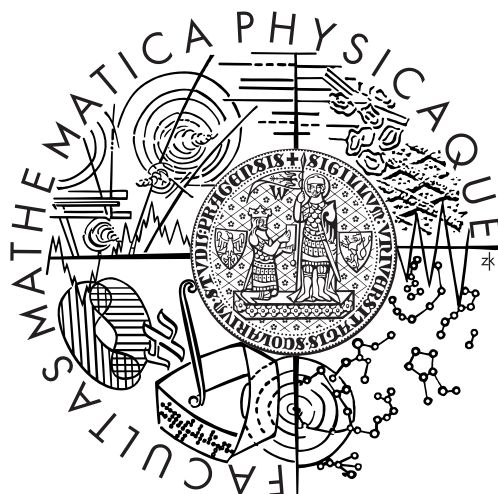


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Lenka Dubcová

Numerická simulace interakce tekutin a tuhých těles

Katedra numerické matematiky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc.

Studijní obor: Výpočtová matematika

Na tomto místě bych ráda poděkovala svému vedoucímu diplomové práce Prof. RNDr. Miloslavu Feistauerovi, DrSc. za jeho trpělivost při konzultacích, odborné rady a všeobecnou pomoc při tvorbě práce. Dále děkuji RNDr. Petru Sváčkovi, PhD. za poskytnutí softwaru, trpělivé konzultace a pomoc při úpravě programu. Také děkuji Prof. Ing. Jaromíru Příhodovi, CSc. a Ing. Jiřímu Dobešovi za cenné rady ohledně modelů turbulence.

Poděkovat chci také celé své rodině nejen za finanční pomoc během celého studia, ale i za odborné rady.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 19. dubna 2006

Lenka Dubcová

Obsah

1	Úvod	5
2	Základní rovnice	7
2.1	Rovnice popisující proudění	7
2.1.1	ALE metoda	9
2.1.2	Navierovy-Stokesovy rovnice v ALE popisu	10
2.1.3	Počáteční a okrajové podmínky	11
2.2	Rovnice popisující pohyb leteckého profilu	11
3	Diskretizace problému	13
3.1	Časová diskretizace	13
3.2	Diskretizace v prostoru	14
3.2.1	Slabá formulace	15
3.2.2	Metoda konečných prvků	16
3.3	Stabilizace metody konečných prvků	17
3.4	Výpočet síly L a momentu M	18
3.5	Numerické řešení rovnic pohybu profilu	20
3.6	ALE zobrazení, rychlost ALE transformace	22
4	Realizace diskrétního problému	25
4.1	Oseenův problém	25
5	Modelování turbulence	29
5.1	Středované Reynoldsovy rovnice	29
5.1.1	Střední hodnota	29
5.1.2	Rovnice kontinuity	30
5.1.3	Navierovy-Stokesovy rovnice	31
5.1.4	Reynoldsovy rovnice	32
5.1.5	Uzavírací rovnice	33
5.1.6	ALE formulace	33
5.1.7	Diskretizace	33
5.2	Algebraické modely turbulence	36
5.2.1	Model Cebeci–Smith (CS model)	36

5.2.2	Model Baldwina a Lomaxe (BL model)	37
5.2.3	Model Rostanda	38
5.2.4	Implementace BL modelu turbulence	39
6	Numerické výpočty	42
6.1	Testovací příklad - turbulentní deska	43
6.1.1	Výsledky pro model BL	45
6.1.2	Výsledky pro Rostandův model	48
6.2	Rozložení tlaku na profilu	50
6.2.1	Výsledky publikované ve zprávě [3]	51
6.2.2	Výpočty	52
6.2.3	Srovnání výsledků se zprávou [3]	57
6.2.4	Obrázky	60
7	Závěr	66

Název práce: Numerická simulace interakce tekutin a tuhých těles

Autor: Lenka Dubcová

Katedra: Katedra numerické matematiky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc.

e-mail vedoucího: Miloslav.Feistauer@mff.cuni.cz

Abstrakt: Předmětem této práce je modelování a numerická simulace vzájemné interakce dvoudimenzionálního proudění nestlačitelné vazké tekutiny a vibrujícího leteckého profilu. Uvažujeme letecký profil se dvěma stupni volnosti, který se může otáčet kolem elastické osy a vertikálně oscilovat. Numerická simulace je dána konečně-prvkovým řešením Navierových–Stokesových rovnic a numerickým řešením obyčejných diferenciálních rovnic popisujících pohyb leteckého profilu. Časově závislá výpočetní oblast a pohybující se síť jsou popsány pomocí Arbitrary Lagrangian–Eulerian (ALE) formulace Navierových–Stokesových rovnic. Vysoká Reynoldsova čísla (řádově 10^6) vyžadují aplikaci vhodné stabilizace metody konečných prvků a zavedení modelu turbulence. Aplikovali jsme algebraický model navržený Baldwinem a Lomaxem a Rostandův model. Výsledkem je dostatečně přesná a robustní metoda, která byla otestována na proudění kolem desky a použita pro výpočet rozložení tlaku na vynuceně vibrujícím profilu.

Klíčová slova: aeroelasticita, metoda konečných prvků, ALE formulace, algebraické modely turbulence

Title: Numerical simulation of interaction of fluids and solid bodies

Author: Lenka Dubcová

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc.

Supervisor's e-mail address: Miloslav.Feistauer@mff.cuni.cz

Abstract: The subject of this thesis is modelling and numerical simulation of the interaction of two-dimensional incompressible viscous flow and a vibrating airfoil. A solid airfoil with two degrees of freedom, which can rotate around the elastic axis and oscillate in the vertical direction, is considered. The numerical simulation consists of the finite element solution of the Navier–Stokes equations coupled with the system of ordinary differential equations describing the airfoil motion. The time dependent computational domain and a moving grid are taken into account with the aid of the Arbitrary Lagrangian–Eulerian (ALE) formulation of the Navier–Stokes equations. High Reynolds numbers up to 10^6 require the application of a suitable stabilization of the finite element discretization and application of a turbulent model. We apply the algebraic turbulent models, which were designed by Baldwin and Lomax and by Rostand. As a result a sufficiently accurate and robust method is developed, which was tested by the simulation of flow along a flat plate and applied to the computation of pressure distribution along the airfoil with forced vibrations.

Keywords: aeroelasticity, finite element method, ALE formulation, algebraic turbulent models

Kapitola 1

Úvod

Interakce proudící tekutiny a obtékaných těles hraje významnou roli v řadě technických odvětví - letectví (deformace křídél), strojírenství (turbíny, kompresory, pumpy), stavebnictví (stabilita mostů) a medicíně (proudění krve v cévách a srdci). Komerční software, jako je NASTRAN, FLUENT nebo ANSYS je schopen řešit pouze speciální problémy aeroelasticity a hydroelasticity a omezuje se většinou pouze na linearizované modely.

Chvění při větších deformacích obtékaného tělesa může být studováno analytickými metodami jen ve speciálních případech. V reálném případě však musíme uvažovat vazké proudění, časově proměnnou výpočetní oblast, turbulentní jevy, nelineární chování obtékaných těles a musíme řešit současně rovnice pro proudění tekutiny a rovnice pro pohyb obtékaného tělesa.

V této práci se zaměříme na numerickou simulaci aeroelastického problému dvou-rozměrného vazkého nestlačitelného proudění vzduchu kolem leteckého profilu se dvěma stupni volnosti. Předpokládáme, že letecký profil je tuhé těleso, které může vykonávat vertikální a torzní vibrace. Matematický model proudění tekutiny je reprezentován systémem rovnic tvořeným dvourozměrnými Navierovými–Stokesovými rovnicemi a rovnicí kontinuity, které jsou doplněny počátečními podmínkami a smíšenými okrajovými podmínkami. Simulace nestlačitelného proudění zahrnuje široké spektrum komplikací typických pro numerické řešení singulárně perturbovaných parciálních diferenciálních rovnic. Existuje velké množství různých numerických metod pro řešení Navierových–Stokesových rovnic (metoda konečných diferencí, metoda konečných objemů). V případech proudění v oblastech s komplikovanou geometrií a smíšenými okrajovými podmínkami se ukazuje jako nejvhodnější metoda konečných prvků (MKP).

Metoda konečných prvků vyžaduje splnění Babuškovy–Brezziho podmínky, která zaručuje stabilitu schématu. Prostory konečných prvků pro rychlost a tlak musí být proto vhodně zvoleny.

Pro Reynoldsova čísla vyšší než 10^4 je nutné použít stabilizaci metody konečných prvků, např. metodou streamline-diffusion (označovanou též SUPG metoda, což znamená streamline upwind Petrov–Galerkin metoda).

Vzhledem k tomu, že Reynoldsovo číslo uvažovaného proudění je značně vysoké (10^5 –

10^6), je třeba vzít v úvahu vliv turbulence. V naší práci aplikujeme Baldwinův–Lomaxův algebraický model turbulence. Jeho výhodou je, že není nutné řešit další přídavné rovnice, ani znát parametry mezní vrstvy. V tomto modelu zůstávají schémata stejná, pouze koeficient vazkosti je nahrazen součtem molekulární a turbulentní vazkosti.

Vzhledem k tomu, že letecký profil se pohybuje, je výpočetní oblast závislá na čase. Proto musíme použít nějakou techniku pro simulaci proudění na pohybujících se výpočetních sítích. Byla aplikována Arbitrary Lagrangian–Eulerian (ALE) metoda, která je založena na přeformulování Navierových–Stokesových rovnic za použití ALE zobrazení z referenční oblasti na výpočetní oblast v čase t . ALE formulace Navierových–Stokesových rovnic je kombinována s modelem popisujícím pohyb leteckého profilu. Ten sestává ze dvou obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu, které převedeme na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu a numericky řešíme pomocí Runge–Kuttových metod.

Použití metody konečných prvků vede k velkému systému nelineárních algebraických rovnic. Abychom mohli problém řešit v krátkém čase, použijeme vhodnou linearizaci a dostatečně rychlý řešič pro soustavy lineárních rovnic.

Východiskem pro realizaci numerických výpočtů byl program, vypracovaný RNDr. Petrem Sváčkem, PhD. Jeho modifikací a implementováním modelu turbulence byl vypracován software vhodný pro konkrétní problémy, které byly experimentálně zkoumány v Ústavu termomechaniky Akademie věd České republiky. V práci byla provedena numerická simulace těchto problémů a srovnání výsledků s experimentem.

Kapitola 2

Základní rovnice

V této kapitole se budeme zabývat dvourozměrným nestacionárním prouděním vazké, nestlačitelné tekutiny, která působí na pohybující se profil. Pohyb profilu je dán dvěma stupni volnosti, které umožňují vertikální pohyb a otočení kolem elastické osy. Proudění uvažujeme v časovém intervalu $[0, T]$, kde $T > 0$. Označme symbolem $\Omega_t \in \mathbb{R}^2$ výpočetní oblast, která je v čase t vyplněná tekutinou.

Hranice $\partial\Omega_t = \Gamma_D \cup \Gamma_O \cup \Gamma_{W_t}$, kde množiny Γ_D , Γ_O a Γ_{W_t} jsou navzájem disjunktní a budou na nich zadány okrajové podmínky různých typů. Symbolem Γ_D budeme značit vstup, kterým tekutina vtéká do oblasti Ω_t , a pevné nepropustné stěny, Γ_O představuje výstup, kterým tekutina vytéká a Γ_{W_t} je hranice profilu v čase t . Předpokládáme, že Γ_D a Γ_O nezávisí na čase na rozdíl od Γ_{W_t} .

Proudění je charakterizováno rychlostí $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t))$ a kinematickým tlakem $p = p(\mathbf{x}, t)$ (tj. $p = P/\rho$, kde P je dynamický tlak a $\rho > 0$ je hustota tekutiny). Zde u_1 a u_2 jsou složky rychlosti ve směrech souřadnicových os x_1 a x_2 , $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega_t$ a $t \in [0, T]$. Symbolem $\nu > 0$ budeme značit kinematickou vazkost.

Dále budeme hledat funkce $\alpha(t)$ a $h(t)$, popisující oscilace profilu (rotaci a posuv). Tvar oblasti Ω_t bude záviset na funkcích $\alpha(t)$ a $h(t)$. Jedná se tedy o úlohu s časově proměnnou výpočetní oblastí, k jejímuž popisu použijeme tzv. ALE metodu.

2.1 Rovnice popisující proudění

Problém obtékání profilu můžeme popsat pomocí rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.1)$$

která odpovídá zákonu zachování hmoty, a pomocí Navierových–Stokesových rovnic

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u_i \mathbf{u}) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \quad (2.2)$$

které reprezentují zákon zachování hybnosti. τ_{ij} zde značí složky tenzoru napětí, který je definovaný vztahem

$$\boldsymbol{\tau} = (-P + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu D(\mathbf{u}). \quad (2.3)$$

Symbole λ a μ označují koeficienty vazkosti, \mathbf{I} představuje jednotkovou matici a D je tenzor rychlosti deformace:

$$\begin{aligned} D(\mathbf{u}) &= (d_{ij}(\mathbf{u}))_{i,j=1}^2 \\ d_{ij}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dosazením vztahů (2.3),(2.4) do (2.2) dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u_i \mathbf{u}) &= \\ = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pro nestlačitelné proudění můžeme rovnici kontinuity (2.1) a Navierovy–Stokesovy rovnice (2.5) zjednodušit na tvar

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \operatorname{div}(u_i \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\}, \quad i = 1, 2, \quad (2.7)$$

kde p je kinematický tlak a $\nu = \mu/\rho$ je kinematická vazkost. Předpokládejme, že $\nu > 0$ je konstanta.

Ještě provedeme zjednodušení některých členů za použití rovnice kontinuity. Dostaneme

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u_i \mathbf{u}) &= \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j + u_i \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \\ &= (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i + u_i \operatorname{div} \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i \end{aligned} \quad (2.8)$$

a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} &= \nu \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} = \\ &= \nu \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \nu \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} = \nu \Delta u_i + \nu \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \\ &= \nu \Delta u_i + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \mathbf{u} = \nu \Delta u_i. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dosažením (2.8),(2.9) do (2.7) získáme Navierovy–Stokesovy rovnice pro nestlačitelné proudění

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \nu \Delta u_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.10)$$

které lze zapsat vektorově

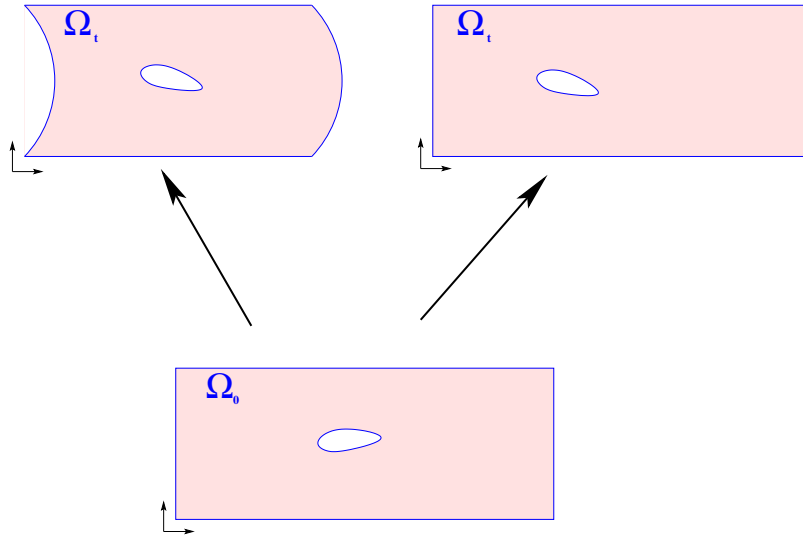
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = 0. \quad (2.11)$$

2.1.1 ALE metoda

Protože se jedná o úlohu s výpočetní oblastí závislou na čase, musíme použít nějakou techniku pro simulaci proudění na pohybujících se výpočetních sítích. ALE (Arbitrary Lagrangian–Eulerian) popis je zprostředkován hladkým prostým zobrazením

$$\mathbf{A}_t : \Omega_{ref} \mapsto \Omega_t, \quad \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{A}_t(\mathbf{X}) \quad (2.12)$$

Pro každý čas $t \in I = [0, T]$ představuje \mathbf{A}_t hladké zobrazení referenční oblasti Ω_{ref} na oblast Ω_t , která je totožná s referenční oblastí Ω_{ref} v místech hranice, kde nedochází k interakci s obtékaným tělesem a tedy i k deformaci hranice (např. vstup a výstup). Referenční oblast Ω_{ref} je totožná s oblastí vyplněnou tekutinou v počátečním čase $t = 0$, tedy $\Omega_{ref} = \Omega_0$. Souřadnice bodu $\mathbf{x} \in \Omega_t$ budeme nazývat prostorovými souřadnicemi, souřadnice bodu $\mathbf{X} \in \Omega_{ref}$ nazveme ALE souřadnicemi nebo též referenčními souřadnicemi. Na obr. 2.1 je znázorněn rozdíl mezi Lagrangeovým popisem a ALE popisem.



Obrázek 2.1: Lagrangeova transformace (vlevo) a ALE transformace (vpravo)

2.1.2 Navierovy–Stokesovy rovnice v ALE popisu

Pro každou časovou vrstvu můžeme vypočítat tzv. rychlost ALE zobrazení ve všech bodech $\mathbf{X} \in \Omega_{ref}$

$$\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad (2.13)$$

která může být vyjádřena v prostorových souřadnicích \mathbf{x} vztahem

$$\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}, t) \circ \mathbf{A}_t^{-1}, \quad \text{tj.} \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{A}_t^{-1}(\mathbf{x}), t). \quad (2.14)$$

S pomocí ALE zobrazení zavedeme tzv. ALE derivaci $\frac{D^A}{Dt}$. Pro funkci $f : \Omega_t \times (0, T) \mapsto \mathbb{R}$ zavedeme ALE derivaci vztahem

$$\frac{D^A}{Dt} f(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}_t^{-1}(\mathbf{x}), \quad (2.15)$$

kde $\tilde{f}(\mathbf{X}, t) = f(\mathbf{A}_t(\mathbf{X}), t)$. Aplikací pravidla o derivaci složené funkce dostáváme

$$\frac{D^A}{Dt} f = \frac{\partial f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_i} w_i, \quad (2.16)$$

kde

$$w_i = (\mathbf{w}(\mathbf{x}, t))_i = (\tilde{\mathbf{w}}(\mathbf{X}, t))_i = \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \right)_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}. \quad (2.17)$$

Výsledná ALE derivace je tedy tvaru

$$\frac{D^A}{Dt} f = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) f. \quad (2.18)$$

Pro vektorovou funkci $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^2$ se tato derivace dá zapsat jako

$$\frac{D^A}{Dt} \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{f}, \quad (2.19)$$

kde $(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{f}$ je vektor, jehož složky jsou

$$((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{f})_i = \sum_{j=1}^2 w_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2. \quad (2.20)$$

Nyní můžeme pomocí vztahu (2.19) pro rychlost \mathbf{u} Navierovy–Stokesovy rovnice (2.11) přeformulovat do ALE tvaru

$$\frac{D^A}{Dt} \mathbf{u} + [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla] \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = 0 \quad \text{v} \quad \Omega_t \quad (2.21)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{v} \quad \Omega_t. \quad (2.22)$$

2.1.3 Počáteční a okrajové podmínky

Navierovy–Stokesovy rovnice musí být doplněny počáteční podmínkou

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_0, \quad (2.23)$$

a okrajovými podmínkami. Na hranici Γ_D reprezentující vstup a nepropustné pevné stěny předepisujeme Dirichletovu okrajovou podmínku

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \mathbf{u}_D. \quad (2.24)$$

Na Γ_{W_t} reprezentující povrch profilu v čase t předpokládáme, že rychlost tekutiny \mathbf{u} je totožná s rychlostí profilu $\tilde{\mathbf{u}}_\Gamma$ a ta je rovna rychlosti ALE transformace \mathbf{w} :

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_{W_t}} = \tilde{\mathbf{u}}_\Gamma = \mathbf{w}|_{\Gamma_{W_t}}. \quad (2.25)$$

Část hranice Γ_O je výstup. Volba vhodné okrajové podmínky na výstupu je složitý problém. Předepisujeme zde tzv. “do-nothing” okrajovou podmínku

$$-(p - p_{ref}) \mathbf{n} + \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{na } \Gamma_O, \quad (2.26)$$

kde \mathbf{n} je jednotková vnější normála k hranici $\partial\Omega_t$ a p_{ref} je zadaný referenční tlak.

