

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCE



Bc. Václav Kozmík

### **Eficiencie portfolií při spojitém rozdělení výnosů**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.

Studijní program: Matematika, Pravděpodobnost, matematická  
statistika a ekonometrie

2010

Děkuji všem, kteří mě podporovali při psaní diplomové práce. Hlavní poděkování patří mému vedoucímu panu RNDr. Ing. Miloši Kopovi, Ph.D., který se mi celou dobu věnoval a velmi mi pomohl s pochopením příslušné problematiky. Svému vedoucímu také děkuji za to, že mi umožnil realizovat všechny praktické výpočty na vlastním počítači s plnou verzí programu GAMS.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 15. 4. 2010

Václav Kozmík

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Mean-risk modely</b>	<b>9</b>
2.1	Klasický model . . . . .	9
2.2	Rozdělení výnosů a finální hodnoty . . . . .	10
2.3	Míry rizika . . . . .	10
2.4	Eliptická rozdělení . . . . .	11
2.5	Normální rozdělení . . . . .	13
2.5.1	Rozptyl . . . . .	13
2.5.2	VaR . . . . .	14
2.5.3	cVaR . . . . .	16
2.5.4	Absolutní odchylka . . . . .	16
2.5.5	Semivariance . . . . .	17
2.6	Studentovo t-rozdělení . . . . .	17
2.6.1	Rozptyl . . . . .	18
2.6.2	VaR . . . . .	18
2.6.3	cVaR . . . . .	18
2.6.4	Absolutní odchylka . . . . .	19
2.6.5	Semivariance . . . . .	19
2.7	Logistické eliptické rozdělení . . . . .	19
2.8	Logaritmicko-normální rozdělení . . . . .	20
2.8.1	Rozptyl . . . . .	22
2.8.2	VaR . . . . .	23
2.8.3	cVaR . . . . .	24
2.8.4	Absolutní odchylka . . . . .	25
2.8.5	Semivariance . . . . .	25
2.9	Diskrétní scénáře . . . . .	26
2.9.1	Rozptyl . . . . .	27
2.9.2	VaR . . . . .	27
2.9.3	cVaR . . . . .	28
2.9.4	Absolutní odchylka . . . . .	28
2.9.5	Semivariance . . . . .	29

<b>3</b>	<b>Odhady parametrů</b>	<b>30</b>
3.1	Eliptická rozdělení . . . . .	30
3.2	Logaritmicko-normální rozdělení . . . . .	31
3.3	Generování scénářů . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Praktické řešení</b>	<b>33</b>
4.1	Optimalizační úlohy . . . . .	33
4.2	Logaritmicko-normální rozdělení . . . . .	33
4.3	Shlukování výsledků . . . . .	35
4.4	Rychlost výpočtu . . . . .	37
4.5	Realizace výpočtu . . . . .	38
4.6	Výsledky podle rozdělení . . . . .	39
4.7	Výsledky podle míry rizika . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>46</b>
	<b>Seznam literatury</b>	<b>48</b>
<b>A</b>	<b>Obsah přiloženého DVD</b>	<b>50</b>

Název práce: Eficiency portfolií při spojitém rozdělení výnosů  
Autor: Bc. Václav Kozmík  
Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky  
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.  
e-mail vedoucího: kopa@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Předložená práce se zabývá výběrem optimálního portfolia pomocí „mean-risk“ modelů. Hlavním cílem práce je zkoumat konvergenci aproximativních řešení pomocí generovaných scénářů k analytickému řešení a její citlivost na zvolené míře rizika a předpokladu spojitého rozdělení. Zkoumané míry rizika zahrnují rozptyl, VaR, cVaR, absolutní odchylku a semivarianci. Pro normální a Studentovo rozdělení prezentujeme analytická řešení pro všechny míry rizika, pro logaritmicko-normální rozdělení použijeme aproximativní předpoklad, že součet logaritmicko-normálních náhodných veličin má přibližně logaritmicko-normální rozdělení. Pro všechny míry rizika také odvodíme optimalizační úlohu pro případ diskretních scénářů a získaná řešení porovnáme s analytickým řešením. V rámci generování scénářů je výpočet několikrát opakován a prezentujeme vlastní metodu, která umožňuje pomocí shlukové analýzy najít optimální řešení. Všechny optimalizační úlohy jsou přepsány do jazyka GAMS a samotné testování a odhady jsou realizovány vlastním programem v jazyce C++.

Klíčová slova: mean-risk modely, míry rizika, akcie

Title: Portfolio efficiency with continuous probability distribution of returns  
Author: Bc. Václav Kozmík  
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics  
Supervisor: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.  
Supervisor's e-mail address: kopa@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: Present work deals with the portfolio selection problem using mean-risk models. The main goal of this work is to investigate the convergence of approximate solutions using generated scenarios to the analytic solution and its sensitivity to chosen risk measure and probability distribution. The considered risk measures are: variance, VaR, cVaR, absolute deviation and semivariance. We present analytical solutions for all risk measures under the assumption of normal or Student distribution. For log-normal distribution, we use the approximate assumption that the sum of log-normal random variables has log-normal distribution. Optimization models for discrete scenarios are derived for all risk measures and compared with analytical solution. In case of approximate solution with scenarios, we repeat the procedure multiple times and present our own approach to finding the optimal solution using the cluster analysis. All optimization models are written in GAMS language. Testing and estimating are realized using an application developed in C++ language.

Keywords: mean-risk models, risk measures, assets

# Symbols a značení

$R$	náhodná veličina výnosu z portfolia akcií
$L$	náhodná veličina ztráty z portfolia akcií
$N$	počet akcií, které můžeme zařadit do portfolia
$M$	počet scénářů, které máme k dispozici
$\mu$	parametr střední hodnoty mnohorozměrného rozdělení
$\Sigma$	parametr ovlivňující varianční matici mnohorozměrného rozdělení
$\nu$	počet stupňů volnosti
$V$	varianční matice mnohorozměrného rozdělení
$w$	váhy jednotlivých akcií v portfoliu
$u_e$	minimální požadovaný očekávaný výnos
$\alpha$	hladina spolehlivosti
$i$	imaginární jednotka
$A^T$	transpozice matice $A$
$\mathbf{1}$	jednotkový vektor
$I$	jednotková matice
$\Phi(x)$	distribuční funkce normovaného normálního rozdělení
$ A $	determinant matice $A$

# Kapitola 1

## Úvod

Při obchodování na akciovém trhu se často setkáváme s požadavkem na diverzifikaci portfolia, která nám umožňuje snížení rizika plynoucího z náhodného vývoje ceny jednotlivých akcií. K řešení tohoto problému můžeme použít „mean-risk“ modely, které zajišťují v určitém smyslu optimální volbu portfolií z hlediska zisku a rizika.

Základy teorie volby portfolia a „mean-risk“ modelů položil Harry Markowitz již v roce 1952 v práci [19]. Ve své práci uvažoval jako míru rizika rozptyl a předpokládal normální rozdělení. Základní nevýhodou rozptylu je fakt, že nezohledňuje jen distribuci možných ztrát, ale i distribuci zisků, přičemž investora v případě rizika zajímá spíše rozdělení ztrát. Tohoto faktu si byl vědom i Markowitz a uváděl, že lepší mírou rizika by byla semivariance, ale rozptyl zvolil kvůli výpočetní jednoduchosti. Od doby zavedení tohoto prvního základního modelu bylo navrženo a implementováno mnoho vylepšení. Byly navrženy nové míry rizika jako je VaR [14] a cVaR [24], které lépe zohledňují případnou ztrátu. Často se předpokládá i jiné spojitě rozdělení, protože se ukazuje, že finanční data mohou mít těžší chvosty než má normální rozdělení. Další oblíbenou a rozvíjenou technikou je práce se scénáři, kterým přiřazujeme pravděpodobnost realizace. Se scénáři poté pracujeme jako s diskrétním rozdělením a můžeme vypočítat všechny zmíněné míry rizika a také řešit některé složitější modely a úlohy.

V naší práci budeme zacházet s pojmem výnosů, čímž rozumíme zisk z držení dané akcie nebo portfolia, a s pojmem finální hodnoty, která znamená cenu akcie nebo portfolia k danému datu. V případě výnosů většinou předpokládáme normální rozdělení nebo Studentovo rozdělení, které má těžší chvosty. V dalším textu budeme zkoumat analytická optimální řešení a porovnávat je s řešeními při použití diskrétních scénářů jako aproximací spojitěho rozdělení. Hlavní otázkou je, zda a do jaké míry ovlivňuje konvergenci aproximativních řešení k analytickému řešení volba předpokládaného spojitěho rozdělení a míry rizika. V případě scénářů budeme také zkoumat, jak důležité je pro jejich generování předem zvolit spojitě rozdělení a zda nelze předpoklad o rozdělení vypustit a scénáře generovat pouze na základě momentů odhadnutých z dat.

Pro finální cenu akcií se většinou předpokládá logaritmicko-normální rozdělení. Abychom byli schopni vyřešit úlohu pro všechny zvolené míry rizika, budeme aproximovat součet logaritmicko-normálních rozdělení logaritmicko-normálním rozdělením součtu celkové hodnoty portfolia. I za těchto předpokladů budeme porovnávat přibližné analytické řešení s diskrétními scénáři a zkoumat kvalitu navržené aproximace.

V rámci generování scénářů je většinou nutné úlohu několikrát opakovat, abychom zmenšili vliv náhodnosti generátoru. Nalezená řešení nemusí být obecně všechna v okolí požadovaného analytického řešení, a tak prezentujeme vlastní metodu, ve které hledáme optimální řešení pomocí shlukové analýzy. Pro určení optimálního počtu shluků používáme Bayesovo informační kritérium [7], které jsme přizpůsobili pro potřeby našeho mnohorozměrného modelu.

Následující kapitola 2 zavádí mean-risk modely s různými mírami rizika. Obsahuje formulace optimalizačních úloh pro všechna uvažovaná rozdělení včetně diskrétních scénářů a odvození zmíněné aproximace logaritmicko-normálního rozdělení. V kapitole 3 uvádíme postupy odhadování parametrů a generování scénářů, které jsou nutné pro realizaci výpočtů, a v kapitole 4 již prezentujeme výsledky, které jsme uvedenými postupy získali. Práce je shrnuta v kapitole 5.



# Kapitola 2

## Mean-risk modely

V naší práci se budeme zabývat modely a veličinami, které závisí na zisku či ztrátě z držení určitého portfolia akcií. U některých modelů a veličin se běžně v definicích používá náhodná veličina ve smyslu zisku z držení akcie, u jiných se počítá se ztrátou. V naší práci budeme pracovat ve většině případů se ziskem zvoleného portfolia, pouze míry rizika budeme definovat pro ztrátu.

Nechť  $R$  je náhodná veličina, která reprezentuje náš zisk (v případě záporných hodnot ztrátu), například z portfolia akcií. „Mean-risk“ model se skládá ze dvou funkcionalů závisících na této náhodné veličině,  $u(R)$  a  $r(R)$ , kde první reprezentuje střední zisk a druhý riziko. V naší práci budeme vždy volit za první funkcional střední hodnotu, tj.  $u(R) = \mathbb{E}R$ , různé volby  $r(R)$ , kterým může být rozptyl, VaR nebo další, probereme později.

### 2.1 Klasický model

Klasický Markowitzův model je formulován následovně: mějme portfolio  $N$  akcií, jehož složení je charakterizováno vahami  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_N)$ , kde  $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ . Nechť je dána pro každou akcii náhodná veličina udávající její zisk, tedy  $R_1, \dots, R_N$ . Zisk celého portfolia pak spočteme jednoduše jako:

$$R(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^N w_i R_i.$$

K takovému portfoliu máme příslušné funkcionaly, které pro jednoduchost přeznačíme jako  $u_{\mathbf{w}} \equiv u(R(\mathbf{w}))$  a  $r_{\mathbf{w}} \equiv r(R(\mathbf{w}))$ . Potom můžeme v souladu s [8] vyslovit následující definici.

**Definice 1** *Portfolio daných  $N$  akcií s vahami  $\mathbf{w}$  je („mean-risk“) eficientní, pokud neexistují jiné váhy  $w_1^*, \dots, w_N^*$ , tak, že  $\sum_{i=1}^N w_i^* = 1$  a současně platí, že  $u_{\mathbf{w}^*} \geq u_{\mathbf{w}}$  a  $r_{\mathbf{w}^*} \leq r_{\mathbf{w}}$ , kde alespoň jedna z nerovností je ostrá.*

Efficientní portfolia lze získat například řešením následující optimalizační úlohy:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{w}} r_{\mathbf{w}} \\ & \text{za podmíněk } u_{\mathbf{w}} \geq u_e \\ & \sum_{i=1}^N w_i = 1 \\ & w_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

kde  $u_e$  představuje nějaký předem zvolený minimální očekávaný zisk stanovený investorem. Do optimalizačních úloh se většinou přidává podmínka

$$w_1, \dots, w_N \geq 0.$$

Tuto podmínku budeme nazývat podmínkou nezápornosti. Přidáním této podmínky můžeme optimalizovat pro prostředí, kde nejsou povolené tzv. prodeje na krátko, což je prodej akcií, které nevladíme. Výsledné modely a aplikace budou vždy umožňovat výpočet obou možných případů, tedy s podmínkou nezápornosti i bez ní.

**Poznámka 2** *V praxi se v případě, kdy chceme uvažovat i záporné váhy, většinou omezuje množina přípustných řešení. V případě bez podmínky nezápornosti tedy nebudeme uvažovat všechny reálné váhy, ale použijeme následující omezení:*

$$w_1, \dots, w_N \geq -1.$$

## 2.2 Rozdělení výnosů a finální hodnoty

Abychom byli schopni posoudit kvalitu aproximace spojitého rozdělení diskrétním, musíme být schopni analyticky vyřešit optimalizační úlohy pro zvolené spojitě rozdělení výnosů nebo finální hodnoty. Základní spojitě rozdělení, které budeme zkoumat, je normální rozdělení. Další zkoumaná rozdělení, která se mohou často vyskytovat u finančních dat, jsou Studentovo a logaritnicko-normální.

