions of available compactification methods on the Schwarzschild's spacetime and we discuss their properties and analytical structure. Furthermore, we introduce a method of construction of coordinates based on analytical requirements placed on the resulting metrics. This procedure is being discussed and applied to Schwarzschild's spacetime. Next we apply it to the compactification of the Reissner's – Nordström's spacetime and discuss its analytical coverage of the spacetime. Finally, we show a method based on the theory of differential equations to verify the analytical structure of the metric coefficients on the \mathcal{I}^\pm .

Keywords: conformal metric, compactification, analyticity of metric coefficients, asymptotic structure, Schwarzschild spacetime

Obsah

1	Úvod	1
2	Základní pojmy	3
2.1	Princip kompaktifikace	3
2.2	Minkowskiho prostoročas	4
2.2.1	Analytické vlastnosti Minkowskiho prostoročasu	9
3	Schwarzschildův prostoročas	12
3.1	Kruskalovy–Szekeresovy souřadnice	13
3.1.1	Kompaktifikace Kruskalových–Szekeresových souřadnic	15
3.2	Přehled kompaktifikačních transformací	17
3.2.1	Varianta 1 (Misner–Thorne–Wheeler)	18
3.2.2	Varianta 2 (Novikov, Frolov)	20
3.2.3	Porovnání obou přístupů	23
3.2.4	Tvar singularity $r = 0$	24
3.2.5	Varianta 3 (Hervik, Grøn)	27
4	Asymptoticky plochá kruskalizace a její kompaktifikace	31
4.1	Motivace	31
4.2	Kruskalizace Schwarzschildova prostoročasu	33
4.3	Kompaktifikace Schwarzschildova prostoročasu	38
4.3.1	Transformace pokrývající analyticky celý Schwarzschildův prostoročas	38
4.3.2	Transformace generující nedegenerovanou metriku pro $r < 0$	43
4.3.3	Úhel $r = 0$ v bodech i^\pm a i^0	46
4.4	Zpětná kruskalizace	48
4.5	Vztah mezi Kruskalovými–Szekeresovými a implicitními souřadnicemi	50
5	Reissnerův–Nordströmův prostoročas	52
5.1	Reissnerovo–Nordströmovo řešení Einsteinových rovnic	52
5.2	Kompaktifikace Reissnerova–Nordströmova prostoročasu	53
5.2.1	Analytické vlastnosti souřadnic kompaktifikovaného Reissnerova–Nordströmova prostoročasu	57
5.2.2	Diskuze vlastností kompaktifikace Reissnerova–Nordströmova prostoročasu	58

6 Závěr	59
A Kruskalovy–Szekeresovy souřadnice	60
A.1 Kruskalovy–Szekeresovy světelné souřadnice	60
A.2 Kruskalovy-Szekeresovy souřadnice	61
A.3 Doplnující vztahy	61
B Matematické dodatky	62
B.1 Shrnutí důležitých definicí a vět	62
B.2 Lambertova W -funkce	63
B.3 Limita výrazu Ωr	63
B.4 Diferenciální rovnice pro ověření analytičnosti výrazu Ωr	65
Literatura	68

Kapitola 1

Úvod

Ty nejúžasnější vesmírné děje pozorujeme naštěstí z ohromné vzdálenosti. Pomineme-li snadno započitatelný vliv těles sluneční soustavy, odehrávají se naše pozorování v plochém prostoročase. Zde pozorované elektromagnetické a brzy snad i gravitační vlny mohou přicházet od černých děr – z míst kde je, v souladu s předpověďmi obecné relativity, prostor zakřivený do nejvyšší míry. Obecná relativita navíc ukázala, že neznámou v teorii gravitace není jen hmotou zakřivované gravitační pole reprezentované metrikou prostoročasu, ale i sama topologie variety, jíž prostoročas popisujeme. Velmi užitečným nástrojem se staly Penroseovy-Carterovy kompakťované diagramy, umožňující v jediném obrázku shrnout vlastnosti rovnic šíření vlnění v asymptoticky ploché oblasti prostoru nebo blízkosti zhrouceného objektu a dále kauzální strukturu určující kdy a co může který pozorovatel vidět. Stejně tak ukazují případné topologické zvláštnosti variety na níž se vlny šíří.

Základní motivací bylo pozorování [8], že jsou-li dvě metriky na varietách (M, ds^2) a $(\tilde{M}, d\tilde{s}^2)$ svázány konformní transformací

$$d\tilde{s}^2 = \Omega^2 ds^2 ,$$

platí, že vlnová rovnice

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \Phi - \frac{1}{6} R \Phi = \Omega^3 \left(\tilde{\nabla}^\mu \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\Phi} - \frac{1}{6} \tilde{R} \tilde{\Phi} \right) = 0$$

je konformně invariantní. Pouhým dosazením transformovaných souřadnic a přeškálováním dostaneme z řešení vlnové rovnice $\tilde{\Phi} = \Omega^{-1} \Phi$ na \tilde{M} řešení vlnové rovnice Φ na M . Navíc se takovou volbou konformní transformace, která zobrazí nekonečna M do vnitřních bodů \tilde{M} , převádí otázka asymptotického chování řešení vlnových rovnic v nekonečnách na problém Taylorova rozvoje řešení vlnové rovnice. Klíčovou otázkou ale zůstává nalezení vhodné konformní transformace. Je

zřejmé, že pokud nebude např. analytická, ztratí se při konformní transformaci polí i jejich případná analytická závislost na souřadnicích.

Práce zabývající se chováním polí v nekonečně asymptoticky plochých prostoročasu, si zejména u důkazů neexistence vystačí s pokrytím malé oblasti zahrnující obrazy nekonečen M ve varietě \tilde{M} (Zejména nadploch označovaných \mathcal{S}^\pm). I sama definice variety ([3], [39]) nevyžaduje více než soubor zobrazení. Penroseovy-Carterovy diagramy se však používají pro znázornění vlastností celých variet, proto je tématem této práce nalezení analytické konformní kompaktifikace prostoročasu úplné Schwarzschildovy variety, která respektuje požadavky na kompaktifikaci asymptoticky plochých prostoročasu.

Na začátku se práce věnuje výkladu principu konformní kompaktifikace pro Minkowskiho prostoročas. Vzhledem k tomu, že formulace požadavků na vlastnosti konformní transformace asymptoticky plochých prostoročasu i Kruskalova konstrukce souřadnic úplné Schwarzschildovy variety se datují do šedesátých let, je v literatuře k nalezení několik kandidátů na takové souřadnice. Součástí práce je tedy i podrobná diskuze jejich vlastností a důvodů, proč nepředstavují hledané transformace. V hlavní části práce se diskutuje metoda konstrukce konformní transformace Schwarzschildovy metriky vyhovující zadaným požadavkům – ty povedou k výsledku, který představuje nejen analytické prodloužení pod horizont, ale i za \mathcal{S}^\pm . V poslední kapitole jsou pak uvedeny výsledky přímé aplikace nalezené metody na komplikovanější problém Reissnerova–Nordströмова řešení Einsteinových rovnic.

Kapitola 2

Základní pojmy

2.1 Princip kompaktifikace

Hlavní myšlenkou kompaktifikace je přenesení neomezené (nekonečně velké) oblasti na omezenou oblast. Pro naše fyzikální potřeby máme hned dvě možnosti jak kompaktifikovat prostoročas.

První možnost spočívá v tom, že přeneseme na konečnou oblast jen prostoročasu část prostoročasu a časovou necháme bez změny, tj. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \times K^3$. O tento druh kompaktifikací se v naší práci nebudeme zajímat. Stojí za zajímavost, že první úspěšná simulace splynutí dvou černých děr byla provedena právě tímto druhem kompaktifikace [42]. Jiným příkladem jsou inverze souřadnic, kdy se prostorové souřadnice transformují jako $\tilde{r} = 1/r, \tilde{\theta} = \theta, \tilde{\varphi} = \varphi$. Při této transformaci se nám samozřejmě odsouvá počátek do nekonečna, tudíž užití této transformace lze najít například u vyšetřování prostoročasu vně hvězdy.

Druhou možností kompaktifikace, kterou budeme uvažovat v naší práci, je přenesení celého prostoročasu (včetně časové souřadnice) na konečnou oblast. Například u Minkowského prostoročasu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow K^2 \times \mathbb{S}^2$, kde \mathbb{S}^2 je topologicky dvojsféra a K^2 je omezená oblast, kterou vynášíme do diagramu, který nazýváme Penrose–Carterovým¹ diagramem. Hlavním požadavkem na takto zkonstruovaný diagram je zachování kauzální struktury původního fyzikálního prostoročasu.

Kompaktifikační metody se užívají především u černoděrových prostoročasů, které obsahují oblasti pod horizontem události, odkud nemůže nic, ani světlo, uniknout. Naší snahou při konstrukci Penrose–Carterových diagramů je, abychom tyto oblasti rychle poznali přímo z diagramu, a mohli snadno porozumět kauzální struktuře původního fyzikálního prostoročasu.

¹Někdy se též užívá jen Penroseův diagram, my se budeme snažit ctít jména obou autorů.

Konstrukce takových diagramů je možná pomocí Weylovy (též konformní) transformace

$$ds^2 \rightarrow d\tilde{s}^2 = \Omega^2(x^\mu)ds^2, \quad (2.1)$$

kde konformní faktor $\Omega(x^\mu)$ závisí na bodech prostoročasu a pro $x \in M$ je pozitivní a nenulový².

Je zřejmé, že tato transformace nebude zachovávat vzdálenosti mezi dvěma body, ale časupodobné a prostorupodobné křivky si budou zachovávat svůj charakter. Navíc nulové geodetiky se plně zachovávají [3].

Důsledkem této transformace je, že nevlastní body původního prostoročasu ležící v nekonečnu se po této transformaci přenesou na vlastní body nového konformně kompaktifikovaného prostoročasu. Nyní si tuto techniku vysvětlíme na jednoduchém případě Minkowského metriky.

2.2 Minkowského prostoročas

Ačkoli předpokládáme, že jsou všichni obeznámeni s Minkowského prostoročasem, zopakujeme si některé vztahy. Díky tomu, že Minkowského prostoročas je nejjednodušším možným, vysvětlíme si na něm základní principy a techniky kompaktifikace a následný přechod ke konformní metrice. Následně se na některé výsledky z této kapitoly budeme odvolávat.

Vycházíme z klasického tvaru dráhového elementu, ve sférických souřadnicích, daného tvarem

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2d\omega^2, \quad (2.2)$$

kde $d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$. Standardně se pro úhlovou část vyhrazuje písmeno Ω , zároveň se Ω používá pro označení konformního faktoru. Vzhledem k tomu, že budeme častěji mluvit o konformním faktoru, upřednostníme tuto konvenci, která se v literatuře běžně užívá. V našich diagramech se souřadnice θ a φ potlačují, malujeme řez v rovině $t-r$.

Jako další standardní krok se zavádějí světelné (light-cone, nulové) souřadnice pomocí vztahů $u = t + r$ a $v = t - r$. Zavedením těchto souřadnic přejde dráhový element (2.2) na tvar

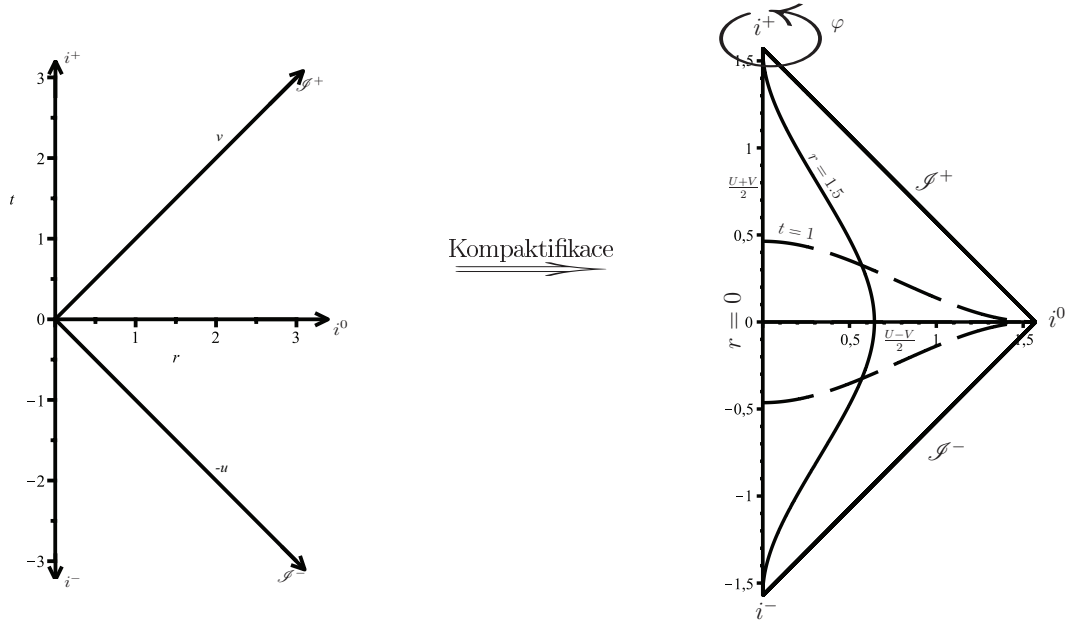
$$ds^2 = -dudv + \frac{1}{4}(u-v)^2d\omega^2. \quad (2.3)$$

Tyto souřadnice zavádíme především z toho důvodu, že geodetiky světelných částic jsou určeny $u = \text{konst.}$ nebo $v = \text{konst.}$ a tvoří hranice světelných povrchů svírajících úhel 90° . Právě světelné kužely nám rozdělují prostor na kauzální mi-

²Za \mathcal{S}^\pm platí $\Omega < 0$.

nulost, současnost a budoucnost každé události. Navíc právě ve světelných souřadnicích lze nejnázne zapsat řešení vlnových rovnic odpovídající sférické vlně.

Po zavedení světelných souřadnic u, v je možné si identifikovat různé asymptotické oblasti, viz obrázek 2.1.



Obrázek 2.1: *Struktura Minkowskiho prostoročasu*. Vlevo jsou vyneseny standardní souřadnice t a r a světelné souřadnice u a v . Šipky naznačují, kterým směrem se dostaneme do různých asymptotických regionů. Vpravo je odpovídající kompaktifikace pro srovnání a porozumění struktuře kompaktifikovaného diagramu.

\mathcal{S}^\pm Tuto hranici (kompaktifikovaného) prostoročasu označujeme jako budoucí a minulé světelné (nulové) nekonečno (future and past null infinity, *Script*³). Znamená to tedy, že všechny nulové křivky *vycházejí* z *minulého* světelného nekonečna resp. všechny nulové křivky *končí* v *budoucím* světelném nekonečnu. V našem značení⁴ budou tyto oblasti definovány následovně

\mathcal{S}^+ : u je konstantní a $v \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ a zároveň $t - r$ je konstantní).

\mathcal{S}^- : $u \rightarrow -\infty$ a v je konstantní ($t \rightarrow -\infty$, $r \rightarrow \infty$ a zároveň $t + r$ je konstantní).

i^\pm Tyto „body“⁵ nazýváme budoucím a minulým časupodobným nekonečnem.

V našem značení máme

³Zkratka z anglického *Script I*.

⁴Tato volba je samozřejmě jen naše konvence pro světelné souřadnice.

⁵Jelikož v kompaktifikovaném diagramu potlačujeme souřadnice ϕ, θ , pak bod v diagramu odpovídá topologicky sféře S^2 . Proto budeme-li užívat název bod (ať s uvozovkami či bez), myslíme tím bod v kompaktifikovaném diagramu, a rozumíme tím odpovídající sféru v původním fyzikálním prostoročase.

$i^+ : u \rightarrow \infty, v \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$, r je konstantní)

$i^- : u \rightarrow -\infty, v \rightarrow -\infty$ ($t \rightarrow -\infty$, r je konstantní)

Obecně o těchto bodech nelze příliš říci. My se v naší práci pokusíme, bude-li to možné, o některé úvahy týkající se těchto oblastí. Vystává zde problém bifurkace pro souřadnici r , protože i^\pm obsahují $\forall r \in [0, \infty)$.

i^0 Tento „bod“ nazýváme prostorupodobné, nebo prostorové nekonečno (space-like/spatial infinity, *Sp*i**). Už z názvu je zřejmé, že v tomto bodě končí všechny prostorupodobné (i asymptoticky) křivky. V našem značení $i^0 : u \rightarrow -\infty, v \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$ a t je konstantní). Alternativně se dá říci, že tento bod je kauzální počátek světelného kuželu generujícího \mathcal{S}^\pm .

Abychom mohli zkonstruovat kompakťovanou metriku, musíme provést transformaci světelných souřadnic do kompakťovaných. Zvolíme proto obecně transformaci $u = f(U)$ (analogicky pro v) a přepíšeme (2.3) do nových souřadnic

$$ds^2 = -f'(U)f'(V)dUdV + \frac{1}{4}(f(U) - f(V))^2 d\omega^2 \quad (2.4)$$

Musíme uvážit, že pokud máme transformační funkci $f(a) \rightarrow \infty$ pro konečnou hodnotu a , pak z definice derivace (ve smyslu limity) plyne $f'(a) = \infty$. To znamená, že námi získaná metrika v kompakťovaných souřadnicích diverguje v oblastech radiálního nekonečna \mathcal{S}^\pm a i^0 .

Jak jsme uvedli výše, tuto divergenci můžeme odstranit konformní transformací. Podkladová varieta se na \mathcal{S}^\pm chová jako $O(r)$. My zvolíme $\Omega(\mathcal{S}^\pm) \sim 1/r$ a tím budeme mít zaručenou regularitu metriky podkladové variety. Dráhový element po konformní transformaci je

$$d\tilde{s}^2 = -\Omega^2 f'(U)f'(V)dUdV + \frac{1}{4}\Omega^2(f(U) - f(V))^2 d\omega^2. \quad (2.5)$$

Při transformaci požadujeme od výsledné metriky následující vlastnosti:

Nedegenerovanost Pro libovolné $a^\mu \neq 0$ platí $a^\mu g_{\mu\nu} \neq 0$ ve všech bodech prostoročasu.

Nesingulárnost Tím rozumíme omezenost všech jednotlivých metrických komponent, tj. $|g_{\mu\nu}| < \infty$.

Analytičnost znamená, že jednotlivé metrické komponenty jsou analytickými funkcemi souřadnic v celém prostoročasu.

Z požadavku regularity metriky \tilde{g} plyne $\Omega \rightarrow 0$ pro $U \rightarrow a \vee V \rightarrow a$. Všude jinde musí být Ω nenulové a konečné.

Nyní zvolíme konkrétní tvar funkce $f(X) \equiv \tan(X)$. Stejnou funkci užívají např. [1], [3] a další. Jedná se o nejrozšířenější způsob kompaktifikace Minkowského prostoročasu. Tak obdržíme transformační vztahy mezi souřadnicemi r, t a kompaktifikovanými U, V jako

$$2r = \tan(U) - \tan(V) \quad (2.6)$$

$$2t = \tan(U) + \tan(V) \quad (2.7)$$

Užitím této transformace přejde dráhový element (2.5) na explicitní tvar

$$d\tilde{s}^2 = -\frac{\Omega^2}{\cos^2 U \cos^2 V} dU dV + \frac{1}{4} \Omega^2 (\tan U - \tan V)^2 d\omega^2. \quad (2.8)$$

Už bývá jen zvolit konkrétní konformní faktor Ω . Jak jsme uvedli výše, existují určité podmínky, jejichž splnění nám zaručí, že $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Omega)$ popisuje původní asymptoticky plochý (M, g) na \mathcal{S}^\pm a v i^0 [3], tj. prostoročas který je slabě asymptoticky jednoduchý a zároveň asymptoticky prázdný ve smyslu $R_{\mu\nu} = 0$ na otevřeném okolí ∂M v \bar{M} , podrobnosti např. [24],[25].

Uvedené podmínky odvodil Abhay Asthekar. Motivace pro zavedení těchto podmínek [16] (shrnutí [3]). Následuje naše shrnutí:

Na nadplochách \mathcal{S}^\pm :

$$\Omega(\mathcal{S}^\pm) = 0 \quad (2.9)$$

$$\tilde{\nabla}_\mu \Omega(\mathcal{S}^\pm) \neq 0 \quad (2.10)$$

V „bodě“ i^0 :

$$\Omega(i^0) = 0 \quad (2.11)$$

$$\lim_{i^0} \tilde{\nabla}_\mu \Omega = 0 \quad (2.12)$$

$$\lim_{i^0} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \Omega = 2\tilde{g}_{\mu\nu}(i^0) \quad (2.13)$$

Podmínky (2.9) a (2.11) nám zaručují, že konformní metrika bude na nadplochách \mathcal{S}^\pm a i^0 konečná.

Podmínky (2.10) a (2.12) můžeme naivně interpretovat tak, že konformní faktor nesmí jít do nuly příliš rychle. To nám zaručí regularitu metrik \tilde{g} . Hlubší diskuse této podmínky [16].

Interpretací podmínky (2.13) je $\Omega \sim 1/r$ nikoli $\Omega \equiv 1/r$. Jak dále uvidíme, přímé užití tvaru $\Omega \equiv 1/r$ splnění této podmínky.

Dále můžeme použít podmínku (2.13), konkrétně pro složky \tilde{g}_{UV} z dráhového elementu (2.8), a obdržíme rovnici

$$\lim_{i^0} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial U \partial V} = -\frac{\Omega^2}{\cos^2 U \cos^2 V}(i^0) \quad (2.14)$$

Vidíme, že funkce $\cos(X)$ ve jmenovateli jsou na $i^0 : U = \pi/2, V = -\pi/2$ nulové, tudíž pravá strana (2.14) obsahuje singulární člen, který implikuje zahrnutí tohoto výrazu do konformního faktoru. Navíc může konformní faktor obsahovat ještě omezenou nenulovou funkci $\alpha(U, V)$. Celkově máme

$$\Omega_M = \alpha(U, V) \cos U \cos V \quad (2.15)$$

Při této volbě konformního faktoru máme podmínky (2.9) a (2.11) splněny automaticky (jedna z funkcí $\cos(X)$ bude vždy nulová). Funkci $\alpha(U, V)$ tyto podmínky neomezuje.

Podmínka (2.10) je splněna, pokud $\alpha(\pi/2, \cdot) \neq 0$ a $\alpha(\cdot, -\pi/2) \neq 0$, kde za tečku mohou dosadit libovolnou hodnotu kromě krajních hodnot $\pm\pi/2$. To je v souladu s naším předpokladem nenulovosti $\alpha(U, V)$.

Podmínka (2.12) je splněna automaticky, opět tvar funkce $\alpha(U, V)$ tato podmínka blíže nevymezuje. Po provedení druhých derivací Ω_M a vynechání nulových členů (obsahující funkce $\cos(X)$), dochází k redukci (2.13) na

$$\lim_{i^0} \alpha(U, V) \sin U \sin V = -\alpha^2(U, V) \quad (2.16)$$

Dosazením číselných hodnot funkcí $\sin(x)$ (provedení limitního procesu) obdržíme

$$\alpha(\pi/2, -\pi/2) = \alpha^2(\pi/2, -\pi/2). \quad (2.17)$$

Splnění této rovnice znamená buď $\alpha(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) = 0$, což není fyzikální řešení, nebo $\alpha(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) = 1$.

Do konformního faktoru lze tedy zahrnout libovolnou nenulovou a omezenou funkci $\alpha(U, V)$, která je v bodě i^0 rovna jedné. Na tomto místě u Minkowského prostoročasu nemá význam takovouto funkci do Ω_M zahrnovat, ale v jiných případech nám zahrnutí takovéto funkce do Ω může usnadnit zápis výsledného tvaru metriky $\tilde{g}(U, V)$.

V předchozí části jsme interpretovali podmínku (2.13) tak, že zaručuje chování $\Omega \sim 1/r$. Můžeme se podívat, jak by dopadla přímočará volba $\Omega = 1/r$. Konkrétně si ověříme (2.13) pro složku \tilde{g}_{UU} , která je identicky nulová. To znamená splnit podmínku

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial U^2} = 0.$$

Pro obecné vyjádření druhé derivace, pro naši volbu $\Omega = 1/r$, si vystačíme s parciálními derivacemi. Kovariantní derivaci nemusíme uvažovat, protože našim zájmem jsou asymptoticky ploché prostoročasy, kde platí $\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(\mathcal{S}^\pm) \rightarrow 0$ (viz diskuze (3.21)). Takto získáme výraz

$$\frac{\partial^2}{\partial U^2} \frac{1}{r(U, V)} = \frac{2(\partial_U r(U, V))^2 - r(U, V)\partial_{UU}r(U, V)}{r(U, V)^3}, \quad (2.18)$$

který je divergentní. Máme totiž pro $r \rightarrow \infty$ chování $r \simeq O(X^{-1})$ pro $X \rightarrow 0$. Celkově se nám výraz (2.18) chová jako $\frac{O(X^{-4})}{O(X^{-3})} \rightarrow \infty$ pro $X \rightarrow 0$. Podmínku (2.13) nelze splnit. Stejným způsobem volí konformní faktor autoři [7] v případě Schwarzschildova prostoročasu a podobně jako zde nebude podmínka (2.13) splněna, protože úvaha u vztahu (2.18) se nám vztahovala obecně na asymptoticky ploché prostoročas vyjádřený v kompakťfikovaných souřadnicích spojených s nulovými částicemi.

Grafické zobrazení Penroseova–Carterova diagramu pro Minkowského prostoročas je na Obrázku 2.2. Tento obrázek byl nakreslen v programu Maple užitím příkazu `implicitplot` na implicitně zadané vztahy (2.6) a (2.7) s pevně zvolenými r a t .

2.2.1 Analytické vlastnosti Minkowského prostoročasu

Základním předpokladem konstrukce kompakťfikovaného prostoročasu je jeho analytičnost na \mathcal{S}^\pm . Samozřejmě nás zajímají metrické koeficienty \tilde{g}_{UV} a $\tilde{g}_{\theta\theta}$. První případ je triviální, protože $\tilde{g}_{UV} = -1$ a tak tento koeficient bude rozhodně analytickou funkcí.