2.2 Rovnice popisující pohyb leteckého profilu

Letecký profil budeme považovat za tuhé těleso se dvěma stupni volnosti. To znamená, že může oscilovat ve vertikálním směru a může se otáčet kolem tzv. elastické osy. Posun a rotace profilu jsou popsány lineárním systémem obyčejných diferenciálních rovnic (viz [22], [10])

$$\begin{aligned} m\ddot{h} + S_\alpha \ddot{\alpha} \cos \alpha + k_{hh} h + d_{hh} \dot{h} - S_\alpha \dot{\alpha}^2 \sin \alpha &= -L(t), \\ S_\alpha \ddot{h} \cos \alpha + I_\alpha \ddot{\alpha} + k_{\alpha\alpha} \alpha + d_{\alpha\alpha} \dot{\alpha} &= M(t). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Zde jsme použili následující označení:

$L(t)$	[N]	síla působící na profil ve vertikálním směru
$M(t)$	[N]	torzní moment síly

m	[kg]	hmotnost profilu
S_α	[kg m]	statický moment kolem elastické osy EO
I_α	[kg m ²]	moment setrvačnosti kolem elastické osy EO
k_{hh}	[N/m]	tuhost profilu v posuvu
$k_{\alpha\alpha}$	[N m/rad]	tuhost profilu v torzi
d_{hh}	[kg/s]	koeficient vazkého tlumení v posuvu
$d_{\alpha\alpha}$	[kg m ² /s rad]	koeficient vazkého tlumení v torzi
α	[rad]	otočení (kladné ve směru hodinových ručiček)
h	[m]	vertikální posun (kladný proti směru osy x_2)
EO		elastická osa

Aerodynamická síla L a torzní moment M jsou definovány takto

$$L = - \int_{\Gamma_{W_t}} \sum_{j=1}^2 \tau_{2j} n_j dS \quad (2.28)$$

$$M = - \int_{\Gamma_{W_t}} \sum_{i,j=1}^2 \tau_{ij} n_j r_i^{\text{ort}} dS \quad (2.29)$$

kde

$$r_1^{\text{ort}} = -(x_2 - x_{EO2}), \quad r_2^{\text{ort}} = x_1 - x_{EO1} \quad (2.30)$$

a

$$\tau_{ij} = \rho \left[-p \delta_{ij} + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2.31)$$

jsou složky tenzoru napětí, δ_{ij} značí Kroneckerovo delta, $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ je jednotková vnější normála k Γ_{W_t} (směřující dovnitř profilu) a $x_{EO} = (x_{EO1}, x_{EO2})$ je pozice elastické osy (ležící uvnitř profilu). Vztahy (2.28), (2.29), (2.30) a (2.31) definují propojení rovnic popisujících proudění tekutiny s modelem pohybujícího se leteckého profilu.

Systém (2.27) je nutné doplnit počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} h(0) &= h_0, & \dot{h}(0) &= h_1, \\ \alpha(0) &= \alpha_0, & \dot{\alpha}(0) &= \alpha_1, \end{aligned} \quad (2.32)$$

kde $h_0, \alpha_0, h_1, \alpha_1$ jsou zadané hodnoty.

Kapitola 3

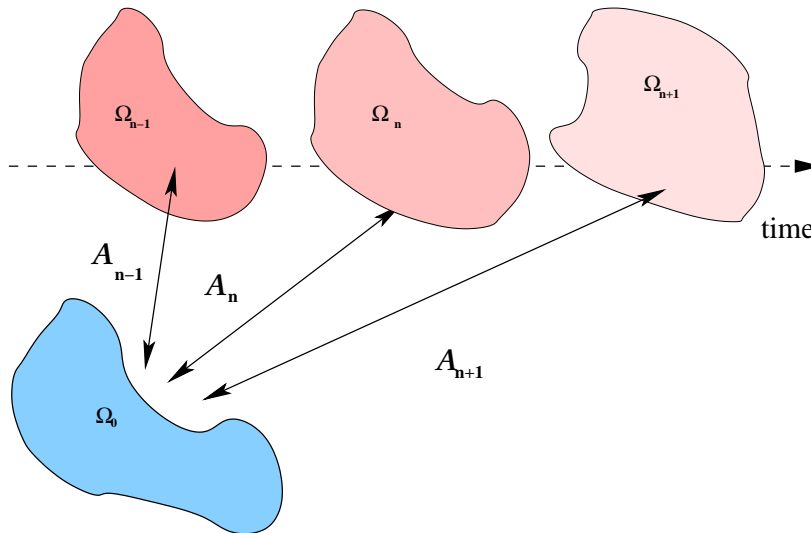
Diskretizace problému

3.1 Časová diskretizace

Nejdříve popíšeme diskretizaci problému v čase. Uvažujeme dělení intervalu $[0, T]$ s časovým krokem $\tau > 0$, tedy $0 = t_0 < t_1 < \dots < T$, $t_k = k\tau$. Nyní aproximujeme řešení $\mathbf{u}(t_n) \approx \mathbf{u}^n$ a $p(t_n) \approx p^n$. Pro časovou diskretizaci použijeme implicitní dvoukrokové schéma 2. řádu, které využívá k výpočtu aproximace řešení \mathbf{u}^{n+1} v oblasti $\Omega_{t_{n+1}}$ hodnoty \mathbf{u}^n v Ω_{t_n} a \mathbf{u}^{n-1} v $\Omega_{t_{n-1}}$. Pro diskrétní časové okamžiky t_{n-1} , t_n a t_{n+1} budeme značit

$$\mathbf{A}_{t_{n-1}}(\mathbf{X}) = \mathbf{x}^{n-1}, \quad \mathbf{A}_{t_n}(\mathbf{X}) = \mathbf{x}^n, \quad \mathbf{A}_{t_{n+1}}(\mathbf{X}) = \mathbf{x}^{n+1},$$

kde \mathbf{X} je daný bod z referenční oblasti Ω_{ref} .



Obrázek 3.1: ALE zobrazení a diskretizace v čase.

Nyní vzhledem k (2.15) aproximujeme ALE derivaci v čase t_{n+1} a bodě \mathbf{x}^{n+1} :

$$\frac{D^A \mathbf{u}}{Dt}(\mathbf{x}^{n+1}, t_{n+1}) \approx \frac{3\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}(\mathbf{X}) - 4\tilde{\mathbf{u}}^n(\mathbf{X}) + \tilde{\mathbf{u}}^{n-1}(\mathbf{X})}{2\tau}, \quad (3.1)$$

kde $\tilde{\mathbf{u}}^n(\mathbf{X})$ je aproximace vektorové funkce $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t_n)$, což je rychlost vyjádřená v referenční konfiguraci Ω_{ref} . Tuto rychlost vyjádříme v aktuální konfiguraci pomocí ALE transformace vztahem $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{A}_t(\mathbf{X}), t)$. Pro ALE derivaci tedy platí

$$\frac{D^A \mathbf{u}}{Dt}(\mathbf{x}^{n+1}, t_{n+1}) \approx \frac{3\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) - 4\mathbf{u}^n(\mathbf{x}^n) + \mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x}^{n-1})}{2\tau}. \quad (3.2)$$

Dosažením této aproximace do (2.21) získáme problém pro neznámé funkce $\mathbf{u}^{n+1} : \Omega_{t_{n+1}} \mapsto \mathbb{R}^2$ a $p^{n+1} : \Omega_{t_{n+1}} \mapsto \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & \frac{3\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) - 4\mathbf{u}^n(\mathbf{x}^n) + \mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x}^{n-1})}{2\tau} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) \\ & + \left((\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) - \mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1})) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) + \nabla p^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) = 0, \quad (3.4)$$

kde \mathbf{w}^{n+1} aproximuje $\mathbf{w}(t_{n+1})$. Tyto rovnice doplníme okrajovými podmínkami (2.24) - (2.26) na $\partial\Omega_{t_{n+1}}$. Protože $\mathbf{A}_{t_{n+1}}(\mathbf{A}_{t_i}^{-1}(\mathbf{x}^i)) \in \Omega_{t_{n+1}}$ můžeme transformovat rovnice (3.3) tak, že prostorová proměnná bude pouze z oblasti $\Omega_{t_{n+1}}$:

$$\begin{aligned} & \frac{3\mathbf{u}^{n+1} - 4\hat{\mathbf{u}}^n + \hat{\mathbf{u}}^{n-1}}{2\tau} + \left((\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} - \nu \Delta \mathbf{u}^{n+1} = 0, \\ & \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

kde $\hat{\mathbf{u}}^i = \mathbf{u}^i \circ \mathbf{A}_{t_i} \circ \mathbf{A}_{t_{n+1}}^{-1}$ je funkce definovaná na $\Omega_{t_{n+1}}$. Tento problém opět doplníme okrajovými podmínkami (2.24) - (2.26).

3.2 Diskretizace v prostoru

Východiskem pro prostorovou diskretizaci je tzv. slabá formulace. Zavedeme nejprve zjednodušující značení $\Omega := \Omega_{t_{n+1}}$, $\mathbf{u} := \mathbf{u}^{n+1}$, $p := p^{n+1}$ a přepíšeme rovnice (3.5) do tvaru

$$\begin{aligned} & \frac{3\mathbf{u} - 4\hat{\mathbf{u}}^n + \hat{\mathbf{u}}^{n-1}}{2\tau} + \left((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = 0 \quad \text{v } \Omega, \\ & \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{v } \Omega, \end{aligned} \quad (3.6)$$

s okrajovými podmínkami (2.24) - (2.26). Nyní definujeme prostory funkcí pro rychlost

$$W = (H^1(\Omega))^2, \quad (3.7)$$

$$X = \{\mathbf{v} \in W; \mathbf{v}|_{\Gamma_D \cup \Gamma_{W_t}} = 0\}, \quad (3.8)$$

a prostor funkcí pro tlak

$$Q = L^2(\Omega), \quad (3.9)$$

kde $L^2(\Omega)$ je Lebesgueův prostor funkcí integrovatelných s kvadrátem v oblasti Ω a $H^1(\Omega)$ je Sobolevův prostor

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2\}.$$

3.2.1 Slabá formulace

Nyní první rovnici v (3.6) vynásobíme testovací funkcí $\mathbf{v} \in X$ a druhou rovnici testovací funkcí $q \in Q$ a obě rovnice zintegrujeme přes oblast Ω . Dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{3\mathbf{u}}{2\tau} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} ((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} - \nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} \frac{4\hat{\mathbf{u}}^n}{2\tau} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \frac{\hat{\mathbf{u}}^{n-1}}{2\tau} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} d\mathbf{x} = 0.$$

Dále upravíme členy obsahující $\Delta \mathbf{u}$ a ∇p s pomocí Greenovy věty, okrajové podmínky (2.26) a skutečnosti, že $\mathbf{v} \in X$ je nulová na množině $\Gamma_D \cup \Gamma_{W_t}$:

$$\begin{aligned} -\nu \int_{\Omega} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} &= -\nu \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{v} dS + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} \\ &= -\nu \int_{\Gamma_O} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{v} dS + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\Gamma_O} (p - p_{ref}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} &= \int_{\partial\Omega} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS - \int_{\Omega} p \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Gamma_O} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS - \int_{\Omega} p \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Symbolem (\cdot, \cdot) označíme skalární součin v prostoru $(L_2(\Omega))^2$, tj. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} d\mathbf{x}$ pro $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in (L_2(\Omega))^2$. Podobně označíme skalární součin v $L_2(\Omega)$. Dále označíme symbolem $((\cdot, \cdot))$ bilineární formu v prostoru $(H^1(\Omega))^2$ definovanou vztahem

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v})) = (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}). \quad (3.13)$$

Sečtením rovnic (3.10) a jejich přepsáním pomocí vztahů (3.11) a (3.12) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{3}{2\tau} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu ((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + (((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) + (\operatorname{div} \mathbf{u}, q) \\ = \frac{1}{2\tau} (4\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}, \mathbf{v}) - \int_{\Gamma_O} p_{ref} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Zavedeme-li označení

$$\begin{aligned} a(U^*, U, V) &= \frac{3}{2\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \nu((\mathbf{u}, \mathbf{v})) + \left(((\mathbf{u}^* - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) \\ &\quad - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) + (\operatorname{div} \mathbf{u}, q), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$f(V) = \frac{1}{2\tau} (4\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}, \mathbf{v}) - \int_{\Gamma_O} p_{ref} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, dS, \quad (3.16)$$

kde

$$\begin{aligned} U &= (\mathbf{u}, p) \in W \times Q, \quad U^* = (\mathbf{u}^*, p) \in W \times Q, \\ V &= (\mathbf{v}, q) \in X \times Q, \end{aligned}$$

pak slabá formulace problému zní: Na každé časové vrstvě t_{n+1} hledáme slabé řešení $U = (\mathbf{u}, p) = (\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$, které splňuje

$$U = (\mathbf{u}, p) \in W \times Q, \quad (3.17)$$

$$a(U, U, V) = f(V), \quad \text{pro všechna } V = (\mathbf{v}, q) \in X \times Q, \quad (3.18)$$

a \mathbf{u} splňuje okrajové podmínky (2.24) a (2.25). (Okrajová podmínka (2.26) je skryta ve slabé formulaci).

3.2.2 Metoda konečných prvků

Přibližné řešení budeme definovat pomocí metody konečných prvků. Nejprve aproximujeme prostory W, X, Q ze slabé formulace jejich konečně dimenzionálními podprostory W_h, X_h, Q_h , $h \in (0, h_0)$, $h_0 > 0$, kde

$$X_h = \left\{ \mathbf{v} \in W_h; \mathbf{v}|_{\Gamma_D \cup \Gamma_{W_t}} = 0 \right\}. \quad (3.19)$$

Přibližné řešení definujeme jako dvojici $U_h = (\mathbf{u}_h, p_h) \in W_h \times Q_h$ takovou, že

$$a(U_h, U_h, V_h) = f(V_h), \quad \text{pro všechny } V_h = (\mathbf{v}_h, q_h) \in X_h \times Q_h \quad (3.20)$$

a \mathbf{u}_h splňuje vhodnou aproximaci okrajových podmínek (2.24) a (2.25).

Prostory konečných prvků X_h a Q_h musí splňovat tzv. Babuškovu–Brezziho (BB) podmínku (viz [7]), která zaručuje stabilitu schématu: existuje konstanta $c > 0$ taková, že

$$\sup_{\mathbf{w} \in X_h} \frac{(p, \nabla \cdot \mathbf{w})}{|\mathbf{w}|_{H^1(\Omega)}} \geq c \|p\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall p \in Q_h, \quad h \in (0, h_0). \quad (3.21)$$

Prostory konečných prvků budeme konstruovat následovně. Předpokládejme, že Ω je polygonální oblast (její hranici tvoří úsečky). Nechť \mathcal{T}_h je triangulace oblasti Ω tvořená konečným počtem trojúhelníků $K \in \mathcal{T}_h$. Předpokládáme, že dva trojúhelníky jsou buď

disjunktní nebo mají společný vrchol či stranu. Dále předpokládáme, že body množiny $\Gamma_D \cap \Gamma_O$ jsou vrcholy triangulace \mathcal{T}_h .

Prostor pro tlak Q aproximujeme prostorem po částech polynomiálních funkcí stupně $\leq k$:

$$p \approx p_h \in Q_h = \{q \in Q \cap C(\bar{\Omega}); q|_K \in P^k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (3.22)$$

Prostory pro rychlost W a X jsou aproximovány prostory po částech polynomiálních funkcí stupně $\leq k + 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h \in W_h &= \{\mathbf{v} \in W \cap (C(\bar{\Omega}))^2; \mathbf{v}|_K \in (P^{k+1}(K))^2, \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\ X_h &= W_h \cap W. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Tato dvojice prostorů (X_h, Q_h) vyhovuje BB podmínce. V našich výpočtech používáme tzv. Taylorovy–Hoodovy elementy P_2/P_1 , což znamená, že $\mathbf{u}_h \in X_h$ je kvadratická funkce a $p_h \in Q_h$ je lineární funkce na každém trojúhelníku $K \in \mathcal{T}_h$.

3.3 Stabilizace metody konečných prvků

Pro velká Reynoldsova čísla se v přibližném řešení (\mathbf{u}_h, p_h) mohou vyskytovat nefyzikální oscilace. Abychom se jim vyhnuli, zavádíme stabilizaci metody konečných prvků pomocí tzv. streamline–diffusion techniky popsané v [13]. Definujeme stabilizační členy

$$\mathcal{L}_h(U^*, U, V) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(\frac{3}{2\tau} \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p, (\bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right)_K, \quad (3.24)$$

$$\mathcal{F}_h(V) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(\frac{1}{2\tau} (4\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}), (\bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right)_K, \quad (3.25)$$

$$U = (\mathbf{u}, p), \quad U^* = (\mathbf{u}^*, p), \quad V = (\mathbf{v}, q),$$

kde funkce $\bar{\mathbf{w}}$ značí transportní rychlost $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{u}^* - \mathbf{w}^{n+1}$, symbol $(\cdot, \cdot)_K$ značí sklární součin v $L^2(K)$ a $\delta_K \geq 0$ jsou vhodné parametry.

Ještě zavedeme tzv. div–div stabilizaci pro tlak pomocí formy

$$\mathcal{P}_h(U, V) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (\nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{v})_K, \quad U = (\mathbf{u}, p), \quad V = (\mathbf{v}, q), \quad (3.26)$$

s vhodnými parametry $\tau_K \geq 0$.