## 2.3 Míry rizika

V této části postupně popíšeme zvolené míry rizika, definice uvedené v této kapitole přebíráme z knihy [23] a tam uvedených referencí. Nechť  $R$  je náhodná veličina vyjadřující zisk z držení portfolia, ztrátu z držení portfolia zavedeme jako  $L = -R$ . Základní mírou rizika, kterou budeme používat, je rozptyl. Další běžně používanou mírou rizika je Value at Risk (VaR).

**Definice 3** *Nechť je dána míra spolehlivosti  $\alpha \in (0, 1)$  a náhodná veličina  $L$ , která vyjadřuje ztrátu portfolia. Potom definujeme hodnotu  $VaR_\alpha$  jako:*

$$VaR_\alpha(L) = \inf \{l \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(L > l) \leq 1 - \alpha\}$$

Míru spolehlivosti  $\alpha$  budeme volit typicky 95 %. Conditional Value at Risk (cVaR) je modernější mírou rizika, protože na rozdíl od VaR zohledňuje i výši ztrát, které mohou nastat po překročení  $VaR_\alpha(L)$ . Dále budeme uvažovat i absolutní odchylku a semivarianci jako další možné míry rizika.

**Definice 4** *Nechť je dána míra spolehlivosti  $\alpha \in (0, 1)$  a náhodná veličina  $L$ , která vyjadřuje ztrátu portfolia. Potom definujeme hodnotu  $cVaR_\alpha$  jako:*

$$cVaR_\alpha(L) = \inf \left\{ a \in \mathbb{R}, a + \frac{1}{1 - \alpha} \mathbb{E}[\max(0, L - a)] \right\}.$$

*V práci [24] bylo ukázáno, že hodnotu cVaR lze ekvivalentně definovat následovně:*

$$cVaR_\alpha(L) = \mathbb{E}[L | L > VaR_\alpha(L)].$$

**Definice 5** *Nechť je dána náhodná veličina  $L$ , která vyjadřuje ztrátu portfolia. Potom definujeme hodnotu absolutní odchylky jako:*

$$r_a(L) = \mathbb{E}|L - \mathbb{E}L|.$$

**Definice 6** *Nechť je dána náhodná veličina  $L$ , která vyjadřuje ztrátu portfolia. Potom definujeme hodnotu semivariance jako:*

$$r_s(L) = \mathbb{E}[\max(0, L - \mathbb{E}L)^2].$$

## 2.4 Eliptická rozdělení

Eliptická rozdělení představují zobecnění normálního rozdělení a řadí se mezi ně další známá rozdělení, jako je t-rozdělení, logistické rozdělení nebo Cauchyho rozdělení. Následující definici a uvedené věty o vlastnostech eliptických rozdělení lze nalézt v textu [18].

**Definice 7** *Řekneme, že vektor  $\mathbf{X}$  má mnohorozměrné eliptické rozdělení,  $\mathbf{X} \sim \mathbf{E}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \psi)$ , pokud lze jeho charakteristickou funkci vyjádřit jako:*

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp\{i\mathbf{t}^T \boldsymbol{\mu}\} \psi\left(\frac{1}{2}\mathbf{t}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{t}\right)$$

*pro nějaký vektor  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ , pozitivně definitní matici  $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a funkci  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Funkce  $\psi$  musí být volena tak, aby funkce  $\varphi_{\mathbf{X}}$  splňovala požadavky kladené na charakteristickou funkci.*

Pro eliptická rozdělení platí následující věta, stejně jako v případě normality.

**Věta 8** *Nechť  $\mathbf{X} \sim \mathbf{E}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \psi)$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Pak platí:*

$$\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b} \sim \mathbf{E}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T, \psi).$$

Předchozí věta nám umožňuje jednoduše analyzovat výnosy celého portfolia s vahami  $\mathbf{w}$ , výnosy mají jednorozměrné eliptické rozdělení  $\mathbf{E}(\mathbf{w}^T\boldsymbol{\mu}, \mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}, \psi)$ .

**Věta 9** *Nechť  $\mathbf{X} \sim \mathbf{E}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \psi)$ . Nechť existuje střední hodnota  $\mathbf{X}$  a  $|\frac{\partial\psi(0)}{\partial t}| \leq \infty$ . Pak platí:*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\mathbf{X} &= \boldsymbol{\mu}, \\ \mathbf{V} = \text{var}\mathbf{X} &= -\frac{\partial\psi(0)}{\partial t}\boldsymbol{\Sigma}. \end{aligned}$$

Generátor charakteristické funkce  $\psi'$  může být navíc zvolen tak, aby platilo:

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\Sigma},$$

stačí zvolit

$$\psi' = \frac{\psi}{-\frac{\partial\psi(0)}{\partial t}}.$$

**Věta 10** *Nechť  $\mathbf{X} \sim \mathbf{E}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \psi)$ . Nechť existuje hustota  $f(\mathbf{x})$  náhodného vektoru  $\mathbf{X}$ ,  $N$  označuje dimenzi náhodného vektoru  $\mathbf{X}$ . Pak pro nějakou funkci  $g_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , kterou nazveme generátor hustoty, platí:*

$$f(\mathbf{x}) = \frac{c_N}{\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}|}} g_N \left( \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right).$$

Podmínka

$$\int_0^\infty x^{N/2-1} g_N(x) dx \leq \infty$$

je postačující podmínkou pro to, aby byla funkce  $g_N$  generátorem hustoty. Konstantu  $c_N$  lze navíc explicitně spočítat:

$$c_N = \frac{\Gamma(N/2)}{(2\pi)^{N/2}} \left( \int_0^\infty x^{N/2-1} g_N(x) dx \right)^{-1}.$$

**Poznámka 11** *V tabulce 2.1 uvádíme přehled základních eliptických rozdělení a jejich generátorů hustoty.*

**Poznámka 12** *Pro normální rozdělení platí  $\psi(t) = \exp\{-t\}$ .*

V následujících kapitolách se budeme zabývat řešením pro konkrétně zvolená eliptická rozdělení.

rozdělení	$g_N(t)$
normální	$\exp\{-t\}$
Studentovo	$(1 + \frac{t}{k})^{-p}, k > 0, p > N/2$
logistické eliptické	$\frac{\exp\{-t\}}{(1+\exp\{-t\})^2}$
Cauchyho	$(1+t)^{-(N+1)/2}$
exponenciální	$\exp\{-rt^s\}, r, s > 0$
Laplaceovo	$\exp\{- t \}$

Tabulka 2.1: Generátory hustot vybraných eliptických rozdělání

## 2.5 Normální rozdělání

V případě normality je situace jednoduchá: pokud je sdružené rozdělání výnosů jednotlivých akcií v portfoliu mnohorozměrné normální  $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , platí dříve uvedené věty a rozdělání výnosů celého portfolia s vahami  $\boldsymbol{w}$  je jednorozměrné normální  $\mathcal{N}(\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w})$ . Navíc pro varianční matici platí:  $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\Sigma}$ , proto budeme nadále v případě normálního rozdělání používat označení s varianční maticí, které je obvyklejší.

### 2.5.1 Rozptyl

U této klasické míry rizika získáváme úlohu, která není omezena jen na normální rozdělání, ale lze ji použít obecně pro všechna eliptická rozdělání.

$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{V} \boldsymbol{w} \\ & \text{za podmíněk } \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\mu} \geq u_e \\ & \sum_{i=1}^N w_i = 1 \\ & w_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

Nechť je  $\boldsymbol{V}$  regulární a vektory  $\mathbf{1}$  a  $\boldsymbol{\mu}$  jsou lineárně nezávislé. Označme  $\boldsymbol{w}_{min}$  váhy portfolia, které minimalizují rozptyl bez omezující podmínky na výnosy. Toto portfolio má výnos, který označíme  $u_{min}$ :

$$u_{min} = \boldsymbol{w}_{min}^T \boldsymbol{\mu}.$$

Pro  $\boldsymbol{w}_{min}$  lze odvodit použitím Lagrangeových multiplikátorů jednoduchý vzorec:

$$\boldsymbol{w}_{min} = \frac{\boldsymbol{V}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{V}^{-1} \mathbf{1}}.$$

Dále se omezíme na případy, kdy je požadovaný výnos větší než výnos získaný při minimálním rozptylu, tedy:

$$u_e \geq u_{min}.$$

Přidání technického předpokladu  $\mathbf{1}^T \mathbf{V} \boldsymbol{\mu} \neq 0$  vede podle teorie optimalizace k tomu, že řešení úlohy existuje a minima se nabývá na hranici. Lagrangeova funkce je ve tvaru:

$$L(\mathbf{w}, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} + \lambda_1 (1 - \mathbf{1}^T \mathbf{w}) + \lambda_2 (u_e - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}).$$

A derivace:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{V} \mathbf{w} - \lambda_1 \mathbf{1} - \lambda_2 \boldsymbol{\mu}.$$

Z čehož dostáváme:

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} + \lambda_2 \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}.$$

A po několika technických úpravách:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} (\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} - u_e \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu})}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} - (\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2}, \\ c_2 &= \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} (u_e \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} - \mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu})}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} - (\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu})^2}, \\ \mathbf{w} &= c_1 \frac{\mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1}} + c_2 \frac{\mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{1}^T \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}}. \end{aligned}$$

Optimální řešení je kombinací dvou eficientních portfolií s koeficienty  $c_1$  a  $c_2$ . V případě zahrnutí podmínky nezápornosti je postup obdobný, ale nemůžeme nalézt jednoduchý explicitní vzorec pro řešení úlohy.

## 2.5.2 VaR

Za předpokladu normality rozdělení náhodné veličiny  $R \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$  platí pro ztrátu  $L \sim \mathcal{N}(-\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ , a tak:

$$VaR_\alpha(L) = -\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} + q_\alpha \sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}},$$

kde  $q_\alpha$  je kvantil rozdělení  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Optimalizační úlohu lze tedy formulovat jako:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & -\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} + q_\alpha \sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}} \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \geq u_e \\ & \sum_{i=1}^N w_i = 1 \\ & w_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Lagrangeova funkce je ve tvaru:

$$L(\mathbf{w}, \lambda_1, \lambda_2) = -\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} + q_\alpha \sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}} + \lambda_1 (1 - \mathbf{1}^T \mathbf{w}) + \lambda_2 (u_e - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}).$$

A derivace:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}} = -\boldsymbol{\mu} + q_\alpha \frac{\mathbf{V}\mathbf{w}}{\sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}}} - \lambda_1 \mathbf{1} - \lambda_2 \boldsymbol{\mu}.$$

Řešení uvedené úlohy nemusí vždy nastávat na hranici omezení, což plyne z následujícího příkladu. Zároveň to znamená, že úlohu minimalizace VaR nelze redukovat na úlohu minimalizace rozptylu.

**Příklad 13** *Uvažujme portfolio s  $N = 2$  akciemi a nekorelovanými výnosy. Nechť je dán střední zisk  $\boldsymbol{\mu}$  a varianční matice  $\mathbf{V}$  následovně:*

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

*Předpokládáme, že investor očekává minimální zisk 1, tedy  $u_e = 1$ . Potom řešením úlohy minimalizace rozptylu 2.5.1 je zřejmě vektor vah*

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*V úloze minimalizace VaR dává toto řešení hodnotu účelové funkce (při zaokrouhlené konstantě kvantilu na 1,65):*

$$-\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} + q_\alpha \sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}} = -1 + 1,65\sqrt{1} = 0,65.$$

*Zvolme nyní vektor vah:*

$$\mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

*a dostáváme hodnotu účelové funkce:*

$$-\mathbf{w}_0^T \boldsymbol{\mu} + q_\alpha \sqrt{\mathbf{w}_0^T \mathbf{V} \mathbf{w}_0} = -10 + 1,65\sqrt{4} = -6,7.$$

*Ukázali jsme, že úlohy minimalizace rozptylu a VaR nemusí mít obecně stejné řešení.*

**Poznámka 14** *V případě, kdy uvažujeme v optimalizační úloze pouze řešení, která nabývají přesně požadovaného zisku, což znamená podmínku:  $\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} = u_e$ , lze ukázat, že optimální řešení úloh minimalizace rozptylu a VaR jsou shodná. Problematika je podrobněji rozebrána například v článku [6].*

### 2.5.3 cVaR

Počítejme nejprve pro  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ :

$$\begin{aligned} \int_k^\infty x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx &= \int_{\frac{k^2}{2}}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-y\} dy = \frac{\exp\left\{-\frac{k^2}{2}\right\}}{\sqrt{2\pi}}, \\ E[X|X > VaR_\alpha(X)] &= \frac{1}{\mathbb{P}[X > q_\alpha]} \int_{q_\alpha}^\infty x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx \\ &= \frac{\exp\left\{-\frac{q_\alpha^2}{2}\right\}}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Nyní dostáváme:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}} X - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}, \\ cVaR_\alpha(L) &= -\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} + \frac{\exp\left\{-\frac{q_\alpha^2}{2}\right\}}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}} \sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}} \end{aligned}$$

Tento výsledek lze také najít například v článku [13] nebo [18]. Vidíme, že teoretická hodnota míry rozptýlu se liší od  $VaR$  pouze jiným koeficientem u kvadratického členu.

Optimalizační úlohu lze formulovat analogicky jako v případě VaR:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} \quad & -\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} + \frac{\exp\left\{-\frac{q_\alpha^2}{2}\right\}}{(1-\alpha)\sqrt{2\pi}} \sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}} \\ \text{za podmíněk} \quad & \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \geq u_e \\ & \sum_{i=1}^N w_i = 1 \\ & w_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

### 2.5.4 Absolutní odchylka

Ukážeme, že za předpokladu normality platí:

$$r_a = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}}.$$



Nechť  $X$  je náhodná veličina s rozdělením  $N(0, 1)$ , pak:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X - \mathbb{E}X| &= \mathbb{E}|X| = \int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} xf(x)dx = 2 \int_0^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-y\} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

Nyní dostáváme:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}} X - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}, \\ \mathbb{E}|L - \mathbb{E}L| &= \mathbb{E}|\sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}} X - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} + \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}| \\ &= \sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}} \mathbb{E}|X| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}}. \end{aligned}$$

Tato míra rizika závisí pouze na rozptylu a řešení této úlohy bude zřejmě stejné jako řešení úlohy minimalizace rozptylu.