V druhém případě je metrický koeficient roven

$$\tilde{g}_{\theta\theta} = \Omega^2 r^2 = [\sin(U)\cos(V) - \sin(V)\cos(U)]^2. \quad (2.19)$$

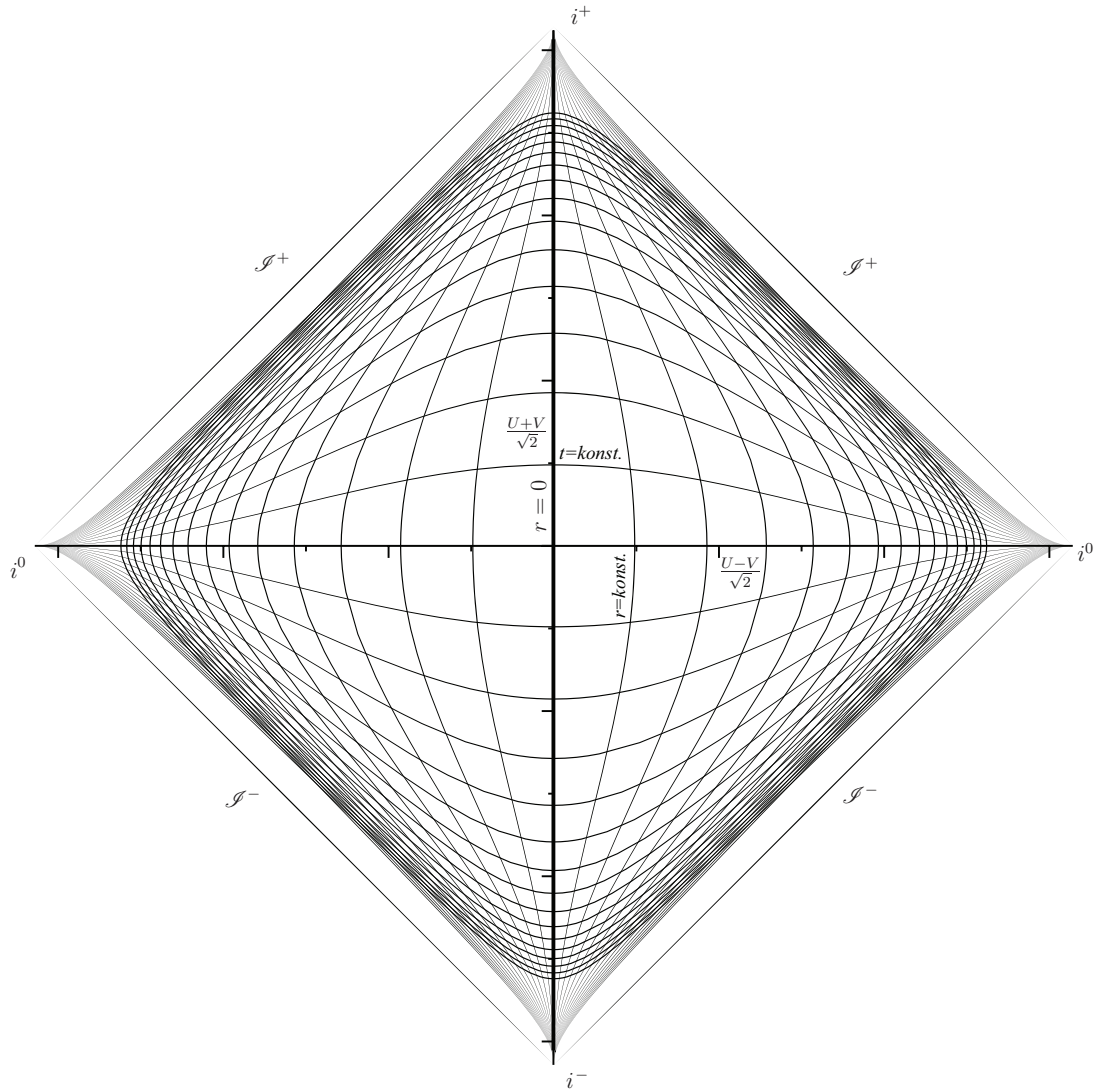
I tento koeficient je tedy analytickou funkcí v obou proměnných.

Oblast za \mathcal{S}^\pm

Vzhledem k analytickým vlastnostem metrických funkcí na \mathcal{S}^\pm nám nic nebrání se podívat, co odpovídá analyticky prodloužené metrice za \mathcal{S}^\pm .

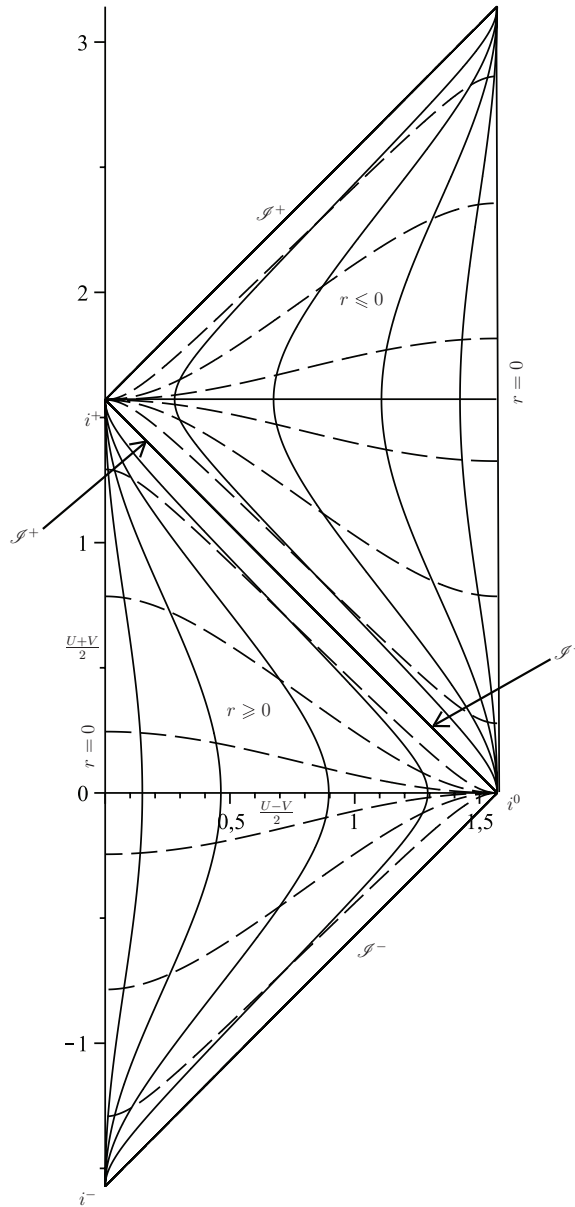
Budeme-li například procházet skrz \mathcal{S}^+ , to znamená $U = \pi/2$ a $V \in (-\pi/2, \pi/2)$, pak z definičního vztahu mezi radiální souřadnicí a U, V souřadnicemi ($r = (\tan(U) - \tan(V))/2$) obdržíme záporné hodnoty radiální souřadnice. Obdobně při přechodu přes \mathcal{S}^- .

Pro časovou souřadnici t můžeme provést podobnou diskusi a zjistíme, že na \mathcal{S}^+ se mění časová souřadnice skokově z $t = +\infty$ na $t = -\infty$, nebo-li se mění



Obrázek 2.2: Penroseův–Carterův diagram pro Minkowskiho prostoročas.

povaha prostoročasového nekonečna z \mathcal{I}^+ v oblasti $r > 0$ na \mathcal{I}^- v oblasti $r < 0$, což je difeomorfní nadplocha k naploše \mathcal{I}^- z oblasti $r > 0$, při $r \rightarrow -r$. Penroseův–Carterův diagram Minkowskiho prostoročasu s rozšířením o tuto oblast máme vykreslen na Obrázku 2.3.



Obrázek 2.3: *Penroseův–Carterův diagram pro Minkowskiho prostoročas s rozšířením za \mathcal{S}^+ . Ve spodní části diagramu máme vynesenu část Minkowskiho prostoročasu pro kladná r . Bod i^+ z části s kladným r splývá s bodem i^0 z oblasti se záporným r . Podobnou situaci budeme mít i v případě Schwarzschildova prostoročasu.*

Kapitola 3

Schwarzschildův prostoročas

V případě kdy budeme řešit úlohu s centrálně symetrickým rozložením hmoty, budeme taktéž předpokládat, že i vzbuzené gravitační pole bude centrálně symetrické. Při hledání řešení budeme také předpokládat, že rozložení hmoty v prostoru se s časem nemění¹, což znamená že výsledné gravitační pole bude statické. Potom všechny fyzikální veličiny budou záviset pouze na vzdálenosti od středu symetrie. Dále budeme předpokládat, že prostoročas v dostatečně velké vzdálenosti od středu symetrie přechází v *plochý*–Minkowskiho prostoročas.

Souřadnou soustavu v tomto případě volíme tak, aby ladila se symetrií prostoročasu. Použijeme sférické souřadnice (r, θ, φ) a střed symetrie klademe do počátku $r = 0$. Dráhový element tak můžeme hledat ve tvaru

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (3.1)$$

Dále budeme předpokládat, že těleso je prostorově omezené a sahá jen do jisté vzdálenosti R . Pro $r > R$ je již vakuum – v této oblasti je $T^{\mu\nu} = 0$. Budeme hledat řešení pro $r > R$, tzv. *vnější řešení*.

Vyřešením Einsteinových polních rovnic dospějeme k metrickým koeficientům

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad g_{rr} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}. \quad (3.2)$$

Tím jsme obdrželi přesné řešení Einsteinových rovnic ve vakuu pro sféricky symetrické gravitační pole. Toto řešení známe jako *Schwarzschildovo řešení*. Příslušný dráhový element je

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (3.3)$$

¹Lze ukázat, že tento předpoklad není nutný [1].

Schwarzschildova metrika se hodí i pro aproximativní popis pomalu rotujících objektů jako např. planety či hvězdy. Hlavní smysl má však pro popis velmi hmotných kompaktních objektů jakými jsou neutronové hvězdy nebo především černé díry. Ačkoli je většina objektů ve vesmíru rychle rotujících, lze Schwarzschildovu metriku použít pro jejich zjednodušený popis pomocí perturbačních metod.

Z dráhového elementu (3.3) můžeme určit hodnoty radiální souřadnice, pro které je tato metrika singulární – $r = 0$ a $r = 2M$. Singularita pro hodnotu $r = 2M$ je způsobena nevhodnou volbou souřadnic, mluvíme o tzv. souřadnicové singularitě. Tu lze odstranit jinou volbou souřadnic, např. Kruskalovy–Szekeresovy souřadnice. Singularitu $r = 0$ nelze odstranit žádnou transformací souřadnic², jedná se o neodstranitelnou, *fyzikální* singularitu geometrie prostoročasu.

Nežli začneme rozebírat konkrétní kompaktifikace Schwarzschildova prostoročasu, zavedeme si nejprve Kruskalovy–Szekeresovy souřadnice a Kruskalův–Szekeresův diagram, protože všechny dosud známé kompaktifikace ([1], [8], [12]) vycházejí právě z nich. Navíc jsou Kruskalovy–Szekeresovy souřadnice ukázkou analytických souřadnic na horizontu. My budeme chtít konstruovat souřadnice pokrývající analyticky mj. i horizont, a proto budou mít Kruskalovy–Szekeresovy souřadnice podstatnou roli.

3.1 Kruskalovy–Szekeresovy souřadnice

Zavedení Kruskalových–Szekeresových souřadnic je motivováno *čistě fyzikálně*. Používají souřadný systém ve Schwarzschildově prostoročase spojený radiálně se pohybujícími světelnými částicemi. Protože takové částice mohou padat do černé díry, metrika zapsaná v těchto souřadnicích není singulární pro $r = 2M$, jak je tomu v případě standardních Schwarzschildových souřadnic (3.3).

Vycházíme-li z dráhového elementu ve tvaru (3.3), pak můžeme předepsat [3] podmínku na pohyb světelných částic rovnicí

$$0 = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2, \quad (3.4)$$

což implikuje

$$\left(\frac{dt}{dr}\right) = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (3.5)$$

Řešením této rovnice dostáváme nulové geodetiky Schwarzschildova prostoročasu, které splňují podmínku

$$t = \pm r^* + \text{konst.}, \quad (3.6)$$

²O tom se lze přesvědčit např. z Kretschmerova skaláru [34].

kde standardně značíme r^* tzv. Reggeovu–Wheelerovu želví souřadnici definovanou vztahem $r^* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$.

Takto můžeme zavést nové souřadnice pomocí vztahů

$$\hat{u} = t - r^* \quad (3.7)$$

$$\hat{v} = t + r^*. \quad (3.8)$$

Vzhledem k (3.6) nám nulové radiální geodetiky v nových souřadnicích určují podmínky $\hat{u} = \text{konst.}$ nebo $\hat{v} = \text{konst.}$. Dráhový element asociovaný s těmito souřadnicemi³ je dán následujícím vztahem

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\hat{u}d\hat{v} + r^2 d\omega^2. \quad (3.9)$$

Takto zavedená metrika sice již není singulární, ale pokrývá jen oblast $r > 2M$. V tomto vztahu chápeme souřadnici r jako implicitně závislou na souřadnicích \hat{u}, \hat{v} , konkrétně $r^* = (\hat{v} - \hat{u})/2$. Užijeme-li tento implicitní vztah, pak po úpravě obdržíme ekvivalentní dráhový element

$$ds^2 = -\frac{2Me^{-r/2M}}{r} e^{(\hat{v}-\hat{u})/4M} d\hat{u}d\hat{v} + r^2 d\omega^2. \quad (3.10)$$

Tento tvar nám dává přímý návod, jak zavést Kruskalovy–Szekeresovy souřadnice⁴

$$u = -e^{-\hat{u}/4M} \quad (3.11)$$

$$v = e^{\hat{v}/4M}, \quad (3.12)$$

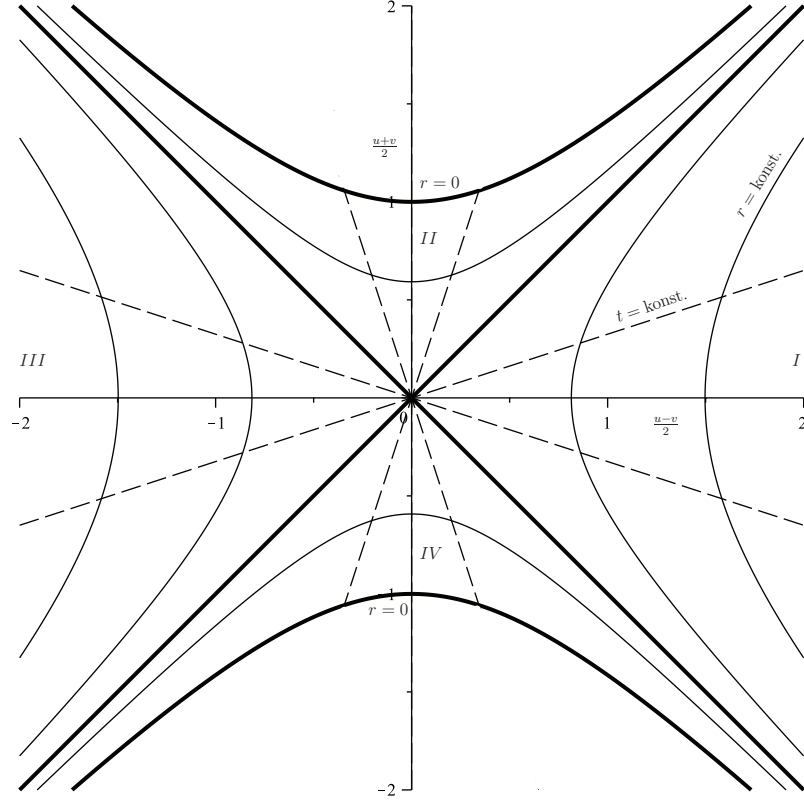
čímž obdržíme standardní dráhový element

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r(u,v)} e^{-\frac{r(u,v)}{2M}} dudv + r^2(u,v) d\omega^2. \quad (3.13)$$

V Kruskalovy–Szekeresových souřadnicích je i na horizontu $r = 2M$ metrický koeficient g_{uv} regulární funkcí souřadnic u, v . Kruskalův–Szekeresův diagram znázorňující souřadnicové čáry $t = \text{konst.}$ a $r = \text{konst.}$ v Kruskalových–Szekeresových souřadnicích je na obrázku 3.1.

³Jsou to samozřejmě tzv. Eddingtonovy–Finkelsteinovy souřadnice, v ([3]) se můžeme alternativně setkat s označením *advancovaný* a *retardovaný* čas.

⁴Tímto pokrýváme jen oblast $2M < r < \infty$, pro ostatní regiony Schwarzschildova prostoročasu jsou konkrétní transformační vztahy uvedeny v dodatku A.



Obrázek 3.1: *Kruskalov–Szekeresův diagram pro dráhový element (3.13)*. Diagram je rozdělen na čtyři regiony (*I – IV*), kde *I* a *II* jsou fyzikálně relevantní oblasti, mapující fyzikální Schwarzschildův prostoročas. Oblasti *III* a *IV* jsou jeho analytickým rozšířením. Takto zkonstruovaný diagram se někdy nazývá maximálně analytické pokrytí Schwarzschildova prostoročasu. Všechny diagramy pro Schwarzschildův prostoročas jsou kresleny pro $M = 1$.

3.1.1 Kompaktifikace Kruskalových–Szekeresových souřadnic

Kompaktifikaci Kruskalova–Szekeresova prostoročasu začneme obecnou transformací do nových souřadnic U, V . Pomocí transformačních vztahů

$$u = f(U),$$

$$v = f(V).$$

Tato volba vychází z potřeby zachovat i v nových souřadnicích symetrii $t \rightarrow -t$ a podobu světelných kuželů. Tak obdržíme obecné vyjádření dráhového elementu

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r(U, V)} e^{-\frac{r(U, V)}{2M}} f'(U) f'(V) dU dV + r^2(U, V) d\omega^2, \quad (3.14)$$

kde metrický koeficient g_{UV} obsahuje exponenciální člen, který bude velice rychle klesat k nule pro $r \rightarrow \infty$. Tento člen si odstraníme pomocí implicitního vztahu (3.15), abychom mohli co nejlépe popsat tuto vlastnost rychlého klesání v radiálním nekonečnu. Pro tuto korekci je vhodné využít implicitní vztah

$$uv = \left(1 - \frac{r}{2M}\right) e^{\frac{r}{2M}} \quad \text{resp.} \quad f(U)f(V) = \left(1 - \frac{r}{2M}\right) e^{\frac{r}{2M}} \quad (3.15)$$

mezi Kruskalovými–Szekeresovými souřadnicemi, resp. jejich transformacemi, a r , z něhož si lze vyjádřit výraz $e^{-r/2M}$ a následně provést substituci do dráhového elementu (3.14).

Po dosazení obdržíme dráhový element

$$ds^2 = \left(16M^2 - \frac{32M^3}{r}\right) \frac{f'(U)f'(V)}{f(U)f(V)} dUdV + r^2(U, V)d\omega^2 \quad (3.16)$$

a jeho konformně transformovaný tvar:

$$d\tilde{s}^2 = \Omega^2 \left(16M^2 - \frac{32M^3}{r}\right) \frac{f'(U)f'(V)}{f(U)f(V)} dUdV + \Omega^2 r^2(U, V)d\omega^2. \quad (3.17)$$

V dalších částech si budeme dosazovat za f konkrétní funkce převzaté z literatury nebo budeme hledat nové. Zatím si ale ponecháme dráhové elementy v tomto tvaru, protože platí

$$dx^\mu dx^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu \Omega|_{i^0} = \lim_{i^0} (\Omega_{,UU} dU^2 + 2\Omega_{,UV} dUdV + \Omega_{,VV} dV^2), \quad (3.18)$$

pokud $\nabla_\mu \Omega(i^0) \neq 0$, $\Omega(i^0) = 0$ a $\lim_{i^0} \tilde{\Gamma}^\alpha{}_{\mu\nu} = 0$. Při zkoumání konkrétních kompaktifikací budeme využívat přepis podmínky (2.13) pro případ obecné volby transformační souřadnice

$$\lim_{i^0} \frac{\partial^2 \Omega(U, V)}{\partial U \partial V} = \left(16M^2 - \frac{32M^3}{r}\right) \Omega^2 \frac{f'(U)f'(V)}{f(U)f(V)} \Big|_{i^0} \quad (3.19)$$

a

$$\lim_{i^0} \frac{\partial^2 \Omega(U, V)}{\partial U^2} = \lim_{i^0} \frac{\partial^2 \Omega(U, V)}{\partial V^2} = 0, \quad (3.20)$$

kde limitní proces závisí samozřejmě na směru, ze kterého se do i^0 blížíme. Je třeba si uvědomit, že k bodu i^0 se můžeme blížit pouze z fyzikálně relevantní části prostoročasu. To nám bude určovat konkrétní volbu směru, ve kterém provádíme tyto limity.

Přihlédneme-li k tomu, že tuto podmínku řešíme v radiálním nekonečnu ($r = \infty$), kde výraz úměrný $1/r$ jde do nuly, lze zjednodušit⁵ podmínku (3.19) jako

$$\lim_{i^0} \frac{\partial^2 \Omega(U, V)}{\partial U \partial V} = 16M^2 \Omega^2 \frac{f'(U)f'(V)}{f(U)f(V)} \Big|_{i^0}. \quad (3.21)$$

Mohlo by být namítáno, že užíváme pouze parciální derivace a měli bychom uvažovat kovariantní derivace. Pokud si však uvědomíme, že podmínky klademe na nadplochy kde $r \rightarrow \infty$, pak Christoffelovy symboly asociované s konformní metrikou ($\tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$) jsou nulové. O tom se můžeme přesvědčit rozpisem

$$\begin{aligned} dx^\mu dx^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu \Omega &= \left(\partial_{UU} \Omega + \partial_U \Omega \frac{\partial_U \tilde{g}_{UV}}{\tilde{g}_{UV}} \right) dU^2 + \left(\partial_{VV} \Omega + \partial_V \Omega \frac{\partial_V \tilde{g}_{UV}}{\tilde{g}_{UV}} \right) dV^2 + \partial_{UV} \Omega dU dV + \\ &+ \frac{\tilde{g}_{\theta\theta} (\partial_V \tilde{g}_{\theta\theta} \partial_U \Omega + \partial_U \tilde{g}_{\theta\theta} \partial_V \Omega)}{\tilde{g}_{UV}} d\omega^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Tento explicitní výraz nám ukazuje, že používání obyčejných derivací namísto kovariantních je v pořádku.

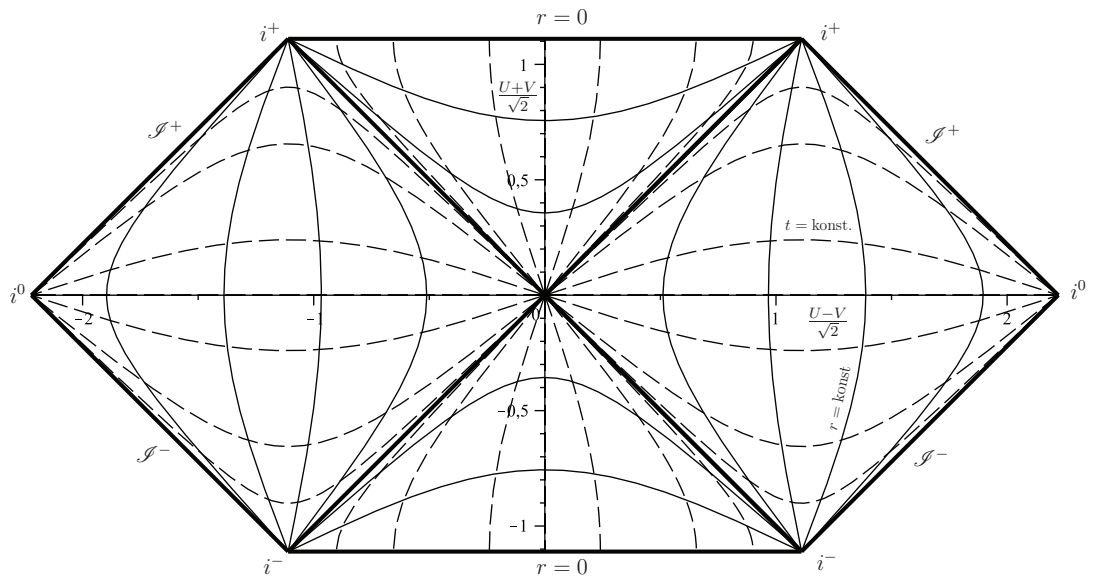
Tyto vztahy nám slouží především k tomu, abychom okamžitě byli schopni ověřit, jestli daná transformace kompaktifikuje Schwarzschildův prostoročas při zachování podmínek (2.9)–(2.13).

3.2 Přehled kompaktifikačních transformací

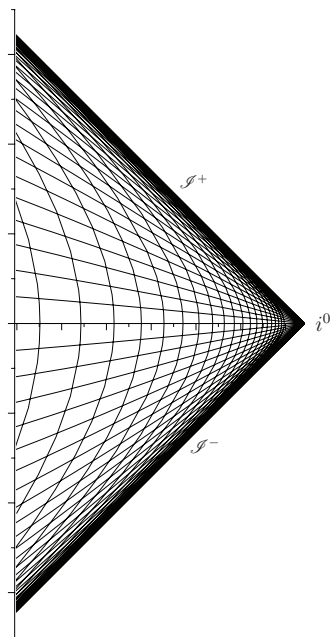
V této části rozebereme dosud známé přístupy ke kompaktifikaci Schwarzschildova prostoročasu. Budeme postupovat od nejnámějších přístupů, a jako první možnost volby transformační funkce uijeme [1].

Jednou z motivací ke vzniku této práce bylo, že Penroseův–Carterův diagram na obrázku 3.2 se liší od stejného diagramu pro Minkowskiho prostoročas nejen v okolí černé díry, ale také v oblasti $r \rightarrow \infty$, jejichž výřezy jsou na obrázcích 3.3 a 3.4. Snadno si všimneme oblasti v okolí i^0 , kde se nám značně liší např. úhel, pod kterým se křivky $t = \text{konst.}$ blíží k i^0 . Protože Schwarzschildova metrika je asymptoticky plochá, pak je špatně volba souřadnic a metrika zadaná v těchto souřadnicích pravděpodobně nebude splňovat některé požadavky z (2.9)–(2.13). Následně budeme hledat a zkoumat požadavky na transformační funkce.