Stabilizovaný diskretní problém je formulován následujícím způsobem:

Hledáme řešení $U_h = (\mathbf{u}_h, p_h) \in W_h \times Q_h$ takové, že \mathbf{u}_h vyhovuje vhodné aproximaci okrajových podmínek (2.24) a (2.25) a platí

$$\begin{aligned} a(U_h, U_h, V_h) + \mathcal{L}_h(U_h, U_h, V_h) + \mathcal{P}_h(U_h, V_h) &= f(V_h) + \mathcal{F}_h(V_h) \\ \text{pro všechny } V_h &= (\mathbf{v}_h, q_h) \in X_h \times Q_h. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Parametry δ_K a τ_K jsou voleny podle [13]. Parametr δ_K je definován ve tvaru

$$\delta_K = \delta^* h_K^2, \quad (3.28)$$

kde h_K je velikost elementu K měřená ve směru transportní rychlosti $\bar{\mathbf{w}}$ a $\delta^* \in (0, 1]$ je volitelný parametr.

Parametr τ_K je definován vztahem

$$\tau_K = \tau^* (\nu + \xi(Re\bar{\mathbf{w}}) h_K), \quad (3.29)$$

kde

$$Re\bar{\mathbf{w}} = \frac{h_K \|\bar{\mathbf{w}}\|_{L^\infty(K)}}{2\nu} \quad (3.30)$$

je tzv. lokální Reynoldsovo číslo a $\tau^* \in (0, 1]$ je volitelný parametr. Faktor $\xi(\cdot)$ je definován ve tvaru

$$\xi(Re\bar{\mathbf{w}}) = \min\left(\frac{Re\bar{\mathbf{w}}}{3}, 1\right). \quad (3.31)$$

3.4 Výpočet síly L a momentu M

Výpočet síly L a momentu M v čase $t = t_{n+1}$ z přibližného řešení $U_h = (\mathbf{u}_h, p_h)$ stabilizovaného diskrétního problému (3.27) můžeme provést dvěma způsoby.

a) Jednou možností je vypočítat složky tenzoru napětí τ_{ij} v čase $t = t_{n+1}$ ze vztahu (2.31) na trojúhelnících $K \in \mathcal{T}_h$ přilehlých k leteckému profilu Γ_{W_t} , extrapolovat hodnoty τ_{ij} na profil Γ_{W_t} a potom vypočítat L a M integrací přes hranici Γ_{W_t} podle vztahů (2.28) a (2.29).

b) Druhá možnost je přesnější a lépe vyhovuje slabé formulaci problému. Navierovy–Stokesovy rovnice v ALE formulaci diskretizované v čase $t := t_{n+1}$ vyjádříme po složkách ve tvaru

$$\frac{3u_i - 4\hat{u}_i^n + \hat{u}_i^{n-1}}{2\tau} + \left((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla\right) u_i = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{v } \Omega_t, \quad i = 1, 2. \quad (3.32)$$

Definujme množinu

$$\Omega_{\Gamma_{W_t}} = \bigcup \{K \in \mathcal{T}_h; K \cap \Gamma_{W_t} \neq \emptyset\}. \quad (3.33)$$

Ta reprezentuje první vrstvu trojúhelníků z triangulace \mathcal{T}_h . Definujme ještě funkci $\varphi \in W_h$ takovou, že

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &= 1 & \text{pro } \mathbf{x} \in \Gamma_{W_t} \\ \varphi(\mathbf{x}) &= 0 & \text{pro } \mathbf{x} \in \Omega_t \setminus \Omega_{\Gamma_{W_t}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Vynásobením rovnice (3.32) pro $i = 2$ funkcí φ a integrací přes množinu $\Omega_{\Gamma_{W_t}}$ dostáváme

$$\int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \left(\frac{3u_2 - 4\hat{u}_2^n + \hat{u}_2^{n-1}}{2\tau} + ((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) u_2 \right) \varphi \, d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \frac{\partial \tau_{2j}}{\partial x_j} \varphi \, d\mathbf{x}. \quad (3.35)$$

Použitím Greenovy věty na členy s τ_{ij} získáme

$$\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \frac{\partial \tau_{2j}}{\partial x_j} \varphi \, d\mathbf{x} = - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \tau_{2j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_{W_t}} \tau_{2j} \varphi n_j \, dS, \quad (3.36)$$

kde \mathbf{n} je vnější normála k profilu Γ_{W_t} směřující dovnitř profilu. Z vlastností funkce φ a vzorce (2.28) plyne, že

$$\begin{aligned} L &= - \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_{W_t}} \tau_{2j} n_j \, dS = - \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_{W_t}} \tau_{2j} \varphi n_j \, dS \\ &= - \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \left(\frac{3u_2 - 4\hat{u}_2^n + \hat{u}_2^{n-1}}{2\tau} + ((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) u_2 \right) \varphi \, d\mathbf{x} - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \tau_{2j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

kde za funkce \mathbf{u} , \mathbf{u}^n a \mathbf{u}^{n-1} dosadíme již známé aproximace \mathbf{u}_h , \mathbf{u}_h^n a \mathbf{u}_h^{n-1} :

$$\begin{aligned} L &= - \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \left(\frac{3u_{h2} - 4\hat{u}_{h2}^n + \hat{u}_{h2}^{n-1}}{2\tau} + ((\mathbf{u}_h - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) u_{h2} \right) \varphi \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \tau_{2j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Podobně vypočteme moment M . Definujeme vektorovou funkci $\mathbf{v}^{\text{ort}} = (v_1^{\text{ort}}, v_2^{\text{ort}}) = (r_1^{\text{ort}}, r_2^{\text{ort}}) \varphi$, kde funkce $r_1^{\text{ort}}, r_2^{\text{ort}}$ jsou dány vztahy (2.30). Opět vynásobíme rovnice (3.32) funkcemi v_i^{ort} , integrujeme přes množinu $\Omega_{\Gamma_{W_t}}$ a použitím Greenovy věty dostaneme

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \left(\frac{3u_i - 4\hat{u}_i^n + \hat{u}_i^{n-1}}{2\tau} + ((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) u_i \right) v_i^{\text{ort}} \, d\mathbf{x} \\ &= - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \tau_{ij} \frac{\partial v_i^{\text{ort}}}{\partial x_j} \, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_{W_t}} \tau_{ij} \varphi r_i^{\text{ort}} n_j \, dS, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Je tedy zřejmé, že moment M můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned} M &= - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Gamma_{W_t}} \tau_{ij} n_j r_i^{\text{ort}} \, dS = - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_{W_t}} \tau_{ij} \varphi r_i^{\text{ort}} n_j \, dS \\ &= - \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \left(\frac{3\mathbf{u}_h - 4\hat{\mathbf{u}}_h^n + \hat{\mathbf{u}}_h^{n-1}}{2\tau} + ((\mathbf{u}_h - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_h \right) \cdot \mathbf{v}^{\text{ort}} \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \tau_{ij} \frac{\partial v_i^{\text{ort}}}{\partial x_j} \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

3.5 Numerické řešení rovnic pohybu profilu

Zaměříme se na obyčejné diferenciální rovnice popisující pohyb leteckého profilu. Soustavu dvou diferenciálních rovnic druhého řádu

$$\begin{aligned} m\ddot{h} + S_\alpha\ddot{\alpha}\cos\alpha + k_{hh}h + d_{hh}\dot{h} - S_\alpha\dot{\alpha}^2\sin\alpha &= -L(t), \\ S_\alpha\ddot{h}\cos\alpha + I_\alpha\ddot{\alpha} + k_{\alpha\alpha}\alpha + d_{\alpha\alpha}\dot{\alpha} &= M(t) \end{aligned} \quad (3.39)$$

převědeme na soustavu čtyř diferenciálních rovnic prvního řádu. Nejprve vyjádříme z rovnic \ddot{h} , $\ddot{\alpha}$:

$$\begin{aligned} \ddot{h} &= \frac{1}{S_\alpha^2\cos^2\alpha - I_\alpha m} \\ &\times \left[I_\alpha \left(L + k_{hh}h + d_{hh}\dot{h} - S_\alpha\dot{\alpha}^2\sin\alpha \right) + S_\alpha\cos\alpha \left(M - k_{\alpha\alpha}\alpha - d_{\alpha\alpha}\dot{\alpha} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= \frac{1}{S_\alpha^2\cos^2\alpha - I_\alpha m} \\ &\times \left[S_\alpha\cos\alpha \left(-L - k_{hh}h - d_{hh}\dot{h} + S_\alpha\dot{\alpha}^2\sin\alpha \right) + m \left(-M + k_{\alpha\alpha}\alpha + d_{\alpha\alpha}\dot{\alpha} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Dále zavedeme nové proměnné

$$y_1 = h, \quad y_2 = \dot{h}, \quad y_3 = \alpha, \quad y_4 = \dot{\alpha}.$$

Rovnice (3.40) a (3.41) můžeme zapsat jako soustavu čtyř diferenciálních rovnic prvního řádu:

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, y_3, y_4)^T &= \\ &\begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{1}{D} \left[I_\alpha \left(L + k_{hh}y_1 + d_{hh}y_2 - S_\alpha y_4^2 \sin y_3 \right) + S_\alpha \cos y_3 \left(M - k_{\alpha\alpha}y_3 - d_{\alpha\alpha}y_4 \right) \right] \\ y_4 \\ \frac{1}{D} \left[-S_\alpha \cos y_3 \left(L + k_{hh}y_1 + d_{hh}y_2 - S_\alpha y_4^2 \sin y_3 \right) - m \left(M - k_{\alpha\alpha}y_3 - d_{\alpha\alpha}y_4 \right) \right] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

kde

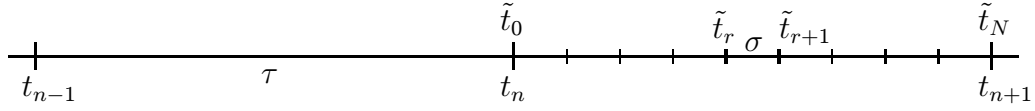
$$D = S_\alpha^2\cos^2 y_3 - I_\alpha m. \quad (3.42)$$

Vektorově lze tuto soustavu zapsat ve tvaru

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}). \quad (3.43)$$

Předpokládejme, že známe řešení \mathbf{y}_n této soustavy diferenciálních rovnic na časové vrstvě t_n . Řešení \mathbf{y}_{n+1} vypočteme pomocí Runge-Kuttovy metody čtvrtého řádu. Interval (t_n, t_{n+1}) délky τ rozdělíme na $N \in \mathbb{N}$ intervalů. Definujme časové kroky

$$\tilde{t}_r = t_n + r\sigma, \quad \sigma = \frac{\tau}{N}, \quad r = 0, 1, \dots, N. \quad (3.44)$$



Použijeme standardní formuli Runge-Kuttovy metody 4. řádu s počáteční podmínkou $\tilde{\mathbf{y}}_0 = \mathbf{y}_n$

$$\tilde{\mathbf{y}}_{r+1} = \tilde{\mathbf{y}}_r + \frac{\sigma}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad r = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.45)$$

kde

$$\begin{aligned} k_1 &= \mathbf{f}(\tilde{t}_r, \tilde{\mathbf{y}}_r), \\ k_2 &= \mathbf{f}\left(\tilde{t}_r + \frac{\sigma}{2}, \tilde{\mathbf{y}}_r + \frac{\sigma}{2}k_1\right), \\ k_3 &= \mathbf{f}\left(\tilde{t}_r + \frac{\sigma}{2}, \tilde{\mathbf{y}}_r + \frac{\sigma}{2}k_2\right), \\ k_4 &= \mathbf{f}(\tilde{t}_r + \sigma, \tilde{\mathbf{y}}_r + \sigma k_3). \end{aligned}$$

Řešení \mathbf{y}_{n+1} na časové vrstvě t_{n+1} definujeme takto

$$\mathbf{y}_{n+1} = \tilde{\mathbf{y}}_N \quad (3.46)$$

K vyčíslení vektorové funkce \mathbf{f} na časových vrstvách $\tilde{t}_r, \tilde{t}_r + \frac{\sigma}{2}$ a $\tilde{t}_r + \sigma, r = 0, 1, \dots, N-1$ potřebujeme znát hodnoty síly L a momentu M na těchto časových vrstvách. Ty získáme lineární extrapolací z hodnot $L(t_{n-1}), L(t_n)$ a $M(t_{n-1}), M(t_n)$ na předchozích časových vrstvách:

$$\begin{aligned} L(\tilde{t}_r) &= L(t_{n-1}) + \frac{r}{N}(L(t_n) - L(t_{n-1})), \\ L(\tilde{t}_r + \frac{\sigma}{2}) &= L(t_{n-1}) + \frac{r+0.5}{N}(L(t_n) - L(t_{n-1})), \\ L(\tilde{t}_r + \sigma) &= L(t_{n-1}) + \frac{r+1}{N}(L(t_n) - L(t_{n-1})), \\ M(\tilde{t}_r) &= M(t_{n-1}) + \frac{r}{N}(M(t_n) - M(t_{n-1})), \\ M(\tilde{t}_r + \frac{\sigma}{2}) &= M(t_{n-1}) + \frac{r+0.5}{N}(M(t_n) - M(t_{n-1})), \\ M(\tilde{t}_r + \sigma) &= M(t_{n-1}) + \frac{r+1}{N}(M(t_n) - M(t_{n-1})), \end{aligned}$$

kde

$$r = 0, 1, \dots, N-1.$$

3.6 ALE zobrazení, rychlost ALE transformace

Nyní již máme aproximace h_{n+1} a α_{n+1} a můžeme definovat aproximaci ALE zobrazení (2.12) pro časovou vrstvu t_{n+1} , kterou označíme \mathbf{A}_{n+1} a tím získáme oblast $\Omega_{t_{n+1}}$. Chceme vhodným způsobem definovat zobrazení

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{n+1} : \Omega_{ref} &\mapsto \Omega_{t_{n+1}}, \\ \mathbf{X} = (\hat{x}, \hat{y}) &\mapsto \mathbf{x} = (x, y).\end{aligned}$$

Toto zobrazení zkonstruujeme pouze pro vrcholy triangulace \mathcal{T}_h . Definujeme dva kruhy $K_1, K_2 \subset \Omega_{ref}$ se středem v elastické ose profilu a s poloměry R_1, R_2 , $0 < R_1 < R_2$. Zobrazení konstruujeme tak, že vnitřní kruh se pohybuje společně s profilem Γ_{W_i} jako tuhé těleso a část výpočetní oblasti $\Omega_{ref} \setminus K_2$ se nedeformuje vůbec.

Nejprve zapíšeme zobrazení $H(\hat{x}, \hat{y})$, které popisuje pohyb leteckého profilu - otočení a vertikální posun. Je-li $\mathbf{X} = (\hat{x}, \hat{y}) \in \Omega_{ref}$ vrchol triangulace \mathcal{T}_h , definujeme zobrazení

$$H(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{x} - \hat{x}_{EO} \\ \hat{y} - \hat{y}_{EO} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{x}_{EO} \\ \hat{y}_{EO} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Zavedme identické zobrazení

$$Id(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}, \hat{y}). \quad (3.48)$$

Nyní budeme definovat ALE zobrazení jako kombinaci identity a zobrazení H :

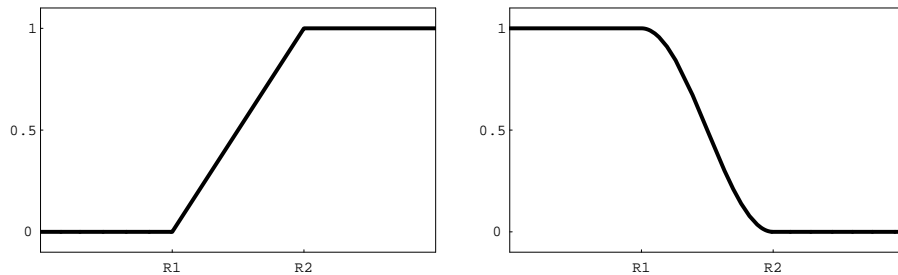
$$\mathbf{A}_{n+1}(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y) = \theta H(\hat{x}, \hat{y}) + (1 - \theta) Id(\hat{x}, \hat{y}), \quad (3.49)$$

kde

$$\theta = \theta(\hat{r}) = \frac{\cos(\xi(\hat{r})) + 1}{2}, \quad (3.50)$$

$$\xi(\hat{r}) = \min \left(\max \left(0, \frac{\hat{r} - R_1}{R_2 - R_1} \right), 1 \right) \quad (3.51)$$

a $\hat{r} = \sqrt{(\hat{x} - \hat{x}_{EO})^2 + (\hat{y} - \hat{y}_{EO})^2}$ je vzdálenost bodu $\mathbf{X} \in \Omega_{ref}$ od elastické osy profilu.



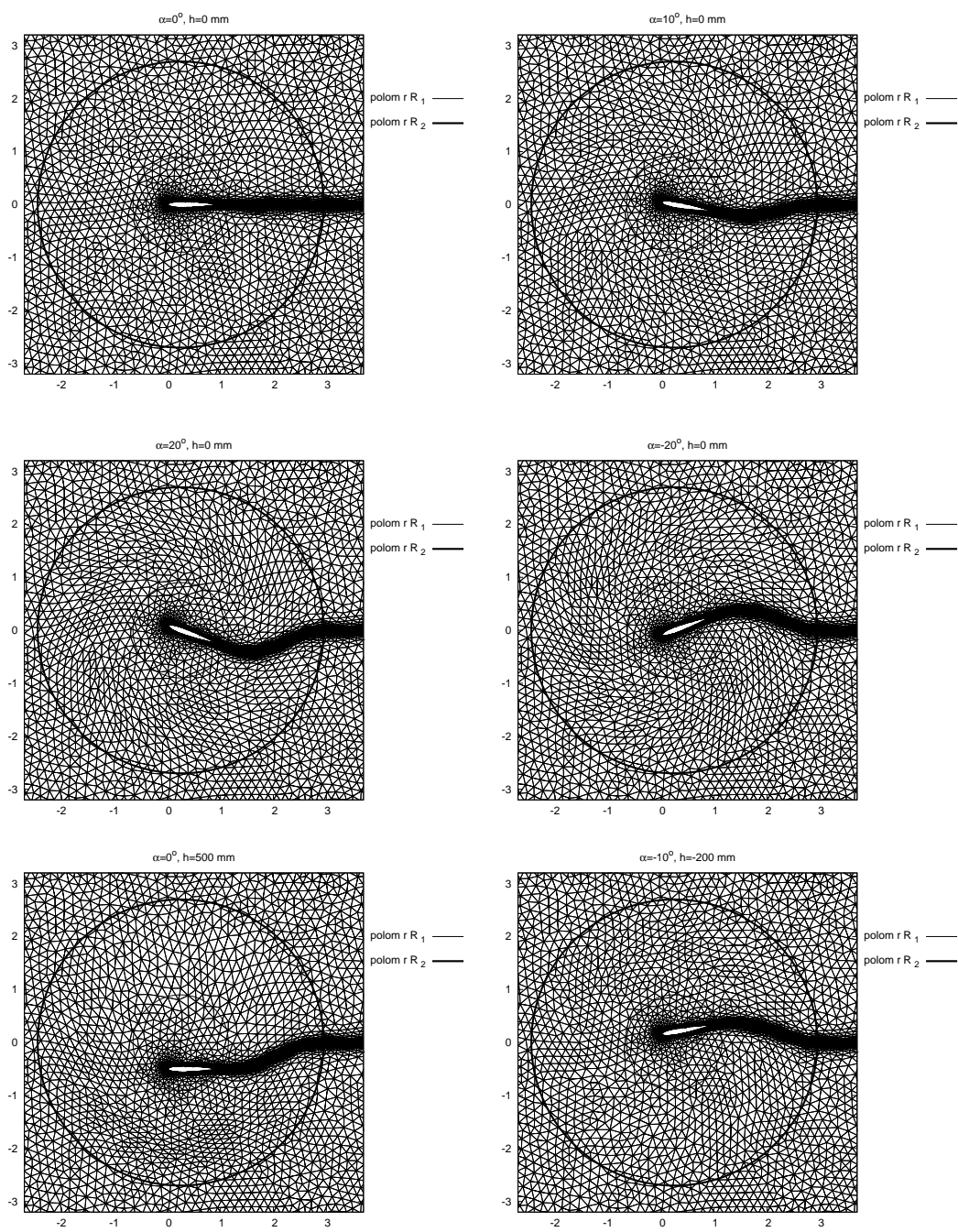
Obrázek 3.2: Váhové funkce $\xi(\hat{r})$ (vlevo) a $\theta(\hat{r})$ (vpravo)

Vidíme, že zobrazení je hladké na celé oblasti Ω_{ref} . V blízkosti profilu ($\hat{r} < R_1$) je deformace oblasti dána pouze zobrazením H , zatímco ve vzdálenosti $\hat{r} > R_2$ je $\Omega_{t_{n+1}}$ totožná s referenční oblastí Ω_{ref} .