### 2.5.5 Semivariance

Za předpokladu normality dostaneme při použití semivariance stejné výsledky jako při použití rozptylu, což plyne ze symetrie normálního rozdělení:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\max(0, L - \mathbb{E}L)^2] &= \int_{\mu}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E}[(L - \mathbb{E}L)^2]. \end{aligned}$$

## 2.6 Studentovo t-rozdělení

Studentovo rozdělení patří do třídy eliptických rozdělení a je definováno následovně (definice byla převzata z článku [18]).

**Definice 15** Říkáme, že  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$  má mnohorozměrné Studentovo rozdělení, pokud má eliptické rozdělení s parametry  $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$  a platí:

$$g_N(t) = \left(1 + \frac{t}{k}\right)^{-p}, \quad k > 0, p > N/2.$$

Parametr  $k$  může být funkcí parametru  $p$ .

**Poznámka 16** Klasickou definici mnohorozměrného t-rozdělení uvedenou například v knize [17] získáme volbou  $k = \nu/2$ ,  $p = (\nu + N)/2$ , kde  $\nu$  je počet stupňů volnosti a  $N$  dimenze náhodného vektoru.

Z předchozích tvrzení o eliptických rozděleních plyne, že rozdělení výnosů našeho portfolia bude jednorozměrné Studentovo. Konkrétně předpokládejme, že výnosy akcií mají mnohorozměrné t-rozdělení s parametry  $\boldsymbol{\mu}, \nu, \boldsymbol{\Sigma}$ , pak rozdělení výnosů portfolia má parametry  $\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\mu}, \nu, \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}$ . Pro varianční matici v případě klasické definice platí podle známých výsledků o jednorozměrném Studentově rozdělení a podle [5]:

$$\mathbf{V} = \frac{\nu}{\nu - 2} \boldsymbol{\Sigma}.$$

### 2.6.1 Rozptyl

Řešení úlohy minimalizace rozptylu je stejné jako v případě normálního rozdělení, viz kapitola 2.5.1.

### 2.6.2 VaR

Hodnota VaR se spočte analogicky jako za předpokladu normality, pouze zde máme kvantil t-rozdělení:

$$VaR_\alpha(L) = -\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\mu} + t_{\alpha, \nu} \sqrt{\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}},$$

kde  $t_{\alpha, \nu}$  je kvantil t-rozdělení s  $\nu$  stupni volnosti.

Optimalizační úlohu lze tedy formulovat jako:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{w}} \quad & -\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\mu} + t_{\alpha, \nu} \sqrt{\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}} \\ \text{za podmínek} \quad & \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\mu} \geq u_e \\ & \sum_{i=1}^N w_i = 1 \\ & w_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

### 2.6.3 cVaR

Na základě výsledků z článku [18] dostáváme pro  $\nu + N > 5$  následující vzorec:

$$cVaR_\alpha(L) = -\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\mu} + \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) \sqrt{\nu} \left(1 + \frac{t_{\alpha, \nu}^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu-2}{2}\right) (1-\alpha) (\nu-2) \sqrt{\pi}} \sqrt{\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}}$$

Výsledná optimalizační úloha se definuje analogicky jako v předchozím případě.

$$\min_{\mathbf{w}} -\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} + \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) \sqrt{\nu} \left(1 + \frac{t_{\alpha, \nu}^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu-2}{2}\right) (1-\alpha) (\nu-2) \sqrt{\pi}} \sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}$$

za podmínek  $\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \geq u_e$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1$$

$$w_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N$$

### 2.6.4 Absolutní odchylka

Nechť  $X$  je náhodná veličina s rozdělením  $t(0, \nu, 1)$ , pak:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X - \mathbb{E}X| &= \mathbb{E}|X| = \int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx = 2 \int_0^{\infty} xf(x)dx \\ &= 2 \int_0^{\infty} x \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} dx \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{y}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} dy \\ &= \frac{\sqrt{\nu}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_1^{\infty} z^{-(\nu+1)/2} dz = \frac{2\sqrt{\nu}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{(\nu-1)\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Z předchozího dostáváme:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}} X - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}, \\ \mathbb{E}|L - \mathbb{E}L| &= \mathbb{E}|\sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}} X - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} + \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}| = \sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}} \mathbb{E}|X| \\ &= \frac{2\sqrt{\nu}\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{(\nu-1)\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}. \end{aligned}$$

Tato míra rizika závisí pouze na rozptylu a řešení této úlohy bude zřejmě stejné jako řešení úlohy minimalizace rozptylu.

### 2.6.5 Semivariance

Stejně jako v případě normality platí, že Studentovo rozdělení je symetrické. Semivariance se tedy rovná polovině rozptylu.

## 2.7 Logistické eliptické rozdělení

Logistické eliptické rozdělení je dalším ze třídy eliptických, jeho definici opět přebíráme z článku [18]:

**Definice 17** Říkáme, že  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$  má mnohorozměrné logistické eliptické rozdělení, pokud má eliptické rozdělení s parametry  $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}$  a platí:

$$g_N(t) = \frac{\exp\{-t\}}{(1 + \exp\{-t\})^2}$$

Pro toto rozdělení bohužel neznáme analytický tvar distribuční funkce nebo její inverze. Problém obecně představuje i určení rozptylu takové náhodné veličiny nebo generování náhodných výběrů z tohoto rozdělení. Proto uvádíme pouze výsledek pro hodnotu cVaR, která byla nalezena v článku [18]. Nechť mají výnosy logistické eliptické rozdělení s parametry  $\boldsymbol{\mu}$  a  $\boldsymbol{\Sigma}$ , pak pro ztrátu  $L$  platí:

$$cVaR_\alpha(L) = -\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} + \varphi(z_\alpha)} \frac{\varphi(z_\alpha)}{F(z_\alpha)} \sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}},$$

kde  $z_\alpha$  je kvantil normovaného logistického eliptického rozdělení,  $F$  je příslušná distribuční funkce a  $\varphi$  je hustota rozdělení  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

## 2.8 Logaritmicko-normální rozdělení

Logaritmicko-normální rozdělení nepatří mezi eliptická rozdělení, ale vzniká transformací normálního rozdělení ve smyslu následující definice.

**Definice 18** Nechť je dána náhodná veličina  $\mathbf{X}$ , která má mnohorozměrné normální rozdělení,  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ . Potom říkáme, že  $\mathbf{Y} = \exp\{\mathbf{X}\}$  má mnohorozměrné logaritmicko-normální rozdělení s parametry  $\boldsymbol{\mu}$  a  $\boldsymbol{\Sigma}$ .

Vzhledem k uvedené definici budeme v této kapitole pracovat i s distribuční funkcí normovaného normálního rozdělení, kterou značíme  $\Phi(x)$ . Uvažujme nyní finální hodnotu našeho portfolia s vahami  $\mathbf{w}$ . Abychom byli schopni spočítat složitější míry rizika, je nutné znát její rozdělení. Nechť platí značení předchozí definice, chceme určit rozdělení náhodné veličiny  $\mathbf{w}^T \mathbf{Y}$ . Navíc předpokládejme, že platí  $w_i > 0 \forall i$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T \mathbf{X} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu}, \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}), \\ \mathbf{w}^T \mathbf{Y} &= \mathbf{w}^T \exp\{\mathbf{X}\} = \sum_{i=1}^N w_i \exp\{X_i\} \\ &= \sum_{i=1}^N \exp\{\log w_i + X_i\} = \sum_{i=1}^N \exp\{Z_i\}. \end{aligned}$$

Zavedli jsme nové náhodné veličiny  $Z_i$ , které mají normální rozdělení:

$$Z_i \sim \mathcal{N}(\mu_i + \log w_i, \Sigma_{ii}).$$

Nově získaný vektor středních hodnot označíme  $\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{\mu} + \log \mathbf{w}$ . Z uvedeného plyne, že hodnota našeho portfolia  $R = \mathbf{w}^T \mathbf{Y}$  je součtem obecně korelovaných logaritmicko-normálních náhodných veličin. Pro tento součet není bohužel známo analytické vyjádření hustoty pravděpodobnosti, takže z námi definovaných měř rizika je možné analyticky spočítat pouze rozptyl. V článku [21] lze najít popis numerické aproximace, kdy je součet daných veličin aproximován jednorozměrnou logaritmicko-normální veličinou, určení jejích parametrů ale vyžaduje numerické řešení nelineární soustavy rovnic, z čehož plyne nutnost použití metod nelineární optimalizace. Popíšeme pouze základní myšlenku článku a získané vzorce, které budou nutné pro praktické provedení. Momentovou vytvořující funkci logaritmicko-normálního rozdělení s parametry  $\mu'$  a  $\sigma'^2$  aproximujeme pomocí Hermitovské integrace následovně (viz [1], 25.10.):

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \int_0^\infty \exp\{-sy\} \frac{1}{y\sigma'\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\log y - \mu')^2}{2\sigma'^2}\right\} dy \\ &= \int_{-\infty}^\infty \exp\left\{-s \exp\left\{z\sigma'\sqrt{2} + \mu'\right\}\right\} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\{-z^2\} dz \\ &\approx \sum_{j=1}^J \frac{c_j}{\sqrt{\pi}} \exp\left\{-s \exp\left\{x_j\sigma'\sqrt{2} + \mu'\right\}\right\}. \end{aligned}$$

Váhy  $c_j$  a body  $x_j$  lze nalézt v knize [1],  $J$  udává přesnost aproximace. Aproximativní metoda spočívá v tom, že do rovnosti položíme momentovou vytvořující funkci logaritmického rozdělení s neznámými parametry a momentovou vytvořující funkci součtu nám známých logaritmicko-normálních veličin. Na obou stranách místo integrace provedeme Hermitovskou integraci a vzhledem k tomu, že máme dva neznámé parametry, budeme požadovat rovnost momentových vytvořujících funkcí ve dvou bodech, abychom dostali právě jedno řešení.

Pro mnohorozměrné logaritmicko-normální rozdělení dostaneme momentovou vytvořující funkci z uvedeného rozpisu na součet exponenciálních funkcí  $Z_i$ :

$$\psi(s) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \prod_{i=1}^N \exp\{-s \exp\{z_i\}\} \exp\left\{\frac{(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}^*)^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}^*)}{2}\right\} d\mathbf{z}.$$

Nechť  $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}$ . Položíme  $\mathbf{z} = \sqrt{2} \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{y} + \boldsymbol{\mu}^*)$ . Označme  $s'_{ik}$  prvek na řádku  $i$  a sloupci  $k$  v matici  $\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}$  a  $\mu_k^*$  k-tý prvek vektoru  $\boldsymbol{\mu}^*$ .

$$\psi(s) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(\pi)^{\frac{N}{2}}} \prod_{i=1}^N \exp\left\{-s \exp\left\{\sqrt{2} \sum_{k=1}^N s'_{ik} y_i + \mu_i^*\right\}\right\} \exp\{\mathbf{y}^T \mathbf{y}\} d\mathbf{y}.$$

Nyní již můžeme použít  $N$ -krát Hermitovskou integraci a dostáváme:

$$\psi(s) \approx \sum_{j_1=i}^J \cdots \sum_{j_N=i}^J \frac{c_{j_1} \cdots c_{j_N}}{\pi^{\frac{N}{2}}} \prod_{i=1}^N \exp\left\{-s \exp\left\{\sqrt{2} \sum_{k=1}^N s'_{ik} x_{ik} + \mu_i^*\right\}\right\}.$$

Obě aproximace položíme jako sobě rovné a budeme řešit v bodech  $s_1, s_2$ . Autoři zmíněného článku považují za dostačující volbu řádu integrace  $J = 12$  a volbu bodů rovnosti  $s_1 = 0,001$  a  $s_2 = 0,005$ , jelikož chceme, aby byla aproximace lepší v místech chvostů, kde budeme počítat míry rizika. Nadále tedy můžeme uvažovat, že hodnota našeho portfolia má jednorozměrné logaritmicko-normální rozdělení s parametry  $\mu'$  a  $\sigma'^2$ , které budou při optimalizaci určeny řešením následujících podmínek:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \sum_{j=1}^J \frac{c_j}{\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -s_1 \exp \left\{ x_j \sigma' \sqrt{2} + \mu' \right\} \right\} \\
K_2 &= \sum_{j=1}^J \frac{c_j}{\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -s_2 \exp \left\{ x_j \sigma' \sqrt{2} + \mu' \right\} \right\} \\
K_1 &= \sum_{j_1=1}^J \cdots \sum_{j_N=1}^J \frac{c_{j_1} \cdots c_{j_N}}{\pi^{\frac{N}{2}}} \prod_{i=1}^N \exp \left\{ -s_1 w_i \exp \left\{ \sqrt{2} \sum_{k=1}^N s'_{ik} x_{j_k} + \mu_i \right\} \right\} \\
K_2 &= \sum_{j_1=1}^J \cdots \sum_{j_N=1}^J \frac{c_{j_1} \cdots c_{j_N}}{\pi^{\frac{N}{2}}} \prod_{i=1}^N \exp \left\{ -s_2 w_i \exp \left\{ \sqrt{2} \sum_{k=1}^N s'_{ik} x_{j_k} + \mu_i \right\} \right\} \\
s_1 &= 0,001, \quad s_2 = 0,005, \quad J = 12, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Abychom v dalším textu zbytečně tyto podmínky neopakovali, označme je jako (*APPROX*).