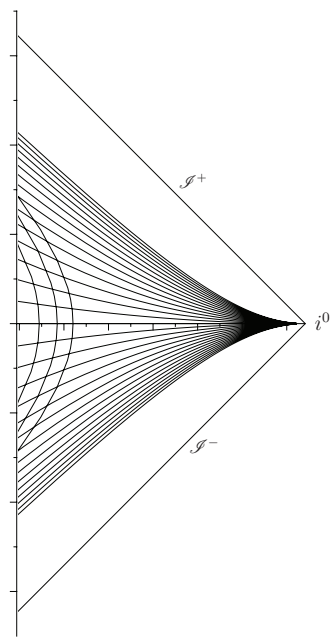
⁵Druhá motivace proč vypustit tento člen z hledání správného konformního faktoru je, že snazší řešení bude v separovaném tvaru. Pokud bychom zahrnuli do podmínky pro hledání daného faktoru i člen úměrný $r(U, V)$, pak bychom už nemohli tak snadno najít daný konformní faktor.



Obrázek 3.2: Penroseův–Carterův diagram pro Schwarzschildův prostoročas konstruovaný dle [1].



Obrázek 3.3: Okolí bodu i^0 při kompaktifikaci Schwarzschildova prostoročasu dle [1].



Obrázek 3.4: Okolí bodu i^0 při kompaktifikaci Minkowskiho prostoročasu pomocí transformace $u = \tan(U)$.

3.2.1 Varianta 1 (Misner–Thorne–Wheeler)

Jak jsme již zmínili na začátku této kapitoly, tak nejrozšířenější přístup ke kompaktifikaci Schwarzschildova prostoročasu nalezneme v [1]. Autoři zde volí transformační funkci $f(X) \equiv \tan(X)$, která nám přenesne Kruskalovy–Szekeresovy souřadnice na kompaktifikované. Pokud zmíněnou funkci dosadíme do vztahu (3.16),

provedeme derivace a upravíme, dostaneme dráhový element v kompaktifikovaných souřadnicích ve tvaru

$$ds^2 = \left(16M^2 - \frac{32M^3}{r}\right) \frac{1}{\sin U \cos U} \frac{1}{\sin V \cos V} dU dV + r^2(U, V) d\omega^2. \quad (3.23)$$

Metrický koeficient g_{UV} diverguje na \mathcal{I}^\pm a v i^0 ($U = \pi/2$ a $V = -\pi/2$), jako tomu bylo i v případě Minkowského metriky. Tuto divergenci jsme odstranili pomocí konkrétní volby konformního faktoru Ω , pro který jsme následně ověřili podmínky na asymptotickou plochost.

V daném případě lze zvolit konformní faktor přímočaře, podobně jako v případě první kapitoly, a to $\Omega_1 = \sqrt{\cos U \cos V}$.

S tímto konformním faktorem získáme dráhový element

$$d\tilde{s}_1^2 = - \left(\frac{32M^3}{r(U, V)} - 16M^2 \right) \frac{1}{\sin U} \frac{1}{\sin V} dU dV + \Omega_1^2 r_1^2(U, V) d\omega^2 \quad (3.24)$$

kde (s použitím speciální funkce W , viz dodatek B.2)

$$r(U, V) = 2M (W_0(-uv/e) + 1) = 2M (W_0(-\tan(U) \tan(V)/e) + 1). \quad (3.25)$$

Výrazy obsahující funkce $\sin(X)$ nám zaručí $g_{UV} < 0 \forall U, V$ a navíc vykompenzují nulovost členu v závorce pro $r = 2M$.

Lze ukázat, že podmínky (2.9)–(2.13) jsou splněny, ale problematická se ukáže (2.13). Níže uvádíme hodnoty levé (LS) a pravé (PS) strany vztahu (2.13)

$$LS = \lim_{i^0} \frac{1}{4} \frac{\sin U \sin V}{\sqrt{\cos U \cos V}} = -\infty \quad (3.26)$$

$$PS = \left(16M^2 - \frac{32M^3}{r}\right) \frac{1}{\sin U \sin V} \Big|_{i^0} = -16M^2. \quad (3.27)$$

Levá strana rovnic diverguje, zatímco pravá se rovná konstantě. Navíc asymptoticky $\Omega_1 r_1 \rightarrow 0$, to vede na degeneraci (\tilde{M}, \tilde{g}) , a je to klesající funkce – asymptoticky se chová velmi odlišně od Minkowského prostoročasu. Z toho plyne, že se nám nepodařilo najít $\tilde{g}(U, V)$ splňující (2.9)–(2.13) a budeme hledat jinou transformaci, která by nám tento nedostatek mohla odstranit.

Zkonstruovaný Penroseův–Carterův diagram je na obrázku 3.2. Opět jsme použili program Maple a příkaz `implicitplot`, kde jako implicitní vztah byl použit $(1 - r_0/2M) \exp(r_0/2M) = \tan(U) \tan(V)$, kde r_0 jsou pevně zvolené hodnoty radiální souřadnice.

Za zmínku stojí, že autoři v [1] nechávají metriku v původní Kruskalově formě a provedou transformaci souřadnic $u = \tan(U)$. Tím obdrží

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r(U,V)} e^{-\frac{r(U,V)}{2M}} \frac{1}{\cos^2(U)} \frac{1}{\cos^2(V)} dU dV + r^2(U,V) d\omega^2 \quad (3.28)$$

a dále zvolí konformní faktor $\Omega = \cos(U) \cos(V)$ čímž dostanou tvar

$$d\tilde{s}^2 = -\frac{32M^3}{r(U,V)} e^{-\frac{r(U,V)}{2M}} dU dV + \Omega^2 r^2(U,V) d\omega^2. \quad (3.29)$$

Důvod proč jsme tento původní postup nepoužili je, že metrický koeficient $\tilde{g}_{UV}(r \rightarrow \infty) = 0$ (podmínku 2.13 opět nelze splnit), kdežto metrika \tilde{g} prostoročasu kompaktifikovaného dle [8] nesmí být na \mathcal{S}^\pm degenerovaná.

Při užití kompaktifikace [1] *neexistuje* Ω vedoucí k asymptoticky ploché konformní metrice⁶, protože jediný způsob jak vyrušit exponenciální chování, by bylo zahrnout do konformního faktoru výraz úměrný $\sim e^r$. Jenže takovýto člen způsobí divergenci konformního faktoru Ω na \mathcal{S}^\pm . Vzhledem k exponenciálnímu ubývání metriky do nekonečna a volbou transformační funkce $\tan(X)$ nemáme možnost jak zkonstruovat asymptoticky plochou metriku $\tilde{g}_{\mu\nu}(U,V)$ splňující podmínky (2.9)–(2.13).

Takto se dostáváme ke druhému způsobu kompaktifikace, jejímž principem je volba transformační funkce takové, která bude kompenzovat exponenciální povahu metriky⁷.

3.2.2 Varianta 2 (Novikov, Frolov)

Zde zkusíme najít složenou funkci takovou, aby vnější funkce odstranila exponenciální chování g_{uv} a vnitřní funkce kompaktifikovala prostoročas.

V dráhovém elementu (3.17) se vyskytuje člen $f'(X)/f(X)$. Pokud budeme požadovat, aby byl tento výraz v nekonečnu omezený, pak jednoznačně dostaneme požadavek na exponenciální tvar námi hledané funkce. Navíc potřebujeme mapovat Kruskalovy souřadnice, jejichž obor hodnot je v celém \mathbb{R} . Proto vyžadujeme, aby obor hodnot byl taktéž v celém \mathbb{R} . Z této úvahy následně zavádíme transformační funkce

$$f(X) = e^{\tan(X)} - e^{-\tan(X)}. \quad (3.30)$$

Až na faktor 1/2 stejnou transformační funkci užívají autoři [7] a také na stejnou transformaci můžeme narazit v [8] z roku 1964. Historicky byla tedy tato transformace zavedena R. Penrose dříve, než-li jednodušší verze v [1]⁸.

⁶Toto označení nemá v literatuře oporu, my tímto výrazem myslíme $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Omega)$, kde Ω splňuje podmínky (2.9)–(2.13).

⁷Exponenciální člen je pozůstatkem po kruskalizaci.

⁸Autoři v [1] zavádějí tuto transformaci, avšak tato kniha je učebnicí, odkud ale transformaci autoři přebrali, se nám nepodařilo zjistit. Zajímavé je, že na začátku kapitoly autoři zmiňují Penroseův článek [8], ale transformaci používají odlišnou.

Pokud dosadíme funkci (3.30), nebo explicitně $u = 2 \sinh(\tan(U))$ do (3.16), po úpravě máme tvar

$$ds^2 = \left(16M^2 - \frac{32M^3}{r}\right) \frac{\coth(\tan U) \coth(\tan V)}{\cos^2 U \cos^2 V} dU dV + r^2(U, V) d\omega^2. \quad (3.31)$$

Konformní faktor zvolíme podle [7], a zjišťujeme zda tato transformace respektuje požadavky na kompaktifikaci asymptoticky plochého prostoročasu (2.9)–(2.13). Volíme tedy

$$\Omega_{NF} = \frac{1}{r_2(U, V)},$$

kde⁹

$$\begin{aligned} r_2(U, V) &= 2M (W_0(-uv/e) + 1) = \\ &= 2M (W_0(-4 \sinh(\tan(V)) \sinh(\tan(U))/e) + 1). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Tím obdržíme dráhový element

$$ds^2 = \left(16M^2 - \frac{32M^3}{r_2}\right) \frac{\coth(\tan U) \coth(\tan V)}{r_2(U, V) \cos^2 U \cos^2 V} dU dV + r_2^2 d\omega^2. \quad (3.33)$$

Nejprve (2.9) a (2.11) jsou splněny automaticky ($1/r \rightarrow 0$ pro $r \rightarrow \infty$). Podmínky (2.10) a (2.12) můžeme opět spočítat společně. Zderivovat Ω není přímočaré, ale i tady nám pomůže Dodatek B.2. Obecně máme¹⁰

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{W_0(-f(x)f(y)/e) + 1} \right) = - \frac{\left(\frac{d}{dx} f(x)\right) W_0(-f(x)f(y)/e)}{[W_0(-f(x)f(y)/e) + 1]^3 f(x)} \quad (3.34)$$

Stačí jen spočítat výraz

$$- \frac{\frac{d}{dx} \ln f(x)}{W_0(-f(x)f(y)/e)^2} \quad (3.35)$$

a po dosazení našich funkcí a krátkém výpočtu, kdy nepodstatné členy zahrneme do funkce $K(U, V)$, která je omezená a nenulová, získáme výraz

$$\tilde{\nabla}_U \Omega = \dots = \frac{K(U, V)}{[W_0(-\sinh \tan U \sinh \tan V/e)]^2 \cos^2 U} \neq 0 \quad \text{pro } \mathcal{I}^+. \quad (3.36)$$

Ten pro $U = \pi/2$ a $V \in (-\pi/2, 0)$ roven jedné. Podmínka (2.10) je splněna a pro podmínku (2.12) platí podobná diskuse. Jediný rozdíl je, že derivace jde do nuly rychleji. Pro souřadnici V je situace analogická, až na opačné znaménko u výsledku derivace.

⁹Spodní index užíváme k odlišení od implicitního vyjádření poloměru při užití MTW transformace.

¹⁰Derivace a obdobný výpočet pro druhou proměnnou nevypisujeme, snadno si lze postup představit ($U \leftrightarrow V$).

Zbývá nám již poslední podmínka (2.13), jejíž ověření se může zdát nejobtížnější. Musíme spočítat $\Omega_{,UU}$ a $\Omega_{,UV}$. Za pomoci systému Maple zjistíme, že takto konstruovaný konformně kompaktifikovaný prostoročas nesplňuje podmínku (2.13) kladenou na asymptotickou plochost. Konkrétně hodnoty limit pro $\Omega_{,UU} = \Omega_{,VV} = \pm\infty$, kdežto komponenty metriky \tilde{g}_{UU} a \tilde{g}_{VV} jsou identicky rovny nule.

Nesplnění této jediné podmínky ukazuje, že kompaktifikace typu [7] asymptoticky plochého prostoročasu neodpovídá požadavkům Penrose a spol.

Tento závěr by nás neměl překvapit, protože z diskuse u vztahu (2.18) v kapitole o Minkowského prostoročasu víme, že přímočará volba konformního faktoru nemůže splňovat podmínku (2.13). V této části práce jsme si explicitně potvrdili naše očekávání.

Volba vhodnějšího konformního faktoru

Zkusíme si zvolit vhodnější konformní faktor, který by splňoval všechny podmínky (2.9)–(2.13). Konkrétně pak volíme

$$\Omega_{NFX} = \frac{\cos U \cos V}{16M^2},$$

jehož aplikací na (3.31) obdržíme dráhový element tvaru

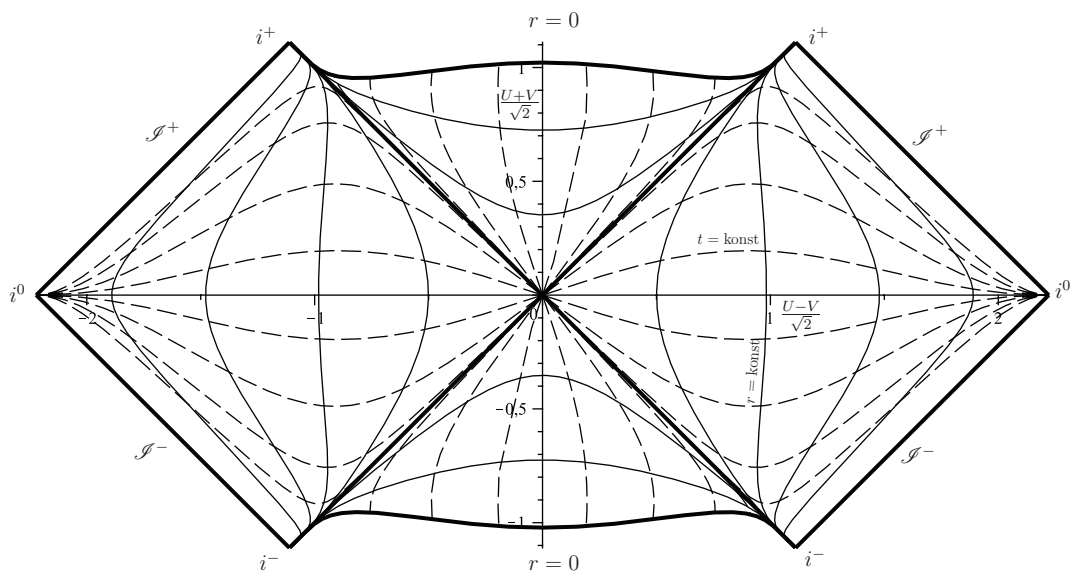
$$d\tilde{s}^2 = \frac{1}{16M^2} \left(1 - \frac{2M}{r(U, V)} \right) \coth(\tan U) \coth(\tan U) dU dV + \Omega_{NFX}^2 r^2(U, V) d\omega^2. \quad (3.37)$$

Na první pohled je zřejmé, že pro oblasti radiálního nekonečna dostáváme $g_{UV}(r \rightarrow \infty) \simeq O(1)$. To je zásadní pokrok oproti *MTW přístupu*, kde $g_{UV}(r \rightarrow \infty) \simeq \exp(-r)$.

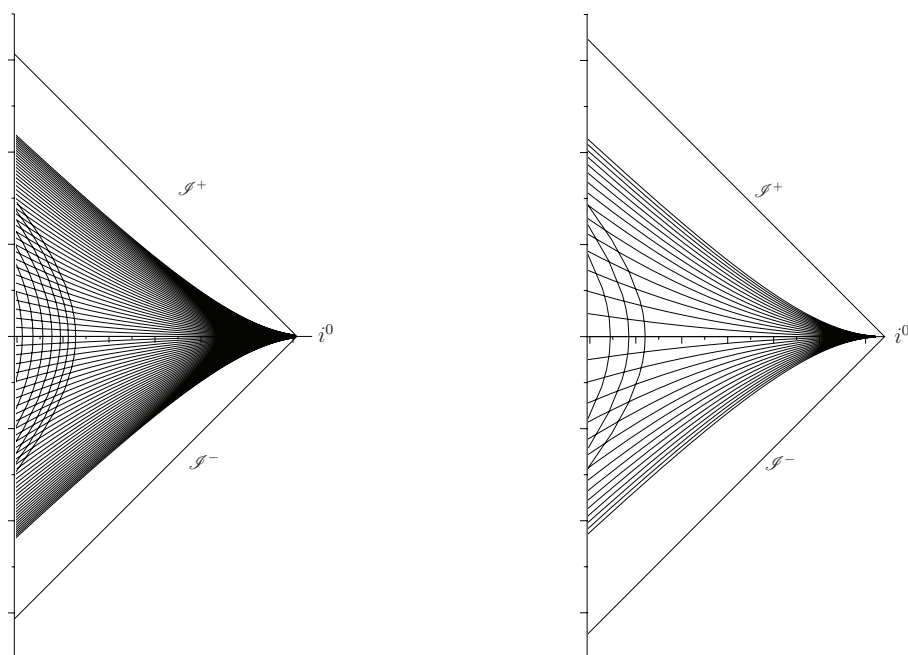
Vzhledem k jednoduchému tvaru (formálně shodnému s případem Minkowského metriky) konformního faktoru a metrickým koeficientům je snadné si ověřit, že jsou podmínky (2.9) až (2.13) splněny.

Příslušný Penroseův–Carterův diagram je na obrázku 3.5. Z tohoto diagramu je zřejmé, že oblast v okolí i^0 je podobná stejné oblasti v Minkowského metrice. Pro kvalitnější srovnání těchto oblastí ukazujeme výřezy z obou diagramů na obrázku 3.6.

Máme tedy zkonstruovaný asymptoticky plochý kompaktifikovaný konformní prostoročas. Je nutno ještě zmínit, že takto konstruovaný prostoročas trpí zásadním nedostatkem, jímž je *neanalytičnost* metriky na \mathcal{I}^\pm ! V metrickém koeficientu g_{UV} máme funkce $\coth(\tan(U))$ atp., nespojitě v $U = \pm\pi/2$ tedy na \mathcal{I}^\pm .



Obrázek 3.5: Penroseův–Carterův diagram pro kompaktifikaci Novikovova typu (3.30).



Obrázek 3.6: Vlevo je výřez okolí i^0 pro kompaktifikaci Schwarzschildova prostoročasu pomocí transformace (3.30) a vpravo výřez stejné oblasti pro Minkowskiho prostoročas.

3.2.3 Porovnání obou přístupů

Uvedli jsme dva přístupy ke kompaktifikaci Schwarzschildova prostoročasu a následně konstrukce konformních metrik k nim příslušejících.

Ačkoli je MTW přístup tím nejrozšířenějším, tímto způsobem nelze zkonstruovat kompaktifikovanou konformní metriku $\bar{g}(U, V)$ splňující (2.9)–(2.13). Tento

typ se většinou užívá k vizualizaci výsledků, avšak pro početní potřeby je tento postup nevhodný.

Naopak druhý typ kompaktifikace [7] vede při užití vhodného konformního faktoru na prostoročas splňující podmínky (2.9)–(2.13). Ovšem stále trpí neanalytičností metrických koeficientů na \mathcal{S}^\pm , což je asi nejzásadnějším nedostatkem.

3.2.4 Tvar singularity $r = 0$

Ukázali jsme si, že v případě MTW kompaktifikace nesplníme podmínky na asymptotickou plochost v „bodě“ i^0 . Nicméně již po 40 let se malují kompaktifikované diagramy výhradně tímto způsobem. V tomto přístupu je křivkou singularity $r = 0$ úsečka. Můžeme provést úvahu, proč tomu tak je a zda je požadavek relevantní.

Tvar singularity $r = 0$ nám určuje implicitní vztah $f(U)f(V) = 1^{11}$, ze kterého je možné si vyjádřit explicitní závislost $U = g(V)$ anebo $V = g(U)$.

Pokud si vyjádříme např. U jako veličinu závislou na V , pak obdržíme obecně

$$U = f^{-1}\left(\frac{1}{f(V)}\right). \quad (3.38)$$

Když bychom požadovali rovný tvar singularity, pak musí souřadnice splňovat vztah $U + V = \pi/2$. To pro nás představuje podmínku pro souřadnice, kterou můžeme dosadit do (3.38) a tím obdržíme

$$U = f^{-1}\left(\frac{1}{f(\pi/2 - U)}\right) \quad \text{nebo implicitně} \quad f(U) = \frac{1}{f(\pi/2 - U)} \quad \forall U \in (0, \pi/2) \quad (3.39)$$

na třídu funkcí zachovávající $r = 0$ ve tvaru úsečky.

V případě MTW kompaktifikace bylo z diagramu na obrázku 3.2 jasné, že podmínka (3.39) je splněna. Explicitně

$$\frac{1}{\tan(\pi/2 - U)} = \frac{\cos(\pi/2 - U)}{\sin(\pi/2 - U)} = \tan(U). \quad (3.40)$$

Aplikujeme-li (3.39) na Novikovovu-Frolovovu transformaci, obdržíme, s výjimkou několika bodů, *nerovnost*

$$\sinh(\tan(U)) \neq \frac{1}{\sinh(\tan(\pi/2 - U))}, \quad (3.41)$$

tudíž singularita má tvar obecné křivky.

Autoři v [7] (str. 155) tvrdí, že tvar singularity lze narovnat na úsečku pomocí transformace souřadnic $\tilde{X} = h(X)$, kde tyto dva popisy Schwarzschildova prostoro-

¹¹Pokud by někdo studoval postup v [7], pak dostane na pravé straně rovnosti hodnotu $1/e$, vzhledem k tomu že, autoři používají jiný druh kruskalizace (liší se o konstantu od našeho).

ročasu budou ekvivalentní, pokud h je hladká monotónní funkce. Autoři uvádějí výraz pro $h(x)$ ve tvaru

$$h(x) = \frac{1}{2}(g(x) - x) + \pi/4, \quad (3.42)$$

kde $g(x)$ je přesně funkce z našeho vyjádření závislosti $U = g(V)$ resp. $V = g(U)$, nebo-li explicitně $g \equiv f^{-1}\left(\frac{1}{f}\right)$.

Lze ale snadno ověřit, že transformace (3.42) nevede k požadovanému výsledku. Dále dokážeme, že bez porušení podmínek (2.9)–(2.13) to ani jinak nejde.

Vazba na rovný tvar $r = 0$.

V předchozí části jsme dospěli k závěru, že Novikovův–Frolovův typ kompaktifikace vede na splnění podmínek (2.9)–(2.13). V příslušném diagramu byla křivka popisující singularitu obecného tvaru. Naopak v případě MTW typu jsme měli sice tvar singularity ve tvaru úsečky, ale nespĺnili jsme podmínky (2.9)–(2.13). Na tomto místě bychom chtěli ukázat, že tato souvislost není náhodná.

Připomeneme si podmínku (3.39), která nám dává předpis na třídu funkcí zachovávající tvar singularity ve tvaru úsečky. V implicitním formě máme

$$f(x) = \frac{1}{f(\pi/2 - x)}. \quad (3.43)$$

Tento vztah nám svazuje chování funkce v okolí $u = 0$ a $u \rightarrow \infty$ a důsledkem toho bude provázanost tvaru singularity $r = 0$ a asymptotické plochosti (M, g) .

Rozvojem dráhového elementu (3.16) v okolí $r = 2M$ se dá ukázat $g_{UV} \simeq f'(U)f'(V)$. Na horizontu požadujeme omezenost a nenulovost tohoto koeficientu, z toho plyne rozvoj transformační funkce $f(x \rightarrow 0) \rightarrow a_1x + O(x^2)$. Tento rozvoj můžeme dosadit do (3.43) a obdržíme tak rozvoj $f(x)$ v okolí $U, V = \pm\pi/2$:

$$f(x)_{x \rightarrow \pi/2} = \frac{1}{f(\pi/2 - x)_{x \rightarrow \pi/2}} = \frac{1}{a(\pi/2 - x) + O((x - \pi/2)^2)} \quad (3.44)$$

Tento rozvoj dosadíme do dráhového elementu (3.16) vyjádřené pro asymptotickou oblast $r \rightarrow \infty$ vztahem

$$ds_{r \rightarrow \infty}^2 = 16M^2 \frac{f'(U)f'(V)}{f(U)f(V)} dUdV + r^2(U, V)d\omega^2. \quad (3.45)$$

Výsledný dráhový element v okolí i^0 bude mít tvar

$$ds_{r \rightarrow \infty}^2 = 16M^2 \left(\frac{1}{(\pi/2 - U)} \frac{1}{(\pi/2 - V)} + O(konst.) \right) dUdV + r^2(U, V)d\omega^2, \quad (3.46)$$

shodný s rozvojem (3.23). Konformní faktor volíme tak, aby se pro $U, V \rightarrow \pm\pi/2$ choval $\Omega^2 \rightarrow 0$ lineárně v obou proměnných. Můžeme předpokládat separabilní

tvár konformního faktoru jako $\Omega = h(U)h(V)$. To znamená, že $h(0) = \text{konst.}$, více nepředpokládáme a $h(U)_{U \rightarrow \pi/2} = c(\pi/2 - U)^{1/2} + \mathcal{O}((\pi/2 - U))$.

Z tohoto tvaru si snadno ověříme, že $\Omega_{,UV}(i^0) \rightarrow \infty$. Podmínka (2.13) ale říká, že tento výraz musí být konstantní. Podmínku nelze žádným způsobem splnit. Tyto poznatky můžeme shrnout následovně:

Tvrzení 1 *Kompaktifikací Kruskalových–Szekeresových souřadnic nelze sestavit konformní Schwarzschildovu metriku splňující současně požadavky:*

- *Zachovávající světelné kužely.*
- *Singularita ve tvaru úsečky.*
- *Regularita \tilde{g} na horizontu.*
- *Ω splňuje podmínky (2.9)–(2.13).*

Důsledky asymptotického chování Kruskalových–Szekeresových souřadnic

Můžeme předpokládat transformační funkci jako složenou funkci tak, že vnější funkce je zatím libovolná a funkce vnitřní je kompaktifikační funkcí. To znamená, že do metriky rozvinuté v okolí $r \rightarrow \infty$ danou vztahem (3.45) dosadíme za $f(x) = g(h(x))$. Po dosazení a provedení derivace máme výraz

$$\frac{f(x)'}{f(x)} = \frac{\frac{dg(h(x))}{dh(x)} dh(x)}{g(h(x)) dx}, \quad (3.47)$$

kde druhý zlomek na pravé straně se chová v prvním členu jako $(1/x^2)$, tudíž tento člen můžeme vyrušit konformním faktorem, jenž bude lineární v obou proměnných. Takovouto volbou snadno splníme podmínky na asymptotickou plochost (2.9) – (2.13), pokud bude podíl $\frac{dg(h(x))}{g(h(x))}$ konečný.

