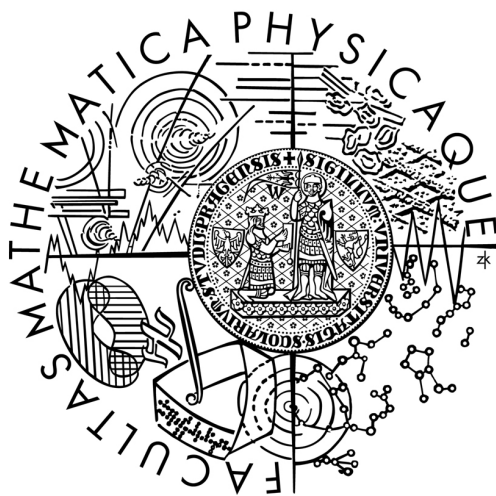


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

# DIPLOMOVÁ PRÁCE



Marie Motyčková

**Využití internetu ve výuce goniometrie na střední škole**

Katedra didaktiky matematiky  
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jarmila Robová, CSc.  
Studijní program: Matematika, Učitelství pro střední školy M-Dg

## Poděkování:

Chtěla bych poděkovat všem, kteří mi pomohli vytvořit tuto práci, především RNDr. Jarmile Robové, CSc. za její vedení, cenné rady a poznámky. Dále děkuji své rodině a svému příteli za podporu, kterou mi během studia poskytovaly.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 21.4.2006

Marie Motyčková

# Obsah

Obsah.....	2
Úvod.....	4
Hodnocení existujících stránek .....	5
České stránky .....	5
Anglické stránky .....	9
Detail nejlepší a nejhorší stránky .....	17
Srovnávací tabulka .....	19
Vlastní webové stránky .....	21
Závěr.....	22
Seznam použité literatury .....	23
Příloha: Vlastní webové stránky .....	24

**Název práce:** *Využití internetu ve výuce goniometrie na střední škole*

**Autor:** *Marie Motyčková*

**Katedra (ústav):** *Katedra didaktiky matematiky*

**Vedoucí diplomové práce:** *RNDr. Jarmila Robová, CSc.*

**e-mail vedoucího:** *jarmila.robova@mff.cuni.cz*

**Abstrakt:**

*Diplomová práce se zabývá možnostmi využití internetu ve výuce goniometrie. Práce je rozdělena do dvou částí.*

*První část se zabývá již existujícími internetovými stránkami s tématem goniometrie. Nalezené stránky jsou stručně popsány a zhodnoceny. Na konci této části je uvedena tabulka s kritérii, podle kterých byly stránky hodnoceny.*

*Druhou část práce tvoří nové webové stránky o goniometrii a trigonometrii. Součástí je zpracování goniometrických funkcí včetně jejich grafů, výpočtů funkčních hodnot, definicí pomocí jednotkové kružnice apod. Interaktivní prvky jsou vytvořeny jako Java applety. Applety jsou také hojně využívány k dokreslení trigonometrické části stránek. V ní se nalézají trigonometrické věty včetně jejich důkazů a úloh, které je využívají ve výpočtu.*

*Důkazy a úlohy jsou doprovázeny Java skripty, které postupně poskytují nápovědu.*

**Klíčová slova:** *goniometrie, výuka, matematika, internet*

**Title:** *Using of internet in teaching trigonometry at high-school*

**Author:** *Marie Motyčková*

**Department:** *Department of Didactics of Mathematics*

**Supervisor:** *RNDr. Jarmila Robová, CSc.*

**Supervisor's e-mail address:** *jarmila.robova@mff.cuni.cz*

**Abstract:**

*The thesis deals with the possibilities of using internet in teaching trigonometry. It is divided into two parts.*

*Already existing web sites are the topic of the first part. Sites which were found are briefly described and classified. At the end of this part, table with criteria used for classification of the sites is stated.*

*Second part of the thesis consists of new web sites concerning trigonometry. Goniometric functions with their graphs, evaluating of values, definitions by unit circle, etc. are included. Interactive elements are implemented as Java applets. Applets are also heavily used for illustrating trigonometric section of web sites. This section includes trigonometric theorems with proofs and exercises which use them in solutions .*

*Proofs and exercises are supplemented by Java scripts which stepwise reveal help.*

**Keywords:** *trigonometry, teaching, mathematics, internet*

# Úvod

Diplomová práce je věnována využití internetu k výuce matematiky na střední škole. Patří do sady nově vytvořených internetových stránek vznikajících v rámci bakalářských a diplomových prací na Katedře didaktiky matematiky na MFF UK. Každá z těchto prací zpracovává určité téma středoškolské matematiky. Tématem této práce je goniometrie. Svou strukturou odpovídá tato práce pracím již napsaným.

Práce je rozdělena do dvou částí. První část tvoří hodnocení již existujících stránek s daným tématem. Díky vyhledávačům se nám na internetu podařilo najít velké množství stránek, českých a anglických, které se goniometrií zabývají. Úkolem bylo stránky, které se ukázaly být alespoň částečně kvalitní, zhodnotit nejprve slovně, pak číselně v tabulce, přiložit malý ilustrativní obrázek této stránky a adresu, kde lze tuto stránku najít. To vše má studentům a učitelům usnadnit orientaci v množství internetových stránek, jestliže se zajímají o goniometrii či její didaktiku.

Druhá část práce spočívala v tvorbě nových stránek s daným tématem. Naším cílem bylo vytvořit nové internetové stránky, které mohou studentům přiblížit tuto část matematiky a doufáme, že to pro ně bude vhodná pomůcka. Vytvoření nových stránek bylo také logickým vyústěním první části. V ní je ukázáno, že je velmi málo kvalitních českých stránek, které se věnují goniometrii. Pokud jsme takové objevili, tak téměř vůbec nevyužívaly možností internetu. Těmito nedostatky jsme se nechali inspirovat a snažili jsme se vytvořit srozumitelný učební text s interaktivními prvky ve formě Java appletů (například souvislost jednotkové kružnice s grafem jednotlivých goniometrických funkcí nebo výpočet funkčních hodnot goniometrických funkcí při zvoleném argumentu).

Dalším interaktivním prvkem jsou tzv. „smajlíci“. Jsou to obrázky, které nejen oživují vzhled stránek, ale hlavně slouží k různým nápovědám, k tomu, aby skryli různé poznámky, rozdělili příklady do menších kroků atd.

Nové stránky mají sloužit především studentům středních škol a jsou vhodné nejen pro zařazení do výuky, ale hlavně k samostudiu a procvičování probírané látky. Tištěná podoba stránek tvoří druhou část, která je přiložena i v elektronické podobě na CD.

## Hodnocení existujících stránek

Jak již bylo řečeno, tak v této části diplomové práce šlo o nalezení a zhodnocení již existujících internetových stránek, které jsou věnované výuce goniometrie. Cílem bylo ukázat, zda se mohou začlenit do výuky, či jsou pro tyto účely nevhodné. Nejprve jsem u nalezených stránek uvedla slovní hodnocení. Dále jsem dle uvedených kritérií tyto stránky ještě zhodnotila číselně. Toto číselné hodnocení je na konci této kapitoly shrnuto do tabulky.

Cílem bylo najít stránky, které jsou něčím zajímavé a hlavně kvalitní, především z didaktického hlediska. Jedná se o stránky, které by mohly sloužit jako interaktivní výukový program pro studenty. Málokteré ovšem odpovídají naší představě kvalitních webových stránek.

K vyhledání stránek jsem použila prohlížeče Google a Seznam. Bohužel existuje málo kvalitních českých stránek s goniometrií vhodných pro studenty středních škol. Výhodou tohoto tématu naopak je, že se hojně užívá na vysokých školách, takže se mu okrajově věnují i opakovací kurzy na stránkách vysokých škol.

Jelikož se internet neustále vyvíjí, vznikají nové a staré zanikají, je možné, že některé z uvedených odkazů již pravděpodobně v době odevzdání diplomové práce nebudou funkční.