Znalost ALE zobrazení na časových vrstvách t_{n-1}, t_n, t_{n+1} nám umožňuje vypočítat aproximaci rychlosti ALE zobrazení \mathbf{w}^{n+1} v libovolném bodě $\mathbf{x} \in \Omega_{t_{n+1}}$ pomocí formule 2. řádu

$$\mathbf{w}^{n+1}(\mathbf{x}) = \frac{3\mathbf{x} - 4\mathbf{A}_n(\mathbf{A}_{n+1}^{-1}(\mathbf{x})) + \mathbf{A}_{n-1}(\mathbf{A}_{n+1}^{-1}(\mathbf{x}))}{2\tau}. \quad (3.52)$$

Na obr. 3.3 je znázorněna deformace sítě pomocí definovaného ALE zobrazení při rotaci a posuvu profilu. Video ukázka deformace sítě v čase při nucených vibracích profilu je na přiloženém CD nosiči.



Obrázek 3.3: Deformace sítě pomocí ALE zobrazení při posunu a rotaci profilu.

Kapitola 4

Realizace diskrétního problému

Zabývejme se nyní numerickou realizací stabilizovaného diskrétního problému (3.27). Hledáme řešení $U_h = (\mathbf{u}_h, p_h) \in W_h \times Q_h$ takové, že splňuje rovnici

$$\begin{aligned} a(U_h, U_h, V_h) + \mathcal{L}_h(U_h, U_h, V_h) + \mathcal{P}_h(U_h, V_h) &= f(V_h) + \mathcal{F}_h(V_h) \\ \text{pro všechny } V_h = (\mathbf{v}_h, q_h) &\in X_h \times Q_h \end{aligned} \quad (4.1)$$

a \mathbf{u}_h vyhovuje vhodné aproximaci okrajových podmínek (2.24) a (2.25). Konkrétně kládeme $\mathbf{u}_h(P) = \mathbf{u}_D(P)$, resp. $\mathbf{u}_h(P) = \mathbf{w}(P)$ pro uzly P rovné vrcholům a středům stran ležícím na hranici Γ_D , resp. Γ_{W_t} .

Nalezení přibližného řešení U_h na časové vrstvě t_{n+1} je obtížné, protože se jedná o silně nelineární problém.

4.1 Oseenův problém

Nejjednodušší je problém (4.1) linearizovat - nelineární konvektivní člen nahradíme jeho lineárním přiblížením:

$$((\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla) \mathbf{u} \approx ((\hat{\mathbf{u}}^n - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (4.2)$$

nebo

$$((\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla) \mathbf{u} \approx ((2\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (4.3)$$

Druhou možností je řešit nelineární problém iteračně. Na každé časové vrstvě použijeme Oseenův iterační proces.

$$\begin{aligned} a(U_h^{(l)}, U_h^{(l+1)}, V_h) + \mathcal{L}_h(U_h^{(l)}, U_h^{(l+1)}, V_h) + \mathcal{P}_h(U_h^{(l+1)}, V_h) &= f(V_h) + \mathcal{F}_h(V_h) \\ \text{pro všechny } V_h = (\mathbf{v}_h, q_h) &\in X_h \times Q_h, \end{aligned} \quad (4.4)$$

kde

$$U_h^{(l+1)} = (\mathbf{u}_h^{(l+1)}, p_h^{(l+1)})$$

Jako počáteční přiblížení volíme

$$U_h^{(0)} = (\mathbf{u}_h^{(0)}, p_h^{(0)}) = (\hat{\mathbf{u}}^n, \hat{p}^n)$$

nebo

$$U_h^{(0)} = (\mathbf{u}_h^{(0)}, p_h^{(0)}) = (2\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}, 2\hat{p}^n - \hat{p}^{n-1})$$

V každé iteraci řešíme Oseenův linearizovaný problém, počítáme řešení $U_h^{(l+1)}$ z $U_h^{(l)}$. K získání dostatečně přesného řešení na každé časové vrstvě stačí vypočítat 5-8 Oseenových iterací, tím získáme řešení U_h^{n+1} na časové vrstvě t_{n+1} .

Řešení linearizovaného Oseenova problému.

Nechť systém funkcí $\{\mathbf{w}_i^*\}_{i=1}^N$ tvoří bázi prostoru X_h a systém funkcí $\{q_i^*\}_{i=1}^M$ tvoří bázi prostoru Q_h . Potom hledáme $U_h^{(l+1)} = (\mathbf{u}_h^{(l+1)}, p_h^{(l+1)})$ ve tvaru

$$\mathbf{u}_h^{(l+1)} = \mathbf{u}_h^* + \sum_{j=1}^N U_j \mathbf{w}_j^*, \quad (4.5)$$

$$p_h^{(l+1)} = \sum_{j=1}^M P_j q_j^*, \quad (4.6)$$

kde $\mathbf{u}_h^* \in W_h$ je vhodná funkce splňující okrajové podmínky (2.24) a (2.25). Platí tedy, že $\mathbf{u}_h^{(l+1)} - \mathbf{u}_h^* \in X_h$. Testovací funkce $V_h = (\mathbf{v}_h, q_h)$ volíme následovně:

$$\mathbf{v}_h = \mathbf{w}_i^* \quad i = 1, \dots, N \quad \quad q_h = q_i^* \quad i = 1, \dots, M$$

Dosazením těchto vztahů do jednotlivých členů v (4.4) dostáváme

$$\begin{aligned} a(U_h^{(l)}, U_h^{(l+1)}, V_h) &= \\ &= \frac{3}{2\tau} \sum_{j=1}^N (\mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_i^*) U_j + \nu \sum_{j=1}^N ((\mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_i^*)) U_j \\ &+ \sum_{j=1}^N (((\mathbf{u}_h^{(l)} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_i^*) U_j - \sum_{j=1}^M (q_j^*, \operatorname{div} \mathbf{w}_i^*) P_j + \sum_{j=1}^N (\operatorname{div} \mathbf{w}_j^*, q_i^*) U_j \\ &+ \frac{3}{2\tau} (\mathbf{u}_h^*, \mathbf{w}_i^*) + \nu (\mathbf{u}_h^*, \mathbf{w}_i^*) + (((\mathbf{u}_h^{(l)} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^*, \mathbf{w}_i^*) + (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^*, q_i^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h(U_h^{(l)}, U_h^{(l+1)}, V_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \\ &\times \sum_{j=1}^N \left(\frac{3}{2\tau} \mathbf{w}_j^* - \nu \Delta \mathbf{w}_j^* + ((\mathbf{u}_h^{(l)} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{w}_j^*, ((\mathbf{u}_h^{(l)} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{w}_i^* \right)_K U_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \sum_{j=1}^M \left(\nabla q_j^*, ((\mathbf{u}_h^{(l)} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{w}_i^* \right)_K P_j \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(\frac{3}{2\tau} \mathbf{u}_h^* - \nu \Delta \mathbf{w}_h^* + ((\mathbf{u}_h^{(l)} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^*, ((\mathbf{u}_h^{(l)} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{w}_i^* \right)_K \\
f(V_h) & = \frac{1}{2\tau} \left(4\hat{\mathbf{u}}_h^n - \hat{\mathbf{u}}_h^{n-1}, \mathbf{w}_i^* \right) - \int_{\Gamma_O} p_{ref} \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_i^* dS \\
\mathcal{F}_h(V_h) & = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(\frac{1}{2\tau} (4\hat{\mathbf{u}}_h^n - \hat{\mathbf{u}}_h^{n-1}), ((\mathbf{u}_h^{(l)} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{w}_i^* \right)_K \\
\mathcal{P}_h(U_h^{(l+1)}, V_h) & = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \sum_{j=1}^N \left(\nabla \cdot \mathbf{w}_j^*, \nabla \cdot \mathbf{w}_i^* \right)_K U_j + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \left(\nabla \cdot \mathbf{u}_h^*, \nabla \cdot \mathbf{w}_i^* \right)_K
\end{aligned}$$

a dosazením do (4.4) získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N a_{ij} U_j + \sum_{j=1}^M (b_{ij} + c_{ij}) P_j & = F_i, \quad i = 1, \dots, N, \\
\sum_{j=1}^N b_{ji} U_j & = G_i, \quad i = 1, \dots, M,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

kde

$$\begin{aligned}
a_{ij} & = \frac{3}{2\tau} \left(\mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_i^* \right) + \nu \left((\mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_i^*) \right) + \left(((\mathbf{u}_h^{(l)} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_i^* \right) \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(\frac{3}{2\tau} \mathbf{w}_j^* - \nu \Delta \mathbf{w}_j^* + ((\mathbf{u}_h^{(l)} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{w}_j^*, ((\mathbf{u}_h^{(l)} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{w}_i^* \right)_K \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \sum_{j=1}^N \left(\nabla \cdot \mathbf{w}_j^*, \nabla \cdot \mathbf{w}_i^* \right)_K,
\end{aligned}$$

$$b_{ij} = -(q_j^*, \operatorname{div} \mathbf{w}_i^*),$$

$$c_{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(\nabla q_j^*, ((\mathbf{u}_h^{(l)} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{w}_i^* \right)_K,$$

$$\begin{aligned}
F_i & = \frac{1}{2\tau} \left(4\hat{\mathbf{u}}_h^n - \hat{\mathbf{u}}_h^{n-1}, \mathbf{w}_i^* \right) - \int_{\Gamma_O} p_{ref} \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}_i^* dS \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(\frac{1}{2\tau} (4\hat{\mathbf{u}}_h^n - \hat{\mathbf{u}}_h^{n-1}), ((\mathbf{u}_h^{(l)} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{w}_i^* \right)_K
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(\frac{3}{2\tau} \mathbf{u}_h^* - \nu \Delta \mathbf{u}_h^* + ((\mathbf{u}_h^{(l)} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^*, ((\mathbf{u}_h^{(l)} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{w}_i^* \right)_K \\
& - \frac{3}{2\tau} (\mathbf{u}_h^*, \mathbf{w}_i^*) + \nu ((\mathbf{u}_h^*, \mathbf{w}_i^*)) + \left(((\mathbf{u}_h^{(l)} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^*, \mathbf{w}_i^* \right) \\
& - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (\nabla \cdot \mathbf{u}_h^*, \nabla \cdot \mathbf{w}_i^*)_K,
\end{aligned}$$

$$G_i = (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^*, q_i^*).$$

Označíme-li

$$\begin{aligned}
\mathbf{U} &= (U_1, \dots, U_N)^T, \\
\mathbf{P} &= (P_1, \dots, P_M)^T, \\
\mathbf{A} &= (a_{ij})_{i,j=1}^N, \\
\mathbf{B} &= (b_{ij})_{i=1, \dots, N, j=1, \dots, M}, \\
\mathbf{C} &= (c_{ij})_{i=1, \dots, N, j=1, \dots, M}, \\
\mathbf{F} &= (F_1, \dots, F_N)^T, \\
\mathbf{G} &= (G_1, \dots, G_M)^T,
\end{aligned}$$

můžeme vzniklou soustavu lineárních rovnic (4.7) zapsat maticově

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} + \mathbf{C} \\ \mathbf{B}^T & \emptyset \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Řešení této soustavy lineárních rovnic je realizováno pomocí přímého řešiče UMFPACK [5], který řeší dostatečně rychle soustavy až o 10^5 rovnicích.

Předpokládejme, že máme vypočtené přibližné řešení $U_h^n = (\mathbf{u}_h^n, p_h^n)$ na časové vrstvě t_n . Výpočetní proces přechodu na další časovou vrstvu vypadá tedy takto:

- Vypočteme funkci L a moment M na časové vrstvě t_n a z hodnot na t_n a t_{n-1} extrapolací získáme hodnoty na \tilde{t}_r , $\tilde{t}_r + \frac{\sigma}{2}$ a $\tilde{t}_r + \sigma$, $r = 0, 1, \dots, N-1$, kde $\sigma = \frac{\tau}{N}$.
- Extrapolované hodnoty funkce L a momentu M použijeme k získání h a α na časové vrstvě t_{n+1} Runge-Kuttovou metodou čtvrtého řádu.
- h_{n+1} a α_{n+1} určují ALE zobrazení \mathbf{A}_{n+1} , oblast $\Omega_{t_{n+1}}$ a aproximaci rychlosti ALE transformace \mathbf{w}^{n+1} .
- Nyní pomocí Oseenova iteračního procesu vypočteme přibližné řešení U_h^{n+1} na časové vrstvě t_{n+1} , kde $U_h^{n+1} = (\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1})$.

Kapitola 5

Modelování turbulence

Experimenty ukazují, že charakter proudění závisí na velikosti Reynoldsova čísla Re . Proudění s dostatečně malým Reynoldsovým číslem je laminární. Pokud Re překročí kritickou hodnotu Reynoldsova čísla, stává se proudění turbuletním. Vzhledem k tomu, že Reynoldsovo číslo uvažovaného proudění je značně vysoké ($Re \approx 10^5 - 10^6$), jedná se o turbulentní proudění. To je charakterizované interakcí vírů různých velikostí a rychlými náhodnými fluktuacemi. Zachycení těchto jevů numerickými metodami je v současné době prakticky nemožné. Je to způsobeno malou kapacitou paměti a malou rychlostí současných počítačů. Není dosud možné zvolit výpočetní síť tak hustou, aby umožnila zachytit interakci dostatečně malých vírů a bylo tak možné provést přímou numerickou simulaci (direct numerical simulation) turbulentního proudění. Na druhé straně, veličiny charakterizující proudění získané měřením nejsou okamžitými hodnotami, ale středními hodnotami na určitém krátkém intervalu. Tato skutečnost vede k odvozování matematických modelů, které používají časové středování.

5.1 Středované Reynoldsovy rovnice

5.1.1 Střední hodnota

V turbulentním proudění jsou veličiny popisující proudění vyjádřeny ve tvaru

$$f = \bar{f} + f', \quad (5.1)$$

kde \bar{f} představuje střední hodnotu vzhledem k časovému (prostorovému) měřítku a f' je tzv. turbulentní fluktuace. Střední hodnoty jsou definovány pomocí vhodného operátoru ustřednění (viz [12], [23], [11], [17]).

Předpokládáme, že pro střední hodnoty platí následující Reynoldsovy podmínky:

$$\begin{aligned}
 \overline{f + g} &= \overline{f} + \overline{g}, \\
 \overline{af} &= a\overline{f}, \\
 \overline{a} &= a, \\
 \overline{\overline{f} \cdot g} &= \overline{f} \cdot \overline{g}, \\
 \overline{\frac{\partial f}{\partial S}} &= \frac{\partial}{\partial S} \overline{f},
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

kde f a g jsou funkce, a je konstanta a $S = t, x_1, x_2$. Vidíme, že platí:

$$\overline{f} = \overline{\overline{f} + f'} = \overline{\overline{f}} + \overline{f'} = \overline{f} + \overline{f'},$$

a tudíž

$$\overline{f'} = 0. \tag{5.3}$$

Nyní můžeme podle (5.1) napsat okamžitou rychlost a tlak ve tvaru

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} + \mathbf{u}', \quad u_i = \overline{u_i} + u'_i, \tag{5.4}$$

$$p = \overline{p} + p' \tag{5.5}$$

a dosadit je do rovnice kontinuity a do Navierových-Stokesových rovnic.

5.1.2 Rovnice kontinuity

Pro okamžitou rychlost platí rovnice kontinuity ve tvaru

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \tag{5.6}$$

Za okamžitou rychlost dosadíme (5.4), celou rovnici středujeme a použijeme (5.3) a Reynoldsovy podmínky (5.2):

$$0 = \overline{\sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = \sum_{i=1}^2 \overline{\frac{\partial(\overline{u_i} + u'_i)}{\partial x_i}} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial(\overline{\overline{u_i} + u'_i})}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial(\overline{u_i} + \overline{u'_i})}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i}.$$

Rovnice kontinuity pro střední hodnotu rychlosti má tedy stejný tvar jako pro okamžitou rychlost

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0. \tag{5.7}$$

5.1.3 Navierovy-Stokesovy rovnice

Pro okamžité veličiny platí

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \nu \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (5.8)$$

Za okamžité veličiny dosadíme vztahy (5.4), (5.5) a celé rovnice středujeme. Protože střední hodnota součtu je součet středních hodnot, můžeme každý člen středovat zvlášť. Opět využíváme (5.3) a Reynoldsovy podmínky (5.2).