Požadavek konečnosti tohoto podílu nám dává diferenciální rovnici, z jejíž řešení plyne exponenciální chování vnější funkce. Celkově tedy máme $f(x) = \exp(k \tan(x) + C)$. Toto řešení vede na Novikovův–Frolovův typ kompaktifikace. Každopádně užívání exponenciální funkce není pro naši potřebu analytičnosti na \mathcal{I}^\pm zrovna ideální volbou, protože funkce $\exp 1/x$ je neanalytickou funkcí v okolí $x = 0$. Při užití komplexní proměnné je v tomto bodě neodstranitelná singularita.

Tyto poznatky lze shrnout následovně.

Tvrzení 2 *Pro dosažení asymptoticky ploché kompaktifikace Schwarzschildova prostoročasu v Kruskalových–Szekeresových souřadnicích pomocí složení dvou elementárních funkcí je nutné použít transformačních funkcí neanalytických na \mathcal{I}^\pm .*

Z předchozích příkladů převzatých z [1], [7] a následném rozboru kompaktifikace Schwarzschildova prostoročasu zadaném Kruskalovými–Szekeresovými souřadnicemi jsme dospěli k závěru, že nelze provést kompaktifikaci pomocí jednoduchých elementárních funkcí tak, aby splňovala všechny relevantní podmínky, tj. aby byla výsledná metrika analytická všude, včetně \mathcal{I}^\pm , a asymptoticky plochá.

Pro úspěšnou konstrukci kompaktifikovaného Schwarzschildova prostoročasu splňujícího všechny relevantní podmínky, bude nutné zavést vhodnější kruskalizaci. Ta původní jenž byla zavedena v [30] a [31] není pro naše potřeby vyhovující. Hlavním důvodem je aplikace exponenciálního chování, jenž je vhodné odstranění souřadnicové singularity $r = 2M$, na celý prostoročas.

V předešlém odstavci (a tvrzení) jsme poznamenali, že se nám nepodařilo najít vhodnou kompaktifikaci pomocí složení či jinou jednoduchou kombinací elementárních funkcí. Z těchto důvodů jsme se rozhodli zvolit cestu konstrukce vhodnějších souřadnic Kruskalova typu a následně provést kompaktifikaci, protože vhodná kompaktifikační procedura bude zřejmě odlišná než-li uvažují autoři [1] a [7]. Jedna z ukázek komplikovanějšího tvaru transformační funkce je v následující části. Uvidíme, že i tato transformace není zcela vhodná, ale bude sloužit jako motivační a demonstrační pasáž naší práce.

3.2.5 Varianta 3 (Hervik, Grøn)

Pro úplnost ještě uvedeme jeden přístup ke kompaktifikaci, který lze nalézt v [12] (dodatek B tamtéž). Tento typ kompaktifikace především demonstruje, že pro asymptoticky plochou kompaktifikaci lze užívat i složitější tvary kompaktifikačních funkcí.

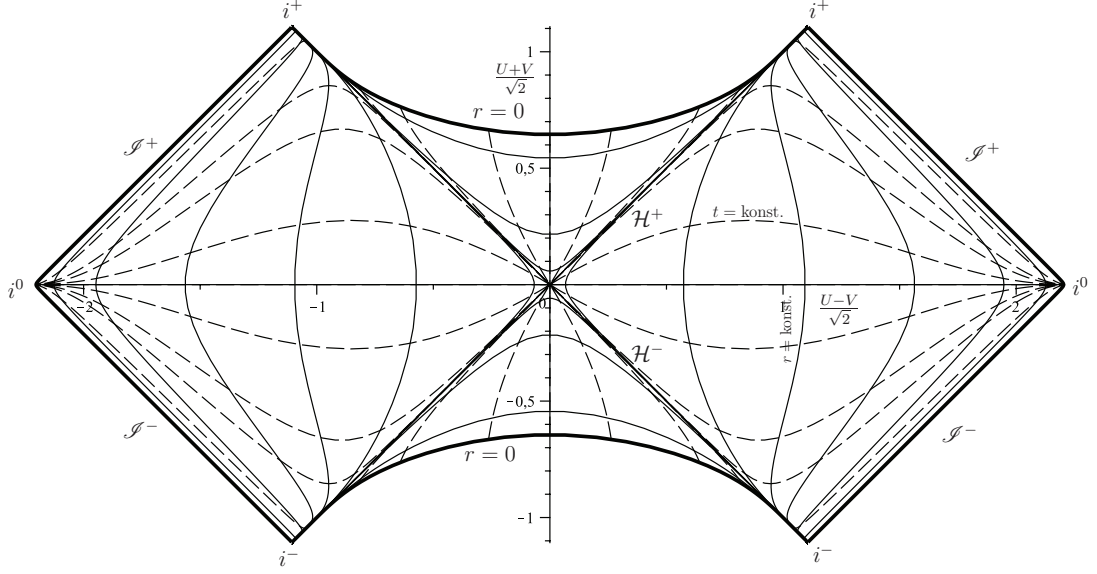
Autoři uvádějí transformaci (3.48) mezi Kruskalovými–Szekeresovými souřadnicemi a kompaktifikovanými souřadnicemi:

$$U = F(u) = \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \ln(1+u^2)\right); \quad V = F(V) \quad (3.48)$$

Důvod proč tento typ kompaktifikace uvádíme až zde na konci kapitoly je, že nelze vyjádřit explicitně metriku v kompaktifikovaných souřadnicích. Každopádně tato transformace má ještě další nedostatky. První závažný problém je regularita horizontu. Tato transformační funkce se v okolí $x = 0$ chová jako kubická křivka, tj. $F(x \rightarrow 0) \approx x^3 - x^5 + O(x^6)$, a to znamená singulární metriku na horizontu.

Penroseův–Carterův diagram pro kompaktifikaci pomocí funkce (3.48) je na obrázku 3.7. Při srovnání našeho obrázku 3.7 s obrázkem B.2 v [12], zjišťujeme, že autoři zřejmě užili obrázek analogický k [1]. Jejich diagram má např. singularitu

ve tvaru úsečky. Námi zkonstruovaný diagram se podstatně kvalitativně liší od diagramu v [12].



Obrázek 3.7: Penroseův–Carterův diagram pro kompaktifikaci dle [12]. Jak je zmíněno v textu, při této kompaktifikaci máme singulární chování metrických koeficientů na horizontu a dále nespĺňuje tato kompaktifikace podmínku (2.13).

Oblast kolem \mathcal{S}^\pm

Nyní si zkusíme přepsat Kruskalovu–Szekeresovu metriku do kompaktifikovaných souřadnic dle [12]. Nejprve si musíme uvědomit, že nelze explicitně vyjádřit inverzní funkci k (3.48), budeme tedy postupovat odlišně od předchozích sekcí.

Diferenciál nové kompaktifikované souřadnice lze jednoduše spočítat z (3.48) a následně dosadíme do dráhového elementu (3.13). Takto obecně dostaneme

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} \frac{e^{-r/2M}}{\frac{dF(u)}{du} \frac{dF(v)}{dv}} dUdV + r^2 d\omega^2, \quad (3.49)$$

který můžeme s použitím implicitního vztahu (3.15) přepsat do tvaru

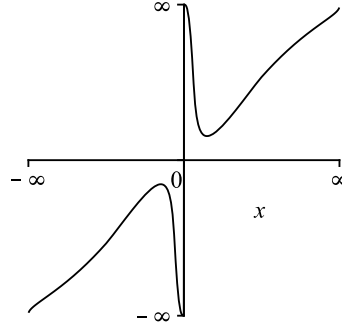
$$ds^2 = -\frac{(1 - \frac{2M}{r})}{uv \frac{dF(u)}{du} \frac{dF(v)}{dv}} dUdV + r^2 d\omega^2, \quad (3.50)$$

který bude jednodušší pro další diskusi.

Vyvstává otázka, jak zvolit konformní faktor, abychom měli konformní metriku plochou na \mathcal{S}^\pm . V [12] není uveden ani tvar konformní metriky, ani tvar konformního faktoru, a proto jsme kontaktovali autory [12]¹², abychom získali více informací jak zvolit Ω .

¹²Konkrétně probíhala e-mailová komunikace s Dr. Sigbjørnem Hervikem.

Z komunikace vyplynulo, že autoři volí konformní faktor tak, aby obdrželi konformní metriku ve tvaru $d\tilde{s}^2 = -2dUdV + \Omega^2 r^2(U, V)d\omega^2$. Pak bychom měli mít i regulární výraz $\Omega^2 r^2(U, V)$ na \mathcal{I}^\pm .



Obrázek 3.8: Graf výrazu $(x \frac{dF(x)}{dx})^{-1}$ je vykreslený pro celý rozsah funkčních hodnot.

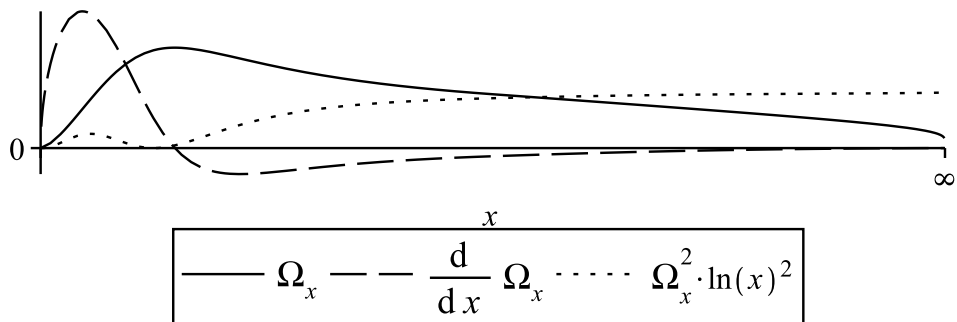
My zatím zahrneme do konformního faktoru výraz $x \frac{dF(x)}{dx}$, protože ten jak vidíme na obrázku 3.8 diverguje pro $x \rightarrow \infty$. a mění znaménko. Oproti autorům nebudeme zahrnovat do konformního faktoru výraz $(1-2M/r)$ – to pro naši diskusi nebude podstatné. Konkrétní tvar konformního faktoru je

$$\Omega = \sqrt{\frac{(\ln(1+u^2) + 2u^2)(\ln(1+v^2) + 2v^2)uv}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+v^2}(1+u^2+u^2 \ln(1+u^2)^2)(1+v^2+v^2 \ln(1+v^2)^2)}}. \quad (3.51)$$

Po pronásobení metriky tímto konformním faktorem obdržíme asymptoticky plochou metriku

$$d\tilde{s}^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dUdV + \Omega^2 r^2 d\omega^2.$$

Faktem však zůstává, že potřebujeme splnit taktéž podmínky na asymptotickou plochost. Vzhledem k výše uvedenému tvaru konformního faktoru zde nebudeme vypisovat jednotlivé vztahy, jen se odkážeme na výsledky získané pomocí algebraického systému Maple a některé výsledky doplníme o grafickou ilustraci.



Obrázek 3.9: Grafická ilustrace pro ověření podmínek (2.9)–(2.13).

Prvním předpokladem je, že konformní faktor musí být na \mathcal{I}^\pm nulový, pokud spočteme konkrétní hodnotu, pak je tento požadavek splněn. Pro ilustraci máme obrázek 3.9, kde vynášíme závislost $\Omega_x \equiv \sqrt{x \frac{dF(x)}{dx}}$. Jelikož je náš konformní faktor separabilního tvaru, stačí nám tato separabilní část. Tento výraz jde do nuly, jelikož druhá část po separaci bude konstantní hodnoty, tím bude náš požadavek $\Omega(\mathcal{I}^\pm) = 0$ splněn.

Dalším požadavkem je nenulovost gradientu konformního faktoru na \mathcal{I}^\pm , tj. $\nabla_\mu \Omega(\mathcal{I}^\pm) \neq 0$. Po přímém výpočtu v Maple dojdeme k tomu, že tuto podmínku nelze splnit. Dobře tento fakt ilustruje závislost $\frac{d\Omega_x}{dx}$ na obrázku 3.9 (čárkovaně). Díky separabilitě budeme mít buď výraz typu $0 \cdot \text{konst.}$ nebo $\text{konst.} \cdot 0$. To je v obou případech nula.

Autoři v e-mailové komunikaci zmiňují regularitu výrazu $\Omega^2 r^2$. Na témže obrázku 3.9 je vynesena závislost $\Omega_x^2 \ln(x)^2$, protože v Kruskalových–Szekeresových souřadnicích je $r \rightarrow \infty \approx \ln(uv) + O(\ln(\ln(uv)))$. Z obrázku vidíme, že výraz je konečný, nicméně otázku analytičnosti jsme vzhledem k nesplnění (2.9)–(2.13) neověřovali.

Dále během korespondence vyplynulo, že problém se singularitou na horizontu neuvažovali, protože z jiných souřadných systémů víme, že tato singularita je jen souřadnicové povahy. Také jsme viděli, že Penroseův–Carterův diagram v těchto souřadnicích neodpovídá diagramu v [12]. Posledním negativním zjištěním ohledně tohoto přístupu bylo nesplnění podmínek (2.9)–(2.13). Z těchto důvodů s touto transformací dále nepočítáme a budeme hledat jinou.

Kapitola 4

Asymptoticky plochá kruskalizace a její kompaktifikace

V předchozích kapitolách jsme vysvětlili, že žádná současná metoda kompaktifikace Schwarzschildova prostoročasu nevyhovuje požadavkům kladeným na $(\tilde{M}, \tilde{g}, \Omega)$. Obsahem této části bude nalezení transformace souřadnic tak, aby výsledná metrika splňovala všechny analytické požadavky.

Nejprve si připomeneme nedostatky Kruskalových-Szekeresových souřadnic, poté si nastíníme možnosti, jak tyto nežádoucí vlastnosti odstranit a následně provedeme konstrukci vyhovujících souřadnic.

4.1 Motivace

Při kruskalizaci využíváme faktu, že zobrazení $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$. Při užití exponenciály v transformační funkci dochází k nepříjemnému faktu a to že komponenty metriky obsahují člen $\propto \exp(-r)$ buď přímo, nebo v implicitní závislosti a tím pádem nepřecházejí v Minkowskiho metriku při $r \rightarrow \infty$. Navíc není tento výraz pro $r \rightarrow \infty$ analytický.

Analytičnost metriky na \mathcal{I}^\pm je však zcela zásadní požadavek. Souřadnice U, V spolu s $\tilde{g}_{U,V}$ představují prostředek pro řešení polních rovnic, jako např. $\square\varphi = 0$. Analytičnost souvisí s rozvoji φ a pokud bychom tento požadavek na metriku \tilde{g} nekladli, pak bychom přišli o možnost rozvíjet φ okolo \mathcal{I}^\pm .

M. Walker v [19] ukazuje kruskalizaci na obecnější úrovni (tj. tato transformace není primárně motivována fyzikálně), kde hledá nové souřadnice $U(r, t)$ a $V(r, t)$ tak, aby přetransformoval dráhový element (3.3) do tvaru

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + dr^2/F(r) + r^2d\omega^2 = G(U, V)dUdV + r^2d\omega^2, \quad (4.1)$$

kde $G(U, V)$ je konečná a nenulová funkce na horizontu $r = 2M$. Jak následně ukazuje, tak řešení této úlohy se redukuje na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} G(U, V) \frac{\partial U(r, t)}{\partial t} \frac{\partial V(r, t)}{\partial t} &= F(r) \\ \frac{\partial U(r, t)}{\partial r} \frac{\partial V(r, t)}{\partial t} + \frac{\partial U(r, t)}{\partial t} \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} &= 0 \\ G(U, V) \frac{\partial U(r, t)}{\partial r} \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} &= -\frac{1}{F(r)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

kteřou lze jednoduše získat z výše zmíněných požadavků.

Za předpokladu separability souřadnic U, V na radiální a časové závislosti

$$U(r, t) = \rho(r)\tau(t),$$

$$V(r, t) = \sigma(r)\lambda(t),$$

jsou řešením soustavy (4.2) standardní Kruskalovy–Szekeresovy souřadnice tvaru [1], nebo Dodatek A.

Předpoklad separabilního tvaru souřadnic nám sice ulehčí řešení, které lze najít pomocí standardních metod řešení obyčejných diferenciálních rovnic, ale zároveň je příliš restriktivní. Konkrétně při předpokladu separability má soustava (4.2) jen jedno řešení (Kruskalovy–Szekeresovy souřadnice), které nám ale nevyhovuje z výše popsaných důvodů.

Pokud tento předpoklad opustíme a budeme řešit soustavu (4.2) jako soustavu parciálních diferenciálních rovnic, pak si v soustavě (4.2) můžeme sečíst první a třetí rovnici a zavedením želví souřadnice r^* obdržíme vztah

$$\frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial r^*} \frac{\partial V}{\partial r^*},$$

do kterého můžeme dosadit nové souřadnice $r^* \pm t$. Takto lze obdržet obecně řešení soustavy (4.2) jako

$$\begin{aligned} U(r, t) &= \pm H(r^* - t) \\ V(r, t) &= \pm H(r^* + t), \end{aligned} \quad (4.3)$$

kde znaménka volíme dle toho¹ zda zobrazujeme oblast pod/nad horizontem a funkce H je „libovolná“².

Pozorujeme větší volnost ve volbě transformační funkce a slovo libovolná je v uvozovkách, protože musíme respektovat požadavky kladené na metriku, přede-

¹To souvisí se změnou znaménka v argumentu logaritmu v r^* .

²Zatím neuvažujeme možnost implicitně zadaných funkcí. Přirozeně se totiž nejprve snažíme nalézt explicitní funkční závislost a poté, co tento postup selže, tak budeme hledat transformační funkce v implicitním tvaru.

vším nedegenerovanost a nesignularárnost metriky, přechod v Minkowskiho metriku pro $r \rightarrow \infty$, analytičnost, diferencovatelnou strukturu C^∞ , atd.

Existuje tedy možnost, že neseparabilita nám pomůže najít takový systém souřadnic, který bude vyhovovat všem našim požadavkům. Ideální souřadnice by kombinovaly výhody jak Kruskalových–Szekeresových souřadnic, tak i Finkelsteinových–Eddingtonových takovým způsobem, aby se nové souřadnice chovaly v okolí horizontu jako Kruskalovy–Szekeresovy souřadnice a v oblastech $r \rightarrow \infty$ přecházely v Finkelsteinovy–Eddingtonovy souřadnice.

Na druhou stranu nemáme nijak zaručeno, že půjde najít (zapsat) takovou funkci, která by navíc splňovala okrajové podmínky, např. $V(r = 2M, t) = U(r = 2M, t) = 0$, $U(r = \infty, t = -\infty) = \infty \wedge V(r = \infty, t = -\infty) = konst$. Hledání transformační funkce na základě řešení soustavy (4.2) se nám nepodařilo. Můžeme však nalézt funkci H^{-1} složenou z elementárních funkcí. Problém řešení soustavy (4.2) tudíž spočívá v jeho zápisu, proto v další části zkusíme hledat transformaci přímo mezi Schwarzschildovými souřadnicemi a novými souřadnicemi v implicitním tvaru (tedy s použitím H^{-1}), kdy (4.3) přejde na

$$\begin{aligned} 2r^* &= H^{-1}(U) + H^{-1}(V) \\ 2t &= H^{-1}(U) - H^{-1}(V). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Jak uvidíme, v tomto tvaru již půjde zapsat transformační funkce pomocí složení elementárních funkcí.

4.2 Kruskalizace Schwarzschildova prostoročasu

V této části se pokusíme zkonstruovat vhodné souřadnice Kruskalova typu. Pod tímto pojmem rozumíme souřadnice pokrývající analyticky celý prostoročas a umožňující znázornění kauzální struktury diagramem podobným obrázku 3.1. Velice přínosným se stal článek [15], kde autor konstruuje souřadnice vztahy

$$f(r) = f(1/u) + f(1/v) \tag{4.5}$$

$$t = f(1/u) - f(1/v), \tag{4.6}$$

kde

$$f(r) = r + 2M \ln(r/2M - 1). \tag{4.7}$$

Tyto souřadnice jsou dle autorů analytické na \mathcal{S}^\pm , avšak kompaktifikace odsouvá singularitu ($r = 0$) do $u, v \rightarrow \infty$ a \mathcal{S}^\pm jsou definovány pomocí $u = 0$ a $v = 0$. Proto bereme tento přístup jako motivační pro další úvahy.

Pojďme si nyní ukázat princip transformace Schwarzschildových souřadnic pomocí implicitních vztahů. Viz řešení soustavy (4.2)

$$r^* = f(r) = g(u) + g(v) \quad (4.8)$$

$$t = g(u) - g(v), \quad (4.9)$$

kde $g(x)$ je zatím neznámá funkce.

Dosazením této transformace do dráhového elementu

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) [-dt^2 + dr^{*2}] + r^2 d\omega^2, \quad (4.10)$$

získáme transformovaný dráhový element obecně jako

$$ds^2 = 4 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) g'(u)g'(v) du dv + r^2 d\omega^2. \quad (4.11)$$

Takto zavedené transformace jsou výhodné především z toho důvodu, že budeme hledat neznámé funkce $g(x)$ tak, abychom splnili požadavky kladené na metriku. Je důležité si zdůraznit, že takto zavedené transformační vztahy *nejdou* primárně motivovány fyzikálně, ale *analytickými* požadavky. Opět jde o souřadnice spojené s nulovými částicemi, stejně tak jako tomu bylo v případě zavádění Kruskalových–Szekeresových souřadnic. Ačkoli v rámci konvence označujeme malými písmeny souřadnice Kruskalova typu ($u, v \in (-\infty, \infty)$), tak nám v principu nic nebrání hledat přímo transformace mezi Schwarzschildovými souřadnicemi t, r a již kompaktifikovanými $U, V \in (-a, a)$. To je zásadní rozdíl, protože doposud jsme nejprve potřebovali mít metriku v souřadnicích Kruskalova typu a ten jsme následně kompaktifikovali. Zato nyní můžeme provádět kompaktifikaci přímo a budeme dostávat Penroseův–Carterův diagram analogický jako při kompaktifikaci Kruskalových–Szekeresových souřadnic.

Nejprve se pokusíme nalézt vhodné transformační funkce Kruskalova typu. Zvolíme transformační funkci

$$g(x) = x + 2M \ln\left(\frac{x}{2M}\right), \quad (4.12)$$

která je analogická s [15] resp. (4.5) (oproti literatuře posunutá o $2M$).

Je zřejmé, že transformační funkce (4.12) se asymptoticky chová pro $x \rightarrow \infty$ lineárně, tj. $g(x) \simeq O(x)$ a stejně tak se chová želví souřadnice (4.7). V okolí nuly dominuje člen $\ln(x/2M)$, tj. $x = 0$ nám odpovídá horizontu. Transformace mezi

Schwarzschildovými souřadnicemi a našimi novými souřadnicemi je explicitně

$$r^* = f(r) = g(u) + g(-v) \quad (4.13)$$

$$t = g(u) - g(-v). \quad (4.14)$$

Takto zavedené souřadnice odpovídají vnější Schwarzschildově oblasti ($r > 2M$). Pro transformační funkci (4.12) můžeme zapsat dráhový element ve tvaru

$$ds^2 = -4 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{2M}{u}\right) \left(1 - \frac{2M}{v}\right) dudv + r^2(u, v) d\omega^2. \quad (4.15)$$

Rozebereme si chování metrického koeficientu g_{uv} na horizontu. Člen obsahující radiální souřadnici r jde do nuly lineárně (tj. chová se jako $O(u)$ pro $u \rightarrow 0$), naopak členy obsahující nové proměnné (u, v) v okolí nuly *divergují* lineárně (ve smyslu $1 + 2M/u \simeq O(u^{-1})$ pro $u \rightarrow 0$), takže výsledný součin je konečný a spojitý. Kladnou vlastností je, že tento metrický koeficient neobsahuje exponenciální člen.

Bohužel takto zavedená metrika je pro hodnoty $v = 2M$ a $u = -2M$ degenerovaná (neregulární). Hodnoty těchto souřadnic leží uvnitř Schwarzschildova prostoročasu.

Obecné požadavky na transformační funkce.

V předešlé části bylo vylíčeno, že přímočará aplikace transformačních funkcí z [15] resp. [17] nám nedovolí zkonstruovat kruskalizovaný prostoročas tak, abychom měli všechny požadované vlastnosti.

Zkusíme si tedy obecně rozebrat podmínky na transformační funkci $g(x)$, kterou si rozdělíme na dvě části $g(x) = h(x) + 2M \ln(k(x))$. Pro určení konkrétních požadavků na chování $g(x)$ máme následující tři vazby:

1. Musíme splnit rovnici

$$r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) = h(u) + 2M \ln(k(u)) + h(v) + 2M \ln(k(v)), \quad (4.16)$$

čili definiční vztah nových transformovaných souřadnic.

2. Z požadavku regularity metrických koeficientů pro $r = 2M$ plyne podmínka

$$g_{uv}(r \rightarrow 2M) = 4 \frac{r - 2M}{r} \left(h'(u) + 2M \frac{k'(u)}{k(u)}\right) \left(h'(v) + 2M \frac{k'(v)}{k(v)}\right) \neq 0, \quad (4.17)$$

kterou získáme z dráhového elementu (4.11). Metrický koeficient $g_{\theta\theta}$ nevyepisujeme, protože $g_{\theta\theta} = r^2$ je automaticky regulární pro $r = 2M$.

3. Pro oblasti kolem \mathcal{S}^\pm nelze mluvit o analytičnosti koeficientu $g_{\theta\theta} = r^2(u, v)$, který jasně diverguje pro $r \rightarrow \infty$. Nicméně je rozumné požadovat (pro pevné v) regularitu výrazu

$$\frac{dr(u, v)}{du}(r \rightarrow \infty) = \frac{r - 2M}{r} \left(h'(u) + 2M \frac{k'(u)}{k(u)} \right) \neq 0. \quad (4.18)$$

Zároveň musíme splnit (4.17) pro $r \rightarrow \infty$, ale to je ekvivalentní splnění (4.18).