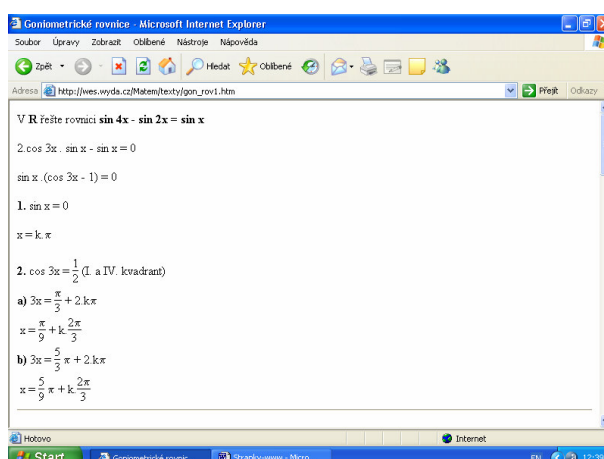
## České stránky

### Webová škola

(<http://wes.wyda.cz/Matem/texty/>)

Tato poměrně rozsáhlá webová škola pamatuje i na matematiku, mimo jiné na goniometrii. Najdeme zde sadu řešených příkladů na goniometrické funkce - určování definičního oboru, úprava výrazů s těmito funkcemi atd. Dále jsou zde příklady na goniometrické rovnice a nerovnice. Příklady jsou členěny do pěkně přehledných kroků, ale nějaký, i sebemenší, komentář by neuškodil.

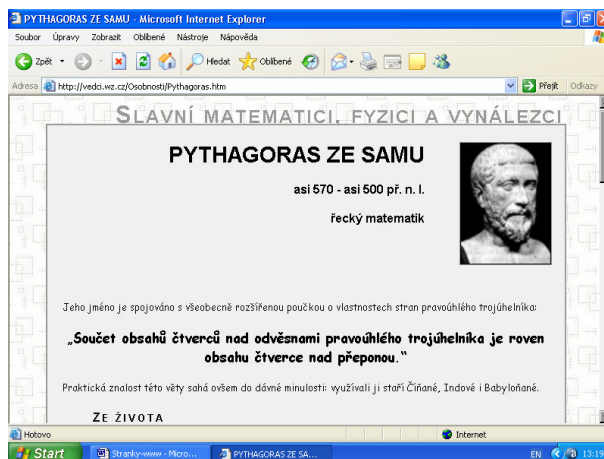
Jakmile se ovšem člověk začne stránkami probírat a chce se podívat na vybrané téma podrobněji, tak zjistí, že výše uvedené příklady jsou pouze motivační a další výuku si musí zaplatit. Z designového hlediska jsou výukové části pouze černobílé, což rozhodně nepřidá na oblíbenosti stránky.



## Slavní matematici, fyzici a vynálezci (<http://vedci.wz.cz/historie/16.htm>)

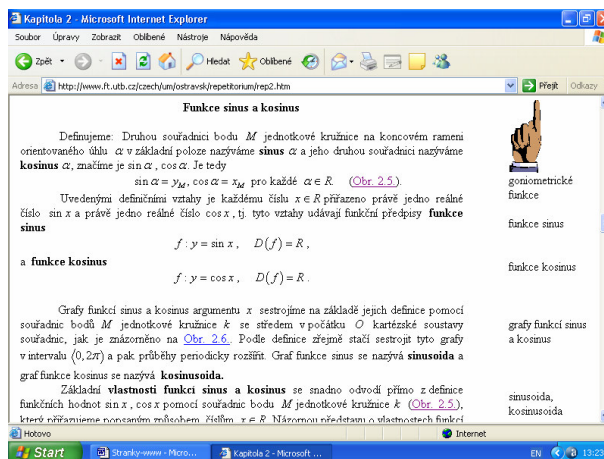
Neobvyklá stránka, která je určena pro ty, kteří se zajímají o historické pozadí matematiky. Učitelům tyto stránky mohou sloužit jako užitečný materiál pro zpestření výuky.

Nás zajímá historie trigonometrie. Předmětem zájmu řeckých a babylónských trigonometrů byla trigonometrie útvarů na kulové ploše, tedy trigonometrie sférická. Rovinnou trigonometrii pěstovali jako pomocný prostředek při řešení úloh sférické trigonometrie.



## Technologická fakulta Tomáše Bati ve Zlíně-Repetitorium (<http://www.ft.utb.cz/czech/um/ostravsk/repetitorium/rep1.htm>)

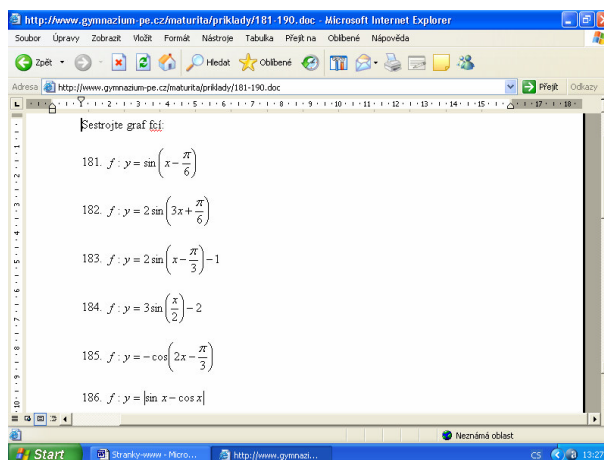
Jedná se o stránku, která obsahuje stručné shrnutí látky určené převážně studentům technologické fakulty Univerzity Tomáše Bati. Ze sledovaného tématu zde nalezneme výklad goniometrických funkcí a souhrn goniometrických vzorců. Pokud jde o získání základního přehledu o tomto tématu, může být stránka užitečná i pro středoškoláka. Stránka ovšem bohužel neobsahuje žádné řešené příklady.



## Gymnázium Pelhřimov- sbírka příkladů (<http://www.gymnazium-e.cz/maturita/priklady/priklady.htm>)

Tato stránka naopak obsahuje mnoho úloh. Nejde o klasickou stránku, kterými se budeme zabývat a které budeme hodnotit, ale je uvedena pro úplnost a pro představu, že lze nalézt i stránky tohoto typu. Jedná se souhrn maturitních příkladů pro gymnázium. Bohužel ani základní příklady nejsou řešené.

Přesto zde studenti naleznou sérii příkladů ke každému tématu, které se na střední škole probírá. A příkladů není málo, můžeme jich zde nalézt 500, přičemž příklady věnované tématům goniometrie a trigonometrie čítají kolem 50.



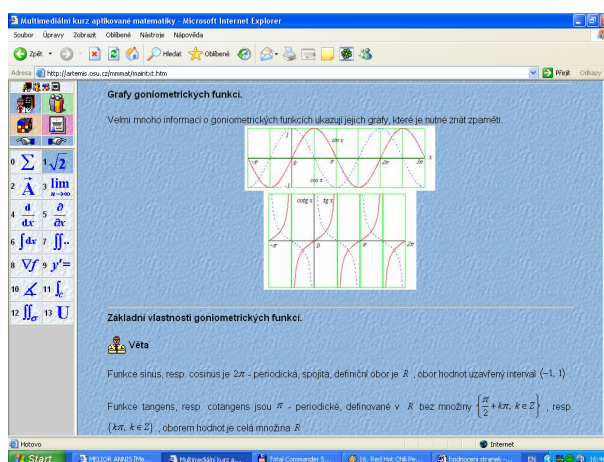
## Ostravská univerzita - Goniometrie (<http://artemis.osu.cz/mmmat>)

Tento multimediální kurz aplikované matematiky, jak říká název stránky, je především určen studentům Přírodovědecké fakulty Ostravské univerzity. Obsahuje hlavně základy diferenciálního a integrálního počtu včetně jejich aplikací. Zvědavý čtenář ovšem brzy zjistí, že se autor také věnuje stručnému repertoriu vybraných partií středoškolské matematiky včetně tématu Goniometrie.

Již přehledná úvodní stránka nás seznámí se členěním učiva. Můžeme si vybrat buď teorii, úlohy nebo si vše naučené vyzkoušet v testech. Autor stručně, ale přehledně, shrnuje poznatky z témat: goniometrické a cyklometrické funkce, goniometrické rovnice a nerovnice.