Časová derivace rychlosti

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t}} = \frac{\partial(\bar{u}_i + \overline{u'_i})}{\partial t} = \frac{\partial(\bar{u}_i + \bar{u}'_i)}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}. \quad (5.9)$$

Konvektivní člen

$$\begin{aligned} \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} &= \overline{(\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i + u'_i)} \\ &= \overline{\bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} u'_i + u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i + u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} u'_i} \\ &= \overline{\bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i} + \overline{\bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} u'_i} + \overline{u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i} + \overline{u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} u'_i} \\ &= \overline{\bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i} + \overline{\bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} u'_i} + \overline{u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i} + \overline{u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} u'_i} \\ &= \overline{\bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i} + \overline{u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} u'_i}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Gradient tlaku

$$\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}} = \overline{\frac{\partial(\bar{p} + p')}{\partial x_i}} = \frac{\partial(\bar{p} + \overline{p'})}{\partial x_i} = \frac{\partial(\bar{p} + \bar{p}')}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}. \quad (5.11)$$

Laplaceův operátor

$$\begin{aligned} \overline{\nu \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u_i} &= \nu \sum_{j=1}^2 \overline{\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\bar{u}_i + u'_i)} = \nu \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \overline{(\bar{u}_i + u'_i)} = \\ &= \nu \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\bar{u}_i + \bar{u}'_i) = \nu \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \bar{u}_i. \end{aligned} \quad (5.12)$$

K získání středovaných Navierových-Stokesových rovnic můžeme použít vztahy (5.9), (5.10), (5.11), (5.12) a dostáváme

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^2 \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \nu \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Protože platí rovnice kontinuity pro okamžitou rychlost (5.6) i pro její střední hodnotu (5.7),

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0,$$

můžeme psát

$$0 = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial (\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u'_i}{\partial x_i}.$$

Tudíž

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0, \tag{5.13}$$

a

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) = \overline{\sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_j)} = \overline{\sum_{j=1}^2 \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} u'_j + \sum_{j=1}^2 u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j}} = \sum_{j=1}^2 \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} u'_j}. \tag{5.14}$$

Dosazením posledního vztahu do středovaných Navierových-Stokesových rovnic získáme konečný tvar

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_i u'_j}) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \nu \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{5.15}$$

5.1.4 Reynoldsovy rovnice

Reynoldsovy rovnice s využitím předchozích vztahů mají tvar:

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = 0, \tag{5.16}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{u}_i + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \nu \Delta \bar{u}_i - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial R_{ji}}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, \tag{5.17}$$

kde

$$R_{ji} = -\overline{u'_i u'_j}, \quad i, j = 1, 2 \tag{5.18}$$

jsou prvky tzv. Reynoldsova tensoru turbulentního napětí. Vidíme, že rovnice kontinuity zůstala nezměněna, ale pohybové rovnice se od Navier-Stokesových liší právě tensorem turbulentního napětí, který reprezentuje další tři neznámé.

5.1.5 Uzavírací rovnice

Uzavírací rovnice jsou vztahy přidané k systému Reynoldsových rovnic, které umožní výpočet neznámých $\overline{u_i}, \overline{p}$ a R_{ji} . Jednou možností je přidat k Reynoldsovým rovnicím vztahy pro složky Reynoldsova tenzoru napětí, druhou možností je tzv. Boussinesqova hypotéza (viz [7])

$$R_{ij} = \nu_T \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right). \quad (5.19)$$

Koeficient ν_T se nazývá turbulentní vazkost, která na rozdíl od laminární vazkosti ν může záviset na souřadnicích x_i , rychlosti u_i a dalších proměnných. Námí použitý model vychází právě z Boussinesqovy hypotézy, půjde tedy o určení turbulentní vazkosti ν_T . K tomu se používají různé modely, které popíšeme v oddíle 5.2.

5.1.6 ALE formulace

Za použití Boussinesqovy hypotézy dostáváme Reynoldsovy rovnice ve tvaru

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{u}} = 0,$$

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + (\overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \overline{u_i} + \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \right\} = 0, \quad i = 1, 2,$$

které přeformulujeme do ALE popisu

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (5.20)$$

$$\frac{D^A}{Dt} u_i + ((\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla) u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} = 0, \quad (5.21)$$

$$i = 1, 2,$$

kde $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ a p pro zjednodušení zápisu nyní označují střední hodnoty rychlosti a tlaku.

5.1.7 Diskretizace

Podobně jako v kapitole 3 provedeme diskretizaci v čase

$$\frac{D^A \mathbf{u}}{Dt} (\mathbf{x}^{n+1}, t_{n+1}) \approx \frac{3\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}) - 4\hat{\mathbf{u}}^n(\mathbf{x}^{n+1}) + \hat{\mathbf{u}}^{n-1}(\mathbf{x}^{n+1})}{2\tau}. \quad (5.22)$$

a rovnici (5.21) vynásobíme testovací funkcí $\mathbf{v} \in X$ a zintegrujeme přes oblast Ω . Pomocí Greenovy věty upravíme člen s ∇p (stejně jako pro laminární proudění) a člen s kinematickou a turbulentní vazkostí.

$$- \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} v_i \, d\mathbf{x} = \quad (5.23)$$

$$\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \left\{ (\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} - \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_O} \left\{ (\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} v_i n_j dS.$$

Pomocí těchto vztahů zapíšeme slabou formulaci (obdobně jako pro laminární proudění)

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2\tau} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \left(((\mathbf{u}^* - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) + \\ & + \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} (\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} + (\operatorname{div} \mathbf{u}, q) = \\ & = \frac{1}{2\tau} (4\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}, \mathbf{v}) - \int_{\Gamma_O} p_{ref} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Soustavu uvažujeme s okrajovými podmínkami (2.24), (2.25) a upravenou “do-nothing” podmínkou:

$$-(p - p_{ref}) n_i + (\nu + \nu_T) \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j = 0 \quad \text{na } \Gamma_O, \quad i = 1, 2. \quad (5.25)$$

Diskretizaci v prostoru provedeme metodou konečných prvků analogicky jako v kapitole 3. Ještě definujeme stabilizační člen $\tilde{\mathcal{L}}_h(U^*, U, V)$, který se liší od analogického členu v laminárním proudění.

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathcal{L}}_h(U^*, U, V) = \\ & = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \left(\frac{3}{2\tau} \mathbf{u} - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} + (\bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p, (\bar{\mathbf{w}} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right)_K, \\ & U = (\mathbf{u}, p), \quad U^* = (\mathbf{u}^*, p), \quad V = (\mathbf{v}, q). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Ostatní stabilizační členy zůstávají stejné jako pro laminární proudění. Stabilizovaný diskrétní problém pro turbulentní proudění zapíšeme takto:

Hledáme řešení $U_h = (\mathbf{u}_h, p_h) \in W_h \times Q_h$ takové, že \mathbf{u}_h vyhovuje vhodné aproximaci okrajových podmínek (2.24) a (2.25) a platí

$$\begin{aligned} & \tilde{a}(U_h, U_h, V_h) + \tilde{\mathcal{L}}_h(U_h, U_h, V_h) + \mathcal{P}_h(U_h, V_h) = f(V_h) + \mathcal{F}_h(V_h) \\ & \text{pro všechny } V_h = (\mathbf{v}_h, q_h) \in X_h \times Q_h, \end{aligned} \quad (5.27)$$

kde

$$\begin{aligned} \tilde{a}(U^*, U, V) & = \frac{3}{2\tau} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} (\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} \\ & + \left(((\mathbf{u}^* - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) + (\operatorname{div} \mathbf{u}, q). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Výpočet síly L a momentu M v čase $t = t_{n+1}$ z přibližného řešení $U_h = (\mathbf{u}_h, p_h)$ stabilizovaného diskrétního problému (5.27) provádíme obdobně jako pro laminární proudění. Vynásobením rovnice (5.21) pro $i = 2$ funkcí φ a integrací přes množinu $\Omega_{\Gamma_{W_t}}$ dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \left(\frac{3u_2 - 4\hat{u}_2^n + \hat{u}_2^{n-1}}{2\tau} + ((\mathbf{u} - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) u_2 \right) \varphi \, d\mathbf{x} &= \\ &= \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \frac{\partial \tau_{2j}}{\partial x_j} \varphi \, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \frac{\partial R_{2j}}{\partial x_j} \varphi \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Použitím Greenovy věty získáme

$$\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \frac{\partial \tau_{2j}}{\partial x_j} \varphi \, d\mathbf{x} = - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \tau_{2j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, d\mathbf{x} + \underbrace{\sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_{W_t}} \tau_{2j} \varphi n_j \, dS}_{=L}$$

a

$$\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \frac{\partial R_{2j}}{\partial x_j} \varphi \, d\mathbf{x} = - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} R_{2j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, d\mathbf{x} + \underbrace{\sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_{W_t}} R_{2j} \varphi n_j \, dS}_{=0},$$

kde poslední rovnost plyne ze skutečnosti, že turbulentní vazkost ν_T je na leteckém profilu rovna nule. Pomocí těchto vztahů můžeme zapsat vztah pro sílu L .

$$\begin{aligned} L &= - \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \left(\frac{3u_{h2} - 4\hat{u}_{h2}^n + \hat{u}_{h2}^{n-1}}{2\tau} + ((\mathbf{u}_h - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) u_{h2} \right) \varphi \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} p_h \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \, d\mathbf{x} - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} (\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial u_{hj}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{hj}}{\partial x_2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, d\mathbf{x}, \quad (5.29) \end{aligned}$$

Podobně vypočteme moment M .

$$\begin{aligned} M &= - \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} \left(\frac{3\mathbf{u}_h - 4\hat{\mathbf{u}}_h^n + \hat{\mathbf{u}}_h^{n-1}}{2\tau} + ((\mathbf{u}_h - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla) \mathbf{u}_h \right) \cdot \mathbf{v}^{\text{ort}} \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} p_h \frac{\partial v_i^{\text{ort}}}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} - \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega_{\Gamma_{W_t}}} (\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial u_{hi}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{hj}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i^{\text{ort}}}{\partial x_j} \, d\mathbf{x}. \quad (5.30) \end{aligned}$$

K nalezení přibližného řešení U_h na časové vrstvě t_{n+1} použijeme opět Oseenův iterativní proces, tím získáme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} + \mathbf{C} \\ \mathbf{B}^T & \emptyset \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{G} \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

kde prvky matic \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} určíme z upravené slabé formulace podobně jako pro laminární proudění (viz oddíl 4.1).

Nyní máme kompletní diskrétní problém pro turbulentní proudění a zbývá určení turbulentní vazkosti ν_T . K tomu využijeme algebraické modely turbulence.

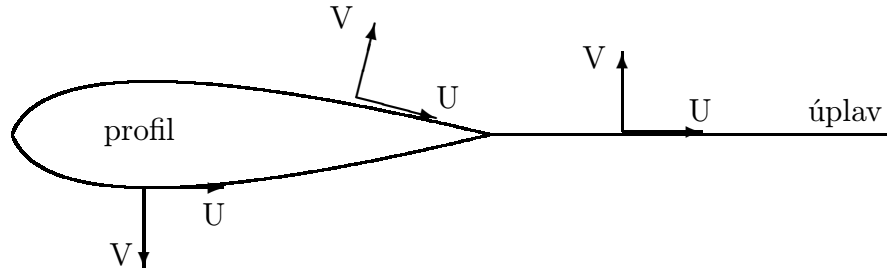
5.2 Algebraické modely turbulence

5.2.1 Model Cebeci–Smith (CS model)

Základem používaných algebraických modelů s turbulentní vazkostí je model, který navrhli pro turbulentní mezní vrstvu Cebeci a Smith ([4]). V tomto modelu se oblast Ω rozdělí na dvě podoblasti. Ve vnitřní oblasti, v blízkosti stěny se počítá vnitřní turbulentní vazkost ν_{Ti} . Ve vnější oblasti se počítá vnější turbulentní vazkost ν_{To} . Při výpočtu se však postupuje tak, že počítáme vazkosti ν_{Ti}, ν_{To} v obou vrstvách a turbulentní vazkost určíme jako jejich minimální hodnotu:

$$\nu_T = \min(\nu_{Ti}, \nu_{To}). \quad (5.32)$$

Pro výpočet turbulentní vazkosti zavedeme lokální souřadné systémy (X, Y) , kde X měříme podél profilu, případně podél střednice úplavu a osa Y je kolmá k X . Složky rychlosti ve směrech X, Y označíme U, V .



Obrázek 5.1: Lokální souřadné systémy (X, Y) a složky rychlosti U, V .

Vnitřní turbulentní vazkost je definována vztahem

$$\nu_{Ti} = \rho l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial Y} \right|, \quad (5.33)$$

kde ρ je hustota tekutiny a l je směšovací délka, která je dána vztahem

$$l = \kappa Y F_D. \quad (5.34)$$

Zde

$$F_D = 1 - \exp\left(-\frac{1}{A^+} \frac{u_\tau Y}{\nu}\right) \quad (5.35)$$

je tzv. van Driestova funkce. Symbolem $Y = Y(\mathbf{x})$ zde značíme kolmou vzdálenost bodu $\mathbf{x} \in \Omega$ od profilu, případně od střednice úplavu. Index w značí hodnotu na stěně, tj. pro $Y = 0$. Tzv. třecí rychlost u_τ je definována vztahem

$$u_\tau = \left(\nu \left| \frac{\partial U}{\partial Y} \right|_w \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.36)$$

Empirická konstanta $A^+ = 26$ byla určena pro $\kappa = 0.4$ z experimentálních dat pro obtékání desky. Pro úplavovou oblast klademe $\nu_{Ti} = \infty$.

Vnější turbulentní vazkost je definována Clauserovým vztahem

$$\nu_{To} = \rho \alpha \delta_i^* U_e F_k, \quad (5.37)$$

kde $\alpha = 0.0168$. Funkce

$$F_k = \left[1 + 5.5 \left(\frac{Y}{\delta} \right)^6 \right]^{-1} \quad (5.38)$$

vyjadřuje charakter turbulence ve vnější oblasti mezní vrstvy. V rovnici (5.37) představuje $U_e = U(\delta)$ rychlost vnějšího proudu a δ_i^* je tzv. kinematická pošinovací tloušťka

$$\delta_i^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{U}{U_e} \right) dY. \quad (5.39)$$

Uvedený algebraický model však vyžaduje znalost parametrů mezní vrstvy - tloušťku smykové vrstvy δ , součin $U_e \delta_i^*$ a třecí rychlost u_τ , což je pro řešení Navierových-Stokesových rovnic nevýhodné.

5.2.2 Model Baldwina a Lomaxe (BL model)

Baldwin a Lomax navrhli v [1] úpravu původního modelu, jejímž cílem je odstranit z modelu turbulence parametry mezní vrstvy.

Vnitřní turbulentní vazkost je dána vztahem

$$\nu_{Ti} = \rho l^2 |\omega|, \quad (5.40)$$

kde ω je zavířenost, která je pro dvourozměrné proudění dána rovnicí

$$\omega = \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial X}, \quad (5.41)$$

ρ je hustota tekutiny a l je směšovací délka, pro kterou použili stejný vztah jako v modelu, který navrhli Cebeci a Smith.

Vnější turbulentní vazkost je definována vztahem

$$\nu_{To} = \rho \alpha C_{cp} F_w F_k, \quad (5.42)$$

kde

$$\begin{aligned} F_w &= \min(F_{w_1}, F_{w_2}), \\ F_{w_1} &= Y_{\max} F_{\max}, \\ F_{w_2} &= C_{wk} Y_{\max} \frac{(\Delta U)^2}{F_{\max}}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Hodnota F_{\max} je maximum funkce

$$F = Y |\omega| F_D \quad (5.44)$$

na paprsku $X = \text{konst.}$, $Y \geq 0$. Y_{\max} je hodnota, pro kterou platí $F(Y_{\max}) = F_{\max}$ a ΔU je rozdíl mezi maximální a minimální hodnotou složky rychlosti U na uvažovaném paprsku $X = \text{konst.}$, $Y \geq 0$. Pro Klebanoffovu funkci F_k platí

$$F_k = \left[1 + 5.5 \left(C_{KL} \frac{Y}{Y_{\max}} \right)^6 \right]^{-1}. \quad (5.45)$$

Tloušťka smykové vrstvy δ je podle Baldwina a Lomaxe (1978) tedy vyjádřena vztahem

$$\delta = \frac{Y_{\max}}{C_{KL}} \quad (5.46)$$

a výraz $Y_{\max} F_{\max}$ nahrazuje součin $\delta^* U_e$. Baldwin a Lomax použili při výpočtech následující konstanty

$$\alpha = 0.0168, \quad C_{cp} = 1.6, \quad C_{KL} = 0.3, \quad C_{wk} = 0.25.$$

5.2.3 Model Rostanda

Pro mezní vrstvu upravil Rostand ([18]) součin $U_e \delta_i^*$ v rovnici (5.37) pomocí integrace per partes do tvaru

$$\begin{aligned} \delta_i^* U_e &= \int_0^\delta U_e \left(1 - \frac{U}{U_e} \right) dY = \int_0^\delta (U_e - U) dY = \left[Y (U_e - U) \right]_0^\delta + \int_0^\delta Y \frac{\partial U}{\partial Y} dY \\ &= \delta \underbrace{(U_e - U(\delta))}_0 - 0 (U_e - U(0)) + \int_0^\delta Y \frac{\partial U}{\partial Y} dY = \int_0^\delta Y \frac{\partial U}{\partial Y} dY. \end{aligned}$$

Zanedbáme-li ve vztahu pro zavířenost výraz $\frac{\partial V}{\partial X}$, můžeme psát

$$\delta_i^* U_e = \int_0^\delta Y |\omega| dY. \quad (5.47)$$

Při dostatečně vysokých Reynoldsových číslech velmi rychle klesá se vzdáleností od stěny nejen zavířenost, ale i součin $Y |\omega|$, takže při výpočtu integrálu v rovnici (5.47) stačí jen hrubý odhad horní meze. Rostand provedl odhad horní meze pomocí maxima funkce $F = Y |\omega|$, kterou použili rovněž Baldwin a Lomax. Horní mez integrálu v rovnici (5.47) je nahrazena vzdáleností od stěny y_1 , ve které funkce F klesne na polovinu maximální hodnoty, tj. $F(y_1) = 0.5 F_{\max}$. Pro určení funkce F_k podle rovnice (5.38) zavedl Rostand délkové měřítko

$$L_k = \frac{\int_0^{y_1} Y^2 |\omega| dY}{\int_0^{y_1} Y |\omega| dY}, \quad (5.48)$$

které slouží ke stanovení tloušťky smykové vrstvy

$$\delta = \frac{L_k}{C_k}, \quad (5.49)$$

kde pro parametr C_k použil konstantní hodnotu $C_k = 0.45$.

5.2.4 Implementace BL modelu turbulence

Protože k výpočtu turbulentní vazkosti je nutné znát hodnoty na paprsku $X = \text{konst.}$, $Y \geq 0$, musíme nejprve zkonstruovat lokální strukturovanou síť. Veličiny charakterizující proudění interpolujeme z nestrukturované sítě na lokální strukturovanou síť, na níž vypočteme turbulentní vazkost. Ta je pak interpolována zpět na nestrukturovanou síť a použita k výpočtu na další časové vrstvě.

Konstrukce lokální strukturované sítě \mathcal{L}_h .

- *Profil:* Nejprve definujeme uzly ležící na profilu, které se shodují s uzly triangulace \mathcal{T}_h : M_{i1} , $i = 0, 1, \dots, m$, kde $M_{01} = M_{m1} = B$ je uzel ležící na konci profilu. Potom pro pevné i definujeme uzly M_{ij} , $j = 2, 3, \dots, l$, tak, že M_{ij} leží na vnější normále \mathbf{n} k profilu v bodě M_{i1} a zároveň pro vzdálenost dvou sousedních uzlů platí

$$|M_{ij}M_{i,j+1}| = s_y z_y^{j-1}, \quad (5.50)$$

kde z_y je vhodné reálné číslo větší než jedna a

$$s_y = \min_{T \in \mathcal{B}} |T|, \quad \mathcal{B} = \{T \in \mathcal{T}_h, T \text{ je přilehlý k profilu}\}. \quad (5.51)$$

Lokální síť konstruujeme přibližně do vzdálenosti $0.1 L^*$, kde L^* je charakteristická délka profilu.