Z těchto vazeb si můžeme určit následující podmínky na funkce $h(x)$ a $k(x)$.

Faktor $2M$ před logaritmem vyplývá z přechodu želví souřadnice (4.7) přes $r = \infty$. Musíme nutně užít komplexní analýzy, protože v reálných souřadnicích je logaritmus definován jen na \mathbb{R}^+ . Logaritmus má v bodě $r = \infty$ větvcí bod, tj. při přechodu přes radiální nekonečno se logaritmus změní jako $2M \ln(r/2M - 1) \rightarrow 2M \ln(1 - r/2M) + 2M \cdot \pi m i$, kde $m = \pm 1$ (hodnota m nám určuje volbu Riemannovy plochy). Vidíme tedy, že faktor před logaritmem u transformační funkce musí být taktéž $2M$, aby (4.8) představovala v okolí $r = \infty$ komplexní rovnici pro reálnou funkci reálných proměnných $r(u, v)$. Pro situaci v okolí $r = 2M$ platí stejné argumenty.

Funkce $k(x)$ se musí nezbytně chovat asymptoticky jako $k(x) \simeq O(x^p)$, kde p je *liché přirozené* číslo, aby platilo $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = \pm\infty$. Platí-li $\ln(x^p) = p \ln(x)$, pak budeme dále předpokládat

$$k(x) \simeq O(x). \quad (4.19)$$

Chování v okolí nuly nám musí korespondovat s chováním želví souřadnice, takže naše funkce $k(x)$ musí jít do nuly. Z argumentů podobných jako v případě přechodu přes radiální nekonečno a rovnost v komplexní proměnné, předpokládáme pro $x = 0$ chování $k(x) \simeq O(x)$. Užívání symbolu O se může různit, proto ještě uvedeme, že předchozí chování s užitím O -notace je ekvivalentní podmínkám

$$\lim_{x \rightarrow \infty} k(x)/x = M_1 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0} k(x)/x = M_2,$$

kde $M_i \in \mathbb{R}$.

Navíc nám chování logaritmů fixuje znaménko v součtu (4.8), kde musí být $+$, abychom měli pro $u, v = 0$ rovnost logaritmů pro $r = 2M$.

Funkce $h(x)$ musí být pro dostatečně velká x lineární, abychom měli korespondenci s chováním želví souřadnice.

$$h(x) \simeq O(x) \quad \text{pro} \quad x \rightarrow \pm\infty \quad (4.20)$$

V okolí nuly musí být dominantním členem logaritmus, tudíž u funkce $h(x)$ stačí předpokládat její omezenost na okolí $x = 0$.

$\frac{k'(x)}{k(x)}$ Derivace logaritmu bude vždy měnit znaménko při přechodu přes $x = 0$ a $x = \pm\infty$, což obdržíme z vlastností požadovaných na samotnou funkci.

Předpokládali jsme $k(x) \simeq O(x)$ kolem nekonečna i nuly, to znamená že derivace logaritmu bude v nule divergovat lineárně:

$$\frac{k'(x)}{k(x)} \simeq O(x^{-1}). \quad (4.21)$$

K tomu se změní znaménko při přechodu z kladných do záporných hodnot x . Pro $x \rightarrow \pm\infty$ půjde tento podíl do nuly.

$h'(x)$ V okolí nekonečna jsme požadovali lineární chování, proto derivace bude konstantní.

$$h'(x) \simeq O(1) \quad \text{pro } x \rightarrow \pm\infty \quad (4.22)$$

Derivace logaritmické části jde pro $x \rightarrow \pm\infty$ do nuly (4.21), tak je celková hodnota derivace $g'(x)$ pro $x \rightarrow \pm\infty$ konstantní.

O chování derivace v okolí nuly nelze nic tvrdit, protože jediný požadavek zatím byl, aby $h(x)$ byla omezená. Pokud si však uvědomíme, že logaritmická část derivace mění znaménko, budeme muset nutně požadovat, aby i $h'(x)$ měnila znaménko pro $x = 0$. V opačném případě bychom dostávali degenerovanost metriky. Z toho plyne, že $h'(x) \simeq \alpha x + O(x^2)$, což implikuje

$$h(x) \simeq \beta + \frac{1}{2}\alpha x^2 + O(x^2) \quad \text{pro } x \rightarrow 0. \quad (4.23)$$

Shrneme-li si výše zmíněné požadavky, celkově od $g'(x)$ požadujeme, aby v nule divergovala jako $O(x^{-1})$ pro $x \rightarrow 0$ a byla všude nenulová. Právě dosáhnutí nenulovosti je nejnáročnějším požadavkem.

Najít vhodnou transformační funkci mezi Schwarzschildovými souřadnicemi r, t a souřadnicemi Kruskalova typu u, v , jenž by generovaly regulární metriku na \mathcal{I}^\pm , se nám zatím nepodařilo. Zkusíme tedy nejprve najít přímo transformaci do kompaktifikovaného prostoročasu a následně zpětně vygenerovat souřadnice Kruskalova typu.

4.3 Kompaktifikace Schwarzschildova prostoročasu

V této části se pokusíme o přímou konstrukci kompaktifikovaných souřadnic bez mezikroku konstrukce kruskalizovaných souřadnic. Tento postup se ukáže snadnější zejména proto, že hodnoty transformačních funkcí určujeme pouze ve *vlastních bodech*, kde se dají lépe ověřit analytické vlastnosti.

Pro konstrukci kompaktifikovaných souřadnic platí stejné diskuze jako v předešlé části, jen s tím rozdílem, že pokud jsme požadovali lineární chování (tj. $g(x) \simeq O(x)$) pro $x \rightarrow \infty$, pak v případě kompaktifikovaných souřadnic požadujeme lineární divergenci (tj. $g(X) \simeq O\left(\frac{1}{X-a}\right)$) pro nějaké³ $X = a$, což odpovídá transformaci $r \rightarrow 1/r$. Vazby (4.16) a (4.17) zůstávají nezměněny, protože jediná změna v (4.17) je pronásobení tohoto metrického koeficientu faktorem Ω^2 , který je pro $r < \infty$ nenulový a konečný. Tím se nám podmínky na $h(X)$ a $k(X)$ nezmění.

Poslední vazba (4.18) se nám změní zásadně, protože $\Omega(\mathcal{I}^\pm) = 0$. Přepsání této vazby pro metriku $\tilde{g}(U, V)$ je na obecné úrovni náročné, tudíž budeme postupovat tak, že si nejprve zvolíme konkrétní transformační funkce a následně ověříme analytičnost výrazu Ωr .

Shrnutí vlastností pro kompaktifikační funkce máme v tabulce 4.1.

X	$h(X)$	$k(X)$	$h'(X)$	$[\ln(k(X))]'$
$-\frac{\pi}{2}$	$O\left(\frac{1}{\pi/2+X}\right)$	$O\left(\frac{1}{\pi/2+X}\right)$	$O\left(\frac{1}{(\pi/2+X)^2}\right)$	$O\left(\frac{1}{(\pi/2+X)^3}\right)$
0	$O(1)$	$O(X)$	0	$O(X^{-1})$
$\frac{\pi}{2}$	$O\left(\frac{1}{\pi/2-X}\right)$	$O\left(\frac{1}{\pi/2-X}\right)$	$O\left(\frac{1}{(\pi/2-X)^2}\right)$	$O\left(\frac{1}{(\pi/2-X)^3}\right)$

Tabulka 4.1: Shrnutí vlastností transformačních funkcí pro kompaktifikaci Schwarzschildova prostoročasu.

4.3.1 Transformace pokrývající analyticky celý Schwarzschildův prostoročas

Pro logaritmickou část zvolíme vnitřní funkci $k(X) \equiv \tan(X)$, protože $\tan(X)$ se chová v okolí $X = 0$ jako $\tan(X) \simeq X + O(X^3)$, a zároveň diverguje pro $X = \pm\pi/2$ jako $\tan(X) \simeq \frac{1}{\frac{\pi}{2} \mp X} + O(X - \frac{\pi}{2})$, což jsou vlastnosti, které jsme zmiňovali výše.

Za funkci $h(X)$ bychom mohli stejně tak přímočaře volit funkci $h(X) \equiv \tan(X)$. Ta se ale chová v okolí nuly lineárně a derivace je v okolí nuly konstanta. To zna-

³Dle konvence značíme malými písmeny nekompaktifikované souřadnice a velkými písmeny souřadnice kompaktifikované.

mená že nemění znaménko tak, jak požadujeme pro nedegenerovanost metrických koeficientů.

Jako alternativu můžeme zvolit $h(X) \equiv 1/\cos(X)$, což je funkce divergující pro $X = \pi/2$ lineárně a v okolí nuly se chová kvadraticky v druhém řádu. Zkusíme s těmito funkcemi transformovat dráhový element do nových souřadnic. Celkově máme transformační funkci:

$$g(X) = \frac{M}{\cos(X)} + 2M \ln(\tan(X)). \quad (4.24)$$

Zavedeme tedy transformaci mezi Schwarzschildovými souřadnicemi a novými kompakťovanými souřadnicemi pomocí funkce (4.24) jako

$$r^* = \frac{M}{\cos(U)} + 2M \ln(\tan(U)) + \frac{M}{\cos(V)} + 2M \ln(\tan(V)) \quad (4.25)$$

$$t = \frac{M}{\cos(U)} + 2M \ln(\tan(U)) - \frac{M}{\cos(V)} - 2M \ln(\tan(V)). \quad (4.26)$$

Nyní si přepíšeme Schwarzschildův dráhový element (3.3) pomocí našich nových souřadnic jako

$$ds^2 = 4 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\sin(U) + \frac{2}{\tan(U)}\right) \left(\sin(V) + \frac{2}{\tan(V)}\right) \frac{M^2}{\cos(U)^2 \cos(V)^2} dU dV + r^2 d\omega^2. \quad (4.27)$$

Souřadnice jsou zavedeny bezrozměrně, proto má dráhový element (4.27) rozměr M^2 .

Pokud chceme zavést konformní metriku, je volba Ω přímočará až na volbu konstanty, kterou snadno zjistíme z podmínky (2.13). Tím obdržíme faktor

$$\Omega = \frac{\cos(U) \cos(V)}{4M^2}. \quad (4.28)$$

Pokud tímto konformním faktorem pronásobíme dráhový element (4.27), obdržíme tak

$$d\tilde{s}^2 = (4M)^{-2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\sin(U) + \frac{2}{\tan(U)}\right) \left(\sin(V) + \frac{2}{\tan(V)}\right) dU dV + \Omega^2 r^2 d\omega^2 \quad (4.29)$$

Analytičnost na \mathcal{I}^\pm

Vzhledem k tomu, že jsme nenašli v žádné literatuře přímý návod k ověření analytičnosti obecné funkce, tak jsme museli nalézt vlastní metodu. Potíž s ověřením analytičnosti je v tom, že tento pojem se užívá především u funkcí komplexní proměnné, kde analytičnost plyne ze spojitosti a holomorfnosti dané funkce. Při užití reálných proměnných nám literatura říká, že funkce je analytická v bodě x , pokud se v tomto bodě shoduje se svým taylorovým rozvojem. Tato definice nám

však nic neříká o tom, jak analytické vlastnosti reálně ověřit. Většinou si vystačíme s tím, že skládáme, násobíme nebo sčítáme analytické funkce. Tento postup selže v okamžiku, kdy máme složitější funkci jako v našem případě metrického koeficientu $g_{\theta\theta}$. Jeho hlavní potíž je v tom, že máme chování na \mathcal{S}^\pm analogickou chování $\arctan(1/x)$ pro $x \rightarrow 0$, kdy vnitřní funkce je divergentní a vnější funkce je víceznačnou funkcí s komplikovanou Riemannovou plochou.

Autoři [15] a [17] ukazují analytičnost výrazu Ωr z jeho rozvoje. Při procházení jejich postupu jsme narazili na fakt, že při rozvoji $r(U, V)$ se nám „míchají“ výrazy různých řádů. Konkrétně příspěvek z prvního řádu obsahuje logaritmus a stejně tak obsahuje logaritmus i druhý řád, symbolicky

$$\underbrace{k_1(U, V) + \ln(k_2(U, V))}_{1. \text{ řád}} - \underbrace{\ln(k_3(U, V)) + \ln(\ln(k_4(U, V)))}_{2. \text{ řád}},$$

kde $k_i(U, V)$ jsou obecné funkce. Uvedený výraz slouží pouze k demonstraci rozvoje Ωr .

Při takto složité struktuře rozvoje je obtížné hovořit o třídě diferencovatelnosti nebo analytičnosti. Sice můžeme ukázat, že první dva řády jsou konečné, ale nemáme žádnou záruku, že budeme mít konečné všechny další členy.

My jsme se proto rozhodli sestavit diferenciální rovnici pro výraz Ωr tak, aby byla v okolí \mathcal{S}^\pm regulární. Z teorie řešení diferenciálních rovnic ve tvaru řady máme zaručeno, že bude funkce v tomto bodě analytická [38]. Náš výraz označíme jako novou funkci $\Theta(U) = \Omega r$, pro kterou najdeme regulární diferenciální rovnici s tím, že ze znalosti počáteční podmínky můžeme nalézt rozvoj libovolného řádu (iterativním proces můžeme opakovat bez omezení). Pomocí toho máme zaručeno, že se výsledný rozvoj bude shodovat s danou funkcí $k(U)$, což je přesně definice analytické funkce. Více o této metodě a především postupu při řešení pro náš prostoročas nalezneme v Dodatku B.4.

Jako výsledek této metody nám postačí vypsání prvních tří členů výsledné řady řešící danou diferenciální rovnici (B.14).

$$\begin{aligned} \Omega r &\approx \frac{\cos(V)}{4M} - \left(\frac{2 \ln(2) \cos(V) + 1}{4M} + \frac{\cos(V)}{2M} \ln(\tan(V)) \right) \left(U - \frac{\pi}{2} \right) - \\ &- \left(\frac{2 \ln(2) \cos(V) + 1}{2M} + \frac{\cos(V)}{M} \ln(\tan(V)) - \frac{\cos(V)}{M} \right) \left(U - \frac{\pi}{2} \right)^2 + \\ &+ O\left(\left(U - \frac{\pi}{2} \right)^3 \right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Je výhodné si prohlédnout jednotlivé koeficienty rozvoje. Důležitá je konečnost jednotlivých členů rozvoje (4.30). Sice se nám vyskytují v rozvoji členy obsahující $\ln(\tan(V))$, ale tyto členy jsou násobené funkcí $\cos(V)$. Celková hodnota je analogická limitě $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(1/x) = 0$. Při derivování člen po členu narazíme na výrazy

typu

$$\frac{d}{dx} x \ln(1/x) = \ln(1/x) + 1, \quad (4.31)$$

které logaritmičsky divergují. Dostáváme tedy stejnou strukturu \mathcal{C}^0 v i^0 shodně s [15].

Analytičnost koeficientu \tilde{g}_{UV} je zřejmá přímo z dráhového elementu (4.29). Zde se nám vyskytuje člen $(1 - 2M/r)$, o kterém víme (např. [14]) že je analytický. Další členy si můžeme přepsat jako $(\sin(X) + 2 \coth(X))$, což je pro $X \rightarrow \pi/2$ analytická funkce. V \tilde{g}_{UV} se tedy vyskytuje součin analytických funkcí na okolí \mathcal{S}^\pm , tím máme zaručenou analytičnost koeficientu \tilde{g}_{UV} na okolí \mathcal{S}^\pm .

Analytičnost souřadnic na horizontu

Analytické pokrytí horizontu je také podstatnou vlastností metriky. Víme, že Kruskalovy–Szekeresovy souřadnice jsou na horizontu analytické (viz B.4). Při našich úvahách o chování transformačních funkcí jsme se snažili o konstrukci nových souřadnic tak, aby splňovali analytické pokrytí horizontu. Nyní se o tom budeme chtít explicitně přesvědčit.

K ověření této vlastnosti si vyjádříme závislost $r = r(U, V)$ a budeme zkoumat rozvoje metrických koeficientů, nebo můžeme zkusit vyjádřit metriku ve formě, ze které bude zřejmé, že je na horizontu analytická. Zvolíme si druhý a elegantnější postup.

V dráhovém elementu (4.29) vidíme, že metrický koeficient g_{UV} se na horizontu chová jako „ $\frac{0}{0}$ “. Pokusíme se tento výraz upravit tak, abychom ho převedli na konečný výraz pro $r = 2M$.

Z transformačního vztahu (4.25) si můžeme vyjádřit výraz $r - 2M$, který jde pro $r \rightarrow 0$ do nuly, obecně jako

$$r - 2M = 2M \exp\left(\frac{g(U)}{2M}\right) \exp\left(\frac{g(V)}{2M}\right) \exp\left(\frac{r}{2M}\right). \quad (4.32)$$

Pro naši transformaci (4.24) po drobných úpravách obdržíme explicitně vztah

$$r - 2M = 2M \tan(U) \tan(V) \exp\left(\frac{1}{2 \cos(U)} + \frac{1}{2 \cos(V)}\right) \exp\left(-\frac{r}{2M}\right). \quad (4.33)$$

Nyní již můžeme přepsat metrický koeficient g_{UV} z dráhového elementu (4.29) jako

$$\tilde{g}_{UV} = \frac{[\sin^2(U) + 2 \cos(U)][\sin^2(V) + 2 \cos(V)]}{2Mr \cos(U) \cos(V)} \exp\left(\frac{1}{2 \cos(U)} + \frac{1}{2 \cos(V)}\right) \exp\left(-\frac{r}{2M}\right), \quad (4.34)$$

ze kterého je již jasné, že tento metrický koeficient je na horizontu ($U = 0$ nebo $V = 0$) konečný a analytický (je složený jen z analytických funkcí na okolí horizontu).

Samozřejmě bychom mohli psát dráhový element ve tvaru obsahující výraz (4.34), kde by bylo ihned vidět, že metrika je na horizontu analytická, ale zase z tvaru (4.29) je lépe vidět její asymptotické chování.

Přechod přes \mathcal{S}^\pm

Vzhledem k tomu, že jsme si ukázali analytičnost metrických koeficientů na \mathcal{S}^\pm , tak nám nic nebrání tyto koeficienty analyticky prodloužit za tuto oblast a podívat se, jaká část Schwarzschildova prostoročas se nám zde zobrazí.

Autoři v [14] kladou do této oblasti „nahého“ Schwarzschilda se zápornou hmotou. V jejich přístupu však vycházejí z Finkelsteinových–Eddingtonových odcházejících (outgoing) souřadnic, kde provedou transformaci radiální souřadnice $l = 1/r$. To znamená, že přechod přes \mathcal{S}^+ odpovídá přechodu souřadnice l skrz $l = 0$ (z kladných do záporných hodnot). Tímto máme analytický přechod přes \mathcal{S}^+ . Autoři pak zavedou pro oblast $l < 0$ nové souřadnice $\hat{r} = -l^{-1}$, $\hat{v} = u$ a navíc definují novou hmotnost $\hat{m} = -m$. Po těchto úpravách obdrží Schwarzschildovu metriku ve vcházejících (ingoing) Finkelsteinových–Eddingtonových souřadnicích \hat{v}, \hat{r} . V tomto smyslu je analytický přechod přes \mathcal{S}^+ dle [14] vodítkem pro naši výslednou metriku (jaký prostoročas tu můžeme očekávat). Nicméně pro přechod přes \mathcal{S}^- bychom museli zavést analogicky Finkelsteinovy–Eddingtonovy vcházející souřadnice a analyticky je prodloužit. My však chceme zkonstruovat takový souřadný systém, v němž lze přecházet volně přes obě \mathcal{S}^\pm , aniž bychom ho museli měnit. Je-li nám známo, tak doposud toto nesplňuje žádný souřadný systém pokrývající analyticky celý Schwarzschildův prostoročas.

Jak jsme si předvedli, tak naše souřadnice vycházející z funkce (4.24) nám analyticky pokrývají obě nulová nekonečna \mathcal{S}^\pm . Jako jednu ze základní vlastnosti naší transformace jsme chtěli analytické pokrytí přechodu radiální souřadnice přes $r = \infty$, takže by nás nemělo překvapit, že v oblasti za \mathcal{S}^\pm leží oblast záporných radiálních souřadnic.

Jak již bylo řečeno na začátku práce, tak Penroseovy–Carterovy diagramy mají význam především pro jejich přehlednou kauzální strukturu. O kauzální struktuře oblasti $r < 0$ se tudíž nejlépe přesvědčíme z Penroseova–Carterova diagramu konstruovaného pro souřadnicovou transformaci pomocí funkce (4.24). Tento diagram je na obrázku 4.1, kde v oblastech za \mathcal{S}^\pm se nachází prostoročas s nahou singularitou. Obdrželi jsme tedy stejnou oblast v souladu s [14], kterou nazýváme nahým Schwarzschildovým prostoročasem.

Degenerovanost metrických koeficientů

Transformační funkce $g(X) = M/\cos(X) + 2M \ln(\tan(X))$ kompaktifikující Schwarzschildův prostoročas je analytickou a nedegenerovanou na horizontu a především Schwarzschildova metrika získaná pomocí této transformace přechází v Minkowskiho metriku pro radiální nekonečno s analytickým přechodem přes \mathcal{S}^\pm .

Pokud se však zajímáme o rozšíření včetně oblasti nahého Schwarzschildova prostoročasu ($r < 0$), zjistíme, že pro hodnoty

$$U_0, V_0 = \pm \left(\arctan \left(\frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} \right) + \pi \right) \simeq \pm 1.9979$$

je $g'(U_0) = g'(V_0) = 0$, nebo-li pro tyto hodnoty souřadnic máme degenerovanou metriku. Číselné hodnoty těchto souřadnic však leží mimo Schwarzschildův prostoročas. Nadplochy neregularity jsou na obrázku 4.1 znázorněny tečkovanými čarami⁴. Nebudeme-li zkoumat oblasti daleko za \mathcal{S}^\pm (tzn. oblasti za hranicí vyznačenou tečkovanými čarami), ale jen klasický Schwarzschildův prostoročas ($r > 0$) a malá okolí \mathcal{S}^\pm , pak lze užívat tuto souřadnicovou transformaci.

4.3.2 Transformace generující nedegenerovanou metriku pro $r < 0$

Pokud chceme takovou transformační funkci, která by generovala metriku nedegenerovanou i v oblastech nahého Schwarzschildova prostoročasu, pak takovou funkci lze zapsat jako

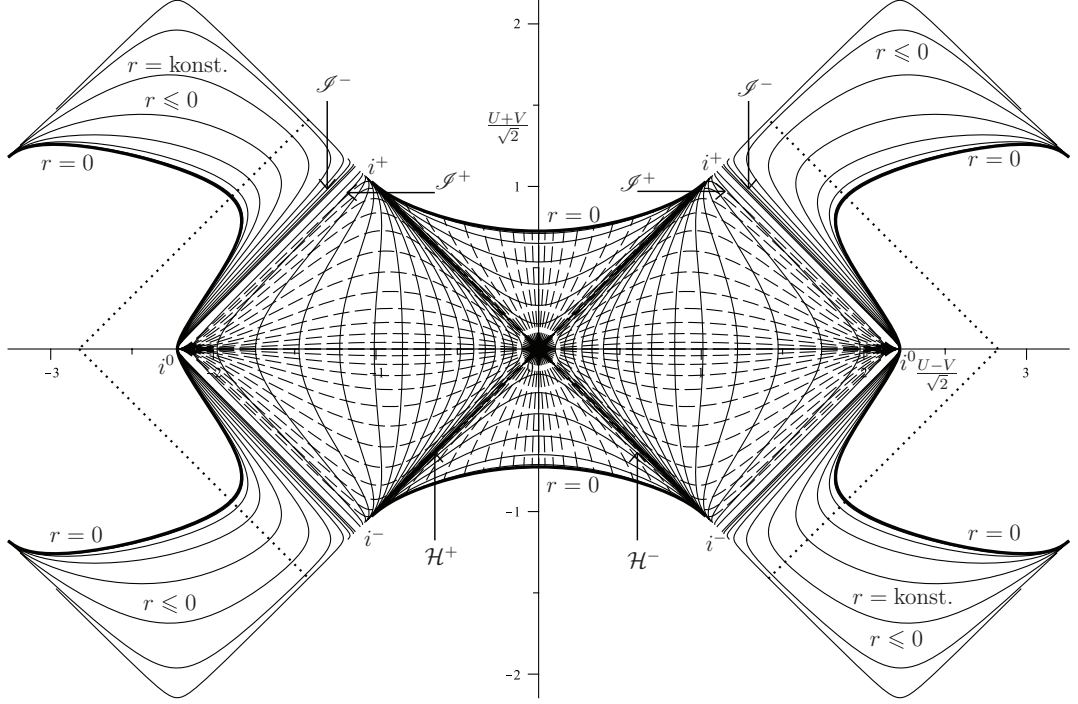
$$g(X) = \frac{M}{\cos(X)} + 2M \ln \left(\frac{1 - \cos(X)}{\sin(X) \cos(X)} \right). \quad (4.35)$$

Funkci jsme našli tak, že jsme vycházeli z výše zmíněných požadavků kladených na transformační funkce a následně jsem se snažili nalézt nejjednodušší možný tvar transformační funkce, aby derivace $g'(X) \neq 0, \forall X$. Dalo by se mluvit o kvalifikovaném odhadu.

Derivace $g'(X)$ této transformační funkce má lineární divergenci v pro $X = 0$, tj. $g'(x \rightarrow 0) \simeq O(1/X)$, což jsme požadovali pro analytický přechod horizontu. Dále obsahuje faktor $1/\cos(X)^2$, který zahrneme do konformního faktoru a snadno je vidět, že čitatel je vždy kladný a nenulový. To je požadavek pro nedegenerovanou metriku.

$$\frac{dg(X)}{dX} = M \frac{(1 + \cos(X))^2 - 2 \cos(X)^3}{\cos(X)^2 \sin(X)} \quad (4.36)$$

⁴Vzhledem k nulové povaze nadploch neregularity nelze explicitně vyjádřit, pro kterou hodnotu r neregularita nastane, ale můžeme si vyjádřit implicitně vztah $r^* + t = g(\pm U_0) \wedge V \in (-\pi/2, \pi/2)$, který nám určuje dané nadplochy. Pro V_0 je situace analogická.