Zajímavější je ovšem kapitola, která se věnuje úlohám. Na výběr jsou buď úlohy elementární a teoretické otázky nebo náročnější početní úlohy. Úlohy jsou zadány formou otázek s možnou volbou odpovědi. Nad každou otázkou či úlohou je malý symbol klíče, který po kliknutí zobrazí správnou odpověď či výsledek. Nakonec si uživatel může ověřit svoje znalosti v testu, kde si nastaví počet otázek a příkladů. Test lze použít přímo v online režimu.

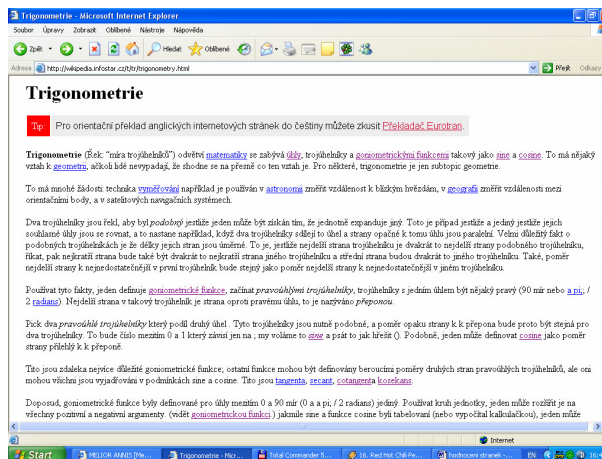
Po grafické stránce se jedná o velice zdařilou práci, kterých není mnoho. I přes stručný obsah stránky věnovaný tomuto tématu, určitě stojí za shlédnutí.





## Wikipedia- česká verze (<http://wikipedia.infostar.cz/t/tr/trigonometry.html>)

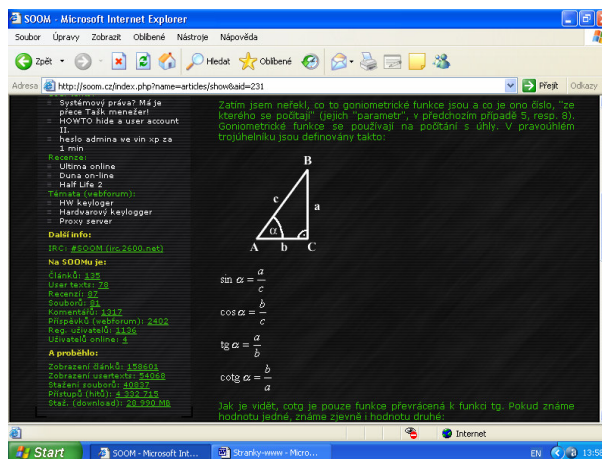
Jedná se o doslovnou kopii anglických internetových stránek, takže co bude řečeno pozitivního o anglické verzi, se netýká verze české. Jde o překlad realizovaný v nějakém překladači, takže se zde sice vyskytují česká slova, ale rozhodně nejde o český text. Sami uznejte, zda tato věta zní česky: „Dva trojúhelníky jsou řekl, aby byl *podobný* jestliže jeden může být získán tím, že jednotně expanduje jiný.“ Nebo „Pro některé, trigonometrie je jen subtopic geometrie.“ V české verzi tyto stránky doporučuji snad pouze učitelům angličtiny jako odstrašující příklad použití automatických překladačů.



## SOOM (<http://soom.cz/index.php?name=articles/show&aid=231>)

Stránka je převážně určená žákům základních škol. Jedna z prvních nevýhod této stránky je v jejím pomalém otevírání. Cílem autora bylo vytvoření čtivého a srozumitelného článku o goniometrii a jak sám píše, článek není určen těm, kdo goniometrii perfektně zvládají, ale těm, kteří nevědí, o co jde. Styl vysvětlování je podrobný a jednoduchý. Dokonce v komentářích autor vysvětluje, jak se co čte, čímž zvyšuje didaktickou úroveň.

Bohužel článek není dlouhý, zabývá se pouze zavedením goniometrických funkcí v trojúhelníku. Kdyby autor rozšířil počet článků zabývajících se matematikou, tak by si jistě mezi žáky, kteří nemají oblibu v matematice, našel své příznivce.



## Anglické stránky

### Dave's Short Trig Course (<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/trig/>)

Jedná se o velice přehlednou stránku, která jako jedna z mála má i vydařený design. Stránka je členěná do několika kapitol. První tři kapitoly, nebo lépe řečeno otázky, mají motivační charakter. Seznámení s odpověďmi na tyto otázky velice doporučuji učitelům, kteří jsou od žáků neustále „bombardováni“ otázkami typu „Na co mi to je?“ nebo „K čemu se to používá?“.

Před výkladem samotné goniometrie se autor nejprve zabývá Pythagorovou větou a vztahy mezi podobnými trojúhelníky. V rámci goniometrie vysvětluje problematiku goniometrických funkcí v trojúhelníku, dále výkladem a zavedením těchto goniometrických funkcí, funkcí k nim inverzním. Nakonec je zde uvedeno shrnutí goniometrických rovností a odvození součtových vzorců, kterým předchází jejich interaktivní demonstrace.

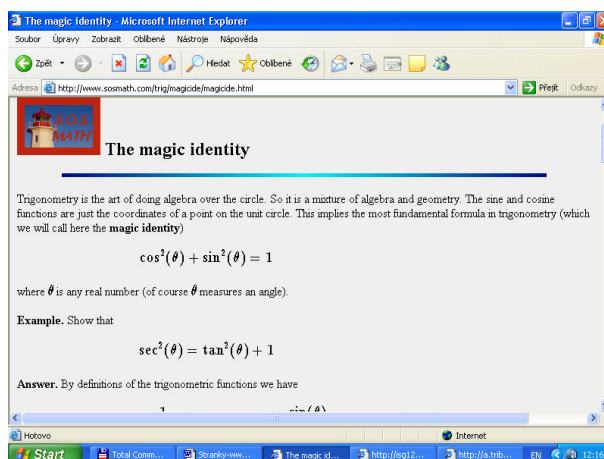
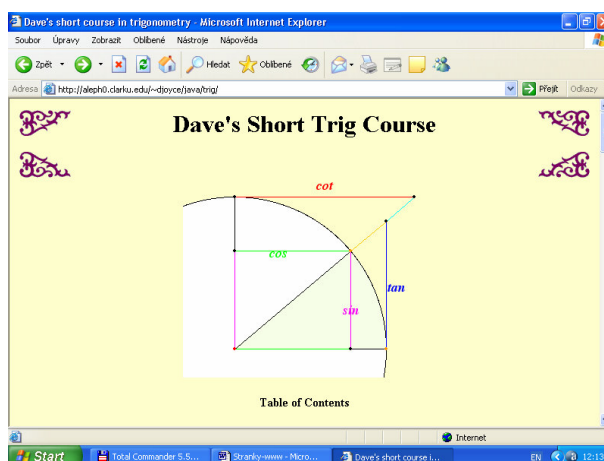
Pro hlubší pochopení či nalezení důkazů některých vztahů jsou zde odkazy na elektronickou verzi Euklidových Základů. Obrázky, a to převážně trojúhelníků, jsou tvořeny pomocí Java appletů. Díky nim se stránka stává interaktivní. Na konci každé kapitoly je odkaz na následující kapitolu, což zajišťuje plynulost výkladu.

Nezanedbatelnou součástí je velké množství příkladů (kolem 600). Každý příklad je rozdělen do tří částí. První z nich je zadání, dále následuje nápověda a nakonec výsledné řešení. Tyto stránky lze považovat za jedny z nejlepších, které se goniometrií zabývají.

### S.O.S. Math (<http://www.sosmath.com/trig/trig.html>)

Zprvu nadějná stránka s podrobně vyloženými základy trigonometrie - oblouková míra, převody mezi stupni a radiány i s příklady, seznam vzorečků, ze kterých se později „vyloupnou“ tabulky s goniometrickými funkcemi a vzorci. Vše zachraňuje kapitola s názvem „Řešení trigonometrických rovnic“.