- *Úplav:* V linii úplavu postupujeme obdobně. Určíme koncový bod úplavu A a na úsečce BA generujeme uzly N_{i1} , $i = 0, 1, \dots, n$, kde $N_{01} = B$ a $N_{n1} = A$ a platí

$$|N_{i1}N_{i+1,1}| = s_x z_x^i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (5.52)$$

kde z_x je vhodné reálné číslo větší než jedna a

$$s_x = \min_{i=0, \dots, m} |M_{i-1,1}M_{i,1}|. \quad (5.53)$$

Potom pro pevné i definujeme uzly N_{ij} , $j = \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l$, tak, že N_{ij} leží na kolmici k úsečce BA v bodě N_{i1} a zároveň platí stejný vztah jako pro profil

$$|N_{ij}N_{i,j+1}| = s_y z_y^{j-1}. \quad (5.54)$$

Každý element této čtyřúhelníkové sítě rozdělíme na dva trojúhelníky. Tímto způsobem získáme trojúhelníkovou síť \mathcal{L}_h .

Interpolace mezi nestruturovanou a strukturovanou sítí.

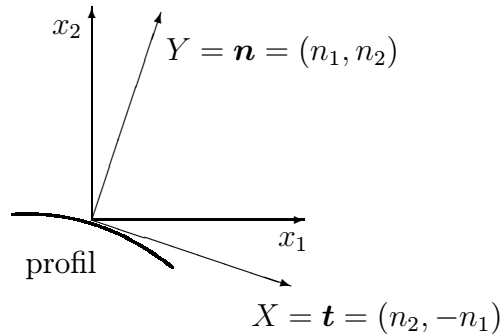
Pro výpočet turbulentní vazkosti potřebujeme znát hodnoty některých veličin charakterizujících proudění na lokální síti. Nejprve pro každý vrchol lokální strukturované sítě \mathcal{L}_h zjistíme index trojúhelníku $T \in \mathcal{T}_h$, v němž leží. Potom pro tento element určíme z hodnot ve vrcholech lineární aproximaci interpolované veličiny h na tomto elementu

$$h(x_1, x_2) = a_T x_1 + b_T x_2 + c_T, \quad (x_1, x_2) \in T \quad (5.55)$$

a vypočteme hodnotu funkce h v uvažovaném vrcholu triangulace \mathcal{L}_h . Takto vypočteme hodnoty funkce h ve všech vrcholech triangulace \mathcal{L}_h a na každém elementu $K \in \mathcal{L}_h$ funkci h aproximujeme pomocí lineární interpolace. Zpětná interpolace turbulentní vazkosti ze strukturované sítě na nestruturovanou se provede zcela analogicky s tím, že v uzlech z \mathcal{T}_h , které nejsou pokryty strukturovanou sítí klademe turbulentní vazkost rovnu nule.

Transformace souřadnic.

Protože v algebraickém modelu turbulence potřebujeme znát složky rychlosti U, V v nových souřadnicových systémech (X, Y) , musíme vypočítat U, V ze známých složek rychlosti u_1, u_2 ve směrech (x_1, x_2) .



Obrázek 5.2: Nový souřadnicový systém (X, Y) , kde \mathbf{n} značí jednotkovou vnější normálu k profilu, \mathbf{t} jednotkový tečný vektor.

Použijeme-li označení z obr. 5.2, pro složky rychlosti platí

$$U = \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = u_1 n_2 - u_2 n_1, \quad (5.56)$$

$$V = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_1 n_1 + u_2 n_2. \quad (5.57)$$

Pro jejich derivace dostaneme

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \mathbf{t} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} n_2 - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} n_1, \quad (5.58)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} \cdot \mathbf{t} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} n_2 - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} n_1, \quad (5.59)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} n_2, \quad (5.60)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} n_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} n_2, \quad (5.61)$$

Pomocí těchto vztahů můžeme vypočítat $\frac{\partial U}{\partial Y}$ a zavířenost ω .

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial U}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} n_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} n_1 n_2 - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} n_1^2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} n_2^2 - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} n_1 n_2, \quad (5.62)$$

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} n_1 n_2 - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} n_1^2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} n_2^2 - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} n_1 n_2 - \\ &\quad - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} n_1 n_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} n_2^2 - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} n_1^2 - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} n_1 n_2 \right) \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} (n_1^2 + n_2^2) - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} (n_1^2 + n_2^2) = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Vidíme, že zavířenost je invariantní vzhledem k transformaci souřadnic.

Výpočet turbulentní vazkosti ν_T .

- Nejprve vypočteme derivace $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$, $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$ a zavířenost ω ve vrcholech sítě \mathcal{T}_h jako vážený průměr z hodnot na trojúhelnících se společným uzlem (jako váhy volíme obsahy trojúhelníků). Pak interpolujeme složky rychlosti u_1, u_2 a zavířenost ω na lokální síť \mathcal{L}_h a vypočteme U a V v bodech \mathcal{L}_h a $\frac{\partial U}{\partial Y}$ v bodech na stěně profilu.
- *Profil:* V dalším kroku procházíme pro každé i body M_{ij} , $j = 1, 2, 3, \dots, l$, a určíme hodnoty funkce F_D a pro každé i extrémní hodnoty Y_{\max}, F_{\max} a ΔU (v modelu Rostanda určíme navíc horní mez y_1 a vypočteme příslušné integrály). Opět procházíme body M_{ij} , ve kterých určíme hodnoty F_w, F_{kleb} a následně i ν_{T_i} a ν_{T_o} .
- *Úplav:* Nejprve pro každé i procházíme body N_{ij} , $j = 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l$, a určíme lokální střed úplavu pomocí kritéria minimální rychlosti U a určíme extrémní hodnoty Y_{\max}, F_{\max} a ΔU . Nakonec projdeme opět všechny uzly N_{ij} a určíme F_w, F_{kleb} a ν_{T_o} . V úplavu klademe $\nu_{T_i} = \infty$.

Kapitola 6

Numerické výpočty

Vypracovaný software užívá bezrozměrné veličiny. Bezrozměrné rovnice vzniknou vhodnou úpravou Reynoldsových rovnic. Nejprve zavedeme bezrozměrnou polohu bodu \mathbf{x}'

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{L^*}, \quad (6.1)$$

kde L^* je charakteristická délka. V našem případě to bude délka profilu (tětiva). Další bezrozměrnou veličinou je bezrozměrná rychlost proudění \mathbf{u}'

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u}}{U^*}, \quad (6.2)$$

kde U^* je charakteristická rychlost, rovná velikosti náběžné rychlosti U_∞ . Je-li bezrozměrný čas t' dán vztahem

$$t' = \frac{t}{T^*}, \quad (6.3)$$

pak konstanta T^* splňuje vztah

$$T^* = \frac{L^*}{U^*}. \quad (6.4)$$

Bezrozměrný tlak p' je dán vztahem

$$p' = \frac{p}{P^*}, \quad (6.5)$$

kde p je skutečný kinematický tlak a

$$P^* = (U^*)^2. \quad (6.6)$$

Konečně klademe

$$\mathbf{w}' = \frac{\mathbf{w}}{U^*}. \quad (6.7)$$

Dosazením (6.1), (6.2), (6.3), (6.5) a (6.7) do Reynoldsových rovnic dostáváme

$$\begin{aligned} & \frac{(U^*)^2}{L^*} \frac{D^A}{Dt'} \mathbf{u}' + \frac{(U^*)^2}{L^*} [(\mathbf{u}' - \mathbf{w}') \cdot \nabla] \mathbf{u}' + \frac{(U^*)^2}{L^*} \nabla p' - \\ & - \frac{(U^*)}{(L^*)^2} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x'_j} \left\{ (\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} \right) \right\} = 0, \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} \frac{D^A}{Dt'} \mathbf{u}' + [(\mathbf{u}' - \mathbf{w}') \cdot \nabla] \mathbf{u}' + \nabla p' - \\ - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x'_j} \left\{ \left(\frac{1}{Re} + \frac{\nu_T}{L^* U^*} \right) \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} \right) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (6.8)$$

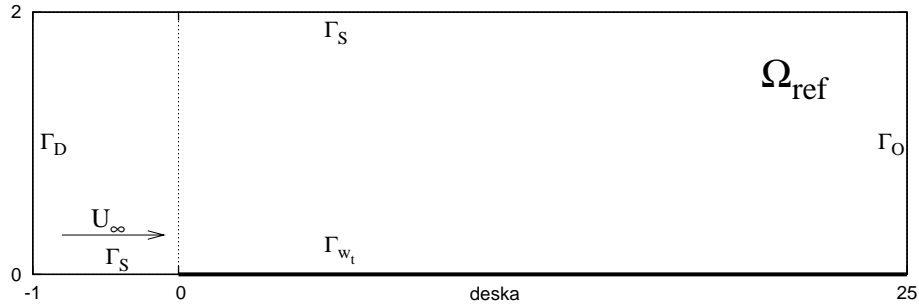
kde

$$Re = \frac{L^* U^*}{\nu} \quad (6.9)$$

je Reynoldsovo číslo charakterizující proudění tekutiny.

6.1 Testovací příklad - turbulentní deska

Abychom mohli zjistit, zda implementovaný algebraický model turbulence funguje správně, řešili jsme proudění kolem desky. Numerické řešení obtékání desky můžeme srovnat s teorií, která je v literatuře podrobně popsána (viz [20]). Použili jsme následující oblast a okrajové podmínky (obr. 6.1). Triangulace oblasti je na obr. (6.2).



Obrázek 6.1: Oblast Ω_{ref} a její hranice.

Na hranici Γ_D reprezentující vstup předepisujeme Dirichletovu okrajovou podmínku

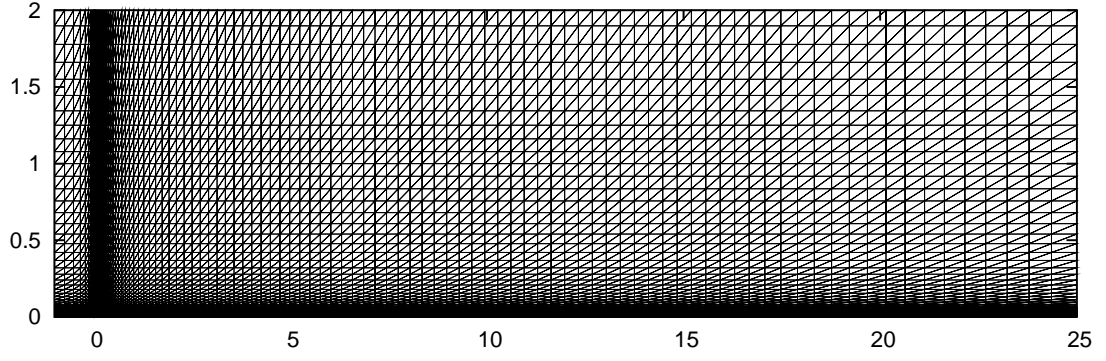
$$\mathbf{u}|_{\Gamma_D} = 1. \quad (6.10)$$

Na Γ_{wt} reprezentující povrch desky máme

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_{wt}} = 0. \quad (6.11)$$

Na části hranice Γ_O , reprezentující výstup, předepisujeme “do-nothing” podmínku

$$-(\nu + \nu_T) \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j + p n_i = 0 \quad \text{na } \Gamma_O, \quad i = 1, 2. \quad (6.12)$$



Obrázek 6.2: Triangulace oblasti.

Na části hranice označené Γ_S uvažujeme podmínky symetrie.

$$\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad u_2 = 0, \quad \text{na } \Gamma_S, \quad (6.13)$$

kde $\mathbf{n} = (0, \pm 1)$. Vrátime-li se ke slabé formulaci, z následujících vztahů plyne, že při použití této okrajové podmínky se slabá formulace nezmění. Ve slabé formulaci volíme testovací funkci \mathbf{v} z prostoru X'

$$X' = \{\mathbf{v} \in W; \mathbf{v}|_{\Gamma_D \cup \Gamma_{W_t}} = 0; v_2|_{\Gamma_S} = 0\}. \quad (6.14)$$

Člen slabé formulace přes hranici $\partial\Omega$ lze upravit

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} \left(-(\nu + \nu_T) \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \cdot v_i + p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \right) dS = \\ & = \int_{\Gamma_O} \sum_{i=1}^2 \underbrace{\left(-(\nu + \nu_T) \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j + p n_i \right)}_0 v_i dS + \\ & \quad + \int_{\Gamma_S} \left(-(\nu + \nu_T) \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j + p n_1 \right) v_1 dS = \\ & = \int_{\Gamma_S} \left(-(\nu + \nu_T) \left(\underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}}}_0 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \underbrace{n_1}_0 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} n_2 \right) + p \underbrace{n_1}_0 \right) v_1 dS = 0. \end{aligned}$$

Slabá formulace má tedy tvar

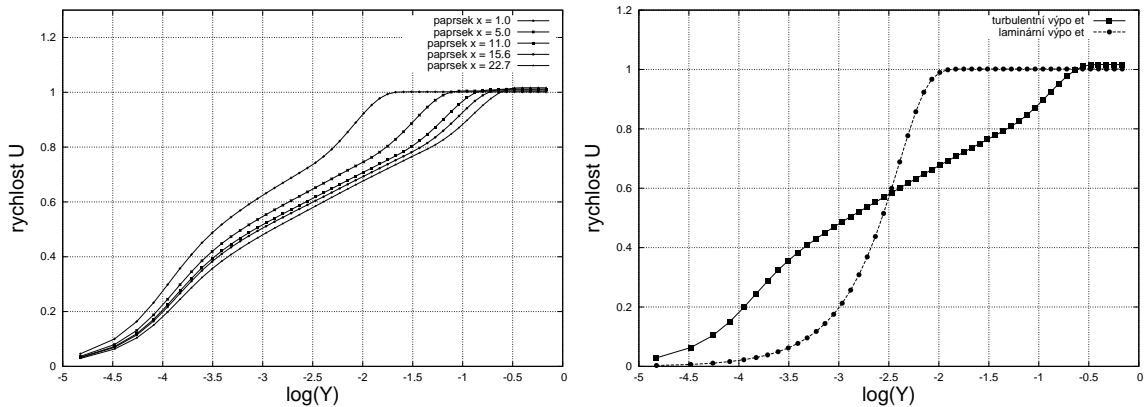
$$\frac{3}{2\tau}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \left((\mathbf{u}^* - \mathbf{w}^{n+1}) \cdot \nabla \right) \mathbf{u}, \mathbf{v} - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) +$$

$$+(\nu + \nu_T) \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\mathbf{x} + (\operatorname{div} \mathbf{u}, q) = \frac{1}{2\tau} (4\hat{\mathbf{u}}^n - \hat{\mathbf{u}}^{n-1}, \mathbf{v}).$$

Počítáme s laminární vazkostí $\nu = 5 \cdot 10^{-7}$ a tomu odpovídajícím Reynoldsovým číslem $Re = 2 \cdot 10^6$ (Charakteristická rychlost $U^* = 1$, charakteristická délka $L^* = 1$). Náběžnou rychlost U_{∞} volíme rovnu 1.

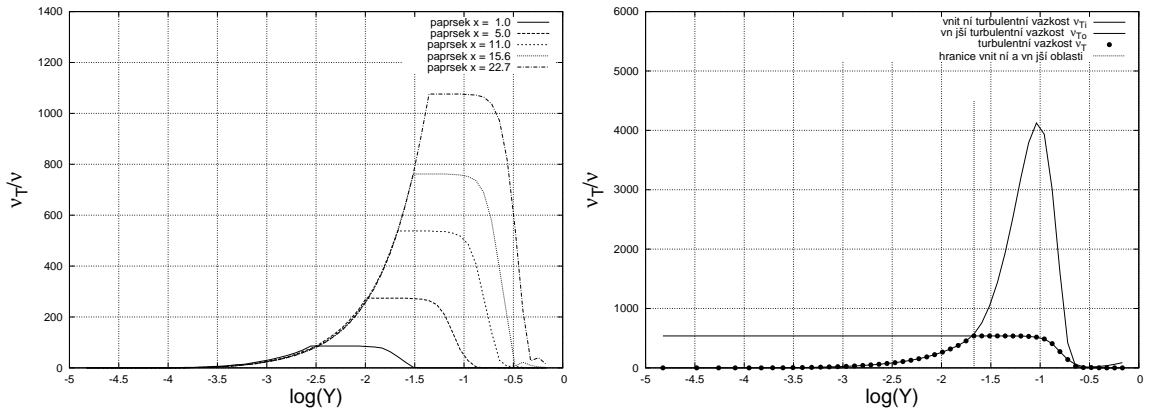
6.1.1 Výsledky pro model BL

Na obr. (6.3) je v semilogaritmických souřadnicích znázorněna závislost složky U rychlosti \mathbf{u} na vzdálenosti Y od desky pro ustálené proudění. Je vidět, že se vzrůstající souřadnicí x se zvětšuje tloušťka mezní vrstvy. Pro srovnání uvádíme rozložení rychlosti v případě, že nepoužijeme turbulentní model.



Obrázek 6.3: Bezrozměrná rychlost U v závislosti na Y v semilogaritmických souřadnicích v pěti místech na desce (vlevo). Srovnání rozložení rychlosti pro turbulentní a laminární výpočet pro paprsek $x = 22.7$ (vpravo).

Na dalším grafu (obr. 6.4) je vykreslen poměr turbulentní vazkosti a kinematické vazkosti $\frac{\nu_T}{\nu}$, kde ν je konstanta. Turbulentní vazkost ν_T je definována jako minimum z vnitřní a vnější turbulentní vazkosti $\nu_T = \min(\nu_{Ti}, \nu_{To})$. Opět s rostoucí souřadnicí x roste turbulentní vazkost. Maximální hodnotu má turbulentní vazkost v místě, kde přechází vnitřní vazkost na vnější. Na obr. 6.4 je rovněž znázorněn průběh vnitřní a vnější turbulentní vazkosti a bodově ν_T jako jejich minimální hodnota.



Obrázek 6.4: Poměr $\frac{\nu_T}{\nu}$ v závislosti na Y v semilogaritmických souřadnicích v pěti místech na desce (vlevo). Turbulentní vazkost jako minimum z vnitřní a vnější turbulentní vazkosti (vpravo).