**Poznámka 19** *Uvedené odvození lze zobecnit i pro případ, kdy jsou váhy nulové nebo záporné. V případě nulové váhy vynecháme index z příslušné sumy a stejnou množinu indexů získáme i v případě součinu v aproximační rovnici. Pokud do součinu přidáme zpět nulové váhy, výsledek se nezmění. Pro případ záporných vah můžeme počítat s absolutní hodnotou  $w_i$  a znaménkem, po provedení analogických kroků důkazu můžeme v konečné rovnici opět tyto dva členy sloučit a dostaneme stejné řešení.*

### 2.8.1 Rozptyl

Pro náhodnou veličinu  $X$  s logaritmicko-normálním rozdělením s parametry  $\mu$  a  $\sigma$  platí:

$$\begin{aligned}
EX &= \exp \left\{ \mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right\} \\
\text{var} X &= (\exp \{ \sigma^2 \} - 1) \exp \{ 2\mu + \sigma^2 \}
\end{aligned}$$

Pro rozptyl tedy získáme při použití uvedené aproximace následující úlohu:

$$\begin{aligned} & \min_w \left( \exp \left\{ \sigma'^2 \right\} - 1 \right) \exp \left\{ 2\mu' + \sigma'^2 \right\} \\ & \text{za podmínek (APPROX)} \\ & \exp \left\{ \mu' + \frac{1}{2} \sigma'^2 \right\} \geq u_e \\ & \sum_{i=1}^N w_i = 1 \\ & w_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

## 2.8.2 VaR

Pro náhodnou veličinu finální hodnoty portfolia  $R$ , která má logaritmicko-normální rozdělení s parametry  $\mu$  a  $\sigma^2$ , platí:

$$\mathbb{P} [R < \exp \{ \mu + \sigma q_{1-\alpha} \}] = 1 - \alpha,$$

kde  $q_{1-\alpha}$  je kvantil rozdělení  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Počítejme nyní pro „ztrátu“ definovanou jako  $L = -R$ :

$$\mathbb{P} [L > l] = \mathbb{P} [-R > l] = \mathbb{P} [R < -l].$$

Zvolme  $l = -\exp \{ \mu + \sigma q_{1-\alpha} \}$  a dostáváme:

$$\mathbb{P} [L > -\exp \{ \mu + \sigma q_{1-\alpha} \}] = 1 - \alpha.$$

Pro VaR v případě logaritmicko-normálního rozdělení tedy platí:

$$\text{VaR}_\alpha(L) = -\exp \{ \mu + \sigma q_{1-\alpha} \}.$$

Výslednou úlohu tedy můžeme formulovat takto:

$$\begin{aligned} & \min_w -\exp \left\{ \mu' + \sigma' q_{1-\alpha} \right\} \\ & \text{za podmínek (APPROX)} \\ & \exp \left\{ \mu' + \frac{1}{2} \sigma'^2 \right\} \geq u_e \\ & \sum_{i=1}^N w_i = 1 \\ & w_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

### 2.8.3 cVaR

Nejprve počítejme pro logaritmicko-normální rozdělení s parametry  $(\mu, \sigma^2)$ :

$$\begin{aligned}
 \int_0^k x f(x) dx &= \int_0^k x \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\frac{\log k - \mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} \exp\{y\sigma + \mu\} dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\frac{\log k - \mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y - \sigma)^2}{2}\right\} \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\} dy \\
 &= \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\} \int_{-\infty}^{\frac{\log k - \mu - \sigma^2}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\} dz \\
 &= \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\} \Phi\left(\frac{\log k - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right).
 \end{aligned}$$

Platí tedy v našem případě:

$$\begin{aligned}
 cVaR_\alpha(L) &= \mathbf{E}[L|L > VaR(L)] = \mathbf{E}[L|L > -\exp\{\mu + \sigma q_{1-\alpha}\}] \\
 &= \mathbf{E}[-R | -R > -\exp\{\mu + \sigma q_{1-\alpha}\}] = -\mathbf{E}[R | R < \exp\{\mu + \sigma q_{1-\alpha}\}] \\
 &= -\frac{1}{\mathbf{P}[R < \exp\{\mu + \sigma q_{1-\alpha}\}]} \int_0^{\exp\{\mu + \sigma q_{1-\alpha}\}} x f(x) dx \\
 &= -\frac{1}{1-\alpha} \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\} \Phi\left(\frac{\mu + \sigma q_{1-\alpha} - \mu - \sigma^2}{\sigma}\right) \\
 &= -\frac{1}{1-\alpha} \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\} \Phi(q_{1-\alpha} - \sigma).
 \end{aligned}$$

Optimalizační úloha se sestaví analogicky jako v případě VaR:

$$\min_{\mathbf{w}} -\frac{1}{1-\alpha} \exp\left\{\mu' + \frac{\sigma'^2}{2}\right\} \Phi(q_{1-\alpha} - \sigma')$$

za podmíněk (*APPROX*)

$$\exp\left\{\mu' + \frac{1}{2}\sigma'^2\right\} \geq u_e$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1$$

$$w_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N.$$



### 2.8.4 Absolutní odchylka

Nechť  $X$  má logaritmicko-normální rozdělení s parametry  $\mu$  a  $\sigma^2$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X - \mathbb{E}X| &= \int_{\mathbb{E}X}^{\infty} (x - \mathbb{E}X) f(x) dx + \int_0^{\mathbb{E}X} (-x + \mathbb{E}X) f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{E}X}^{\infty} x f(x) dx - \mathbb{E}X \int_{\mathbb{E}X}^{\infty} f(x) dx - \int_0^{\mathbb{E}X} x f(x) dx + \mathbb{E}X \int_0^{\mathbb{E}X} f(x) dx \\ &= \left( \mathbb{E}X - 2 \int_0^{\mathbb{E}X} x f(x) dx \right) + \mathbb{E}X \left( -1 + 2 \int_0^{\mathbb{E}X} f(x) dx \right). \end{aligned}$$

Nyní použijeme pomocný výsledek ze začátku předchozí kapitoly 2.8.3:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X - \mathbb{E}X| &= \exp \left\{ \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right\} \left( 1 - 2\Phi \left( -\frac{\sigma}{2} \right) - 1 + 2\Phi \left( \frac{\sigma}{2} \right) \right) \\ &= \exp \left\{ \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right\} \left( 4\Phi \left( \frac{\sigma}{2} \right) - 2 \right). \end{aligned}$$

Výsledná optimalizační úloha je následující:

$$\begin{aligned} \min_w \exp \left\{ \mu' + \frac{\sigma'^2}{2} \right\} \left( 4\Phi \left( \frac{\sigma'}{2} \right) - 2 \right) \\ \text{za podmínek (APPROX)} \\ \exp \left\{ \mu' + \frac{1}{2} \sigma'^2 \right\} \geq u_e \\ \sum_{i=1}^N w_i = 1 \\ w_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

### 2.8.5 Semivariance

Nechť  $X$  má logaritmicko-normální rozdělení s parametry  $\mu$  a  $\sigma^2$ , nejprve spočítáme  $\mathbb{E}[X^2]$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\mathbb{E}X} x^2 f(x) dx &= \int_0^{\exp\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\}} x^2 \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{\sigma}{2}} \exp \{2\mu + 2\sigma y\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \{2\mu + 2\sigma^2\} \int_{-\infty}^{\frac{\sigma}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{y^2 - 4\sigma y + 4\sigma^2}{2} \right\} dy \\
&= \exp \{2\mu + 2\sigma^2\} \int_{-\infty}^{-\frac{3\sigma}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2} \right\} dz \\
&= \exp \{2\mu + 2\sigma^2\} \Phi \left( -\frac{3\sigma}{2} \right).
\end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice podle definice semivariance a použijeme výsledky z kapitoly 2.8.3:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} [\max(0, \mathbf{E}X - X)^2] &= \int_0^{\mathbf{E}X} (x^2 - 2x\mathbf{E}X + (\mathbf{E}X)^2) f(x) dx \\
&= \exp \{2\mu + \sigma^2\} \left( \exp \{\sigma^2\} \Phi \left( -\frac{3\sigma}{2} \right) - 2\Phi \left( -\frac{\sigma}{2} \right) + \Phi \left( \frac{\sigma}{2} \right) \right) \\
&= \exp \{2\mu + \sigma^2\} \left( \exp \{\sigma^2\} \Phi \left( -\frac{3\sigma}{2} \right) - 2 + 3\Phi \left( \frac{\sigma}{2} \right) \right).
\end{aligned}$$

Pro ztrátu  $L$  tedy platí:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} [\max(0, L - \mathbf{E}L)^2] &= \mathbf{E} [\max(0, \mathbf{E}R - R)^2] \\
&= \exp \{2\mu + \sigma^2\} \left( \exp \{\sigma^2\} \Phi \left( -\frac{3\sigma}{2} \right) - 2 + 3\Phi \left( \frac{\sigma}{2} \right) \right).
\end{aligned}$$

Pro výpočet optimálních vah tedy řešíme následující úlohu:

$$\begin{aligned}
\min_w \exp \{2\mu' + \sigma'^2\} &\left( \exp \{\sigma'^2\} \Phi \left( -\frac{3\sigma'}{2} \right) - 2 + 3\Phi \left( \frac{\sigma'}{2} \right) \right) \\
\exp \left\{ \mu' + \frac{1}{2}\sigma'^2 \right\} &\geq u_e \\
\sum_{i=1}^N w_i &= 1 \\
w_i \in \mathbb{R}, \quad i &= 1, \dots, N.
\end{aligned}$$

## 2.9 Diskrétní scénáře

Předpokládejme, že máme k dispozici  $M$  scénářů vývoje ceny všech akcií v našem portfoliu, máme tedy hodnoty  $l_i^j, i = 1..N, j = 1..M$ , které vyjadřují výnos (případně finální cenu) jedné akcie  $i$  při realizaci scénáře  $j$ . Pro jednoduchost zápisu označme vektor těchto hodnot při scénáři  $j$  jako  $\mathbf{l}^j$ . Každý scénář má obecně pravděpodobnost své realizace  $p^j$ . V naší práci budeme stejně jako v praxi používat stejně pravděpodobné scénáře, tedy  $p = p^j = \frac{1}{M}, j = 1, \dots, M$ . Obvykle máme k dispozici dostatečný počet scénářů, takže platí

$$M \gg N.$$

Očekávaný výnos (resp. hodnota) našeho portfolia je tedy:

$$u_{\mathbf{w}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M w_i l_i^j = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mathbf{w}^T \mathbf{l}^j.$$

### 2.9.1 Rozptyl

Z dostupných scénářů nejprve určíme výběrovou kovarianční matici  $\mathbf{V}$ :

$$\hat{\mathbf{l}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mathbf{l}^j,$$

$$\hat{\mathbf{V}} = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (\mathbf{l}^j - \hat{\mathbf{l}}) (\mathbf{l}^j - \hat{\mathbf{l}})^T.$$

Nyní již můžeme řešit standardní optimalizační úlohu:

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \hat{\mathbf{V}} \mathbf{w}$$

za podmíněk  $\mathbf{w}^T \hat{\mathbf{l}} \geq u_e$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1$$

$$w_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N.$$

### 2.9.2 VaR

Pro dané váhy  $\mathbf{w}$  určíme  $VaR_{\alpha}(\mathbf{w})$  jako příslušný kvantil skokovité distribuční funkce ztráty  $L$ . Řešíme tedy optimalizační úlohu:

$$\min_{\mathbf{w}} VaR_{\alpha}(\mathbf{w})$$

za podmíněk  $\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mathbf{w}^T \mathbf{l}^j \geq u_e$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1$$

$$w_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N$$

Tato úloha se dá podle [16] přepsat do následujícího tvaru vhodného pro praktické řešení:

$$\begin{aligned}
& \min_{\nu, \mathbf{w}, \delta^j} \nu \\
& \text{za podmíněk} \quad -\mathbf{w}^T \mathbf{l}^j \leq \nu + K \delta^j, \quad j = 1, \dots, M \\
& \quad \sum_{j=1}^M \delta^j = \lfloor (1 - \alpha) M \rfloor \\
& \quad \delta^j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, M \\
& \quad \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mathbf{w}^T \mathbf{l}^j \geq u_e \\
& \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1 \\
& \quad w_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, N,
\end{aligned}$$

kde  $\lfloor x \rfloor$  značí dolní celou část čísla  $x$ , tj.  $\lfloor x \rfloor = \max \{n \in \mathbb{N}_0, n < x\}$  pro  $x \in \mathbb{R}^+$ , a  $K$  je dostatečně velká konstanta,  $K \geq \max_{i,j} l_i^j - \min_{i,j} l_i^j$ .

### 2.9.3 cVaR

Formulace základní úlohy je obdobná jako v případě VaR, vhodný tvar pro řešení se dá nalézt například v [26]:

$$\begin{aligned}
& \min_{a, \mathbf{w}, z^j} a + \frac{1}{(1 - \alpha) M} \sum_{j=1}^M z^j \\
& \text{za podmíněk} \quad z^j \geq -\mathbf{w}^T \mathbf{l}^j - a, \quad j = 1, \dots, M \\
& \quad z^j \geq 0, \quad j = 1, \dots, M \\
& \quad \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mathbf{w}^T \mathbf{l}^j \geq u_e \\
& \quad \sum_{i=1}^N w_i = 1 \\
& \quad w_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, N.
\end{aligned}$$

### 2.9.4 Absolutní odchylka

Naším úkolem je minimalizovat výraz:

$$\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M |\mathbf{w}^T \mathbf{l}^j| - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \mathbf{w}^T \mathbf{l}^k.$$

Pro absolutní hodnotu platí následující nerovnosti:

$$\begin{aligned} x &\leq |x|, \\ -x &\leq |x|. \end{aligned}$$

Pro převod na úlohu lineárního programování tedy přidáme další proměnnou  $z^j$ , která bude vyjadřovat absolutní hodnotu:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}, z^j} \quad & \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M z^j \\ \text{za podmínek} \quad & \mathbf{w}^T \mathbf{l}^j - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \mathbf{w}^T \mathbf{l}^k \leq z^j, \quad j = 1, \dots, M \\ & -\mathbf{w}^T \mathbf{l}^j + \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \mathbf{w}^T \mathbf{l}^k \leq z^j, \quad j = 1, \dots, M \\ & \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mathbf{w}^T \mathbf{l}^j \geq u_e \\ & \sum_{i=1}^N w_i = 1 \\ & w_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

### 2.9.5 Semivariance

Při řešení této úlohy budeme postupovat podobně jako u úlohy s absolutní odchylkou, přidáme proměnnou  $z^j$ , která bude reprezentovat výraz  $\max(0, L - EL)$ :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}, z^j} \quad & \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (z^j)^2 \\ \text{za podmínek} \quad & z^j \geq -\mathbf{w}^T \mathbf{l}^j + \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \mathbf{w}^T \mathbf{l}^k, \quad j = 1, \dots, M \\ & z^j \geq 0, \quad j = 1, \dots, M \\ & \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mathbf{w}^T \mathbf{l}^j \geq u_e \\ & \sum_{i=1}^N w_i = 1 \\ & w_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

# Kapitola 3

## Odhady parametrů

Abychom byli schopni spočítat řešení za předpokladu, že naše data mají vybrané rozdělení, je nutné určit parametry tohoto rozdělení. Nalezené parametry budeme také potřebovat pro generování scénářů. Ve všech případech budeme značit výběr ze zvoleného rozdělení jako  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ .

### 3.1 Eliptická rozdělení

V případě eliptických rozdělení můžeme použít standardní nestranné odhady střední hodnoty  $\hat{\boldsymbol{\mu}}$  a kovarianční matice  $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ :

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i,$$
$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \alpha \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}) (\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})^T.$$

Hodnota konstanty  $\alpha$  závisí na druhu rozdělení:

$$\alpha = - \left( \frac{\partial \psi(0)}{\partial t} \right)^{-1}.$$

Pro normální rozdělení platí  $\alpha = 1$ , pro Studentovo rozdělení je  $\alpha = (\nu - 2)/\nu$ .

Dalším druhem odhadu, který můžeme použít, je maximálně věrohodný odhad. Na základě článku [15] použijeme iterační proceduru, která hledá odhady parametrů následujícím postupem. Položme

$$u(t) = - \frac{g'_n(\frac{t}{2})}{g_n(\frac{t}{2})}, \quad g'_n = \frac{\partial g_n}{\partial t}$$

a určíme výchozí odhady parametrů například jako  $\boldsymbol{\mu}^{(0)} = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}^{(0)} = \mathbf{I}$ . Definujme

$$\begin{aligned} s_i^{(m)} &= (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}^{(m)})^T \left( \boldsymbol{\Sigma}^{(m)} \right)^{-1} (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}^{(m)}), \\ \boldsymbol{\mu}^{(m+1)} &= \frac{\sum_{i=1}^n u(s_i^{(m)}) \mathbf{X}_i}{\sum_{i=1}^n u(s_i^{(m)})}, \\ \boldsymbol{\Sigma}^{(m+1)} &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n u(s_i^{(m)})} \sum_{i=1}^n u(s_i^{(m)}) (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}^{(m)}) (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}^{(m)})^T. \end{aligned}$$

Iterační postup budeme opakovat, dokud se nově získané hodnoty budou výrazně lišit od hodnot předchozích, v naší práci jsme použili přesnost 0,001, v případě vektorů a matic počítáme sumu absolutní hodnoty prvků jejich rozdílů.

**Poznámka 20** V reakci [5] na článek [18] jsou uvedeny vzorce použité iterační procedury přizpůsobené pro značení používané v článku [18]. Vzorec pro aktualizaci hodnoty rozptylu je bohužel uveden chybně, chybí zde normování průměrnou vahou pozorování.

Pro Studentovo rozdělení je zároveň nutné znát počet stupňů volnosti. Tento parametr nebudeme odhadovat, ale vybereme si některé jeho obvyklé hodnoty pro finanční data. Podle článku [10] můžeme jako vhodné zvolit například hodnoty 5 a 7 s přihlédnutím k výpočetní náročnosti VaR pro 3 nebo 4 stupně volnosti.

## 3.2 Logaritmicko-normální rozdělení

Pro logaritmicko-normální rozdělení máme následující nestranné odhady parametrů:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\mu}} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \mathbf{X}_i, \\ \hat{\boldsymbol{\Sigma}} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\log \mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}) (\log \mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})^T. \end{aligned}$$

Odhady metodou maximální věrohodnosti se liší jen nepatrně, a to u varianční matice:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\mu}} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \mathbf{X}_i, \\ \hat{\boldsymbol{\Sigma}} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\log \mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}) (\log \mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})^T. \end{aligned}$$

### 3.3 Generování scénářů

Za předpokladu zvoleného rozdělení budeme generovat různé počty scénářů a testovat rychlost konvergence. Pro generování výběru z normálního rozdělení použijeme knihovnu [25].

Nechť  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  a  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^T$  je spektrální rozklad matice. Vygenerujeme  $N$  nezávislých normovaných normálně rozdělených výběrů a sdružíme je do výběru z  $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ . Potom získáme  $\mathbf{X}$  jako  $\mathbf{X} \sim \boldsymbol{\mu} + \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}\mathbf{Y}$ , kde  $\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}$  značí odmocninovou matici vlastních čísel.

Pro případ Studentova rozdělení vyjdeme z následující konstrukce. Nechť  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$  a  $\mathbf{Y} \sim \chi_\nu^2$ . Nechť jsou veličiny  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{Y}$  nezávislé, pak platí:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{X}}{\sqrt{\mathbf{Y}}} \sqrt{\nu} \sim t(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}, \nu).$$

Obecně pro t-rozdělení s parametry  $\boldsymbol{\mu}$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}$  a  $\nu$  postupujeme tedy tak, že za pomoci výše uvedené knihovny [25] vygenerujeme nezávislé výběry  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$  a  $\mathbf{Y} \sim \chi_\nu^2$  a veličinu  $\mathbf{Z}$  získáme následně jako:

$$\mathbf{Z} = \boldsymbol{\mu} + \frac{\mathbf{X}}{\sqrt{\mathbf{Y}}} \sqrt{\nu}.$$

V případě logaritnicko-normálního rozdělení budeme generovat scénáře normálního rozdělení a jejich hodnoty transformujeme exponenciální funkcí.

Poslední možností je generovat scénáře bez předpokladů o rozdělení. Na tento proces použijeme algoritmus popsany v článku [12]. Tento algoritmus generuje scénáře pouze na základě korelační matice a odhadu prvních čtyř momentů náhodné veličiny. Potřebné momenty  $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4$  a korelační matici  $\mathbf{R}$  odhadneme jejich výběrovými ekvivalenty, vzorce jsou převzaty z knihy [3].

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= \bar{\mathbf{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i, \\ \mathbf{M}_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^2, \\ \mathbf{M}_3 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^3, \\ \mathbf{M}_4 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^4, \\ \mathbf{S} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}) (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})^T. \end{aligned}$$

Pokud jsou všechny prvky na diagonále matice  $\mathbf{S} = (s_{ij})_{i,j=1}^n$  kladné, definujeme:

$$\mathbf{R} = (r_{ij}) = \left( \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii}s_{jj}}} \right)_{i,j=1}^n.$$



# Kapitola 4

## Praktické řešení

V této kapitole prezentujeme výsledky, které jsme získali řešením uvedených modelů s reálnými daty z akciového trhu. Pro modelování výnosů a finálních cen jsme použili denní data hodnot indexů burz v Japonsku, USA (Down Jones), Velké Británii, ČR a Německu od 15. 9. 2008 do 18. 9. 2009. Použitá aproximace logaritmicko-normálního rozdělení bohužel znemožňuje použití velkého počtu dimenzí, a tak jsme se museli omezit na data z uvedených pěti zemí.

### 4.1 Optimalizační úlohy

Pro řešení optimalizačních úloh jsme použili software GAMS. Většinu úloh lze přímočaře přepsat do příslušného jazyka, v následujících tabulkách shrnujeme druhy úloh, které jsme získali.

lp	lineární programování
qcp	kvadratické programování
nlp	nelineární programování
mip	lineární programování s celočíselnými proměnnými

	rozptyl	VaR	cVaR	abs. odchylka	semivariance
<b>normální</b>	qcp	nlp	nlp	qcp	qcp
<b>Studentovo</b>	qcp	nlp	nlp	qcp	qcp
<b>lognormální</b>	nlp	nlp	nlp	nlp	nlp
<b>scénáře</b>	qcp	mip	lp	lp	qcp

### 4.2 Logaritmicko-normální rozdělení

V případě úlohy s aproximací logaritmicko-normálního rozdělení není praktická implementace triviální. Po přímém přepisu úlohy uvedené v kapitole 2.8 není

možné získat optimální řešení. Optimalizační program začne hledat řešení ve směru, kdy rozptyl konverguje k nule, a přibližně tomu přizpůsobuje parametr střední hodnoty. Abychom byli vůbec schopni tuto úlohu prakticky vyřešit, musíme přidat omezení na oba parametry jednorozměrné náhodné veličiny. Pokud nebudeme uvažovat záporné váhy, můžeme střední hodnotu omezit minimem a maximem ze středních hodnot jednotlivých akcií v portfoliu. V případě rozptylu je situace složitější, protože diverzifikací portfolia můžeme riziko snižovat i pod hranice rizika jednotlivých akcií. Protože řešení za předpokladu, kdy uvažujeme záporné váhy, není primárním cílem této práce, rozhodli jsme se zvolit zmíněná omezení střední hodnoty a rozptyl omezit maximálním rozptylem jednotlivých akcií. Minimální hodnotu rozptylu jsme zvolili dostatečně malou tak, aby nebylo řešení úlohy ovlivněno omezeními. Necht' má finální hodnota logaritmiccko-normální rozdělení s parametry  $\mu$  a  $\Sigma$ :

$$\begin{aligned} \mu' &\in [\min \{\mu_i, i = 1..N\}, \max \{\mu_i, i = 1..N\}], \\ \sigma' &\in \left[ \frac{\min \{\sigma_{ii}, i = 1..N\}}{100}, \max \{\sigma_{ii}, i = 1..N\} \right]. \end{aligned}$$

Zvolená omezení nám umožnila vyřešit úlohy minimalizace rozptylu, VaR a cVaR. Bohužel ale v případě absolutní odchylky a semivariance stále docházelo k problémům, protože se optimalizační algoritmus snažil hledat optimální řešení na hranici omezení a konvergoval vždy k dolní hranici  $\sigma'$ . Důvodem je hlavně fakt, že při optimalizaci dáváme nepřesnostem v aproximativních rovnicích stejnou váhu jako zlepšením účelové funkce, která může se zmenšováním parametru  $\sigma'$  rychle klesat. Abychom předešli uvedeným komplikacím, zavedli jsme místo aproximativních rovností nerovnosti a nesplnění rovnosti výrazně penalizujeme.

Výsledná optimalizační úloha vypadá tedy následovně, přičemž  $r_w$  zastupuje libovolnou míru rizika:

$$\min_w p + r_w$$

za podmíněk  $p = C(p_1 + p_2)$

$$K_{11} = \sum_{j=1}^J \frac{c_j}{\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -s_1 \exp \left\{ x_j \sigma' \sqrt{2} + \mu' \right\} \right\}$$

$$K_{21} = \sum_{j=1}^J \frac{c_j}{\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -s_2 \exp \left\{ x_j \sigma' \sqrt{2} + \mu' \right\} \right\}$$

$$K_{12} = \sum_{j_1=1}^J \cdots \sum_{j_N=1}^J \frac{c_{j_1} \cdots c_{j_N}}{\pi^{\frac{N}{2}}} \prod_{i=1}^N \exp \left\{ -s_1 w_i \exp \left\{ \sqrt{2} \sum_{k=1}^N s'_{ik} x_{j_k} + \mu_i \right\} \right\}$$

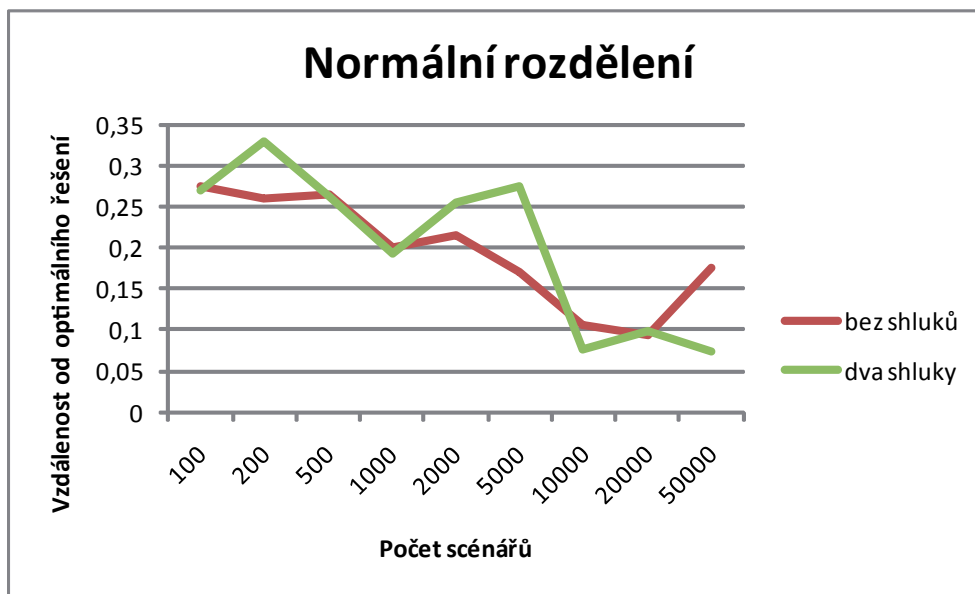
$$K_{22} = \sum_{j_1=1}^J \cdots \sum_{j_N=1}^J \frac{c_{j_1} \cdots c_{j_N}}{\pi^{\frac{N}{2}}} \prod_{i=1}^N \exp \left\{ -s_2 w_i \exp \left\{ \sqrt{2} \sum_{k=1}^N s'_{ik} x_{j_k} + \mu_i \right\} \right\}$$

$$\begin{aligned}
p_1 &\geq K_{11} - K_{12} \\
p_1 &\geq K_{12} - K_{11} \\
p_2 &\geq K_{21} - K_{22} \\
p_2 &\geq K_{22} - K_{21} \\
p_1, p_2, p &\in \mathbb{R}, p \geq 0 \\
s_1 = 0,001, s_2 = 0,005, J = 12, K_1, K_2 &\in \mathbb{R}, C = 10^{12} \\
\exp \left\{ \mu' + \frac{1}{2} \sigma'^2 \right\} &\geq u_e \\
\sum_{i=1}^N w_i &= 1 \\
w_i &\in \mathbb{R}, i = 1, \dots, N.
\end{aligned}$$