Pro úplné začátečníky jsou zde poutavě zpracovány příklady na trigonometrické rovnice i se zkouškou a grafickým řešením.



Také náročnější čtenáři si přijdou na své v kapitolách derivace goniometrických funkcí, funkce hyperbolické a k nim inverzní. V této části jsou dokonce obrázky, z nichž jeden je „hýbací“. Po faktické stránce jde o formální matematický výklad, slovní komentáře můžeme najít v každém výpočtovém kroku, což napomáhá k dobré orientaci v textu. Nedochází tím k přehlčení úpravami matematických výrazů a vede to k lepšímu přehledu v dané problematice.

Z grafického hlediska není stránka zajímavá; obrázky, kterých ovšem není moc, jsou vesměs barevné, ale jinak jde o černobílý text. Jedině vzorce jsou zvýrazněny tučnějším písmem. Díky řešeným příkladům a hyperbolickým funkcím lze doporučit k prohlédnutí.

## Dave's page: Frequently Asked Questions About Trigonometry (<http://catcode.com/trig/>)

Anglická stránka, psána velmi neformálně, začíná třemi otázkami a odpověďmi. Jde spíše o motivační stránku, která poskytuje stručný přehled o této látce. Nesoustřeďuje se na hlubší poznatky, nemluví o nějakém odvozování vzorečků apod. Klade se zde důraz na vysvětlení pomocí obrázků, zdařile vytvořených formou Java skriptů.

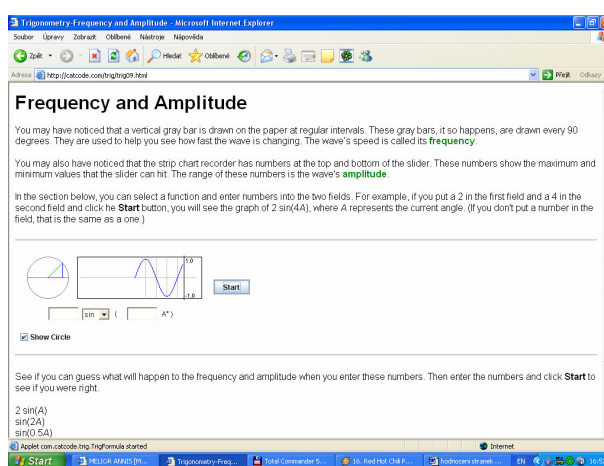
Autor se snaží upozorňovat na úskalí, které nazývá „reálné světové výstrahy“. V nich pokládá otázky čtenáři, který se má více zamyslet nad právě nastíněnou věcí, a vede ho k tomu, aby vše logicky pochopil. Jde vlastně o odhalení krás trigonometrie. Autor za tímto cílem jde postupně, začíná u stínu, který vrhá tyč, přes stíny tyče získané ze dvou stran a číselnému vyjádření velikosti jejich úhlu. Dále již zavádí pojmy odvěsna a přepona, dává do souvislosti jejich délky a úhel, který svírají. Nakonec dojde k funkcím sinus, kosinus a tangens. Na úplný závěr dává malý testík s otázkami z právě nabytých vědomostí.

Interaktivitu stránky zvyšuje například také skript, který vytváří sinusoidu pomocí jednotkové kružnice či zvukové vstupy, jak se která funkce správně vyslovuje. Jde o velice originální pojetí výkladu této problematiky s nápaditými příklady a hlavně skripty. Skripty lze zastavit, podívat se na dosažený výsledek a pak je znovu spustit.

Stránku doporučuji hlavně studentům, skripty se dají snadno ovládat a není ani třeba tolik umět anglicky.

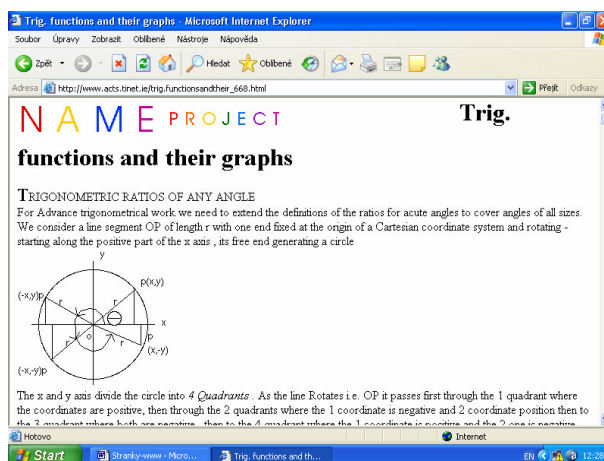
## Name project - Trigonometry ([http://www.acts.tinet.ie/trigonometry\\_645.html](http://www.acts.tinet.ie/trigonometry_645.html))

Jedná se o velmi obsáhlou stránku s detailním zpracováním jednotlivých kapitol, která dává kompletní přehled o trigonometrii. Najdeme zde grafy funkcí včetně grafů funkcí inverzních s předem připravenými tabulkami funkčních hodnot. Dokument dále zpracovává úlohy na výpočet obsahu trojúhelníku, sinovou a kosinovou větu a zajímavou problematiku malých úhlů a jejich aproximací ve výpočtech.



Je zde také celá sada velmi podrobně řešených příkladů. Ať už na převody úhlů, tak i na goniometrické rovnice s pomocným grafickým řešením, které zde i přes svou jednoduchost a schematicnost bohatě dostačuje. Trigonometrické rovnosti, kterých je opravdu hodně, jsou postupně a srozumitelně dokazovány. To stránce dodává na kvalitě.

Bohužel zde čtenář narazí na zbytečně malé písmo. Doprovodné poznámky a příklady jsou totiž psány tak malým písmem, že to nelze téměř přečíst. Přestože tato stránka nevyužívá dynamických možností internetu a je psána spíše jako učebnice, stojí za shlédnutí.

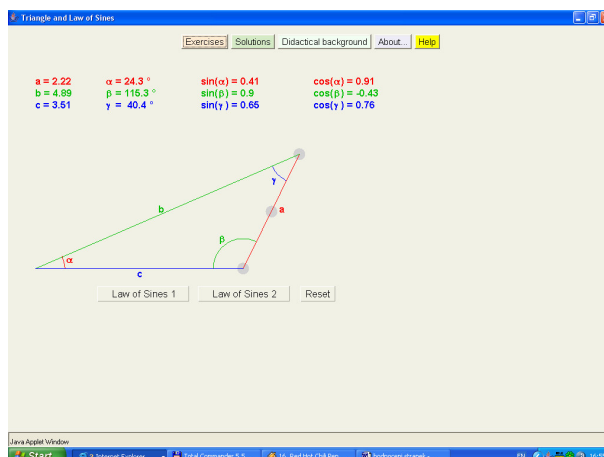


## Maths online (<http://www.univie.ac.at/future.media/moe>)

Velice kvalitní stránka s celou řadou apletů. Velká část je jich věnovaná funkcím, včetně goniometrických. Názorný je například aplet, který vykresluje tyto grafy v souvislosti s jednotkovou kružnicí. Také trigonometrie na této stránce stojí za shlédnutí. Pomocí dynamického trojúhelníku je možné sledovat vztah úhlů a stran v pravoúhlém trojúhelníku nebo platnost sinové a kosinové věty.

Stránka je rozdělena do dvou částí, na výkladovou a testovou. Výkladová část se skládá z jednotlivých kapitol středoškolské matematiky. Každá kapitola obsahuje nejen textovou část, doplněnou o velké množství kvalitních apletů, ale také úlohy týkající se toho daného tématu. V těchto úlohách je možné si kliknout na tzv. didaktické pozadí problému, kde je jasně vysvětleno, o co v dané úloze jde. Druhou část tvoří testové úlohy, takzvané interaktivní testy. Vyskytuje se zde několik typů úloh. K nalezení jsou početní testy buď s jednou nebo více správnými možnostmi, dále úlohy, kde se přiřazují předpisy ke grafům funkcí nebo rozřazování určitých celků do nějakých kategorií. Každý typ má svou ikonku, takže je hned patrné, o jaký typ úlohy půjde.