Definujme nyní funkci

$$Y^+(Y) = \frac{u_\tau Y}{\nu}, \quad (6.15)$$

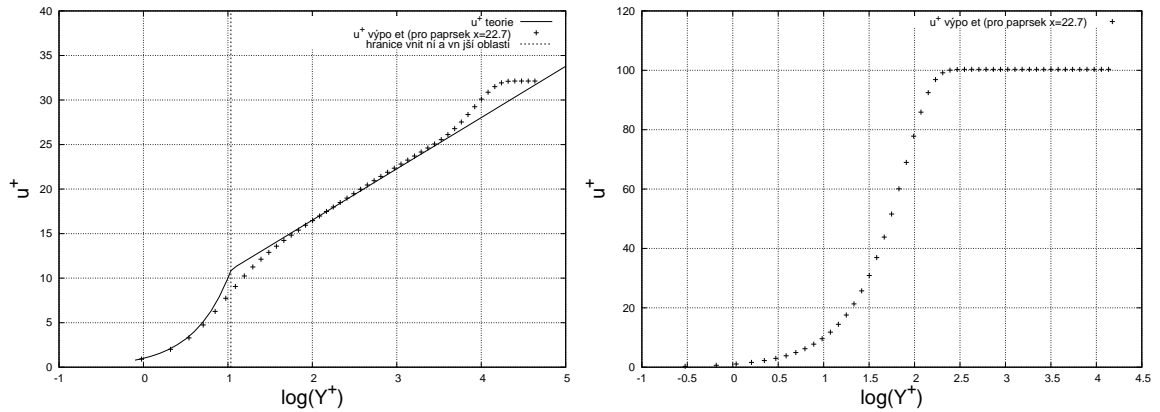
kde Y je vzdálenost od desky a u_τ je třecí rychlost definovaná vztahem (5.36). Dále definujme funkci u^+

$$u^+ = \frac{U}{u_\tau}. \quad (6.16)$$

Z teorie plyne, že průběh funkce u^+ by měl být dán následujícími funkcemi

$$u^+ = Y^+ \quad \text{ve vnitřní vrstvě}$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln Y^+ + C, \quad (\kappa = 0.4 - 0.41, C = 5 - 5.5) \quad \text{ve vnější vrstvě}$$



Obrázek 6.5: Závislost u^+ na Y^+ v semilogaritmických souřadnicích; srovnání výsledků s teorií (vlevo). Průběh funkce u^+ pro laminární výpočet (vpravo).

Definujme Reynoldsovo číslo

$$Re_x(x) = \frac{U_\infty x}{\nu}, \quad (6.17)$$

kde x je souřadnice x_1 (vzdálenost od počátku desky), a koeficient

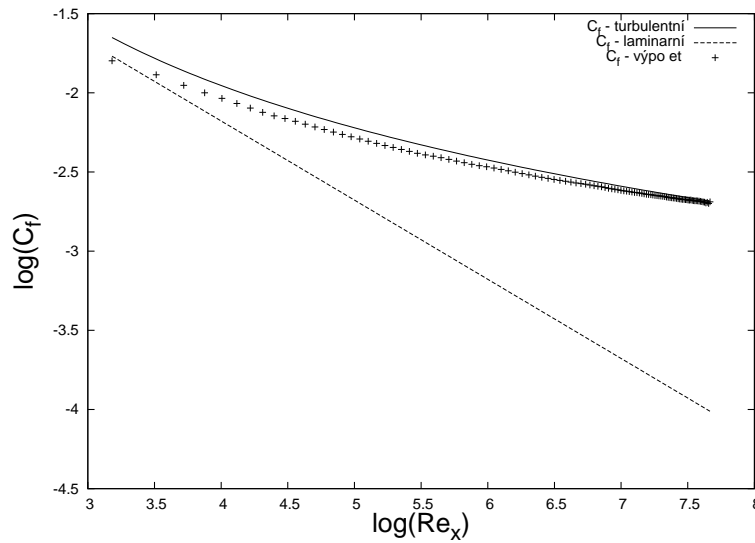
$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho (U_\infty)^2} = \frac{2\nu \left| \frac{\partial U}{\partial Y} \right|_w}{(U_\infty)^2}. \quad (6.18)$$

Z teorie plyne, že průběh funkce C_f je vyjádřen následujícími funkcemi

$$C_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \quad \text{pro laminární proudění}$$

$$C_f = \frac{0.455}{\ln^2(0.06 Re_x)} \quad \text{pro turbulentní proudění}$$

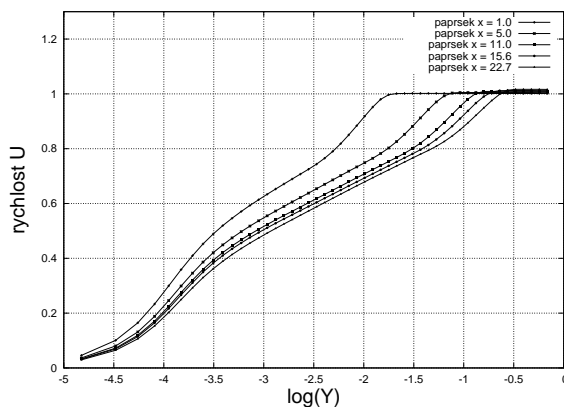
Na obr. 6.6 je porovnání hodnot C_f získaných výpočtem se dvěma křivkami, které určují předpokládaný průběh funkce C_f . Vidíme, že v místech, kde už je mezní vrstva vyvinutější, se naše výsledky shodují s turbulentní křivkou.



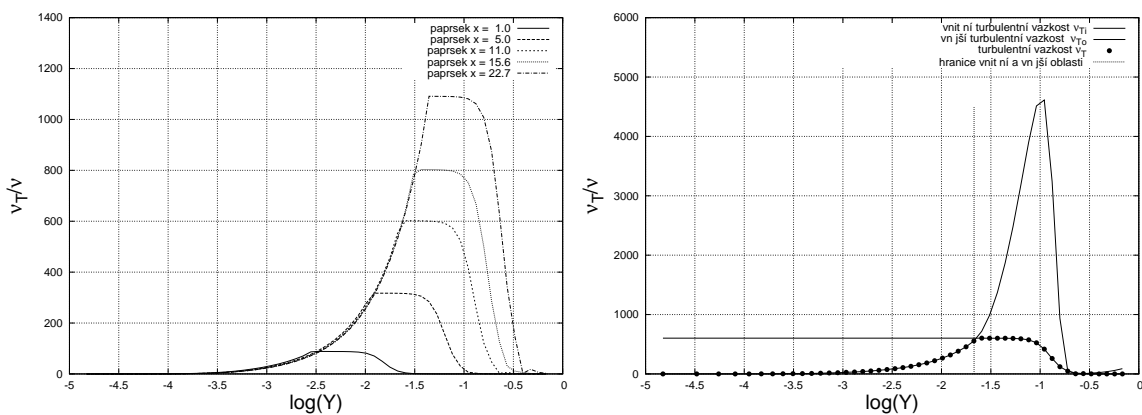
Obrázek 6.6: Závislost C_f na Re_x v logaritmicích souřadnicích; porovnání s teorií.

6.1.2 Výsledky pro Rostandův model

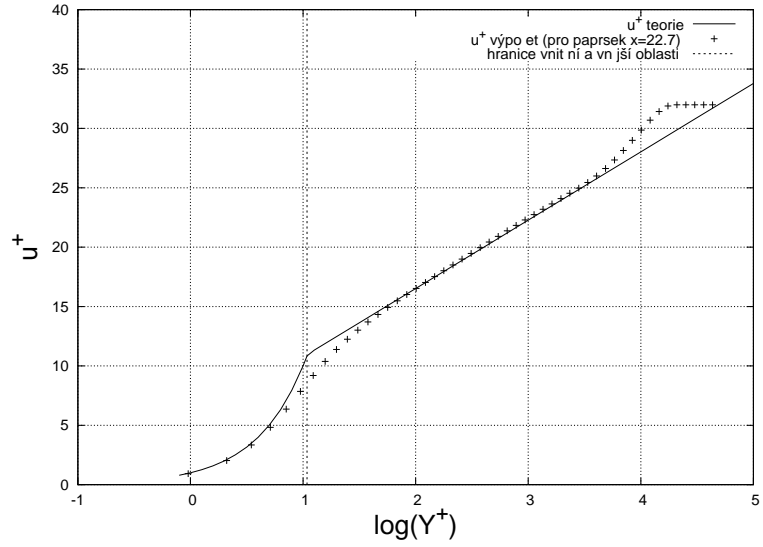
Stejné výpočty jsme provedli s aplikací Rostandovy úpravy turbulentního modelu. Na následujících grafech jsou vypočtené výsledky. Na grafu 6.10 je srovnání koeficientu C_f pro model Baldwina a Lomaxe a pro model Rostanda. Vidíme, že se modely liší jen minimálně.



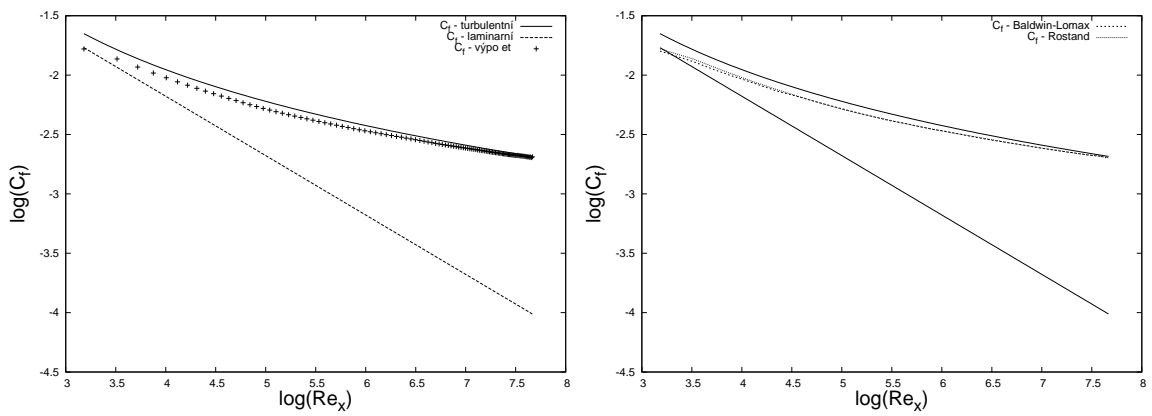
Obrázek 6.7: Bezrozměrná rychlost U v závislosti na $\log(Y)$ na pěti místech na desce.



Obrázek 6.8: Poměr turbulentní vazkosti a kinematické vazkosti $\frac{\nu_T}{\nu}$ v závislosti na $\log(Y)$ v pěti místech na desce (vlevo) a turbulentní vazkost jako minimum z vnitřní a vnější turbulentní vazkosti (vpravo).



Obrázek 6.9: Závislost u^+ na Y^+ (pro paprsek $x = 22.7$, $y \geq 0$); srovnání s funkcí $u^+ = Y^+$ (ve vnitřní vrstvě) a s funkcí $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Y^+) + 5$, $\kappa = 0.4$ (ve vnější vrstvě).



Obrázek 6.10: Závislost C_f na Re_x v logaritmických souřadnicích; porovnání s teorií (vlevo) a srovnání modelu Baldwina a Lomaxe s Rostandovým modelem (vpravo).

6.2 Rozložení tlaku na profilu

V této části práce budeme numericky řešit problém, který byl studován experimentálně v Ústavu Termomechaniky Akademie věd České republiky. Naše výsledky budeme srovnávat se studií [3] Ing. Jiřího Benetky, CSc. (VZLÚ) a Ing. Jaromíra Horáčka, DrSc. (ÚT AV ČR) provedené pro kmitající profil NACA0012. Studie se zabývá rozložením nestacionárních tlaků na obtékaném, vynuceně rotačně kmitajícím profilu.

Parametry pro měřený profil:

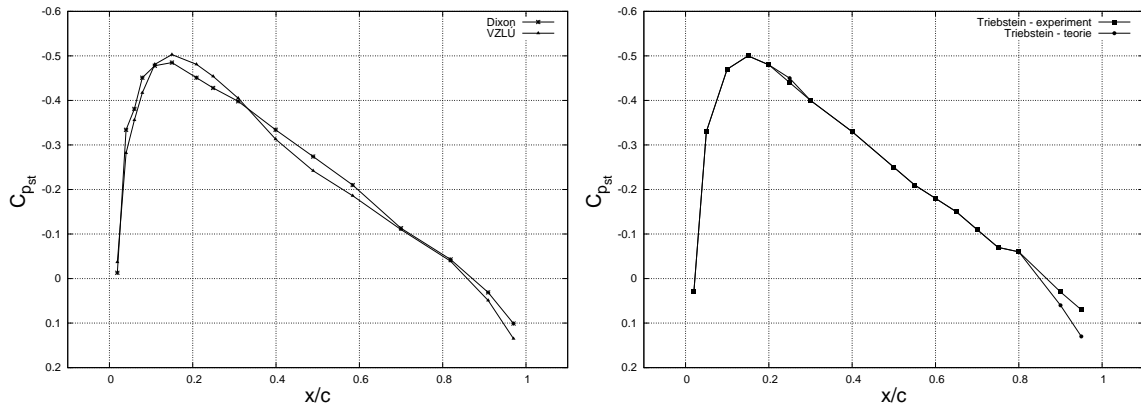
úhel náběhu:	$\alpha^0 = 0^\circ$,
rozkmit:	$\alpha^* = 1.25^\circ$,
poloha osy otáčení (elastické osy):	25% resp. 30% délky profilu (měřeno od náběžné hrany),
frekvence otáčení:	30Hz resp. 43Hz,
odhadnutá náběžná rychlost vzduchu pro Machovo číslo $M = 0.4$:	$U_\infty \approx 136\text{m/s}$,
délka profilu (tětiva c):	$L^* = 132,2\text{mm}$.

V dále uvedených grafech jsou uvedeny výsledky nestacionárního obtékání kmitajícího profilu NACA 0012 obsažené ve studii [3].

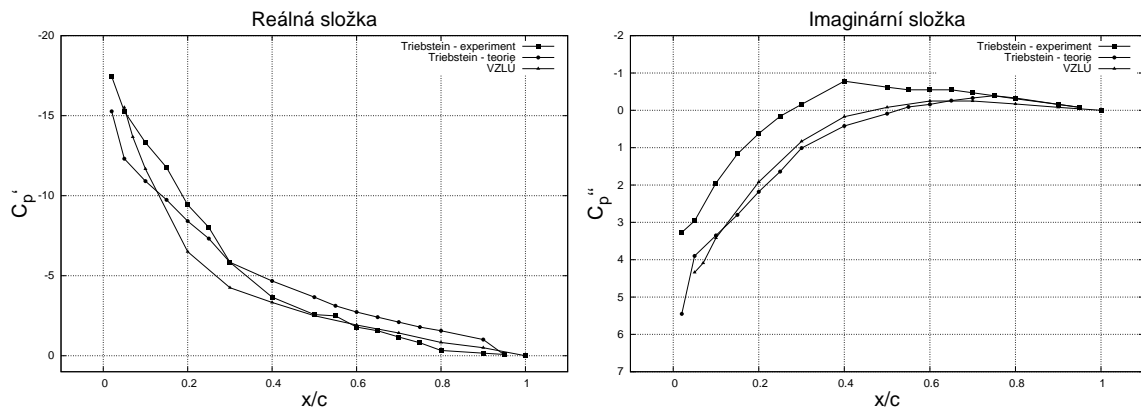
Je použito následující značení:

ρ [kg/m^3]	měrná hmotnost
x/c	souřadnice tlakového odběru ve směru tětivy od náběžné hrany
$\omega = 2\pi f$ [rad/s]	základní úhlová rychlost
$\alpha(t) = \alpha^0 + \alpha^* \sin(\omega t)$	základní harmonický pohyb
$C_p(t) = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$	tlakový součinitel
$C_p(t) = C_{p_{\text{stř}}} + C_p' \sin(\omega t) + C_p'' \cos(\omega t)$	
C_p'	reálná složka amplitud $C_p(t)$
C_p''	imaginární složka amplitud $C_p(t)$
$C_{p_{\text{stř}}}$	časově střední hodnota součinitele tlaku v měřeném místě na profilu

6.2.1 Výsledky publikované ve zprávě [3]



Obrázek 6.11: Průběh časově střední hodnoty součinitele tlaku $C_{p_{stř}}$ podél profilu NACA 0012 podle článku Dixona a zprávy VZLÚ (vlevo) a podle Triebsteina (vpravo).

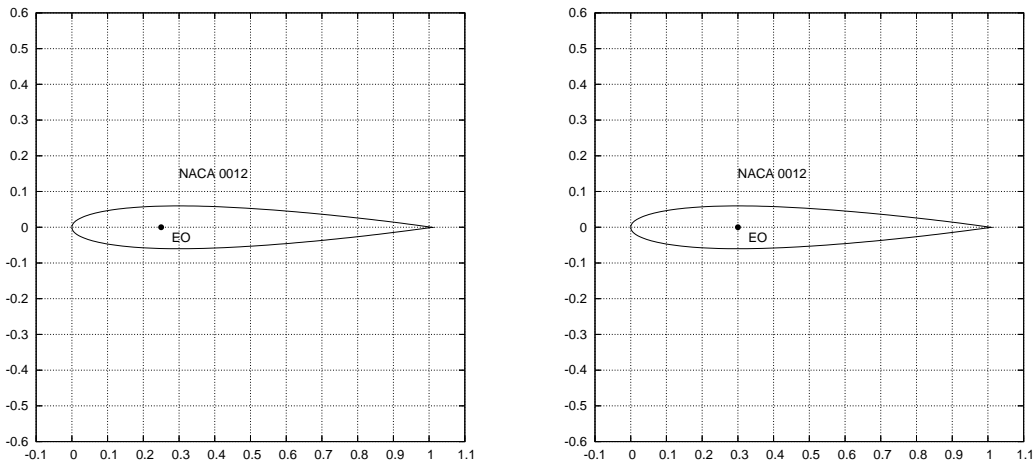


Obrázek 6.12: Reálná a imaginární složka amplitud časově závislé složky součinitele tlaku na profilu NACA 0012 rotačně kmitajícího s frekvencí 30 Hz kolem 25% tětiny respektive 43 Hz kolem 30% tětiny; údaje jsou přepočteny na rozkmit 1 radián a $M = 0.4$ (dle Triebsteina a měření VZLÚ).

6.2.2 Výpočty

Provedli jsme výpočet tlakového součinitele $C_p(t)$ na horní straně leteckého profilu NACA 0012 (viz obr. 6.13), který jsme nechali nuceně kmitat s frekvencí 30Hz a rozkmitem $\alpha^* = 5^\circ$ kolem elastické osy umístěné v 25% délky tětivy profilu (charakteristická délka $L^* = 132.2\text{mm}$). Počítali jsme s bezrozměrným časovým krokem $\tau = \frac{1}{6}$, to znamená, že během jedné periody počítáme 200 časových iterací. Stejný výpočet jsme provedli pro profil kmitající s frekvencí $f = 43\text{Hz}$ kolem elastické osy umístěné v 30% délky tětivy profilu s bezrozměrným časovým krokem $\tau = \frac{5}{43}$.

Náběžnou rychlost jsme zvolili $U_\infty = 132.2\text{ m/s}$, což odpovídá Machovu číslu $M = 0.4$ (charakteristická rychlost $U^* = 132.2\text{m/s}$). Ve výpočtech jsme použili Rostandův model turbulence.