Obrázek 4.1: Kompaktifikace pomocí transformační funkce (4.24). Čárkovaně vynášíme $t = konst.$ a plnou čarou $r = konst.$. Na diagramu jsou vyneseny oblasti ležící za \mathcal{I}^\pm , kde máme oblast záporných r . Nachází se tu nahá singularita. Dále pak máme na diagramu tečkovaně vyznačeny nadplochy na kterých je metrika neregulární.

Při volbě konformního faktoru $\Omega = \frac{\cos(U)\cos(V)}{4M^2}$ obdržíme konformní metriku zapsanou pomocí dráhového elementu jako

$$d\tilde{s}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{B(U)B(V)}{4M^2 \sin(U)\sin(V)} dUdV + \Omega^2 r^2 d\omega^2, \quad (4.37)$$

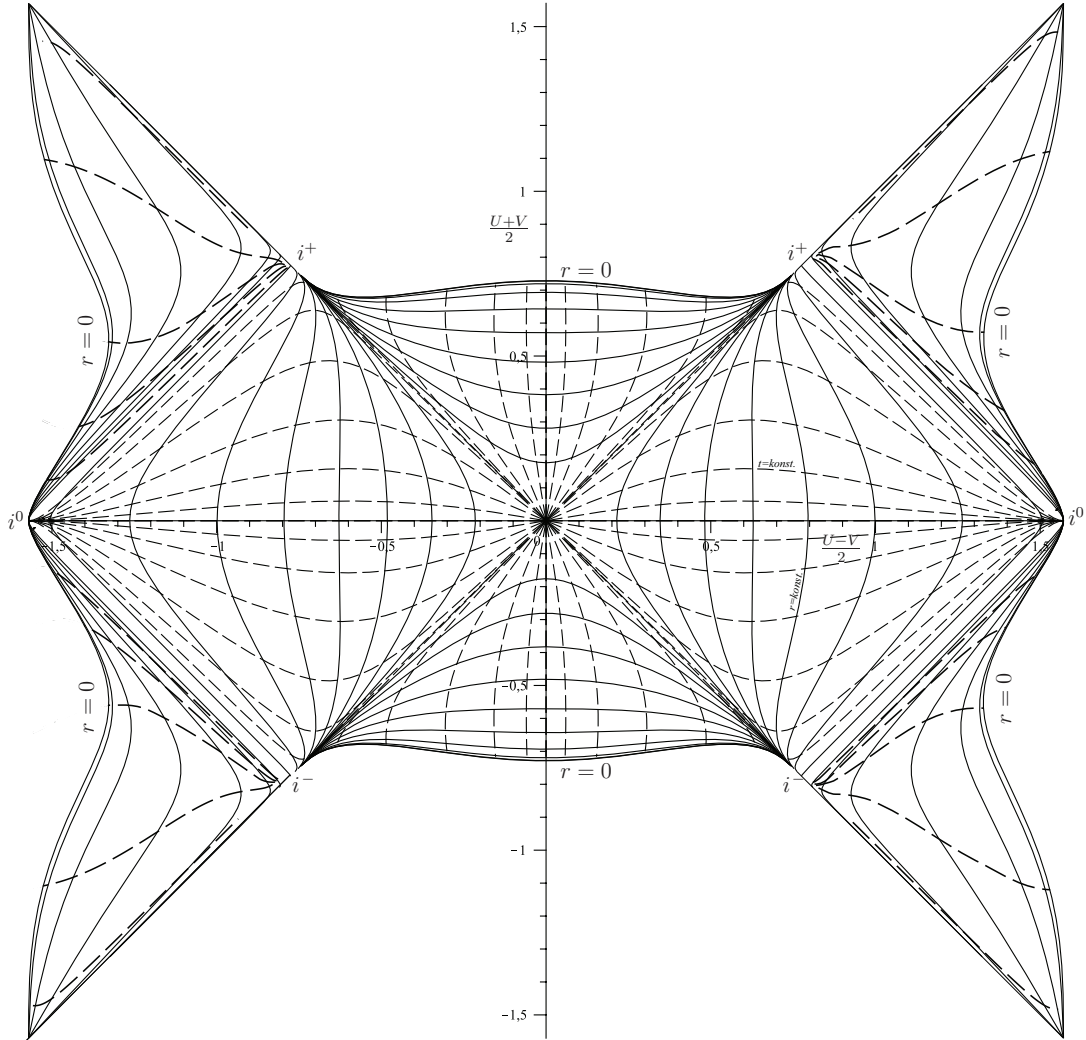
kde jsme použili označení $B(X) = (1 + \cos(X))^2 - 2\cos(X)^3$ pro zkrácení zápisu. Tato metrika je taktéž analytická na horizontu. O tom se lze přesvědčit stejným postupem jako u předešlé transformace (4.24).

Pro analytičnost výrazu Ωr na \mathcal{I}^\pm můžeme opět sestavit diferenciální rovnici a řešit ji pro hodnotu $U = \pi/2$ nebo $V = -\pi/2$ ve tvaru řady (opět postup popsáný v dodatku B.4). První členy této řady jsou

$$\begin{aligned} \Omega r &\approx \frac{\cos(V)}{4M} - \\ &- \left(\frac{\cos(V)}{2M} \ln \left(\frac{\sin(V)}{\cos(V)(\cos(V)+1)} \right) + \frac{2\cos(V)\ln(2)+1}{4M} \right) \left(U - \frac{\pi}{2} \right) + \\ &+ \left(\frac{\cos(V)}{2M} - \frac{2\cos(V)\ln(2)+1}{2M} - \frac{\cos(V)}{M} \ln \left(\frac{\sin(V)}{\cos(V)(\cos(V)+1)} \right) \right) \left(U - \frac{\pi}{2} \right)^2 \\ &+ o \left(\left(U - \frac{\pi}{2} \right)^3 \right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Analytičnost metrického koeficientu \tilde{g}_{UV} máme stejnou diskusi jako u transformace (4.24). Opět máme součin tří analytických funkcí na okolí \mathcal{I}^\pm , tím máme zaručenou analytičnost metrického koeficientu \tilde{g}_{UV} .

Penroseův–Carterův diagram získaný transformační funkcí (4.35) je na obrázku 4.2.



Obrázek 4.2: Penroseův–Carterův diagram konstruovaný dle transformační funkce (4.35). Použitím této kompaktifikační funkce jsme dosáhli analytičnosti v celém Penroseově–Carterově diagramu, včetně oblasti analyticky rozšířené za \mathcal{I}^\pm .

V části o kompaktifikaci Minkowského prostoročasu jsme si rozebírali jednoznačnost volby konformního faktoru. Dospěli jsme k výsledku, že do konformního faktoru lze zahrnout libovolnou pozitivní, omezenou funkci, jejíž hodnota v i^0 je rovna jedné. Pokud se podíváme na funkci $B(X)$ v dráhovém elementu (4.37), vidíme, že její hodnota pro $X = \pi/2$ je přesně $B(\pi/2) = 1$. Funkce je vždy kladná a nenulová, takže nám nic nebrání jí zahrnout do konformního faktoru a splnění

podmínek (2.9)–(2.13) zůstane zachováno. Jeho tvar je následně

$$\Omega_X = \frac{\cos(U) \cos(V)}{4M^2 \sqrt{(1 + \cos(U))^2 - 2 \cos(U)^3} \sqrt{(1 + \cos(V))^2 - 2 \cos(V)^3}}. \quad (4.39)$$

Začlenění funkce $B(X)$ do konformního faktoru nám pomůže k uhlazenějšímu tvaru konformní metriky. Dráhový element s užitím Ω_X pak můžeme zapsat jako

$$d\tilde{s}^2 = \frac{(1 - \frac{2M}{r})}{4M^2 \sin(U) \sin(V)} dU dV + \Omega_X^2 r^2 d\omega^2. \quad (4.40)$$

Volbou tohoto konformního faktoru jsme dosáhli jednoduššího tvaru metriky \tilde{g} , avšak vzhledem k podílu a složené funkci v Ω je mnohonásobně náročnější sestavit diferenciální rovnici pro ověření analytičnosti na \mathcal{S}^\pm . Sledovali jsme, že lze získat rozvoj pro konformní faktor $\Omega = \frac{\cos(U) \cos(V)}{4M^2}$, pokud použijeme konformní faktor (4.39). Analytičnost se nám zachová, protože součin dvou analytických funkcí je také analytický.

Explicitní závislost $r = r(U, V)$

Explicitní vyjádření závislosti $r = r(U, V)$ můžeme zapsat jako

$$r(U, V) = 2M \left[W_k \left(-\frac{1 - \cos(U)}{\cos(U) \sin(U)} \frac{1 - \cos(V)}{\cos(V) \sin(V)} \exp \left(\frac{1}{2 \cos(U)} + \frac{1}{2 \cos(V)} - 1 \right) \right) + 1 \right], \quad (4.41)$$

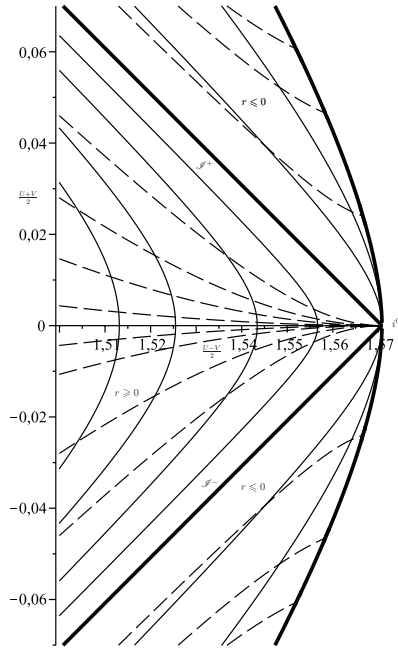
kde k určuje větev Lambertovy W -funkce tak, že $k = 0$ odpovídá kladným radiálním souřadnicím a $k = -1$ odpovídá záporným hodnotám radiální souřadnice. Výběr těchto dvou větví plyne z toho, že pouze větve $k = -1, 0$ mají reálný obor hodnot Lambertovy funkce (viz B.2).

Na Obrázcích 4.3 a 4.4 máme porovnání okolí bodu i^0 při kompaktifikaci pomocí implicitně definované transformace (4.35) Schwarzschildova prostoročasu (vlevo) a kompaktifikace Minkowskiho metriky (vpravo). Srovnáním obou obrázků zjistíme, že tyto oblasti si odpovídají.

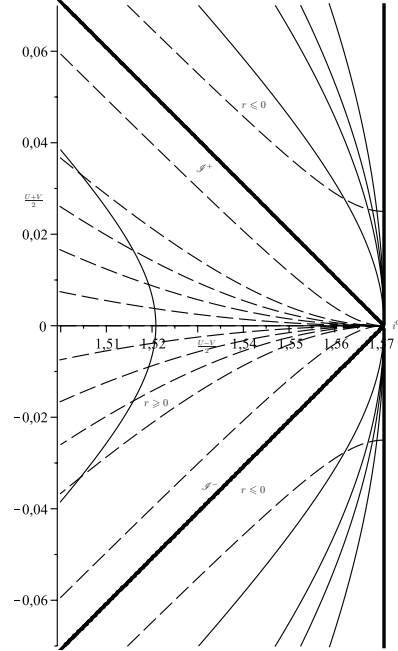
4.3.3 Úhel $r = 0$ v bodech i^\pm a i^0

Na Obrázku 4.2 vidíme, že křivka popisující singularitu (v obou oblastech $r > 0$ i $r < 0$) není úsečkou. Zajímá nás jak vypadá úhel, pod kterým se naše křivka popisující singularitu blíží do významných bodů i^\pm a i^0 . Konkrétní hodnoty úhlů pod kterými se nám křivka $r = 0$ blíží do našich bodů, zjistíme z implicitní derivace transformační rovnice $f(r = 0) = g(U) + g(V)$. Pro naší transformační funkci (4.35) máme derivaci vzhledem k závislosti $V = V(U)$ danou vztahem

$$\frac{dV}{dU} = -\frac{(2 \cos(U)^3 - (\cos(U) + 1)^2) \cos(V)^2 \sin(V)}{(2 \cos(V)^3 - (\cos(V) + 1)^2) \cos(U)^2 \sin(U)}, \quad (4.42)$$



Obrázek 4.3: Okolí bodu i^0 při kompaktifikaci dle (4.35)



Obrázek 4.4: Okolí bodu i^0 při kompaktifikaci Minkowskiho.

kde se nám vyskytuje v čitateli i jmenovateli člen, který jsme v dráhovém elementu (4.37) označili $B(X)$ a ukázali jsme si, že tento člen je vždy nenulový a omezený. Vzhledem k tomu, že hodnoty $\cos(X)$ a $\sin(X)$ jsou v bodech $U, V = \{\pm\pi/2, 0\}$ nulové nebo jednotkové (hodnoty limit budou nula nebo divergentní) a členy $B(U), B(V)$ nabývají v těchto bodech hodnot $-1, -2$. Z toho důvodu nebudeme členy $B(U), B(V)$ dále uvažovat, nebude-li to nutné.

Při určování hodnoty implicitní derivace (4.42) v bodech i^\pm dost záleží na směru (pořadí), ve kterém budeme provádět limity výrazu na pravé straně vztahu (4.42). Musíme si uvědomit, že se k těmto bodům můžeme přibližovat pouze z oblasti, kde existuje reálný fyzikální prostor. To znamená, že se do těchto bodů budeme přibližovat z kladných hodnot, tj. $r \rightarrow 0$ zprava.

Pro bod $U = 0, V = \pi/2$ musíme nejprve provést limitní proces pro souřadnici U zprava a poté pro souřadnici V zleva. Pouze tak zajistíme, že se do bodu i^+ blížíme z fyzikálně reálné oblasti. Celkově tedy máme:

$$\frac{dV}{dU} = \lim_{V \rightarrow \pi/2^-} \lim_{U \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\cos(V)^2 \sin(V)}{\cos(U)^2 \sin(U)} \right) = -\infty \quad (4.43)$$

a pro bod $U = \pi/2, V = 0$ máme po obdobné diskusi

$$\frac{dV}{dU} = \lim_{U \rightarrow \pi/2^-} \lim_{V \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\cos(V)^2 \sin(V)}{\cos(U)^2 \sin(U)} \right) = 0. \quad (4.44)$$

Naše výpočty se shodují s tím, co je znázorněno na obrázku 4.2. Musíme si jen uvědomit, že výpočty jsou prováděny pro světelné souřadnice, kdežto diagramy kreslíme dle zvyku v souřadnicích otočených o 45° .

Pro i^0 resp. i^- v oblasti $r < 0$, určeném hodnotami souřadnic $U = \pi/2, V = -\pi/2$, si zase musíme uvědomit, jak budeme provádět limitní proces, abychom se k danému bodu blížili stejným stylem jako v předchozích odstavcích. Ze vztahu (4.42) spočítáme, že při dosazení našich hodnot pro U a V dostáváme hodnotu limity v tomto bodě rovnou jedné (jen ze znalosti sudostí a lichostí funkcí $\sin(X)$ a $\cos(X)$), tj. $\frac{dV}{dU} = 1$. Teď by měla následovat diskuse ohledně vynechaných členů $B(X)$, ale vzhledem k tomu, že tyto funkce jsou složeny pouze ze sudých funkcí, pak se jejich hodnoty ve výrazu (4.42) jednoduše zkrátí.

Výsledek opět koresponduje s Obrázkem 4.2 resp. výřezem na Obrázku 4.3. Kdyby nás zajímaly i body i^- , které jsou u singularity v maximálně rozšířeném Penroseově–Carterově diagramu, tzv. „white hole“, pak je diskuse kvalitativně stejná a již se můžeme spokojit s diagramem 4.2.

4.4 Zpětná kruskalizace

V předchozích sekcích jsme sledovali kompaktifikace Schwarzschildova prostoročasu, které měly analytické metrické koeficienty na \mathcal{I}^\pm . Konstrukci přímo kompaktifikovaných souřadnic jsme zvolili proto, že bylo snazší nalézt vhodné transformační funkce splňující všechny naše požadavky.

Všechny známé kompaktifikace vyskytující se v literatuře postupují tak, že vezmou Schwarzschildův prostoročas v Kruskalových–Szekeresových souřadnicích a následně tyto souřadnice kompaktifikují. My se pokusíme vygenerovat z našich kompaktifikovaných souřadnic nové souřadnice Kruskalova typu.

Vzhledem k tomu, že kladnou část ($r > 0$) Schwarzschildova prostoročasu nám mapují souřadnice U, V v rozsahu $(-\pi/2, \pi/2)$, pak myšlenka „dekompaktifikace“ spočívá v tom, že bychom chtěli přenést tento interval na reálnou osu. Konkrétně musíme zvolit funkci takovou, aby zobrazovala $\mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ jednoznačně. Jako nejsnazší postup se jeví použít funkci $\arctan(x)$ (připomínám naše značení, kdy pro kompaktifikované souřadnice užíváme velká písmena a pro nekompaktifikované malá písmena). Pak zapíšeme naši zpětnou transformaci do souřadnic Kruskalova typu jako $X = \arctan(x)$. Dosadíme-li tuto zpětnou transformaci do implicitních transformačních funkcí (tj. $G(x) \equiv g(\arctan(x))$), obdržíme výrazy

$$(4.24) \Rightarrow G(u) = M(\sqrt{1+u^2} + 2\ln(u)) \quad (4.45)$$

$$(4.35) \Rightarrow G(u) = M\left(\sqrt{1+u^2} + 2\ln\left(\frac{(\sqrt{1+u^2}-1)\sqrt{1+u^2}}{u}\right)\right). \quad (4.46)$$

Uvádíme zde obě transformační funkce, protože první transformace (4.24) sice „nefunguje daleko“⁵ za \mathcal{S}^\pm , ale tvar transformace je jednodušší jak v kompakťifikovaných souřadnicích, tak i v nekompatťifikovaných, jak vidíme ve vztahu (4.45). Vztah (4.46) nám ukazuje zpětnou kruskalizaci pro funkci (4.35). Při porovnání s předchozí funkcí se rozhodně jedná o složitější strukturu.

Ačkoliv jsme zde zmínili několikrát, že souřadnice jsou Kruskalova typu, pak bychom se měli přesvědčit, že tomu tak opravdu je. Jeden z požadavků na kruskalizaci je, že chceme mít souřadný systém spojený s geodetikami světelných částic. Metrika bude mít formálně stejný tvar, jako v případě kompakťifikovaných souřadnic a je zřejmé, že $u = \text{konst.} \wedge v = \text{konst.}$ popisují geodetiky světelných částic.

Druhý požadavek je, abychom měli prostoročasový diagram analogický Kruskalově diagramu. O tom se nejlépe přesvědčíme obrázkem 4.5.

Posledním požadavkem je regularita horizontu, o které se můžeme přesvědčit z explicitně vyjádřených metrických elementů, konkrétně pro transformaci (4.45) máme metrický koeficient

$$g_{uv} = 4M^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{u^2 + 2\sqrt{1+u^2}}{u\sqrt{1+u^2}} \frac{v^2 + 2\sqrt{1+v^2}}{v\sqrt{1+v^2}}, \quad (4.47)$$

resp. pro transformaci (4.46)

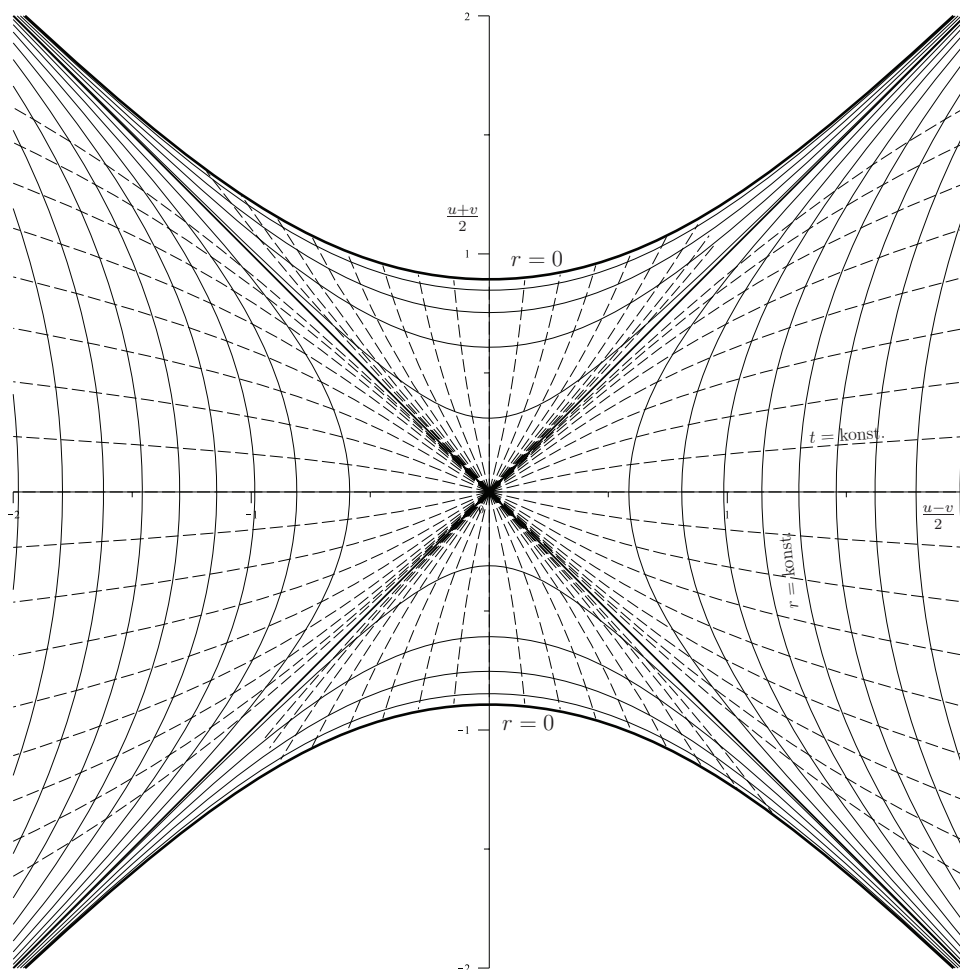
$$g_{uv} = 4M^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{u^2 + u^4 + u^2\sqrt{1+u^2} - 2\sqrt{1+u^2} + 2}{u(1+u^2)(\sqrt{1+u^2}-1)} \times \\ \times \frac{v^2 + v^4 + v^2\sqrt{1+v^2} - 2\sqrt{1+v^2} + 2}{v(1+v^2)(\sqrt{1+v^2}-1)}. \quad (4.48)$$

V obou případech vidíme, že na horizontu se metrické koeficienty chovají jako

$$g_{UV}|_{r \rightarrow 2M} \simeq \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{1}{uv},$$

což je přesně stejný tvar metrického koeficientu jako máme v případě Kruskalových–Szekeresových souřadnic.

⁵Pod pojmem daleko rozumíme to, že lze analyticky přejít přes \mathcal{S}^\pm , ale nelze pokrýt celou oblast $r < 0$. Pojem nefunguje ve smyslu, že výsledná metrika je degenerovaná.



Obrázek 4.5: *Prostorčasový diagram zkonstruovaný pomocí transformační funkce (4.46) Kruskalova typu.*

4.5 Vztah mezi Kruskalovými–Szekeresovými a implicitními souřadnicemi

Kruskalův–Szekeresův souřadný systém je bezpochyby velice významný, tak by bylo dobré, si zde uvést vztah mezi ním a námi nově nalezenými kompakťifikovanými souřadnicemi.

Pro vyjádření vzájemného spojení mezi těmito dvěma souřadnými systémy budeme vycházet z implicitního vztahu mezi radiální Schwarzschildovou souřadnicí r a Kruskalovými–Szekeresovými souřadnicemi u_{K-S}, v_{K-S} (3.15). Abychom mohli tohoto vztahu pohodlně využít, musíme nejprve upravit želví souřadnici na vhodnější tvar:

$$f(r) = r + 2M \ln(r/2M - 1) = 2M \ln((r/2M - 1) \exp(r/2M)) \quad (4.49)$$

a stejně upravíme implicitně zadanou souřadnici:

$$g(X) = h(X) + 2M \ln(k(X)) = 2M \ln(k(X) \exp(h(X)/2M)) = \ln(\exp(g(X)/2M)). \quad (4.50)$$

Po úpravách a dosazení do (3.15) obdržíme následující rovnici

$$\left(1 - \frac{r}{2M}\right) \exp(r/2M) = k(U)k(V) \exp\left(\frac{h(U)}{2M}\right) \exp\left(\frac{h(V)}{2M}\right) = u_{K-S} v_{K-S}, \quad (4.51)$$

kde snadno identifikujeme vztah $u_{K-S} \equiv u_{K-S}(U)$. Obecně máme vyjádření této závislosti

$$u_{K-S} = \exp\left(\frac{g(U)}{2M}\right) = k(U) \exp\left(\frac{h(U)}{2M}\right). \quad (4.52)$$

Pro konkrétní transformační funkce (4.24) resp. (4.35) máme explicitní závislosti

$$u_{K-S} = \tan(U) \exp\left(\frac{1}{2 \cos(U)}\right) \quad \text{pro (4.24) a} \quad (4.53)$$

$$u_{K-S} = \frac{1 - \cos(U)}{\sin(U) \cos(U)} \exp\left(\frac{1}{2 \cos(U)}\right) \quad \text{pro (4.35)}. \quad (4.54)$$

Vztah mezi implicitními kompaktificačními funkcemi a ostatními souřadnými systémy je v tabulce 4.2.

Souřadný systém	Vztah k implicitním souř.
Schwarzschild r, t	$f(r) = g(U) + g(V)$ $t = g(U) - g(V)$
Finkelstein–Eddington	$u_{F-E} = g(U)$ $v_{F-E} = g(V)$
Kruskal–Szekeres	$u_{K-S} = \pm \exp(g(U)/2M)$ $v_{K-S} = \pm \exp(g(V)/2M)$
MTW	$U_{MTW} = \arctan(\pm \exp(g(U)/2M))$ $V_{MTW} = \arctan(\pm \exp(g(V)/2M))$
Novikov–Frolov	$U_{N-F} = \arctan(\operatorname{arcsinh}(\exp(g(U)/2M)))$ $V_{N-F} = \arctan(\operatorname{arcsinh}(\exp(g(V)/2M)))$
Hervik–Grøn	$U_{H-G} = \frac{\exp(g(U)/2M)}{\sqrt{1+\exp(g(U)/M)}} \ln(1 + \exp(g(U)/M))$ $V_{H-G} = \frac{\exp(g(V)/2M)}{\sqrt{1+\exp(g(V)/M)}} \ln(1 + \exp(g(V)/M))$

Tabulka 4.2: Shrnutí transformací mezi implicitně zadanými souřadnicemi a známými souřadnými systémy užívanými k popisu Schwarzschildova prostoročasu.