Jedná se spíše o stránku, která nelpí na přílišném matematickém odvozování, ale ukazuje, jak to vypadá v praxi. Tato stránka je vhodná pro žáky, kteří si chtějí vše ověřit a vyzkoušet. Z grafického hlediska je stránka průměrná.

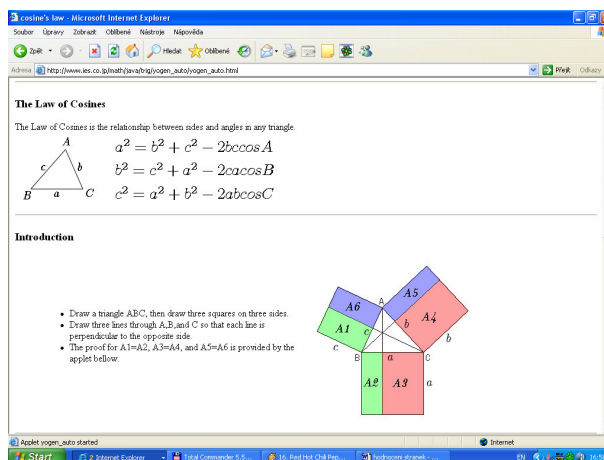


## International Education Software (IES) (<http://www.ies.co.jp/math/java/trig/index.html>)

Jedinečná stránka, která si oblíbila téma goniometrie a trigonometrie. A právě na téma *trigonometry* se zde nachází 25 stránek, které obsahují nějaké podtéma se stručně vyloženou teorií a hlavně pěkný aplet, který vše názorně dovysvětlí. Nacházejí se zde grafy goniometrických funkcí, jejich souvislost s jednotkovou kružnicí, důkazy goniometrických vzoreček, vysvětlení sinové a kosinové věty apod.

Stránka je psaná velice jednoduchým stylem a jednotlivé problémy vysvětluje autor tak, že to pravděpodobně každý pochopí. Graficky není nikterak vyumělkovaná, jde o jednoduchý přehledný styl.

Stránka je rozhodně vhodná jak pro učitele, tak i pro žáky.



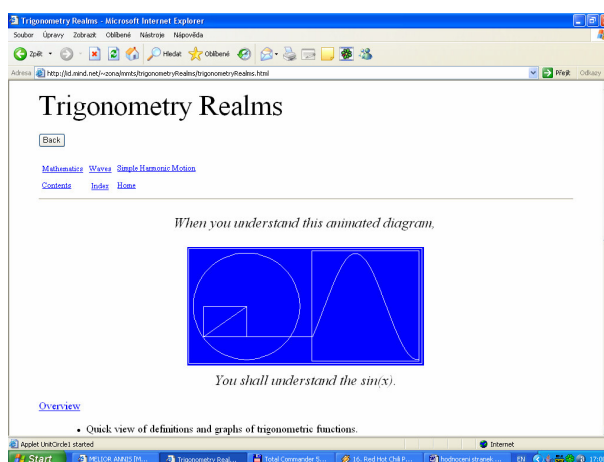
## Zona Land

(<http://id.mind.net/~zona/mmts/trigonometryRealms/trigonometryRealms.html>)

Anglická stránka se zprvu snaží motivovat podivnými obrázky, jejichž smysl není jasný. Vše se zlepší, když se začne jednat o dané problematice, tj. přímo o goniometrických funkcích. Dobré jsou také nápovědy SOH, CAH, TOA, což jsou počáteční písmena anglických slovíček funkcí a stran.

Písmo je nepřehlédnutelně velké a občas na vás vyskočí o ničem nevypovídající „super barevný“ obrázek. Je zde několik pěkných programů na převody úhlů v jednotlivých měřích a výpočet úhlů a stran v trojúhelníku. Přínosem může být i shrnující graf pro funkce spojený s ukázkou příslušných funkcí v trojúhelníku, přičemž mezi jednotlivými funkcemi lze přepínat. Některé části jsou vysvětlovány až zbytečně podrobně a u některých jde pouze o to, aby si člověk něco vypočítal, aniž by věděl, jak se k tomu dospěje.

Zajímavé a přínosné jsou testové úlohy, které zde nalezneme bohužel jenom tři.



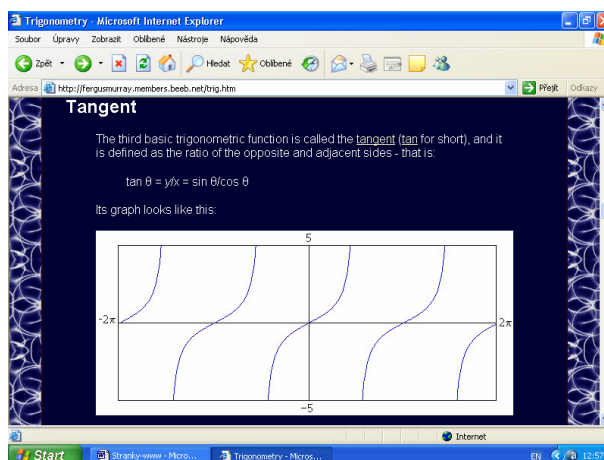


## Fergus Ray Murray - Trigonometry (<http://fergusmurray.members.beeb.net/trig.htm>)

Převážně textová a ne příliš přehledná stránka, která se při podrobnějším seznámení odkazuje na jiné stránky. Doprovodných obrázků je málo a jsou pouze statické. Opticky zajímavě působí příliš výrazné okraje stránky, které ruší soustředění na obsah.

Jediné větší zpestření nalezneme na konci v odkazu interaktivní animace založené na goniometrických funkcích. Smysl těchto animací mi bohužel uniká.

Jestliže se zajímáme o další aktivity autora této stránky, tak zjistíme, že jde o obchodníka. Nabízí trička s geometrickými motivy, což může učitel žákům vyložit jako perličku „aneb jak se dá zbohatnou na geometrii“.



## Wikipedia (<http://en.wikipedia.org/wiki/Trigonometry>)

Velmi obsáhlá stránka, na které čtenář najde téměř všechny pojmy týkající se daného tématu. Nevýhodou této stránky je její malá přehlednost. Pro čtenáře, který o tématu neví nic a chce se vše od počátku dozvědět, se příliš nehodí. Stránka je koncipována tak, že se vysvětluje nějaký pojem, který obsahuje další pojmy. Jestliže je čtenář nezná, klikne na ně jako na odkaz, zde v odkaze je mu tento „podpojem“ vysvětlen pomocí dalších pojmů. Pokud nezná ani pojmy užité k vysvětlení, musí na ně zase kliknout. Tímto stylem za chvíli neví, kde je, zcela se ztratí a už neví, co se vlastně chtěl naučit. Z tohoto hlediska je tedy stránka nepřehledná a jako výukový program nevhodná.

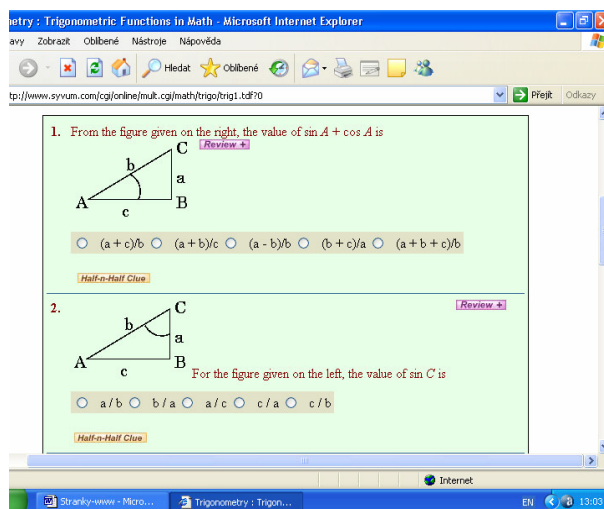
Jedná se opravdu o encyklopedii. Hodí se pro čtenáře, kteří si chtějí něco zopakovat, vyhledat příslušnou část apod. Také bych tuto stránku doporučila učitelům, protože se zde ke každému tématu dá nalézt historie, což může velice zpestřit hodinu matematiky. Co se týče tématu goniometrie, tak zde nalezneme opravdu, na co si vzpomeneme. Mimo jiné definice goniometrických funkcí a řešení goniometrických rovnic. K probírané látce tu bohužel nenajdeme doprovodné ani schematické obrázky.