### 4.3 Shlukování výsledků

V případě generování scénářů závisí získané výsledky do značné míry na konkrétním generovaném seznamu scénářů. Abychom získali korektní odhad rychlosti konvergence, musíme pro každý zvolený počet scénářů provádět testování vícekrát. V naší práci opakujeme generování scénářů a výpočet vždy padesátkrát, přičemž získáme 50 vektorů s optimálními vahami portfolia. Z těchto vektorů chceme získat jedno optimální řešení, které by mělo konvergovat k analytickému řešení odpovídající úlohy. Jako nejjednodušší postup můžeme zvolit průměrování získaných vektorů s optimálními vahami. Tento postup ale nemusí být vždy dostatečný, což se ukazuje i na našich datech v případě, kdy je zvolenou mírou rizika semivariance. Při generování velkého množství scénářů může docházet k situaci, kdy při opakovaných pokusech nacházíme více než jedno odpovídající optimální řešení, což je způsobeno změnou účelové funkce v případě odlišného vývoje scénářů. Abychom problému předešli, můžeme provést shlukovou analýzu a vybrat největší shluk, u kterého očekáváme konvergenci k analytickému řešení. V naší práci budeme tuto analýzu provádět vždy metodou k-průměrů, jejíž popis lze najít například v knize [11]. V grafu 4.1 porovnáváme výsledky rychlosti konvergence bez shlukování a se dvěma shluky pro případ normálního rozdělení, pro různé počty scénářů počítáme Euklidovskou vzdálenost vektoru optimálních vah od analytického řešení.

V případě použití dvou shluků vidíme výrazné zlepšení konvergence pro vysoký počet 50 000 scénářů. Obecně nemusí ale ani dva shluky stačit, což se projevuje například u Studentova rozdělení. Na následujícím grafu 4.2 je ukázáno, že v případě Studentova rozdělení a 50 000 scénářů by byl ideální počet shluků čtyři. Analytickému řešení odpovídá první shluk, který má také největší počet členů. Pokud předem zvolíme velký fixní počet shluků, můžeme vynechat řešení, která odpovídají požadovanému analytickému, a proto bychom rádi určili jejich ideální počet. V naší práci jsme se inspirovali Bayesovým informačním kritériem



Obrázek 4.1: Porovnání výsledků bez shlukování a se dvěma shluky

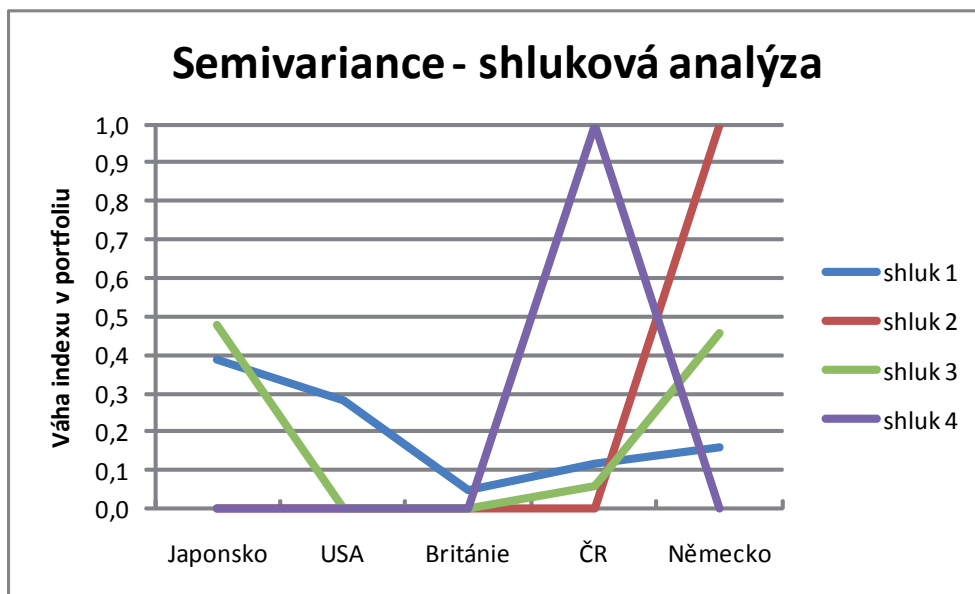
(BIC), více například v knize [7], a postupujeme podle následujícího algoritmu. Označme  $C$  počet optimálních vektorů vah  $\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^C$  a položme počet shluků  $k = 1$ ,  $i_0 = \infty$ :

1. proved' shlukovou analýzu s počtem shluků  $k$ , označ střed shluku příslušného vektoru  $\mathbf{w}^j$  jako  $\mathbf{s}^j$ ,
2. najdi největší shluk a označ jeho střed jako  $\mathbf{c}_k$ ,
3. spočti

$$i_k = C \log \left\{ \frac{\sum_{j=1}^C \sum_{i=1}^N (w_i^j - s_i^j)^2}{C} \right\} + Nk \log C,$$

4. pokud největší shluk obsahuje méně než  $C/2$  členů nebo pokud  $i_k > i_{k-1}$ , jdi na krok 5, jinak polož  $k = k + 1$  a jdi na krok 1,
5. konec algoritmu, optimální řešení  $\mathbf{c}_{k-1}$ .

**Poznámka 21** *Kritérium používané v kroku 3 algoritmu není Bayesovo informační kritérium ve smyslu původní definice. Použitý vzorec odpovídá verzi kritéria, která je založena na reziduálním součtu čtverců a rozšířena pro použití ve více-rozměrném případě. V naší práci nejsou podstatné asymptotické vlastnosti nebo robustnost tohoto kritéria, a proto používáme jeho nejjednodušší vícerozměrnou verzi.*



Obrázek 4.2: Studentovo rozdělení se 7 stupni volnosti, 50 000 scénářů

**Poznámka 22** Při shlukování může obecně dojít k situaci, kdy největší shluk není jednoznačně definován. V takovém případě je možné postupovat například tak, že vybereme shluk s nejmenším celkovým rozptylem vlastních členů. Zmíněná situace na našich datech nenastává, proto jsme tento krok do algoritmu nezařadili.

## 4.4 Rychlost výpočtu

Doba výpočtu optimálního řešení výrazně závisí na zvoleném rozdělení, míře rizika a počtu scénářů. Míry rizika můžeme podle rychlosti seřadit od nejrychlejší po nejpomalejší následovně:

- rozptyl,
- cVaR,
- absolutní odchylka,
- semivariance,
- VaR.

V případě rozptylu je rychlosti úlohy dosaženo hlavně odhadem varianční matice mimo optimalizační program a celkově malou velikostí předávané úlohy. U dalších měř rizika pak rychlost odpovídá druhu optimalizační úlohy, lineární programování je rychlejší než kvadratické a závisí i na počtu omezujících podmínek.

V případě celočíselného programování při výpočtu VaR je zpomalení výrazné a můžeme řešit jen úlohy řádově menšího rozsahu. Výpočty jsme prováděli na počítači s procesorem Core 2 Duo (2,4 GHz) a 4 GB operační paměti. Pro VaR jsme schopni v rozumném čase napočítat výsledky pro maximálně 1 000 scénářů, u ostatních měř rizika pro 50 000 scénářů. V případě VaR se také výrazněji projevuje vliv zvoleného rozdělení, největší zpomalení nastává pro Studentovo rozdělení, kde se s klesajícím počtem stupňů volnosti snižuje rychlost tak, že pro 3 nebo 4 stupně volnosti již trvá výpočet neúnosně dlouho. Navíc jsme zjistili, že výsledky získané pro 4 stupně volnosti jsou velmi podobné výsledkům pro 5 stupňů volnosti, a tak jsme se rozhodli pro časovou úsporu používat Studentovo rozdělení s 5 stupni volnosti. V případě 7 stupňů volnosti není zpomalení oproti normálnímu rozdělení tak výrazné, což svědčí o výrazném přiblížení samotných rozdělení a optimálních řešení.

## 4.5 Realizace výpočtu

Na zpracování uvedených dat, generování scénářů a výpočet optimalizačních úloh jsme použili vlastní program napsaný v jazyce C++. Program umožňuje zvolit následující parametry:

- předpokládané rozdělení - normální, Studentovo (včetně stupňů volnosti), logaritmicko-normální, žádné (scénáře),
- míru rizika - rozptyl, VaR, cVaR, absolutní odchylku, semivarianci,
- druh řešení - analytické nebo generované scénáře (včetně jejich počtu),
- nezáporné váhy - ano, ne,
- očekávaný výnos ve stejných jednotkách jako vstupní data,
- hladinu spolehlivosti,
- použitý odhad - nestranný nebo maximálně věrohodný,
- počet opakování při generování scénářů,
- shlukovou analýzu výsledků - ano, ne.

Podle zvolených nastavení program načte vstupní data, provede odhad parametrů rozdělení (pokud je to nutné), vygeneruje případné scénáře a vytvoří skript v jazyce GAMS [9]. Tento skript je předán do programu GAMS, vyřešen a výsledky jsou automaticky načteny a zpracovány. V případě generování scénářů se tento postup opakuje několikrát podle hodnoty parametru a výsledné řešení určíme jako průměr všech získaných platných řešení s případnou volbou optimálního shluku. Výstupem programu jsou tedy optimální váhy pro daná nastavení a vstupní

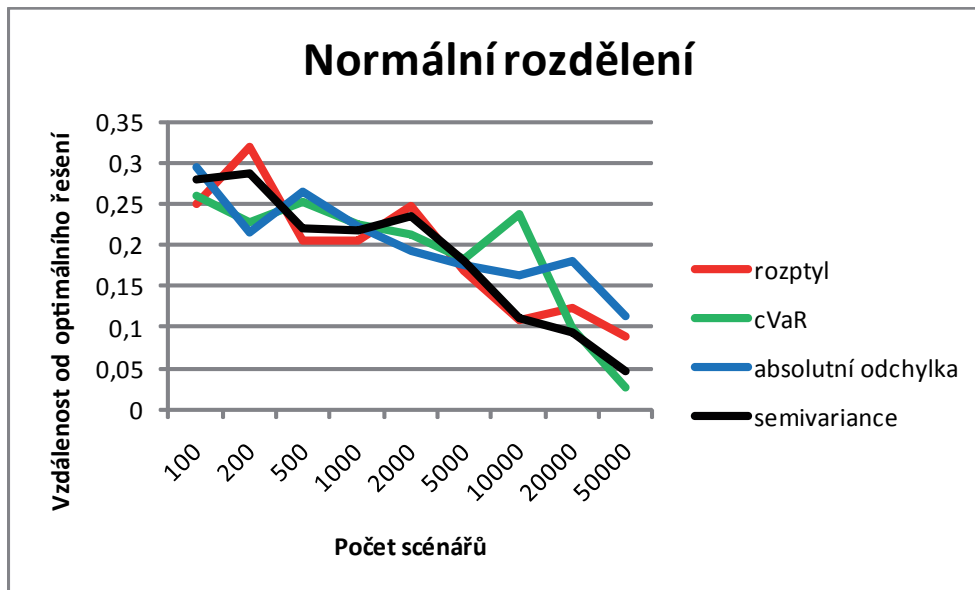
data. Program je určen pro operační systém Microsoft Windows, na přiloženém DVD jsou zdrojové kódy a projekt pro Microsoft Visual Studio 2008 [20] včetně použitých knihoven.

V naší práci jsme použili vždy hladinu spolehlivosti 95 %, nezáporné váhy a maximálně věrohodný odhad. V případě scénářů jsme prováděli 50 opakování výpočtu a shlukovou analýzu. Hladinu očekávaného výnosu jsme zvolili tak, aby byla větší než průměrný výnos v našich datech a zároveň také diverzifikovala výsledné portfolio.

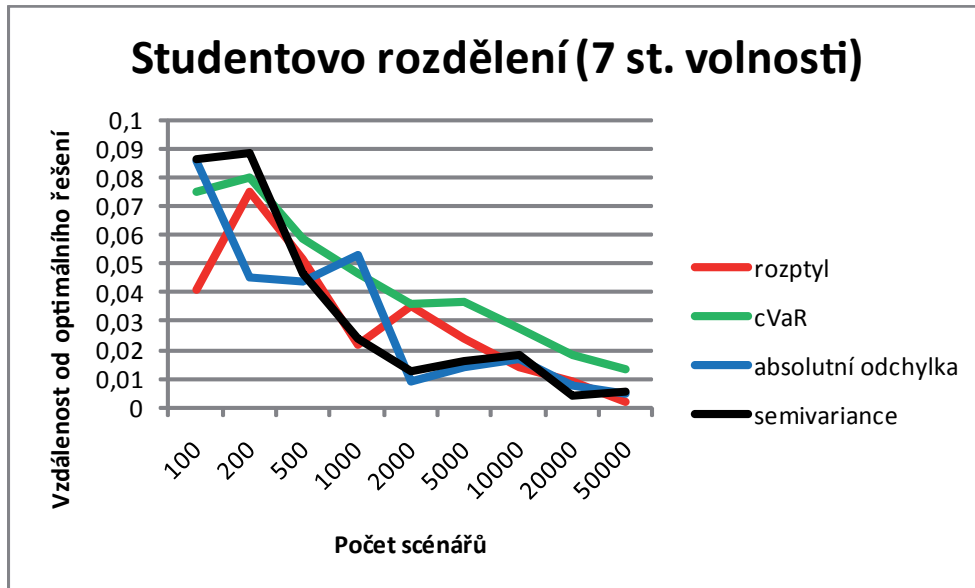
## 4.6 Výsledky podle rozdělení

V této kapitole postupně prezentujeme grafy, které ukazují rychlost konvergence řešení s diskrétními scénáři k optimálnímu analytickému řešení. Pro různý počet scénářů vkládáme do grafů Euklidovskou vzdálenost od optimálního analytického řešení při zvoleném spojitém rozdělení. Do grafů vkládáme všechny míry rizika kromě VaR, pro kterou se nám podařilo spočítat výrazně menší maximální počet scénářů, a tak lze její výsledky nalézt samostatně v následující kapitole.