Kapitola 5

Reissnerův–Nordströmův prostorčas

V této kapitole se pokusíme o přímou aplikaci naší metody konstrukce transformační funkce na Reissnerův–Nordströmův prostorčas a ukážeme si výhody i nedostatky tohoto postupu.

5.1 Reissnerovo–Nordströmovo řešení Einsteinových rovnic

Reissnerovo–Nordströmovo řešení Einsteinových rovnic je tzv. elektrovakuové řešení, kdy kromě hmotnosti, statičnosti a sférické symetrie připouštíme ještě možnost elektrického náboje. Takto obdržíme řešení, jehož dráhový element je dán vztahem

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\omega^2, \quad (5.1)$$

kde vidíme stejnou strukturu jako v případě Schwarzschildovy metriky (3.3).

V obou případech mají dráhové elementy strukturu $ds^2 = -F(r)dt^2 + F(r)^{-1}dr^2 + r^2d\omega^2$, přičemž oba prostorčasy jsou stacionární a sféricky symetrické. Pokud budeme vyšetřovat singularity Reissnerovy–Nordströmovy metriky zadané dráhovým elementem (5.1), zjistíme, že singularita nastává v bodech $r = 0, r = r^-, r = r^+$. V případě Schwarzschildova prostorčasu jsme si ukázali, že singularita $r_S = 2M$ je jen souřadnicové povahy, tak i v tomto případě Reissnerova–Nordströmova prostorčasu se dá ukázat (např. [4]), že singularity v bodech r^- a r^+ jsou rovněž souřadnicové singularity. Z tohoto důvodu bychom měli být schopni naší transformační funkcí (4.35) pokrýt minimálně vnější oblast Reissnerova–Nordströmova

prostorochasu, tj. $r^+ < r < \infty$, tak, aby se nám zachovala asymptotická plochost a analytické vlastnosti na \mathcal{S}^\pm .

V našem přístupu implicitně zadaných transformačních funkcí jsme vycházeli z Reggaeovy–Wheelerovy souřadnice. Pro Reissnerův–Nordströmův prostorochas zavedeme

$$r^* = f(r) = r + \frac{r^{+2}}{r^+ - r^-} \ln\left(\frac{r}{r^+} - 1\right) - \frac{r^{-2}}{r^+ - r^-} \ln\left(\frac{r}{r^-} - 1\right), \quad (5.2)$$

kde $r^+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$ a $r^- = M - \sqrt{M^2 - Q^2}$,

Jediný rozdíl je v (až na jinou konstantu) přidání jedné logaritmické funkce navíc.

5.2 Kompaktifikace Reissnerova–Nordströmova prostorochasu

Nejprve si musíme uvědomit, že přímočaré použití transformační funkce (4.35) by nám neumožnilo splnit analytický přechod přes \mathcal{S}^\pm , protože pokud projdeme radiální souřadnicí přes radiální nekonečno ($r \rightarrow \infty$), pak v želví souřadnici (5.2) se nám vyskytnou dvě imaginární části

$$f(\hat{r}) = \hat{r} + \kappa^+ \ln\left(1 - \frac{\hat{r}}{r^+}\right) - \kappa^- \ln\left(1 - \frac{\hat{r}}{r^-}\right) + \pi i(n\kappa^+ - m\kappa^-), \quad \hat{r} \in (-\infty, 0], \quad (5.3)$$

kde zkráceně značíme $\kappa^\pm = r^{\pm 2}/(r^+ - r^-)$.

Z předchozího vyplývá, že naši transformační funkci musíme modifikovat tak, že nahradíme konstantu před logaritmem $2M \rightarrow \kappa^+$ a zároveň přidáme k naší transformační funkci druhý logaritmus, který na \mathcal{S}^\pm diverguje, tj. přidáme člen $-\kappa^- \ln\left(O\left(\frac{1}{\pi/2 - X}\right)\right)$, pro $X \rightarrow \pi/2$.

Při přechodu skrze vnější horizont $r = r^+$ nám logaritmus s konstantou κ^+ „vytvoří“ imaginární část $\pi i\kappa^+ m$ a druhý logaritmus (κ^-) je dobře definovaný, takže žádná imaginární část z tohoto logaritmu nám nepřibude. To nám zpřesňuje požadavek na druhý logaritmus, který se musí chovat jako $-\kappa^- \ln(O(1))$ pro $X \rightarrow 0$.

Po shrnutí předešlého, si můžeme předepsat konkrétní tvar naší transformační funkce jako

$$g(X) = \frac{M}{\cos(X)} + \frac{r^{+2}}{r^+ - r^-} \ln\left(\frac{1 - \cos(X)}{\cos(X) \sin(X)}\right) - \frac{r^{-2}}{r^+ - r^-} \ln\left(\frac{1}{\cos(X)}\right), \quad (5.4)$$

Přidaná logaritmická část diverguje (a mění znaménko) pro $X = \pi/2$ a je konečná pro $X = 0$, Získáváme tím vhodného kandidáta na transformační funkci,

kteřá nám bude pokrývat vnější oblast Reissnerova–Nordströмова prostoročasu s analytickým přechodem přes \mathcal{S}^\pm a přes vnější horizont $r = r^+$.

Nyní si tedy můžeme zavést transformaci souřadnic mezi radiálními souřadnicemi a kompaktifikovanými souřadnicemi

$$f(r) = g(U) + g(V) \quad (5.5)$$

$$t = g(U) - g(V), \quad (5.6)$$

kteřá nám dá stejně jako v předešlé kapitole transformaci diferenciálů $-dt^2 + dr^2 = 4g'(U)g'(V)dUdV$. Díky tomu můžeme ztransformovat Reissnerovu–Nordströmovu metriku zapsanou pomocí želvů souřadnic

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) (-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\omega^2 \quad (5.7)$$

do kompaktifikovaných souřadnic

$$ds^2 = 4 \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) g'(U)g'(V)dUdV + r^2 d\omega^2, \quad (5.8)$$

kde jako obvykle značíme čárkou derivaci vzhledem k dané proměnné.

Nejprve si provedeme derivaci funkce $g(X)$ a vyšetříme si její průběh, abychom posléze mohli předepsat transformovanou metriku a snadněji určit její vlastnosti. Derivace transformační funkce je dána vztahem

$$\frac{dg(X)}{dX} = M \frac{\sin(X)}{\cos(X)^2} - \kappa^+ \frac{\cos(X)^2 - \cos(X) - 1}{\cos(X) \sin(X)} - \kappa^- \frac{\sin(X)}{\cos(X)}, \quad (5.9)$$

ze kterého můžeme ihned odečíst tvar konformního faktoru $\Omega_X = \alpha \cos(X)$, kde konstantu α určíme z Ashtekarových podmínek na asymptotickou plochost. Po pronásobení faktorem Ω_X je hodnota v bodě $X = \pi/2$ rovna konečná, nebo-li metrika na \mathcal{S}^\pm se bude chovat jako $O(1)$. Druhou vlastností, kterou lze vidět je, že tento výraz diverguje pro $X = 0$ jako $O(1/X)$. Tuto singularitu neodstraníme konformním faktorem, ale hodnota $X = 0$ odpovídá (ze vztahu (5.4)) vnějšímu horizontu $r = r^+$, kde je člen $\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)$ nulový a jde do nuly lineárně. Tato singularita je v našem případě žádoucí, protože celkově bude metrika v tomto bodě konečná a nenulová (ukážeme dále).

Poslední vlastnost $g'(X)$ je, že při přechodu přes vnější horizont (tj. $X = 0$) nám tato derivace mění znaménko. Zmíněnou vlastnost taktéž požadujeme, protože i člen $\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)$ mění při průchodu přes vnější horizont znaménko a důsledkem je, že se nám zachovává signatura metriky.

Další podstatnou vlastností kladenou na derivaci transformační funkce je, že musí být všude nenulová, abychom neměli degenerovanou metriku. Vzhledem k to-

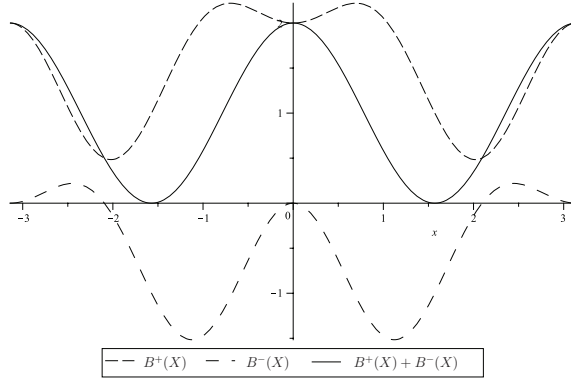
mu, že rovnice $dg(X)/dX = 0$ se redukuje na řešení kubické rovnice (po substituci $y = \cos(x)$) s dvěma volnými parametry M, Q , je algebraické řešení velmi náročné. Zkusíme tedy přepsat derivaci funkce $g(X)$ do tvaru vhodného pro grafické řešení. Pokud zavedeme do rovnice (5.9) substituci $M = \frac{\kappa^+ + \kappa^-}{2}$, pak po vhodných úpravách získáme alternativní zápis

$$g'(X) = \frac{(-2 \cos(X)^3 + \cos(X)^2 + 2 \cos(X) + 1)\kappa^+ + (2 \cos(X)^3 + \cos(X)^2 - 2 \cos(X) - 1)\kappa^-}{2 \cos(X)^2 \sin(X)}, \quad (5.10)$$

Pro zkrácení zápisu máme značení

$$g'(X) = \frac{B^+(X)\kappa^+ + B^-(X)\kappa^-}{2 \cos(x)^2 \sin(x)}. \quad (5.11)$$

Vyneseme funkce $B^+(X)$, $B^-(X)$ a $B^+(X) + B^-(X)$ graficky v obrázku 5.1. Zde vidíme průběh obou funkcí $B^+(X)$ a $B^-(X)$, ale pro nás nejzásadnější je graf součtu $B^+(X) + B^-(X)$ (plnou čarou), kde tento graf nabývá nulové hodnoty. Pokud si však uvědomíme, že platí relace $\kappa^+ > \kappa^- > 0$ pro všechna $M > 0$ a $M > Q$, pak ze zbývajících dvou grafů funkcí $B^+(X)$ a $B^-(X)$ snadno zjistíme, že celkově výraz $B^+(X)\kappa^+ + B^-(X)\kappa^-$ je vždy nenulový a to byl náš požadavek.



Obrázek 5.1: Pomocný graf pro důkaz nenulovosti metrických koeficientů konformní metriky.

Nyní již můžeme zapsat explicitně tvar metriky transformované do kompakťkovaných souřadnic, konkrétně v našem kompaktním zápisu máme

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \frac{B^+(U)\kappa^+ + B^-(U)\kappa^-}{\cos(U)^2 \sin(U)} \frac{B^+(V)\kappa^+ + B^-(V)\kappa^-}{\cos(V)^2 \sin(V)} dU dV + r^2 d\omega^2 \quad (5.12)$$

Přechod ke konformní metrice získáme $\Omega = \frac{\cos(U)\cos(V)}{4M^2}$ (konstantu zjistíme z podmínky (2.13)) a následně obdržíme dráhový element

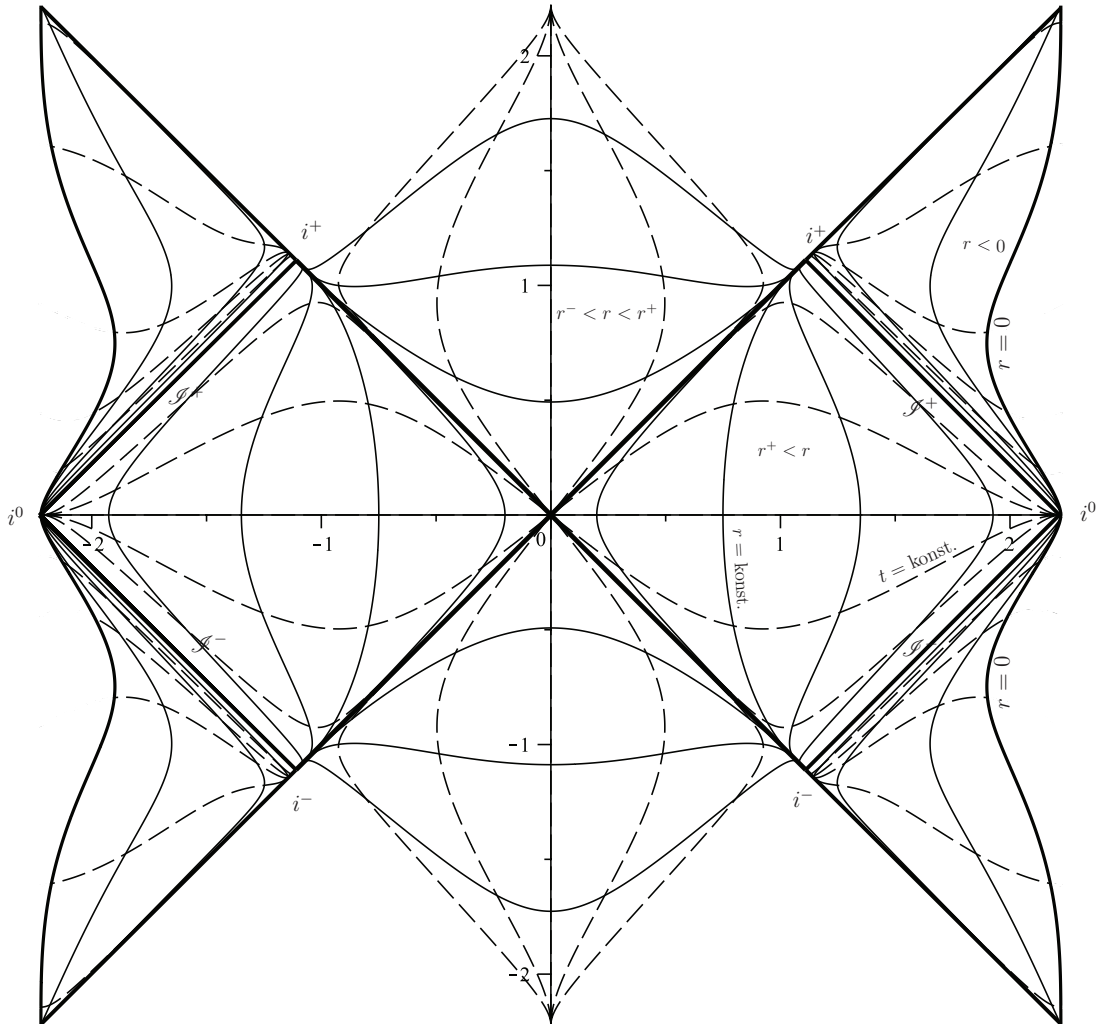
$$d\tilde{s}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \frac{B^+(U)\kappa^+ + B^-(U)\kappa^-}{4M^2 \sin(U)} \frac{B^+(V)\kappa^+ + B^-(V)\kappa^-}{4M^2 \sin(V)} dU dV + \Omega^2 r^2 d\omega^2. \quad (5.13)$$

Vzhledem k nenulovosti výrazu $B^+(X)\kappa^+ + B^-(X)\kappa^-$ můžeme zvolit konformní faktor doplněný o člen $\sqrt{B^+(X)\kappa^+ + B^-(X)\kappa^-}^{-1}$ (označíme Ω_{RNX}) a tím obdržíme jednodušší tvar dráhového elementu

$$d\tilde{s}^2 = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)}{4M^2 \sin(U) \sin(V)} dU dV + \Omega_{RNX}^2 r^2 d\omega^2. \quad (5.14)$$

Protože explicitní závislost $r \equiv r(U, V)$ v případě kompakťkovaného Reissnerova–Nordströмова prostoročasu nelze zapsat s použitím běžných funkcí tak, jako tomu bylo v případě Schwarzschildova řešení. Proto v tomto případě musíme k výpočtům užívat dráhový element (5.13) resp. (5.14) společně s rovnicí $f(r) = g(U) + g(V)$.

Penroseův–Carterův diagram pro kompakťkaci pomocí transformační funkce (5.4) je na obrázku 5.2.



Obrázek 5.2: Penroseův–Carterův diagram pro kompakťkaci pomocí transformační funkce (5.4). $M = 1$, $Q = 0.7$.

5.2.1 Analytické vlastnosti souřadnic kompakťikovaného Reissnerova–Nordströмова prostoročasu

Pro ověření analytičnosti metrického koeficientu $g_{\theta\theta}$ asociovaného s dráhovým elementem (5.13) užijeme opět postup sestavení a řešení diferenciální rovnice popsané v Dodatku B.4. Fakticky budeme řešit diferenciální rovnici (B.16). Výsledná řada řešící tuto diferenciální rovnici je

$$\begin{aligned} \Omega r \approx & \frac{\cos V}{4M} - \left[\frac{2 \cos(V) + 1}{4M} - \frac{\kappa^+ \cos(V)}{4M^2} \left(\ln \left(\frac{M \cos(V)(\cos(V) + 1)}{\kappa^+ \sin(V)} \right) + 1 \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\kappa^- \cos(V)}{4M^2} \left(\ln \left(\frac{\kappa^-}{M \cos(V)} \right) - 1 \right) \right] \left(U - \frac{\pi}{2} \right) + O \left(\left(U - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (5.15)$$

kde připomínáme $\Omega r \equiv \sqrt{g_{\theta\theta}}$. V tomto případě vypisujeme jen lineární člen, protože řešení je mnohonásobně delší.

Opět si všimneme, že rozvoj v nultém řádu nám odpovídá Minkowskiho prostoročasu a v dalším řádu máme opravu od hmotnosti a náboje. Při srovnání s řadou (4.38) vidíme shodu (až na konstanty) při limitě $Q \rightarrow 0$, tj. $\kappa^+(Q = 0) = 2M$ a $\kappa^-(Q = 0) = 0$. Ověření analytičnosti koeficientu \tilde{g}_{UV} je opět jen o součinu analytických funkcí na okolí \mathcal{I}^\pm .

Při ověření analytičnosti na vnějším horizontu r^+ budeme postupovat stejným způsobem jako v případě Schwarzschildovy metriky, tj. přepíšeme si metriku do vhodnějšího tvaru, kdy sice nejsou vidět asymptotické vlastnosti metriky, ale metrika bude na vnějším horizontu regulární. Z implicitního vztahu $f(r) = g(U) + g(V)$ vyjádříme výraz $r - r^+$, který jde na horizontu do nuly jako

$$\begin{aligned} r - r^+ = & \overbrace{r^+ \exp(-r/\kappa^+) \left(\frac{r}{r^-} - 1 \right)^{\kappa^-/\kappa^+}}^{R(r)} \frac{1 - \cos(U)}{\cos(U) \sin(U)} \frac{1 - \cos(V)}{\cos(V) \sin(V)} \times \\ & \times \underbrace{\exp \left(\frac{M}{\kappa^+ \cos(U)} - \frac{\kappa^-}{\kappa^+} \ln \left(\frac{1}{\cos(U)} \right) \right) \exp \left(\frac{M}{\kappa^+ \cos(V)} - \frac{\kappa^-}{\kappa^+} \ln \left(\frac{1}{\cos(V)} \right) \right)}_{S(U,V)}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

kde jsme zavedli dvě funkce R, S (pro zestručnění zápisu) takové, že platí $R(r = r^+) \neq 0$ a $S(r^+) \neq 0$.

S touto transformací můžeme přepsat metrický koeficient g_{UV} z dráhového elementu (5.14) ve tvaru

$$\tilde{g}_{UV} = \frac{(r - r^-)R(r)S(U, V)}{4M^2 r^2 \cos(U)(1 + \cos(U)) \cos(V)(1 + \cos(V))}, \quad (5.17)$$

ze kterého je již vidět jeho regularita na horizontu $r = r^+$. Opět jde o tvar metrického koeficientu vhodný k popisu oblastí kolem r^+ .

5.2.2 Diskuze vlastností kompaktifikace Reissnerova–Nordströмова prostoročasu

V předchozím jsme psali o tom, že pomocí transformační funkce (5.4) lze pokrýt oblast Reissnerova–Nordströмова prostoročasu od vnitřního horizontu (bez něj) až po \mathcal{S}^\pm . Navíc máme analytický přechod přes vnější horizont a přes \mathcal{S}^\pm do oblasti záporných radiálních vzdáleností. Celkově tedy pokrýváme oblast $r \in (r^-, \infty) \cup (-\infty, 0]$. Nicméně víme, že se standardně pokrývá Reissnerova–Nordströмова varieta (bez analytických přechodů přes \mathcal{S}^\pm) dvěma mapami souřadnic [4], tudíž nás tento fakt, při přímočarém zobecnění transformační funkce (4.35) na Reissnerův–Nordströmův prostoročas, příliš nepřekvapil.

Je zřejmé, že by bylo ideální nalézt vhodnou transformační funkci takovou, abychom jí pokryli celý Reissnerův–Nordströmův prostoročas. Tomu brání výraz $-\kappa^- \ln(1/\cos(x))$, který jsme dodali k transformační funkci ze Schwarzschildova prostoročasu (4.35) z důvodu analytického přechodu přes \mathcal{S}^\pm i přechodu přes vnější horizont $r = r^+$. Pro tyto účely nám vnitřní funkce v logaritmu postačovala. Pokud bychom chtěli analytický přechod i přes vnitřní horizont, pak bychom museli modifikovat vnitřní funkci, aby se chovala pro $X \rightarrow -\pi/2$ jako $O(\pi/2 + X)$. Také bychom museli modifikovat i člen $M/\cos(X)$, protože tento výraz je v bodě $X = -\pi/2$ divergentní a navíc jsou limity z obou stran různé.

Druhou komplikací je, že na \mathcal{S}^\pm požadujeme nulový konformní faktor Ω . Například \mathcal{S}^+ je definován pomocí souřadnic $U = \pi/2$ a $V \in (-\pi/2, 0)$ a vnitřní horizont jako $U = \pi/2$ a $V \in (0, \pi/2)$, čili konformní faktor na nadploše vnitřního horizontu by byl nulový, ale jak víme tak konformní faktor musí být uvnitř prostoročasu nenulový.

Kapitola 6

Závěr

Cílem této práce bylo porozumět kompakfikačním technikám pro asymptoticky ploché prostoročasy. Začali jsme jednoduchým příkladem – Minkowského prostoročasem, kde jsme si demonstrovali základní kompakfikační techniky.

Dále jsem prozkoumali současně známé kompakfikace Schwarzschildova prostoročasu a během rozboru jednotlivých přístupů jsme si zdůraznili především nedostatky těchto řešení. Hlavním nedostatkem současných metod je jejich neanalytičnost na hranicích \mathcal{I}^\pm . Pro reálné početní potřeby je nezbytné, aby tato oblast byla pokrytá analytickou mapou souřadnic, museli jsme tedy hledat nové.

Zavedli jsme nový postup konstrukce souřadnic, který je *primárně motivován analytickými požadavky* na výslednou metriku. Tímto přístupem jsme obdrželi konformní metriku analytickou všude, včetně problematických oblastí \mathcal{I}^\pm . Tyto nové souřadnice nám dovolili analyticky prodloužit konformní metriku za \mathcal{I}^\pm a tím nakreslit Penroseův–Carterův diagram (viz Obrázek 4.2) pro totálně analyticky rozšířenou Schwarzschildovu varietu.

Náš přístup jsme aplikovali na složitější Reissnerův–Nordströmův prostoročas a dokázali jsme, že námi předložený postup vede k analytickému pokrytí Reissnerova–Nordströмова prostoročasu, pro $r > r^-$.

Během naší práce jsme narazili na problém dokázání analytičnosti metrického koeficientu $g_{\theta\theta}$. Rigorózní důkaz analytických vlastností této funkce jsme nikde nenašli a tak jsme vypracovali vlastní metodu jak ukázat analytičnost toho koeficientu.

Příloha A

Kruskalovy–Szekeresovy souřadnice

V kapitole o Schwarzschildově prostoročase jsme si ukázali konstrukci Kruskalových–Szekeresových souřadnic. Zde si doplníme vztahy pro všechny oblasti tzv. maximálně analytické Schwarzschildovy variety.

A.1 Kruskalovy–Szekeresovy světelné souřadnice

Zde máme souřadnice u, v popisující světelné částice podmínkami $u = \text{konst.}$ nebo $v = \text{konst.}$

$$(I) \quad \begin{cases} u = -\sqrt{\frac{r}{2M} - 1} e^{r/4M} e^{-t/4M} \\ v = \sqrt{\frac{r}{2M} - 1} e^{r/4M} e^{t/4M} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$(II) \quad \begin{cases} u = \sqrt{1 - \frac{r}{2M}} e^{r/4M} e^{-t/4M} \\ v = \sqrt{1 - \frac{r}{2M}} e^{r/4M} e^{t/4M} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$(III) \quad \begin{cases} u = \sqrt{\frac{r}{2M} - 1} e^{r/4M} e^{-t/4M} \\ v = -\sqrt{\frac{r}{2M} - 1} e^{r/4M} e^{t/4M} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

$$(IV) \quad \begin{cases} u = -\sqrt{1 - \frac{r}{2M}} e^{r/4M} e^{-t/4M} \\ v = -\sqrt{1 - \frac{r}{2M}} e^{r/4M} e^{t/4M} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

$$(\text{A.5})$$

Vidíme, že máme čtyři různé definice souřadnicové transformace pro čtyři regiony, konkrétní označení regionů je na obrázku 3.1, nebo [1].

Metrika viz (3.13).