## Syvum-Trigonometry Table of Contents (<http://www.syvum.com/math/trigonometry.html>)

Tento dokument se nejprve zabývá stručným vyložением látky týkající se goniometrických funkcí v pravouhlém trojúhelníku a výpisem tabulkových hodnot pro tyto funkce, dále definicí některých vztahů, které mezi těmito funkcemi platí a nakonec jejich využitím v měření a odhadování délky a výšky v praxi.

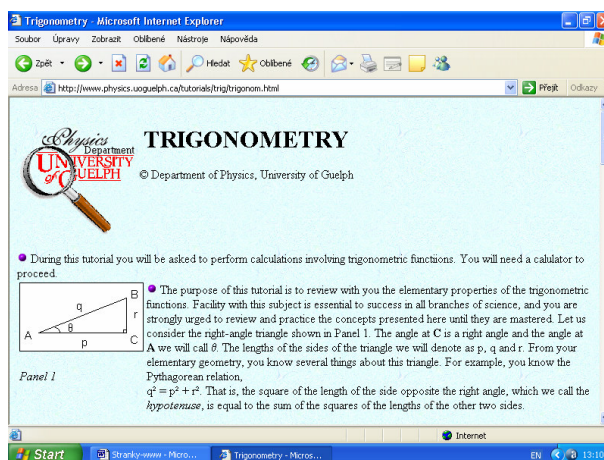
Hlavním přínosem této stránky jsou bezesporu testové otázky a úlohy. Úlohy jsou buď hodnoceny každá zvlášť, nebo po čtyřech, ale v obou případech se měří čas. A to nejlepší z didaktického hlediska je hra o milion, kde se pomyslné peníze získávají za otázky z probrané části trigonometrie.



## Department of Physics, University of Guelph – trigonometry (<http://www.physics.uoguelph.ca/tutorials/trig/trigonom.html>)

Tato stránka, vytvořená pro potřeby katedry fyziky v Guelph, se také stručně věnuje trigonometrii. Těm, kteří potřebují nějaký znalostní základ, nejlépe pro další vzdělávání ve fyzikálním směru, může tato stránka poskytnout první seznámení s touto problematikou. Není tedy třeba zabíhat do větších podrobností.

Látka je rozdělena do dvou částí, příklady se vyskytují hned za probranou látkou, což ovšem trochu ubírá na přehlednosti stránky. Na druhou stranu součástí jsou i jednoduché obrázky, což kvalitu stránky naopak zvyšuje. Na konci si můžeme ověřit úroveň dosažených vědomostí v „little testu“.



## Complex Numbers and Trigonometry (<http://www.thiel.edu/mathproject/CNAT/Prelims/ToC.htm>)

Černobílá stránka bez čehokoliv, co internet umožňuje. Obsahuje několik kapitol geometrie. Témata jsou řazena abecedně, ke každé kapitole existují úlohy, ale bez řešení. Přes nulovou interaktivitu lze i na této stránce objevit jisté klady a to především rychlé zobrazování stránky i obrázků a zajímavé praktické příklady z geometrie, především úlohy zabývající se kontinenty.

Exercises for Chapter 1

- Classify each of the following angles as acute, right, obtuse, or not possible in a triangle:  
 $-30^\circ, 0^\circ, \sqrt{37}^\circ, 90^\circ, 156^\circ, 180^\circ, 360^\circ.$
- Tell which of the following pairs of angles are possible in the same triangle and find the third angle in each case:  
(a)  $90^\circ, 90^\circ,$  (b)  $100^\circ, 85^\circ,$  (c)  $50^\circ, 60^\circ,$  (d)  $30^\circ, 140^\circ.$
- Find (i) the exact value and (ii) a two decimal approximation (See [Preface](#)) for  $v$  in each of the following triangles:  
(a) (b) (c) (d)
- Of the following triples, first identify those which represent sides of a triangle. Of those, select the right triangles and identify

## MathWorld - Trigonometry (<http://mathworld.wolfram.com/topics/Trigonometry.html>)

Rozsáhlý odkaz, který pamatuje asi na všechna odvětví matematiky. Zabýváme-li se goniometrií, rozsah se zmenšuje, ale i přesto jenom o úhlech je možné se dozvědět v 53 kapitolách.

Postupně se dovídáme o goniometrických funkcích, jejich grafech, funkcích k nim inverzním, jejich derivacích, až k jejich definicím pomocí součtu řad s využitím komplexních čísel. Jednotlivé definice, pojmy a vztahy mezi nimi jsou doprovázeny přehlednými obrázky.

Nejedná se o čistě výkladovou stránku a předpokládá se určitá alespoň základní znalost pojmů. Z tohoto důvodu stránku nedoporučuji úplným začátečníkům v této problematice, protože když neznáme základní pojmy a na všechny klikáme, tak se nám může stát, že se ztratíme v množství odkazů. Vysvětleno je tu totiž opravdu téměř všechno. Co se týká teorie, můžeme být spokojeni, ovšem marně zde budeme hledat příklady.

Stránka je vhodná pro učitele a nadějně žáky k oživení souvislostí a k získání většího nadhledu nad středoškolskou látkou věnující se tomuto tématu.

Trigonometry

The study of angles and of the angular relationships of planar and three-dimensional figures is known as trigonometry. The trigonometric functions (also called the circular functions) comprising trigonometry are the cosecant  $\csc x$ , cosine  $\cos x$ , cotangent  $\cot x$ , secant  $\sec x$ , sine  $\sin x$ , and tangent  $\tan x$ . The inverses of these functions are denoted  $\csc^{-1} x$ ,  $\cos^{-1} x$ ,  $\cot^{-1} x$ ,  $\sec^{-1} x$ ,  $\sin^{-1} x$ , and  $\tan^{-1} x$ . Note that the  $f^{-1}$  notation here means inverse function, not  $f$  to the  $-1$  power.



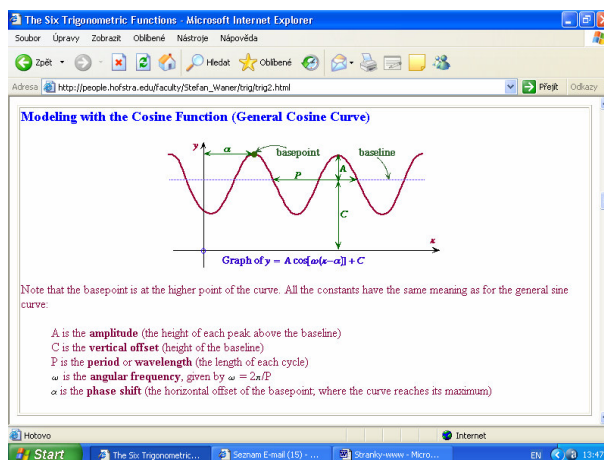
## The Trigonometric Functions ([http://people.hofstra.edu/faculty/Stefan\\_Waner/trig/trig1.html](http://people.hofstra.edu/faculty/Stefan_Waner/trig/trig1.html))

Z didaktického hlediska je tato stránka velice zdařilá. Autoři nejprve začínají motivačním příkladem, jeho grafem a teprve potom definují pojmy. Následně se věnují goniometrickým funkcím, najdeme zde jejich definice, grafy, příklady na jejich užití v praxi a také jejich derivace.

Obrázky grafů jsou barevné, srozumitelně popsané a tím pádem přehledné.

Je zde také mnoho příkladů. Ty jsou dvojího druhu. První jsou součástí výkladu u každé jednotlivé funkce včetně příkladů na praktické použití. Příklady druhého druhu jsou na samostatné procvičení a existuje k nim řešení, které lze najít v odkazu.