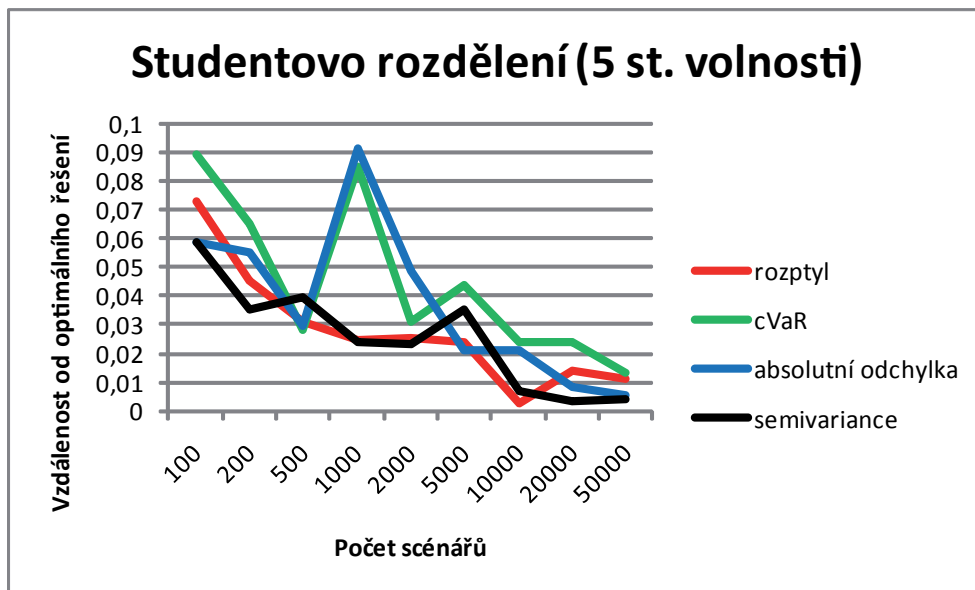
V případě eliptických rozdělení můžeme na následujících grafech 4.3, 4.4 a 4.5 pozorovat podobnou rychlost konvergence pro všechny míry rizika. Zároveň také můžeme říct, že s rostoucím počtem scénářů se opravdu přibližujeme analytickému řešení, což potvrzuje vhodnost zvolené shlukovací metody. V případě 50 000 scénářů již dostáváme poměrně přesná řešení, která se liší od analytického typicky v řádu setin u váhy dané akcie v portfoliu.



Obrázek 4.3: Normální rozdělení pro různé míry rizika



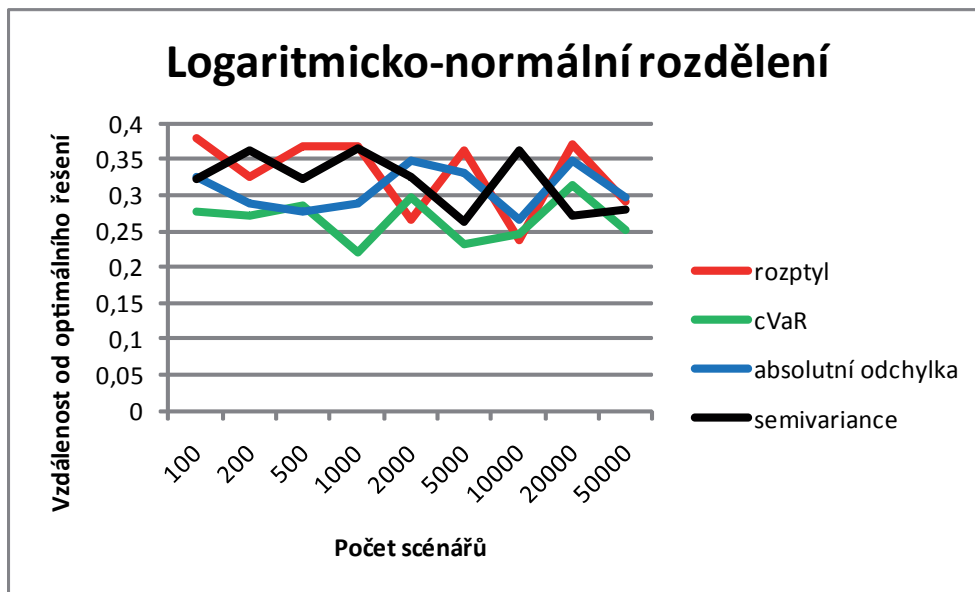
Obrázek 4.4: Studentovo rozdělení se 7 stupni volnosti pro různé míry rizika



Obrázek 4.5: Studentovo rozdělení s 5 stupni volnosti pro různé míry rizika

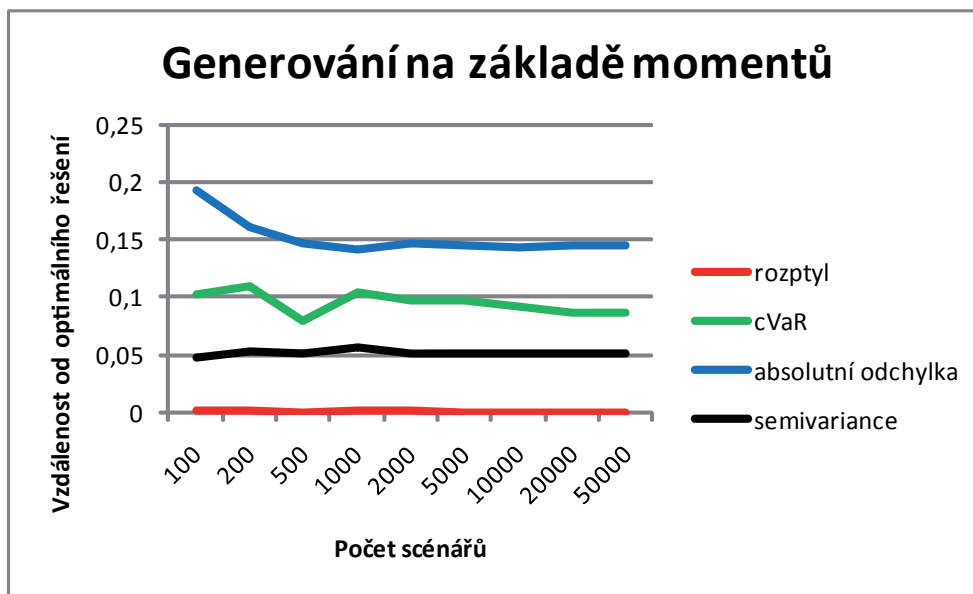


Za předpokladu logaritmicko-normálního rozdělení můžeme na grafu 4.6 pozorovat vliv dvou druhů nepřesností: nepřesnost z generování scénářů a nepřesnost použité analytické aproximace. Ani v případech velkého počtu scénářů nedosahujeme zlepšení výsledků konvergence, což přisuzujeme právě faktu, že neznáme přesné analytické řešení. V případě, kdy chceme najít optimální portfolio za předpokladu logaritmicko-normálního rozdělení, bychom podle uvedených výsledků volili raději řešení s velkým počtem scénářů než analytickou aproximaci. Navržená analytická aproximace má poměrně velkou odchylku a vzhledem k výpočetní náročnosti není vhodná pro velký počet akcií v portfoliu. Při generování velkého počtu scénářů dosahujeme u ostatních rozdělení celkem dobrých výsledků, a tak lze očekávat, že tento postup bude srovnatelně přesný i v případě logaritmicko-normálního rozdělení.



Obrázek 4.6: Logaritmicko-normální rozdělení pro různé míry rizika

Poslední možností je generování scénářů bez předpokladu o spojitém rozdělení, pouze na základě hodnot prvních čtyř momentů náhodné veličiny. V grafu 4.7 porovnáváme řešení získaná při použití původních dat jako scénářů s řešeními pro různý počet generovaných scénářů. Ukazuje se, že v případě, kdy máme dostatečný počet původních scénářů, nemá generování podle momentů výrazný smysl. Pokud bychom měli vstupních dat málo, lze tento postup naopak doporučit zejména kvůli mírám rizika jako je VaR a cVaR, které závisí na hladině spolehlivosti a u kterých je nutné, abychom disponovali dostatečným počtem scénářů po překročení této hladiny. Na grafu si také můžeme všimnout nulové odchylky v případě rozptylu, což potvrzuje fakt, že scénáře jsou tvořeny tak, aby měly stejný první i druhý moment.



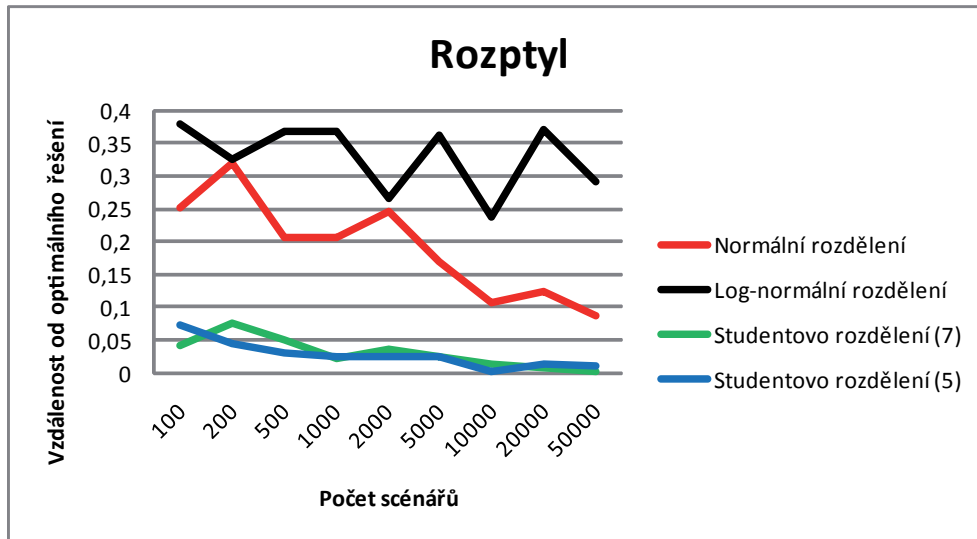
Obrázek 4.7: Generování scénářů podle momentů pro různé míry rizika

## 4.7 Výsledky podle míry rizika

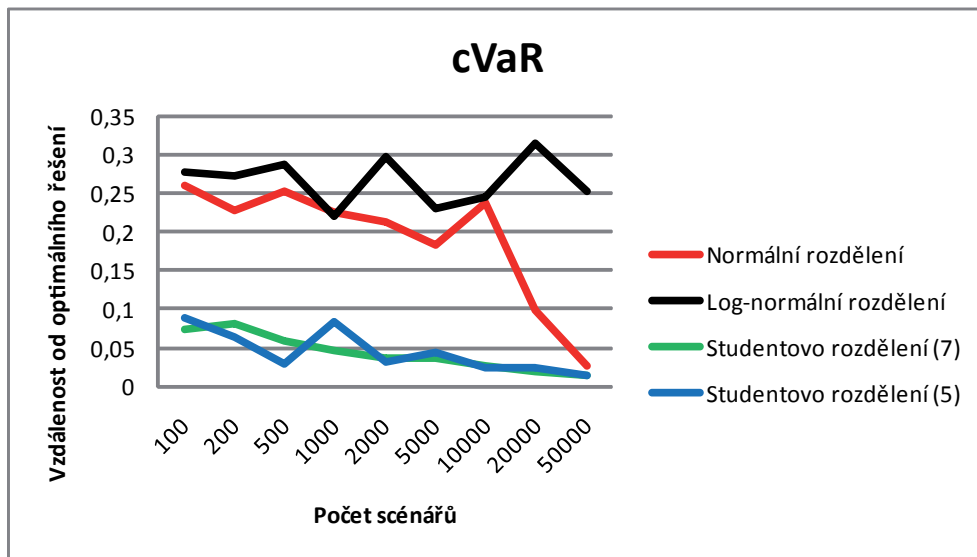
V této kapitole postupně prezentujeme obrázky, ve kterých opět porovnáváme Euklidovskou vzdálenost analytických optimálních řešení od optimálních řešení pro různý počet scénářů, ale do grafů vynášíme výsledky pro různá rozdělení, abychom porovnali, jak výrazně záleží na jejich volbě.

Na všech grafech lze pozorovat podobné výsledky. Konvergence je nejhorší pro případ logaritmicko-normálního rozdělení, a to hlavně z důvodu dodatečně nepřesnosti použité aproximace analytického řešení, se kterým výsledky porovnáváme. Při srovnání normálního a Studentova rozdělení vidíme, že lepších výsledků dosahujeme za předpokladu Studentova rozdělení, ale s rostoucím počtem scénářů se odchylky přibližují. V případě rostoucího počtu stupňů volnosti u Studentova rozdělení lze očekávat výraznější přiblížení k normálnímu rozdělení, které můžeme pozorovat i na rychlosti prováděných výpočtů a plyne z teoretických výsledků.