A.2 Kruskalovy-Szekeresovy souřadnice

Prostoro-časové Kruskalovy souřadnice dostaneme pomocí vztahů $T = \frac{1}{2}(v + u)$ a $R = \frac{1}{2}(v - u)$, konkrétní transformace mezi Schwarzschildovými souřadnicemi r, t a Kruskalovými–Szekeresovými R, T jsou

$$(I) \quad \begin{cases} R = \sqrt{\frac{r}{2M} - 1} e^{r/4M} \cosh t/4M \\ T = \sqrt{\frac{r}{2M} - 1} e^{r/4M} \sinh t/4M \end{cases} \quad (A.6)$$

$$(II) \quad \begin{cases} R = \sqrt{1 - \frac{r}{2M}} e^{r/4M} \sinh t/4M \\ T = \sqrt{1 - \frac{r}{2M}} e^{r/4M} \cosh t/4M \end{cases} \quad (A.7)$$

$$(III) \quad \begin{cases} R = -\sqrt{\frac{r}{2M} - 1} e^{r/4M} \cosh t/4M \\ T = -\sqrt{\frac{r}{2M} - 1} e^{r/4M} \sinh t/4M \end{cases} \quad (A.8)$$

$$(IV) \quad \begin{cases} R = -\sqrt{1 - \frac{r}{2M}} e^{r/4M} \sinh t/4M \\ T = -\sqrt{1 - \frac{r}{2M}} e^{r/4M} \cosh t/4M \end{cases} \quad (A.9)$$

$$(A.10)$$

V těchto souřadnicích obdržíme dráhový element

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r(R, T)} e^{-\frac{r(R, T)}{2M}} (-dT^2 + dR^2) + r^2(U, V)d\omega^2 \quad (A.11)$$

A.3 Doplnující vztahy

Z definičních vztahů snadno vidíme implicitní vztah pro r

$$uv = T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{2M}\right) e^{r/2M}. \quad (A.12)$$

Tato implicitní rovnice se dá také řešit do explicitního vztahu pomocí Lambertovy W -funkce:

$$\frac{r}{2M} - 1 = W\left(\frac{R^2 - T^2}{e}\right) = W\left(\frac{-uv}{e}\right) \quad (A.13)$$

Obdobně lze obdržet implicitní vztah pro souřadnici t :

$$\tanh\left(\frac{t}{4M}\right) = \frac{T}{R} \quad \text{pro } r > 2M \quad (A.14)$$

$$\tanh\left(\frac{t}{4M}\right) = \frac{R}{T} \quad \text{pro } 0 < r < 2M \quad (A.15)$$

a pro světelné Kruskalovy–Szekeresovy souřadnice

$$\frac{u}{v} = -\exp(-t/2M) \quad \text{pro } r > 2M \quad (A.16)$$

$$\frac{u}{v} = \exp(-t/2M) \quad \text{pro } 0 < r < 2M \quad (A.17)$$

Příloha B

Matematické dodatky

B.1 Shrnutí důležitých definicí a vět

Definice 1 (Analytická funkce [41]) Funkci komplexní proměnné $f(z)$, která je spojitá a má všude v oblasti G derivaci, nazýváme analytickou, holomorfní též regulární na oblasti G .

Definice 2 (Reálná analytická funkce [11]) Analytická funkce je funkce na intervalu I , kterou lze na okolí každého bodu $x \in I$ vyjádřit jako součet mocninné řady.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad (\text{B.1})$$

Uvedená řada je tedy konvergentní pro všechna x z nějakého okolí bodu x_0 .

Definice 3 ([37]) O funkci $f(x)$ řekneme, že je třídy C^n v bodě x_0 , pokud má v tomto bodě spojitě (a konečně) všechny derivace vzhledem k proměnné x až do řádu n , tj.

$$\left| \frac{d^r f(x = x_0)}{dx^r} \right| < \infty$$

pro $\forall r \leq n$.

Věta 1 Třidu analytických funkcí značíme C^ω a platí pro ně, že každá analytická funkce je nekonečně diferencovatelná, tj. třídy C^∞ , ale není pravdou, že by každá nekonečně diferencovatelná funkce byla funkcí analytickou.

Věta 2 (Řešení diferenciální rovnice ve tvaru řady [38]) Necht $f(x, y)$ je holomorfní v bodě $[x_0, y_0]$. Potom existuje právě jedna mocninná řada

$$y(x) = y_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m(x - x_0)^m,$$

kteřá v jistém kruhu $|x - x_0| < \Delta$ je konvergentní a dává v něm řešení rovnice

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y).$$

Věta 2 je zároveň větou o jednoznačnosti [38].

B.2 Lambertova W -funkce

Pro naše potřeby si vystačíme jen s Lambertovou funkcí reálného argumentu a oboru hodnot. Obecně se tato funkce definuje pro komplexní proměnnou a řadí se mezi tzv. „mnoho hodnotové“ funkce. Více podrobností můžeme nalézt v [10].

Nejlepší vztah jak si tuto funkci definovat je identitou $x = W(x)e^{W(x)}$, nebo ještě relací $x = ye^y \iff y = W(x)$

Pokud se chceme omezit pouze na případ reálných argumentů a reálných hodnot funkce, pak dostaneme omezení na definičním oboru $x \geq -e^{-1}$.

Tato funkce je dobře definována na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$, na intervalu $\langle -e^{-1}, 0 \rangle$ má funkce dvě větve, ty označujeme obecně $W(k, x)$ nebo $W_k(x)$, kde k značí větev a x je proměnná.

V našem případě se omezíme pouze na větev $W_0(x)$, která je společně s větví $W_{-1}(x)$ vynesena na obrázku B.1 plnou čarou.

Pro práci s W -funkcí budeme potřebovat znát její derivaci a primitivní funkci

$$\frac{dW(x)}{dx} = \frac{W(x)}{x(1+W(x))} \quad \text{pro } x > -e^{-1} \quad (\text{B.2})$$

$$\int W(x)dx = x \left(W(x) - 1 + \frac{1}{W(x)} \right) + C \quad \text{pro } x > -e^{-1} \quad (\text{B.3})$$

Další vhodný vztah je Taylorův rozvoj větve W_0 v okolí bodu $x = 0$. Ten je dán následujícím vzorcem:

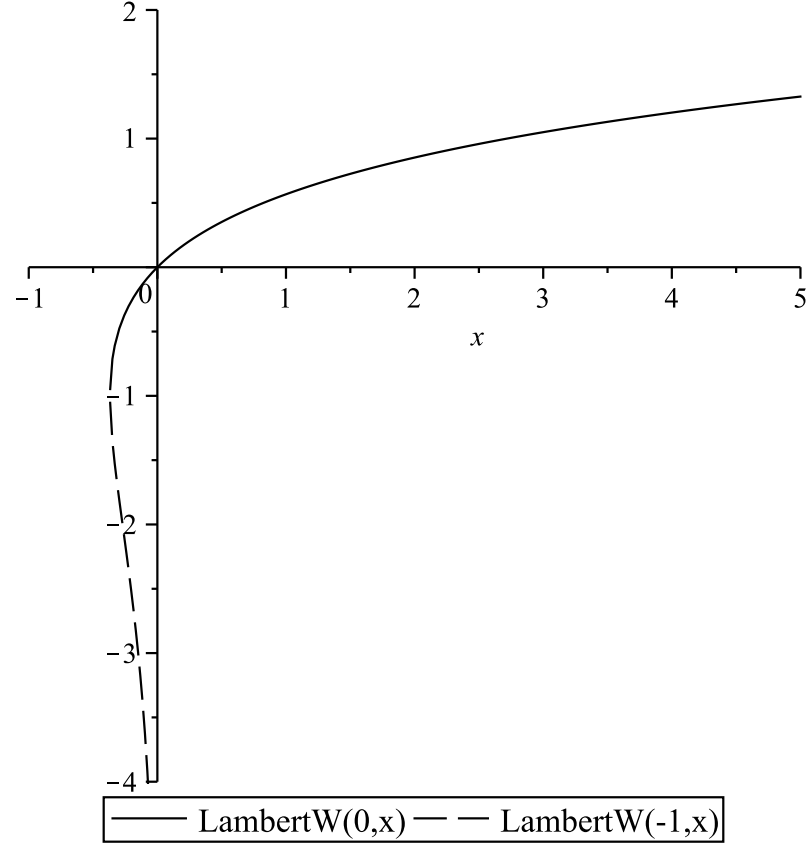
$$W_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n = x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{125}{24}x^5 - \dots \quad (\text{B.4})$$

Asymptotické chování Lambertovy W -funkce je pro $x \geq 3$

$$W(x) = \ln(x) - \ln(\ln(x)) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{km} \ln(\ln(x))^{m+1} \ln(x)^{-k-m-1} \quad (\text{B.5})$$

B.3 Limita výrazu Ωr

Pro ověření analytičnosti výrazu Ωr jsem si zvolili sestavení diferenciální rovnice (Dodatek B.4), kde potřebujeme znát počáteční podmínku $\Omega(\mathcal{J}^\pm)r|_{r \rightarrow \infty}$. Vzhledem k tomu, že v tomto bodě se jedná o výraz typu $0 \cdot \infty$, tak musíme využít limitní



Obrázek B.1: Graf reálných větví Lambertovy funkce ($W_0(x)$ a $W_{-1}(x)$).

proces. Zde si uvádíme výpočet pro konkrétní volbu transformační funkce (4.24) a použitím Lambertovy W -funkce, při $W(\dots) \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{U \rightarrow \pi/2} \Omega r &\stackrel{I'H.}{=} \lim_{U \rightarrow \pi/2} -\frac{\Omega^2}{\partial_U \Omega} \partial_U r = \lim_{U \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(U)^2 \cos(V)^2}{4M^2 \sin(U) \cos(V)} \cdot \frac{W(\dots) \left(\sin(U) + \frac{2M}{\tan(U)} \right) M}{(1 + W(\dots)) \cos(U)^2} \\
&= \lim_{U \rightarrow \pi/2} \frac{\cos(V)}{4M \sin(U)} \cdot \frac{W(\dots) \left(\sin(U) + \frac{2M}{\tan(U)} \right)}{1 + W(\dots)} = \frac{\cos(V)}{4M} \quad (B.6)
\end{aligned}$$

Podobným postupem můžeme spočítat hodnotu i pro transformační funkci (4.35). Výsledek obdržíme stejný.

Tento postup využíval explicitní vyjádření závislostí $r = r(U, V)$ pomocí Lambertovy funkce. Tento postup nebude v případě Reissnerova–Nordströмова prostoročasu fungovat, protože zde si nemůžeme explicitně vyjádřit radiální souřadnici. To samozřejmě lze řešit užíváním implicitních vztahů. Můžeme tedy zapsat náš výpočet obecně

$$\lim_{U \rightarrow \pi/2} \Omega r \stackrel{I'H.}{=} \lim_{U \rightarrow \pi/2} -\frac{\Omega^2}{\partial_U \Omega} \partial_U r = \lim_{U \rightarrow \pi/2} -\frac{\Omega^2}{\partial_U \Omega} \frac{\partial_U g(U)}{f'(r)}, \quad (B.7)$$

kde $g(U)$ je obecná transformační funkce, $f(r)$ značí želví souřadnici pro daný prostoročas a čárka derivaci vzhledem k proměnné r .

Pokud nyní budeme řešit rovnici (B.7) pro naši kompaktifikaci Reissnerova–Nordströмова prostoročasu, tak po dosazení obdržíme

$$\begin{aligned} \lim_{U \rightarrow \pi/2} \frac{\cos^2(U) \cos(V)}{4M^2 \sin(U)} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) \left(\frac{M \sin(U)}{\cos^2(U)} + \kappa^+ \frac{1 + \cos(U) - \cos^2(U)}{\cos(U) \sin(U)} - \kappa^- \frac{\sin(U)}{\cos(U)} \right) = \\ = \frac{\cos(V)}{4M}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Vidíme tedy stejný výsledek jako v případě Schwarzschildova a Minkowskiho (až na škálu) prostoročasu.

B.4 Diferenciální rovnice pro ověření analytičnosti výrazu Ωr

Pro ověření analytického přechodu přes \mathcal{S}^\pm jsme zvolili sestavení diferenciální rovnice, kterou lze řešit na \mathcal{S}^\pm ve tvaru řady. Ověření analytičnosti funkce reálné proměnné spočívá v tom, aby se všechny derivace v určitém bodě shodovaly se svým Taylorovým rozvojem. Proto jsme se rozhodli sestavit diferenciální rovnici, která pokud bude mít řešení ve tvaru řady, nám zaručí (z věty o derivaci člen po členu) existenci všech derivací.

Jednalo se nám o zkoumání analytičnosti výrazu $\Omega(U, V)r(U, V)$. Označme tento součin jako

$$\Theta(U, V) = \Omega(U, V)r(U, V). \quad (\text{B.9})$$

Spočtením derivace této funkce obdržíme

$$\frac{d\Theta(U, V)}{dU} = \frac{d\Omega(U, V)}{dU} r(U, V) + \Omega(U, V) \frac{dr(U, V)}{dU}, \quad (\text{B.10})$$

kde souřadnici V uvažujeme jako pevně fixovanou, proto užíváme obyčejných derivací namísto parciálních.

Nyní si můžeme vyjádřit derivaci radiální souřadnice podle U z implicitního vztahu $f(r) = g(U) + g(V)$ jako

$$\frac{dr(U, V)}{dU} = \frac{\frac{dg(U)}{dU}}{\frac{df(r(U, V))}{dr(U, V)}} \quad (\text{B.11})$$

kde jsme zatím ponechali obecný zápis $df(r)/dr$, později si ukážeme konkrétní tvar diferenciální rovnice pro Schwarzschildův a Reissnerův–Nordströmův prostoročas.

Nyní můžeme dosadit (B.11) do vztahu (B.10), a dostaneme obecné vyjádření

$$\frac{d\Theta(U, V)}{dU} = \frac{d\Omega(U, V)}{dU} r(U, V) + \Omega(U, V) \frac{dg(U)}{dU} \left(\frac{df(r(U, V))}{dr(U, V)} \right)^{-1}, \quad (\text{B.12})$$

Nyní si můžeme ještě vyjádřit ze vztahu (B.9) proměnnou $r(U, V)$ a dosadit do předchozího výrazu, poté obdržíme vztah

$$\frac{d\Theta(U, V)}{dU} = \frac{d\Omega(U, V)}{dU} \frac{\Theta(U, V)}{\Omega(U, V)} + \Omega(U, V) \frac{dg(U)}{dU} F \left(\frac{\Theta(U, V)}{\Omega(U, V)} \right), \quad (\text{B.13})$$

Vidíme tedy, že diferenciální rovnice (B.13) již neobsahuje žádné proměnné závislé na radiální souřadnici. Pro Schwarzschildův prostoročas si můžeme dosadit do vztahu (B.13) konkrétní tvar funkce $f(r)$ a následně provést derivaci, tím obdržíme obecně

$$\frac{d\Theta(U, V)}{dU} = \frac{d\Omega(U, V)}{dU} \frac{\Theta(U, V)}{\Omega(U, V)} + \Omega(U, V) \frac{dg(U)}{dU} \left(1 - \frac{2M\Omega(U, V)}{\Theta(U, V)} \right). \quad (\text{B.14})$$

Tuto rovnici již lze řešit ve formě řady na \mathcal{S}^+ , ale při praktickém výpočtu se nám osvědčilo vyjádřit z implicitního vztahu $f(r) = g(U) + g(V)$ člen obsahující $1/\cos(U) - r(U, V) = f(g(V), r(U, V), U, V)$, kde¹ $r(U, V) \equiv \Theta(U, V)/\Omega(U, V)$, a celý tento výraz substituovat do (B.13), takto obdržíme konkrétní tvar diferenciální rovnice pro (4.35) a $\Omega = \frac{\cos(U)\cos(V)}{4M^2}$ ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta(U, V)}{dU} &= \frac{\cos(V) \sin(U)}{2M} \ln \left(\frac{\sin(U) \sin(V) (2M\Theta(U, V) - \cos(U) \cos(V))}{(1 - \cos(U))(1 - \cos(V))} \right) \\ &- \frac{\cos(V)^2 ((1 + \cos(U))^2 - 2 \cos(U)^3) - 4M\Theta(U, V) \cos(V) (\sin(U)^2 + \cos(U))}{8M^2 \sin(U) \Theta(U, V)} \\ &+ \frac{\sin(U)}{4M}, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

kde pravá strana je analytická na \mathcal{S}^+ , s počáteční podmínkou $\Theta(\pi/2, V) = \cos(V)/4M$

Výsledné řešení ve tvaru řady jsme obdrželi pomocí algebraického systému Maple, konkrétní řešení je (4.38), resp. pro transformační funkci (4.24) máme první členy výsledné řady dány vztahem (4.30).

Pro ověření analytčnosti metrického koeficient na \mathcal{S}^\pm pro Reissnerův–Nordströmův prostoročas můžeme sestavit stejným postupem diferenciální rovnici, jenž má obecně tvar²

$$\frac{d\Theta(U, V)}{dU} = \frac{d\Omega(U, V)}{dU} \frac{\Theta(U, V)}{\Omega(U, V)} + \Omega(U, V) \frac{dg(U)}{dU} \left(1 - \frac{2M\Omega(U, V)}{\Theta(U, V)} + \frac{Q^2\Omega(U, V)^2}{\Theta(U, V)^2} \right). \quad (\text{B.16})$$

¹Vidíme na levé straně rozdíl dvou singulárních výrazů, ale na pravé straně obdržíme výraz regulární na \mathcal{S}^\pm .

²Konkrétní tvar pro transformační funkci (5.4) zde z důvodů rozsáhlosti výrazu neuvádíme.

Řešení ve tvaru řady se nám opět podařilo nalézt (společně s vazbou $f(r) = g(U) + g(V)$) a její tvar pro \mathcal{S}^+ je (5.15).

Celkově si můžeme předchozí úvahy shrnout do jediné hypotézy.

Hypotéza 1 *Nechť máme sféricky symetrický stacionární prostoročas, zadán ve sférických souřadnicích pomocí blokového dráhového elementu*

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + F^{-1}(r)dr^2 + r^2d\omega^2,$$

kde $F(r \rightarrow \infty) \simeq O(1)$. Pak lze tento prostoročas kompaktifikovat pomocí implicitně zadané transformace souřadnic

$$\begin{aligned} \int \frac{dr}{F(r)} = f(r) &= g(U) + g(V) \\ t &= g(U) - g(V) \end{aligned}$$

tak, že výsledné metrické koeficienty konformní kompaktifikované metriky jsou analytickými funkcemi na \mathcal{S}^\pm a výraz $\Omega r = \sqrt{g_{\theta\theta}} \equiv k(U, V)$ splňuje diferenciální rovnici

$$\frac{d\Theta(U, V)}{dU} = \frac{d\Omega(U, V)}{dU} \frac{\Theta(U, V)}{\Omega(U, V)} + \Omega(U, V) \frac{dg(U)}{dU} F \left(\frac{\Theta(U, V)}{\Omega(U, V)} \right), \quad (\text{B.17})$$

kde $\Omega(U, V)$ je konformní faktor splňující podmínky (2.9)-(2.13), pokud funkce F a g vedou k analytické pravé straně diferenciální rovnice (B.17).

Literatura

- [1] MISNER, Ch. W., THORNE, K., WHEELER, J. A. *Gravitation*. 3rd ed. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973.
- [2] HAWKING, S. W., ELLIS, G. F. R. *The large scale structure of space-time*. 14th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [3] WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago: The University of Chicago Press, 1984.
- [4] CHANDRASEKHAR, S. *The Mathematical Theory of Black Holes*. 2nd ed. Oxford: Oxford University Press, 2009.
- [5] FRAUENDIENER, J., FRIEDRICH, H. (ed.) *The Conformal Structure of Space-Times: Geometry, Analysis, Numerics*. Berlin: Springer, 2002.
- [6] ZENGINOĞLU, A. C. A conformal approach to numerical calculations of asymptotically flat spacetimes [online]. *arXiv*: 0711.0873v1.
- [7] NOVIKOV, I.D., FROLOV, V.P. *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1998.
- [8] PENROSE, R. Conformal Treatment of Infinity. In DEWITT, C., DEWITT, B. (ed.). *Relativity, Groups and Topology*. London: Gordon and Breach Science Publishers Ltd., 1964, p. 563–584.
- [9] ASTHEKAR, A. Asymptotic Structure of the Gravitational Field at Spatial Infinity. In HELD, A. (ed.). *General Relativity: One Hundred Years After the Birth of Albert Einstein*. New York: Plenum Press, 1980, vol. 2, p. 37–69.
- [10] WEINSSTEIN, E. W. *Lambert W-Function, 2011* [online]. Wolfram MathWorld. <http://mathworld.wolfram.com/LambertW-Function.html> (accessed Nov 30, 2010).
- [11] WEINSSTEIN, E. W. *Real Analytic Function, 2011* [online]. Wolfram MathWorld. <http://mathworld.wolfram.com/LambertW-Function.html> (accessed April 08, 2011).

- [12] HERVIK, S., GRØN, Ø. *Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology*. Berlin: Springer, 2007.
- [13] LYNDEN-BELL, D., KATZ, J. Geometric extension through Schwarzschild $R = 0$. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 1990, vol. 247, p. 651–661.
- [14] SCHMIDT, B., WALKER, M. Analytic conformal extensions of asymptotically flat space-times. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 1983, vol. 16, no. 10, p. 2187–2190.
- [15] HERBERTSON, M. On the differentiability conditions at spacelike infinity. *Classical Quantum Gravity*, 1998, vol. 15, no. 12, p. 3873–3889.
- [16] ASHTEKAR, A., HANSEN, R. O. A unified treatment of null and spatial infinity in general relativity. I. Universal structure, asymptotic symmetries, and conserved quantities at spatial infinity. *J. Math. Phys. (N.Y.)*, 1978, vol. 19, no. 7, p. 1542–1566.
- [17] CHRUSCIEL, P. T. On the structure of spatial infinity. I. The Geroch structure. *J. Math. Phys. (N.Y.)*, 1989, vol. 30, no. 9, p. 2090–2093.
- [18] CHRUSCIEL, P. T. On the structure of spatial infinity. II. Geodesically regular Ashtekar–Hansen structures. *J. Math. Phys. (N.Y.)*, 1989, vol. 30, no. 9, p. 2094–2100.
- [19] WALKER, M. Block Diagrams and the Extension of Timelike Two-Surfaces. *J. Math. Phys. (N.Y.)*, 1970, vol. 11, no. 8, p. 2280–2286.
- [20] CHRUSCIEL, P. T. *Lectures on Mathematical Relativity* [online]; 2008. <http://homepage.univie.ac.at/piotr.chrusciel//papers/BeijingAll.pdf> (accessed Feb 07, 2011).
- [21] BREWIN, L. A simple expression for the ADM mass [online]. *arXiv: 0609079v1*
- [22] BARNICH, G., TROESSAERT, C. Symmetries of Asymptotically Flat Four-Dimensional Spacetimes at Null Infinity Revisited. *Phys. Rev. Lett.*, 2010, vol. 105, no. 11, DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.111103.
- [23] ZHANG, X. On the relation between ADM and Bondi energy–momenta [online]. *arXiv: 051136v4*.
- [24] FRAUENDIENER, J. Conformal Infinity. *Living Reviews in Relativity* [online]. 2004, vol. 7 [cited 2009-11-13]. Available from <http://www.livingreviews.org/lrr-2004-1> .

- [25] TOWNSEND, P.K. Black Holes [online]. *arXiv*: 9707012v1
- [26] MARTEL, K., POISSON, E. Regular coordinate systems for Schwarzschild and other spherical spacetimes. *Am. J. Phys.*, 2001, vol. 69, no. 4, p. 476–480.
- [27] DEADMAN, E., STEWART, J.M. Numerical Relativity and Asymptotic Flatness [online], *arXiv*: 0902.0481v1
- [28] ASTHEKAR, A. Logarithmic ambiguities in the description of spatial infinity. *Foundations of Physics*, 1985, vol. 15, no. 4, p. 419–431.
- [29] SCHMIDT, B.G., STEWART, J.M. The Scalar Wave Equation in a Schwarzschild Space-Time, *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 1979, vol. 367, p. 503-525
- [30] KRUSKAL, M. D. Maximal Extension of Schwarzschild Metric. *Phys. Rev. Lett.*, 1960, vol. 119, p. 1743–1745.
- [31] SZEKERES, G. On the singularities of a Riemannian manifold. *Publ. Math. Debrecen*, 1960, vol. 7, p. 285–301.
- [32] EDDINGTON, A. S. A Comparison of Whitehead’s and Einstein’s Formulae. *Nature*, 1924, vol. 113, p. 192.
- [33] FINKELSTEIN, D. Past-Future Asymmetry of the Gravitational Field of a Point Particle. *Phys. Rev. Lett.*, 1958, vol. 110, p. 965–967.
- [34] HALÁČEK, J. *Řezy Schwarzschildovým prostorem: Bakalářská práce*. Praha: Univerzita Karlova, MFF, 2008.
- [35] HERVIK, S. *Coordinate transformation - Schwarzschild spacetime* [online]. 5. února 2011; Osobní komunikace
- [36] JARNÍK, V. *Diferenciální počet (I)*. 7th ed. Praha: Academia, 1984.
- [37] JARNÍK, V. *Diferenciální počet (II)*. 4th ed. Praha: Academia, 1984.
- [38] JARNÍK, V. *Diferenciální rovnice v komplexním oboru*. Praha: Academia, 1975.
- [39] ISHAM, Ch. J. *Modern Differential Geometry for Physicists*. 2nd ed. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001.
- [40] REKTORYS, K., et al. *Přehled užití matematiky I*. 7th ed. Praha: Prometheus, 2003.

- [41] REKTORYS, K., et al. *Přehled užité matematiky II*. 7th ed. Praha: Prometheus, 2003.
- [42] PRETORIUS, F. Evolution of Binary Black-Hole Spacetimes. *Phys. Rev. Lett.*, 2005, vol. 95, no. 12, p. 121101.
- [43] GRIFFITHS, J.B., PODOLSKÝ, J. *Exact Space-Times in Einstein's General Relativity*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009
- [44] GRØN, Ø., JOHANNSEN, S. FRW Universe Models in Conformally Flat Spacetime Coordinates. I: General Formalism [online]. *arXiv*: 1103.4743
- [45] GRØN, Ø., JOHANNSEN, S. FRW Universe Models in Conformally Flat Spacetime Coordinates. II: Universe models with negative and vanishing spatial curvature [online]. *arXiv*: 1103.4743
- [46] GRØN, Ø., JOHANNSEN, S. FRW Universe Models in Conformally Flat Spacetime Coordinates. III: Universe models with positive spatial curvature [online]. *arXiv*: 1103.4743