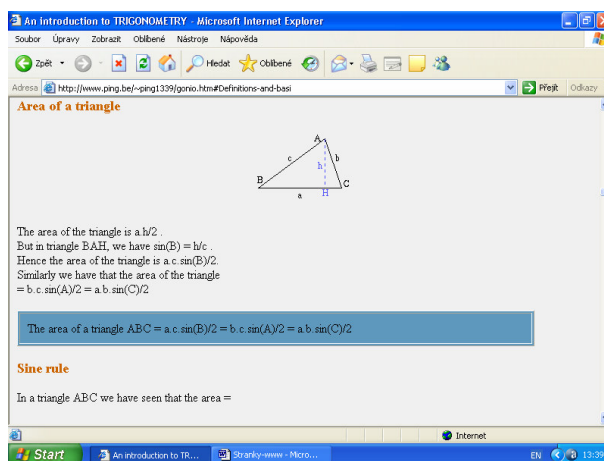
Stránka je přehledná a čtivá, vhodná i pro studenty a doporučuji ji jako studijní materiál. Nicméně ani tato stránka plně nevyužívá interaktivitu internetu a aplet zde nalezneme pouze jeden.



## An Introduction to Trigonometry (<http://www.ping.be/~ping1339/gonio.htm>)

Jde o velice přehlednou belgickou stránku v anglickém provedení, která vysvětluje středoškolskou trigonometrii a goniometrii. Na začátku je uveden obsah, což umožňuje rychlou orientaci v textu a výběr příslušné kapitoly. Jestliže nám jde o to naučit se goniometrii od začátku, tak jsme na správné adrese. Vše je podrobně, pomalu vysvětleno včetně slovního popisu. Odvozování vzorců je děleno do malých, srozumitelných kroků, důležité pojmy a vzorce jsou v modrém rámečku, což ještě podtrhává přehlednost stránky. U vět jsou důkazy schované v odkazu, takže čtenář není nucen studovat je za každou cenu. Na druhou stranu je zde možnost se na ně podívat, což zvyšuje didaktickou kvalitu textu. Bohužel se zde vyskytuje jen málo doprovodných obrázků k daným tématům.

Na konci výkladové části je odkaz na stránku řešených příkladů a vztahů, které se mají dokázat. Tyto úlohy jsou rozděleny do tří stupňů obtížnosti. Malá nepříjemnost se ale najde i na této, jinak po všech stránkách kvalitní, stránce. Nad některými složitějšími vzorci je třeba se chvíli pozastavit, dobře si je prohlédnout, abychom pochopili, jak ten vzorec vypadá. Špatně se například zobrazuje mocnina sinu polovičního úhlu.



## Detail nejlepší a nejhorší stránky

Laws of Cosines & Sines - Microsoft Internet Explorer

Address <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/trig/laws.html>

### The law of sines

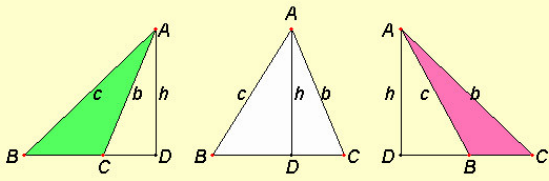
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

This can also be interpreted as three equations:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, \quad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}, \quad \text{and} \quad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

Since the three versions differ only in the labelling of the triangle, it is enough to verify one just one of them, so we'll just consider the version stated first.

An explanation of the law of sines is fairly easy to follow, but in some cases we'll have to consider sines of obtuse angles.



First, drop a perpendicular line  $AD$  from  $A$  down to the base  $BC$  of the triangle. The foot  $D$  of this perpendicular will lie on the edge  $BC$  of the triangle when both angles  $B$  and  $C$  are acute. But if angle  $B$  is obtuse, then the foot  $D$  will lie on  $BC$  extended in the direction of  $B$ . Yet if angle  $C$  is obtuse, then  $D$  will lie on  $BC$  extended in the direction of  $C$ . Fortunately, the argument is the same in all three cases.

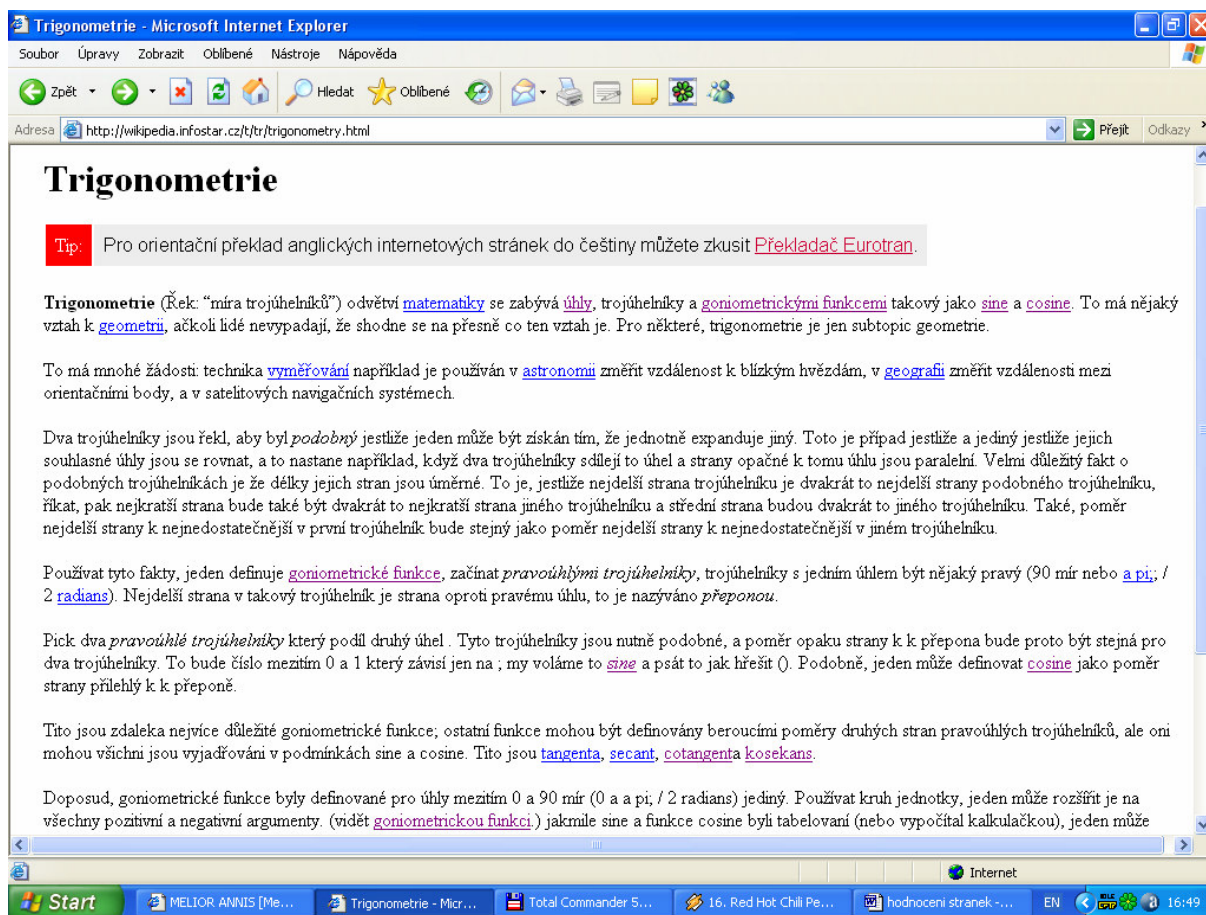
Let  $h$  denote the length of this line  $AD$ , that is, the height (or altitude) of the triangle.

When angle  $B$  is acute, then  $\sin B = h/c$ . But this is true even when  $B$  is an obtuse angle as in the third diagram. There, angle  $ABC$  is obtuse. But the sine of an obtuse angle is the same as the sine of its supplement. That means  $\sin ABC$  is the same as  $\sin ABD$ , that is, they both equal  $h/c$ .

Likewise, it doesn't matter whether angle  $C$  is acute or obtuse,  $\sin C = h/b$  in any case.