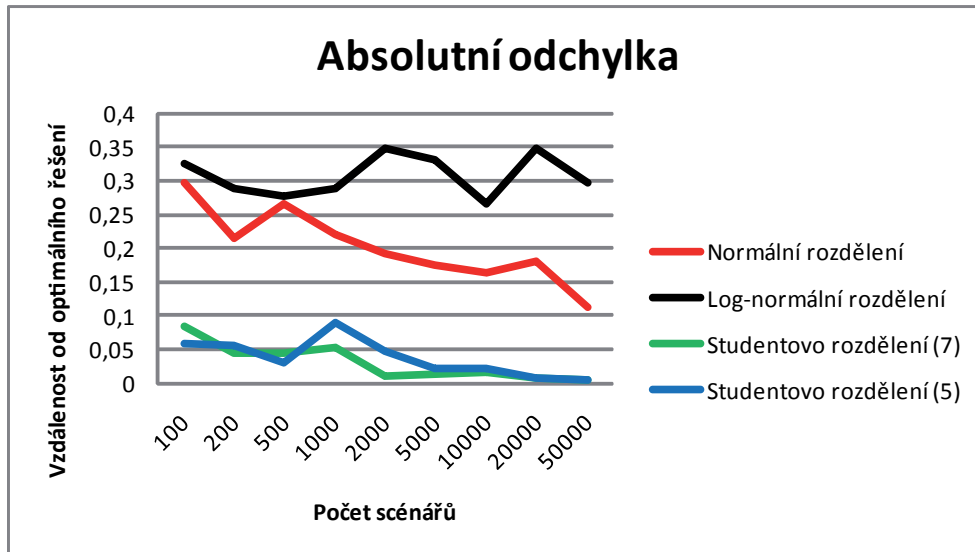
V případě VaR se nám podařilo spočítat výsledky pro maximálně 1 000 scénářů, a tak jsme přidali některé další menší počty scénářů, abychom mohli alespoň částečně posoudit, zda dochází ke zlepšení konvergence. V grafu 4.12 můžeme pozorovat určité zlepšení výsledků s rostoucím počtem scénářů, ale vzdálenost od optimálního analytického řešení zůstává v případě normálního rozdělení poměrně vysoká. Pokud bychom dokázali vyřešit příslušnou úlohu pro větší počet scénářů, lze očekávat podobné výsledky jako u ostatních měr rizika. Vzhledem k výpočetní náročnosti a jejímu exponenciálnímu nárůstu s rostoucím počtem scénářů však doporučujeme používat analytické optimální řešení, kdykoliv je to možné.



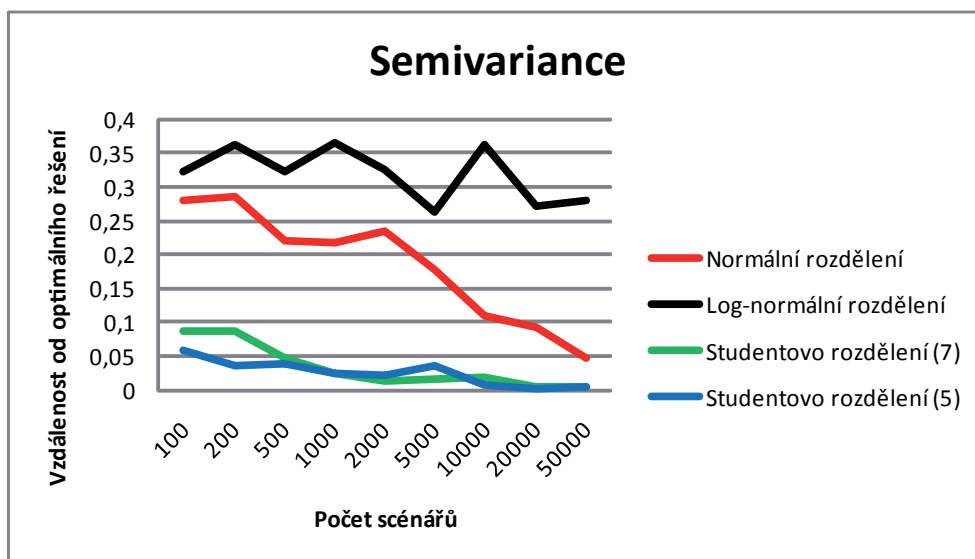
Obrázek 4.8: Rozptyl pro různá spojitá rozdělení



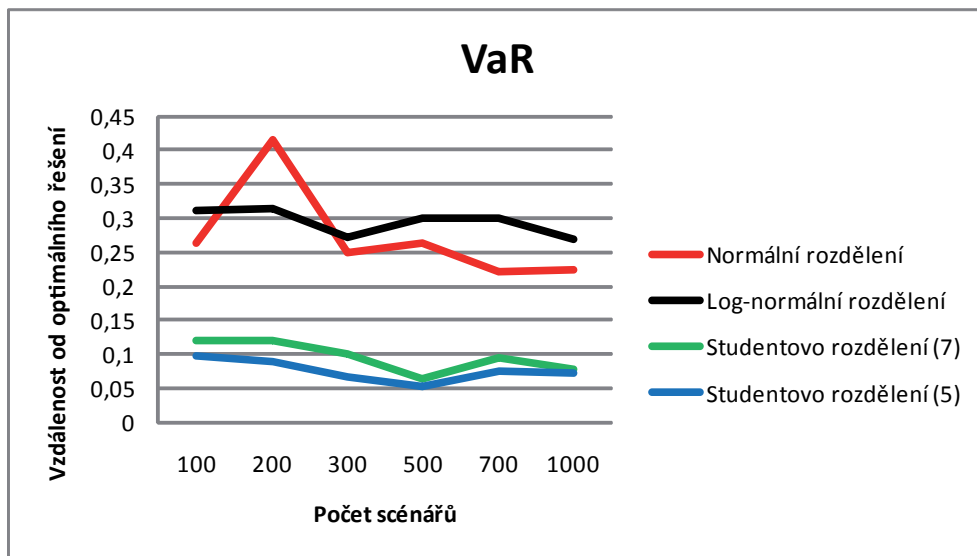
Obrázek 4.9: cVaR pro různá spojitá rozdělení



Obrázek 4.10: Absolutní odchylka pro různá spojitá rozdělení



Obrázek 4.11: Semivariance pro různá spojitá rozdělení



Obrázek 4.12: VaR pro různá spojitá rozdělení

# Kapitola 5

## Závěr

Tato práce se zabývala hledáním optimálního portfolia akcií za předpokladu různých spojitých rozdělání výnosů a měr rizika. Pro všechny úlohy jsme odvodili přesná analytická řešení nebo v případě logaritmicko-normálního rozdělání alespoň přibližné řešení. Nalezená řešení jsme porovnávali s řešeními při generování diskretních scénářů a implementovali jsme vlastní postup, ve kterém pomocí shlukové analýzy vybíráme při opakovaných pokusech optimální řešení z množiny optimálních vektorů vah.

Z prezentovaných výsledků plyne, že v případě eliptických rozdělání konverguje řešení aproximativní úlohy s generovanými scénáři k analytickému řešení pro všechny zvolené míry rizika a při počtu 50 000 scénářů jsou rozdíly mezi vektory optimálních vah velmi malé. U logaritmicko-normálního rozdělání jsme v případě analytického řešení omezení přesností použité aproximace, a tak nedochází ke konvergenci ani při generování velkého množství scénářů. V případě, kdy v praxi hledáme optimální portfolio za předpokladu logaritmicko-normálního rozdělání, nám tedy vychází jako lepší postup generování velkého množství scénářů než použití analytické aproximace. Vyzkoušeli jsme i metodu generování scénářů bez předpokladu o rozdělání, kde se ukázalo, že v případě velkého počtu původních scénářů nemá vytváření dalších scénářů prokazatelný pozitivní přínos. V případě malého počtu původních scénářů může ale být tato metoda užitečná. Na reálných datech jsme ukázali, že při výpočtu s generovanými scénáři je nutné používat shlukovou analýzu pro volbu optimálního řešení, v opačném případě bychom s rostoucím počtem scénářů nemuseli dosáhnout konvergence. Z uvažovaných měr rizika nám vychází jako výhodné používat rozptyl nebo cVaR. Obě míry rizika dosahují velmi dobrých výsledků z hlediska konvergence a navíc lze výpočty příslušných optimalizačních úloh provádět velmi rychle. Pokud bychom měli možnost volby rozdělání, tak bychom volili Studentovo rozdělání se 7 stupni volnosti. Studentovo rozdělání dosahuje ze všech uvažovaných rozdělání nejmenší odchylky od analytického řešení při generování scénářů. Při 7 stupních volnosti jsou stále zachovány velmi dobré vlastnosti rychlosti konvergence a zároveň dosahujeme přijatelné doby trvání výpočtů.

Naše práce by se dala v mnoha ohledech rozšířit. Uvažovali jsme jen několik základních měr rizika, abychom postihli úlohy lineárního, kvadratického a celočíselného programování, ale způsobů jak měřit riziko je mnohem více. Zároveň bychom také mohli uvažovat o přidání dalších možných rozdělení výnosů portfolia. Dále bychom rádi zkoumali vliv různých parametrů úlohy na konvergenci řešení. V případě zvyšování požadovaných očekávaných výnosů předpokládáme zrychlení konvergence vzhledem ke zmenšení množiny přípustných řešení, zajímavé by bylo i povolení záporných vah akcií v portfoliu. V případě aproximace logaritmicko-normálního rozdělení bychom také rádi posoudili vliv volby bodů rovnosti momentových vytvořujících funkcí na přesnost řešení. Naše modely by dále mohly být rozšířeny o dynamiku vývoje trhu, změny uvažovaných parametrů a případné rozhodovací postupy, které by se prováděly v každém kroku modelu.

# Literatura

- [1] Abramowitz, M. and Stegun I. A. (1964): *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, New York, ISBN 0-486-61272-4
- [2] *ALGLIB numerical analysis and data processing library* <http://www.alglib.net/>
- [3] Anděl J. (2007): *Základy matematické statistiky*, Matfyzpress, Praha, ISBN 80-7378-001-1
- [4] *Armadillo C++ linear algebra library* <http://arma.sourceforge.net/>
- [5] Bilodeau, M. (2004): *Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions*, North American Actuarial Journal 8 (3), pp. 118-123
- [6] Birbil, S.; Frenk J.; Kaynar B.; Noyan N. (2008): *Risk Measures and Their Applications in Asset Management*, research report, Erasmus University Rotterdam
- [7] Cipra, T. (2008): *Finanční ekonometrie*, Ekopress, Praha, ISBN 978-80-86929-43-9
- [8] Dupačová, J.; Hurt, J. and Štěpán L. (2002): *Stochastic Modeling in Economics and Finance*, Kluwer, ISBN 1-4020-0840-6
- [9] *General Algebraic Modeling System (GAMS)* <http://www.gams.com/>
- [10] Glasserman, P.; Heidelberger, P. and Shahabuddin P. (2002): *Portfolio Value-at-Risk with Heavy-Tailed Risk Factors*, Mathematical Finance 12 (3), pp. 239–269
- [11] Hebák, P.; Hustopecký, J. (1987): *Vícerozměrné statistické metody s aplikacemi*, Praha, SNTL/ALFA, ISBN 80-7333-025-3
- [12] Hoyland, K.; Kaut, M. and Wallace, S. (2003): *A Heuristic for Moment-Matching Scenario Generation*, Computational Optimization and Applications, 24 (2-3), pp. 169-185



- [13] Huang, A. (2006): *A Comparison of Value at Risk Approaches and a New Method with Extreme Value Theory and Kernel Estimator*, disertační práce, City University of New York
- [14] J.P. Morgan Risk Metrics (1995): *Technical Document, 4<sup>th</sup> Edition*, Morgan Guaranty Trust Company, New York
- [15] Kent, T. J. and Tyler, D. E. (1991): *Redescending M-Estimates of Multivariate Location and Scatter*, Annals of Statistics 19, pp. 2102-2119
- [16] Kopa, M. (2006): *Utility functions in portfolio optimization*, disertační práce, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze
- [17] Kotz, S. and Nadarajah, S. (2004): *Multivariate t Distributions and Their Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, ISBN 0-521-82654-3
- [18] Landsman, Z. and Valdes, E. (2003): *Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions*, North American Actuarial Journal 7 (4), pp. 55-71
- [19] Markowitz, H. M. (1952): *Portfolio Selection*, The Journal of Finance 7 (1), pp. 77–91
- [20] Microsoft Visual Studio <http://www.microsoft.com/cze/msdn/produkty/vstudio/default.aspx>
- [21] Mehta, N.; Molisch, A.; Wu, J. and Zhang, J. (2006): *Approximating the Sum of Correlated Lognormal or Lognormal-Rice Random Variables*, Mitsubishi Electric Research Laboratories
- [22] Ogryczak, W., and Ruszczyński, A. (2002): *Dual Stochastic Dominance and Related Mean-Risk Models*, SIAM Journal on Optimization 13, pp. 60-78
- [23] Pflug, G. Ch. and Romisch W. (2007): *Modeling, Measuring and Managing Risk*, World Scientific Publishing Company, ISBN 978-9812707406
- [24] Rockafellar R. T. and Uryasev S. (2002): *Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions*, Journal of Banking and Finance 26 (7), pp. 1443-1471
- [25] Tina's Random Number Generator Library <http://trng.berlios.de/>
- [26] Uryasev, S. (2002): *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*, Kluwer Academic Publishers, ISBN 0-7923-6644-1

# Příloha A

## Obsah přiloženého DVD

Na přiloženém disku lze najít následující obsah:

- Zdrojové kódy - v adresáři **Source** je kompletní projekt pro Visual Studio 2008 spolu se soubory knihoven pro maticové výpočty a generování scénářů.
- Spustitelný program - v adresáři **Install** je spustitelný program pro Microsoft Windows včetně potřebných knihoven.
- Dokumentace - text diplomové práce ve formátu PDF a krátkou nápovědu k použití přiloženého programu lze najít v adresáři **Documentation**.
- Data - použitá data obsahující výnosy a finální hodnoty zvolených tržních portfolií jsou uložena v adresáři **Data**.