Start | hodnoceni strank2 - Mic... | Laws of Cosines & Sin... | EN | 16:57

## Nejlepší stránka - Dave's Short Trig Course



## Nejhorší stránka - Wikipedia- česká verze

## Srovnávací tabulka

Při hodnocení a vytváření tabulky jsem brala v úvahu tato kritéria:

- **Odborná správnost**- neobsahuje-li formální chyby, je-li bezchybná z matematického hlediska
- **Design** - grafický vzhled stránky
- **Interaktivita** - obsahuje-li stránka interaktivní prvky, tj. animace nebo “hýbající se obrázky“
- **Didaktická povaha stránek** - srozumitelně vysvětlené pojmy, důkazy vět, ilustrativní příklady atd.
- **Jednoduchost ovládní** - přehlednost stránky, rychlá orientace, popř. jednoduchý návod
- **Funkčnost** - obsahuje-li fungující odkazy

Ohodnocení použité v tabulce je číselné:

1 - nejlepší

2 - průměrné

3 - nejhorší

$\Sigma$  - celkové ohodnocení

Název stránky	$\Sigma$	Odborná správnost	Didaktická stránka	Jednoduchost ovládání	Funkčnost	Design	Interaktivita
Webová škola	2	1	2	1	-	3	3
Univerzita T.Bati	2	1	1	1	2	2	3
Ostravská univerzita	1	1	1	1	2	1	2
Wikipedia Česká verze	3	2	3	1	-	3	1
SOOM	2	1	2	-	-	2	3
Dave's Course	1	1	1	1	2	1	1
S.O.S. Math	2	1	1	1	-	2	3
Dave's page	1	1	1	1	2	1	1
Name project	2	1	1	1	-	3	3
Maths online	1	1	1	1	2	2	1
IES	1	1	1	1	2	1	1
Zona Land	2	1	2	1	2	2	1
Syvum	1	1	1	1	-	2	2
Fergus Ray Murray	2	1	2	1	-	2	2
Univesity of Guelph	2	1	1	1	-	2	2
Compl.numbers and Trig.	2	1	1	1	-	3	3
Wikipedia	2	1	2	1	2	1	1
Mathworld	1	1	1	1	1	1	3
The trig. functions	1	1	1	1	1	2	2
An introduction to trigonometry	1	1	1	1	-	2	3

Srovnávací tabulka

## Vlastní webové stránky

Webové stránky se zabývají dvěma tématy středoškolské matematiky – trigonometrií a goniometrií.

V první části nazvané Trigonometrie je pozornost věnována trojúhelníkům a všemu, co s nimi souvisí. Probrány jsou zde Pythagorova, sinová, kosinová věta a další trigonometrické věty včetně důkazů. Teorie je doplněna příklady, které jsou uvedeny spolu s jejich řešeními, k nimž se využívá právě dokázaných vět.

V části Goniometrie jsou nejprve zavedeny pojmy orientovaný úhel, velikost úhlu a poté výklad pokračuje goniometrickými funkcemi. Ty jsou definovány pomocí jednotkové kružnice. Dále zde můžeme najít odvození vlastností funkcí, jejich grafy, výpočet funkčních hodnot a vzorce pro goniometrické funkce.

Na konci obou kapitol jsou připraveny úlohy určené k opakování. Stránky jsou obohaceny „smajlíky“, kteří rozdělují řešení příkladů na menší kroky, skrývají nápovědy k jednotlivým krokům řešení a důkazy vět. Součástí stránek jsou doprovodné názorné obrázky.

Jeden z největších přínosů těchto stránek tvoří Java applety. Bohužel v tištěné verzi se ztrácí jejich interaktivita. Proto v příloze na konci této práce naleznete jednak vytištěné stránky a jednak jejich elektronickou verzi na CD.

## Závěr

Zpracovávání diplomové práce s sebou přineslo některé zajímavé obtíže a postřehy. První zajímavou zkušeností bylo již hledání anglicky psaných stránek. Anglicky se totiž pod pojmem trigonometry rozumí zároveň trigonometrie i goniometrie.

Anglicky psaných stránek, které jsou kvalitní z hlediska obsahu a didaktiky, můžeme najít poměrně hodně. To ovšem bohužel neplatí o česky psaných stránkách. U těch, pokud se tomuto tématu vůbec věnují, rozhodně nelze hovořit o kvalitním učebním textu.

Jelikož se internet stává běžnou záležitostí a studenti ho hojně využívají, bylo vytvoření nového materiálu téměř nutností.

Při tvorbě nových stránek jsme, co do obsahu, čerpali především z knih [1], [2], takže odborná stránka textu by neměla obsahovat žádné větší omyly či nedostatky. Z hlediska vzhledu jsme zvolili decentní barvu pozadí, protože se jedná o učební text, u kterého se předpokládá delší studium.

Jedním z hlavních přínosů nových stránek je vytvoření appletů. Jsou dvojího druhu. V tématu goniometrie najdeme definici goniometrických funkcí na dynamickém appletu, grafy těchto funkcí, výpočet jejich funkčních hodnot nebo také ukázkou orientovaných úhlů a výpočet jejich velikostí. V tématu trigonometrie se zase jedná o dynamické trojúhelníky, měření délek jejich stran a například počítání obsahů těchto trojúhelníků.

Zajímavým zpestřením se stávají „smajlíci“, kteří zvyšují interaktivitu stránek. Jednak dělí příklady na části a také napovídají, co se ve kterém kroku má udělat. Dále zakrývají důkazy těm, kteří je nepotřebují, případně těm, kteří si je chtějí sami vyzkoušet.

Stránky jsou jednoduše ovladatelné. Na titulní straně si můžete vybrat z nabízeného menu. Po zvolení nějakého tématu se rozbalí lišta obsahující další podtémata. K rychlejšímu ovládní také slouží malé nápisy „nahoru“, které vás vrátí na začátek stránky.

Každá kapitola obsahuje úlohy, zabývající se probíraným tématem. Na konci goniometrie a trigonometrie jsou ještě úlohy k opakování, které v řešení využívají celou problematiku.

Poslední kapitola obsahuje odkazy na ostatní kvalitní stránky.

Práce zaplňuje mezeru v nabídce didaktických matematických stránek a nabízí proto dvě základní využití. Studenti, pro které jsou stránky primárně určeny, mají k dispozici moderní učební text, který, především pro svou interaktivitu, pro ně bude dobrým doplněním, či dokonce alternativou, ke klasickým papírovým učebnicím. Učitelé mohou zahrnout interaktivní části stránek i do výuky, studentům tím celou problematiku lépe přiblíží, a navíc mohou získat přehled o dalších (především anglicky psaných) kvalitních stránkách, které by při své práci mohli využít.

## Seznam použité literatury

- [1] Bušek, I., Boček, L., Calda, E.: Základní poznatky z matematiky. Prometheus, Praha 1992
- [2] Cala, Petránek, Řepová: Matematika pro SOŠ a SOU. SPN, Praha 1984
- [3] Davis, R.: Visual J++. Microsoft Press Redmond, Washington 1996
- [4] Kuřina, F., Hávová, J.: Matematika pro 9.ročník ZŠ. Fortuna, Praha 1991
- [5] Müllerová, J.: Matematika 7. SPN, Praha 1982
- [6] Niederst, J.: HTML. Helion, Gliwice 2004
- [7] Odvárko, O.: Goniometrie pro gymnázia. Prométheus, Praha 1994
- [8] Odvárko, O.: Goniometrie – Sběrka úloh pro gymnázia. Prometheus, Praha 1997
- [9] Odvárko, O., Řepová, J.: Matematika pro SOŠ a SOU. SPN, Praha 1986
- [10] Odvárko, O., Božek, M., Ryšánková, M., Šmida J.: Matematika pro II. Ročník gymnázií. SPN, Praha 1985
- [11] Odvárko, O., Kadleček, J.: Matematika pro 8. ročník ZŠ, Prométheus, Praha 1999
- [12] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky. Prometheus, Praha 1991
- [13] Rybička, J.: Latex pro začátečníky. Konvoj, Brno 1995



## **Příloha: Vlastní webové stránky**