Obrázek 6.13: Testovaný profil NACA 0012. 25% elastická osa (vlevo), 30% elastická osa (vpravo).

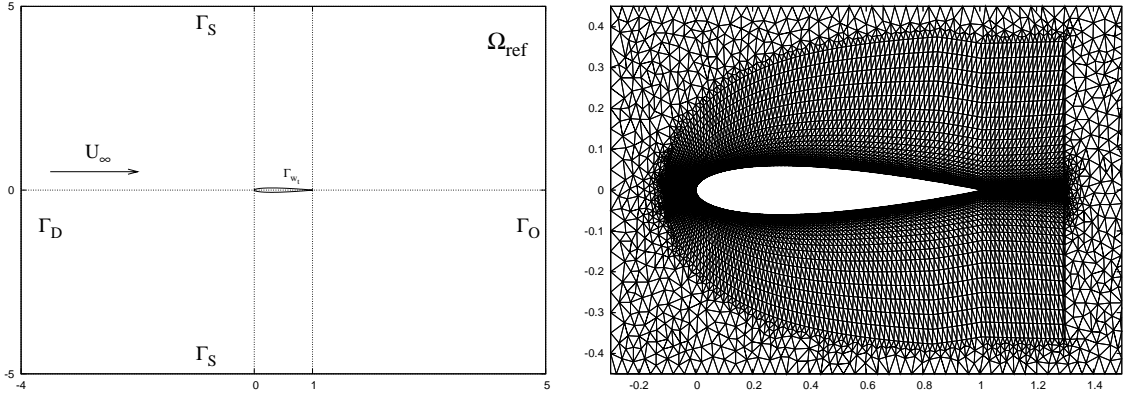
Na obr. 6.14 je výpočetní oblast Ω_0 v čase $t = 0$. Vpravo je výřez oblasti v blízkosti leteckého profilu s použitou triangulací. Protože jsme zavedli bezrozměrné veličiny, bude v našich výpočtech délka profilu rovna 1 a náběžná rychlost rovněž rovna 1. Referenční tlak na hranici Γ_O klademe $p_\infty = p_{ref} = 0$.

Tlakový součinitel počítáme tedy ze vztahu

$$C_p = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2}. \quad (6.19)$$

Použijeme-li bezrozměrné veličiny, získáme

$$C_p = \frac{p'}{\frac{1}{2} U_\infty'^2} = \frac{p'}{\frac{1}{2} 1^2} = 2p'. \quad (6.20)$$



Obrázek 6.14: Výpočetní oblast Ω_{ref} (vlevo); výřez oblasti s triangulací (vpravo).

Protože výsledky ve zprávě [3] se vztahují ke stlačitelnému proudění, musíme ještě provést přepočít tlakového součinitele z nestlačitelného na stlačitelné proudění (viz [12])

$$C_{p_{stlač}} = \frac{C_{p_{nestlač}}}{\sqrt{1 - M^2}}. \quad (6.21)$$

Tlakový součinitel tudíž počítáme ze vztahu

$$C_p = \frac{2p'}{\sqrt{1 - M^2}}, \quad \text{kde } M = 0.4 \text{ je Machovo číslo.} \quad (6.22)$$

Tlakový součinitel vypočteme na každé časové vrstvě ve vrcholech triangulace ležících na Γ_{W_t} . Časovou střední hodnotu $C_{p_{stř}}$ vypočteme jako aritmetický průměr během jedné periody $T = \frac{1}{f}$. Základní harmonický pohyb profilu (otáčení) je dán vztahem

$$\alpha(t) = \alpha^* \sin(\omega t). \quad (6.23)$$

Ze vztahu

$$C_p(t) = C_{p_{stř}} + C'_p \sin(\omega t) + C''_p \cos(\omega t) \quad (6.24)$$

vypočteme tzv. reálnou a imaginární složku tlakového součinitele. Pro $t = T$ máme $\omega T = 2\pi$ a tudíž

$$C_p(T) = C_{p_{stř}} + C''_p \cos(2\pi),$$

odkud plyne vztah pro imaginární složku

$$C''_p = C_p(T) - C_{p_{stř}}.$$

Pro $t = \frac{T}{4}$ máme $\omega \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$ a

$$C_p\left(\frac{T}{4}\right) = C_{p_{stř}} + C'_p \sin\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

odkud plyne vztah pro reálnou složku

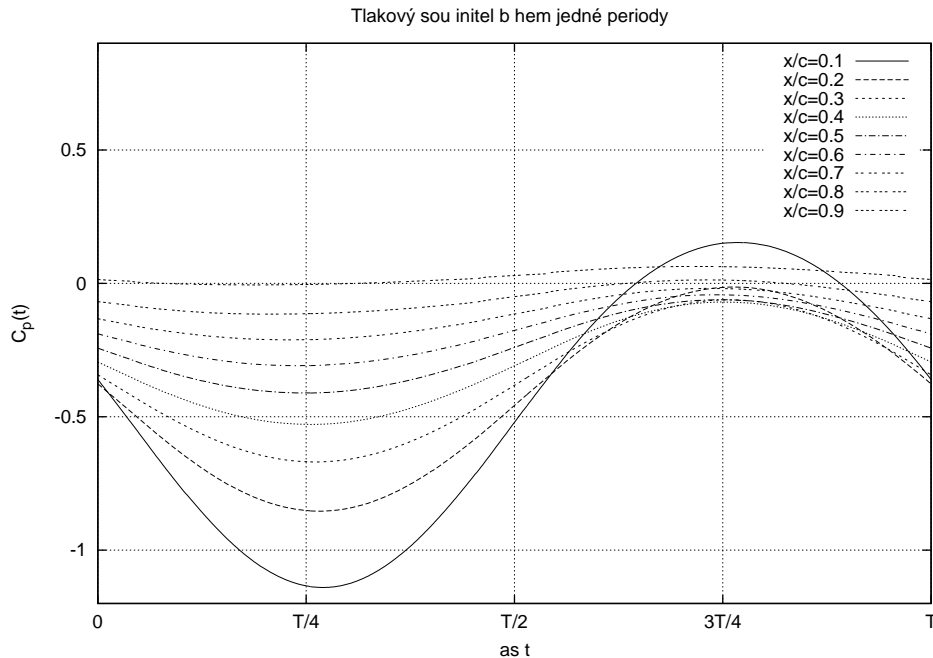
$$C'_p = C_p\left(\frac{T}{4}\right) - C_{p_{stř}}.$$

Ve výzkumné zprávě jsou údaje přepočteny na rozkmit 1 radián. Náš výpočet jsme provedli pro rozkmit $\alpha^* = 5^\circ$, výsledky přepočteme na rozkmit 1 radián takto:

$$C'_{p(1rad)} = C'_p \frac{180^\circ}{\pi} \frac{1}{\alpha^*}, \quad C''_{p(1rad)} = C''_p \frac{180^\circ}{\pi} \frac{1}{\alpha^*}. \quad (6.25)$$

Na obr. 6.15 je znázorněn tlakový součinitel $C_p(t)$ během jedné periody v určitých místech na křídle - $x/c = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$.

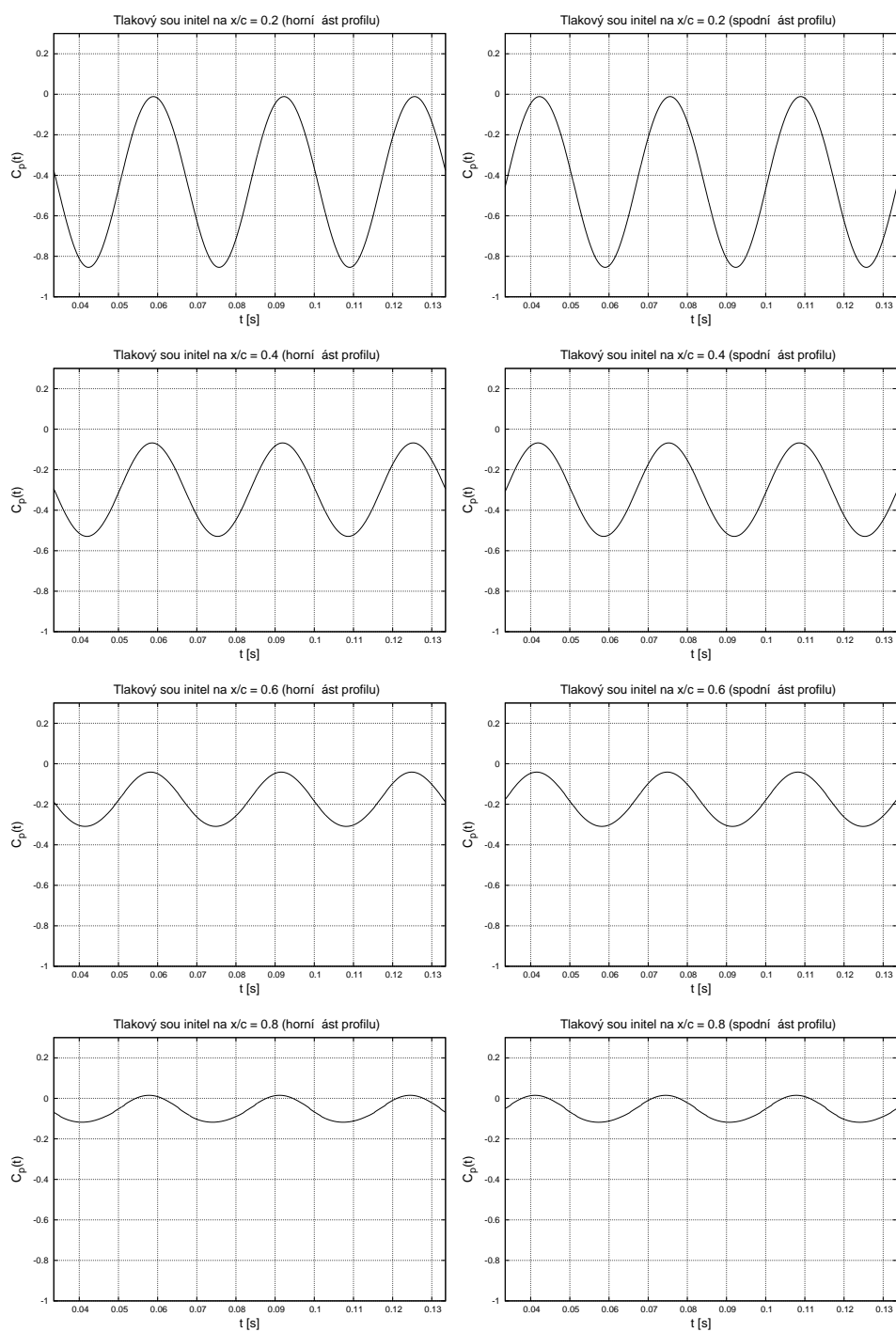
Na obr. 6.16 je znázorněn tlakový součinitel $C_p(t)$ v časovém intervalu $(T, 4T)$ na čtyřech místech na křídle - $x/c = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$.



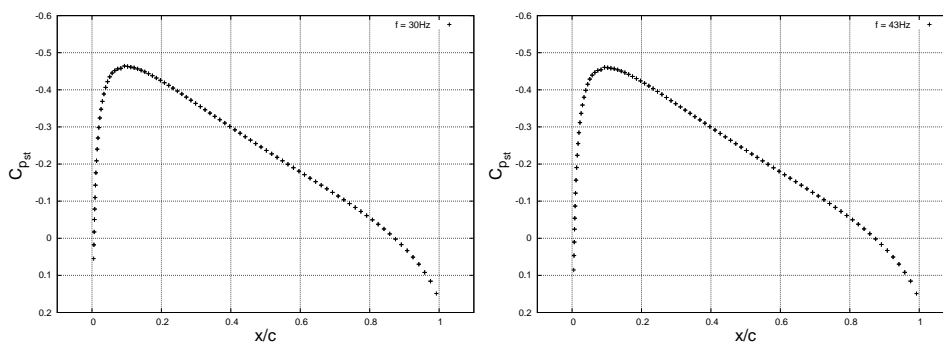
Obrázek 6.15: Tlakový součinitel $C_p(t)$ na horní straně profilu během jedné periody.

Na obr. 6.17 je průběh časové střední hodnoty součinitele tlaku podél profilu.

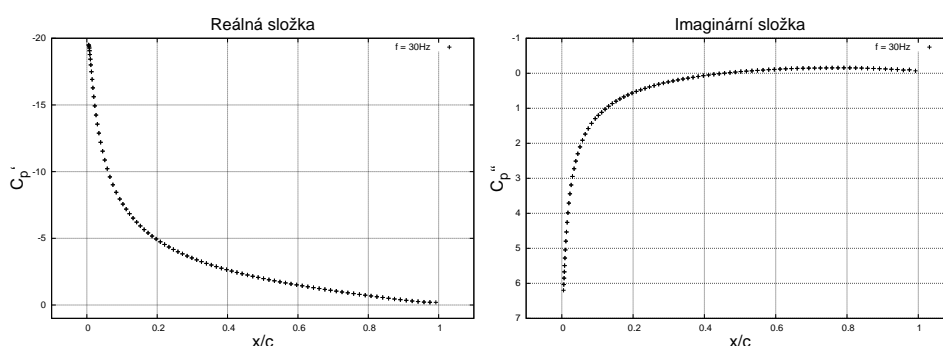
Na obr. 6.18 a 6.19 je průběh reálné a imaginární složky amplitud součinitele tlaku podél profilu přepočtené na rozkmit 1 radián.



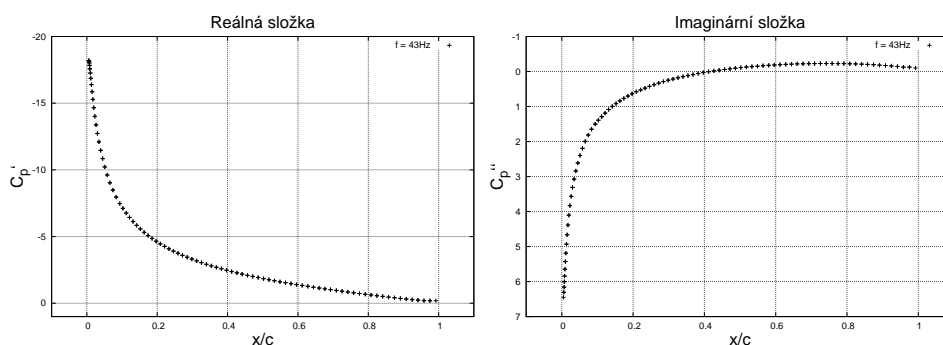
Obrázek 6.16: Tlakový součinitel $C_p(t)$ na horní straně profilu (vlevo) a spodní straně profilu (vpravo) pro $x/c = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ v časovém intervalu $(T, 4T)$.



Obrázek 6.17: Průběh časově střední hodnoty součinitele tlaku $C_{p, \text{stř}}$ podél profilu NACA 0012. Frekvence kmitání $f = 30\text{Hz}$. Poloha elastické osy = 25% (vlevo). Frekvence kmitání $f = 43\text{Hz}$. Poloha elastické osy = 30%. (vpravo)

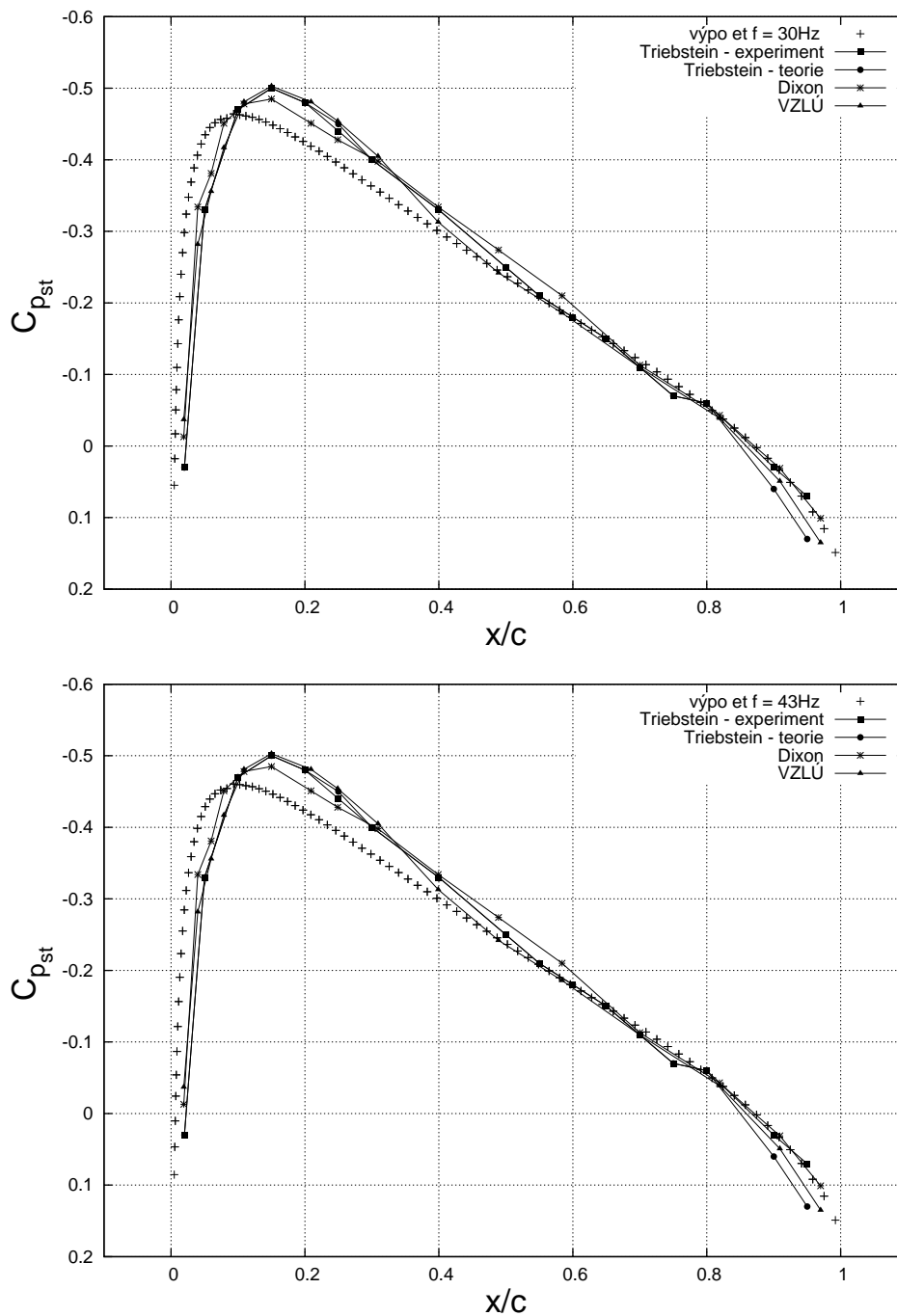


Obrázek 6.18: Reálná a imaginární složka amplitud časově závislé složky součinitele tlaku na profilu NACA 0012 rotačně kmitajícího s frekvencí 30 Hz kolem 25% tětiny; údaje jsou přepočteny na rozkmit 1 radián.

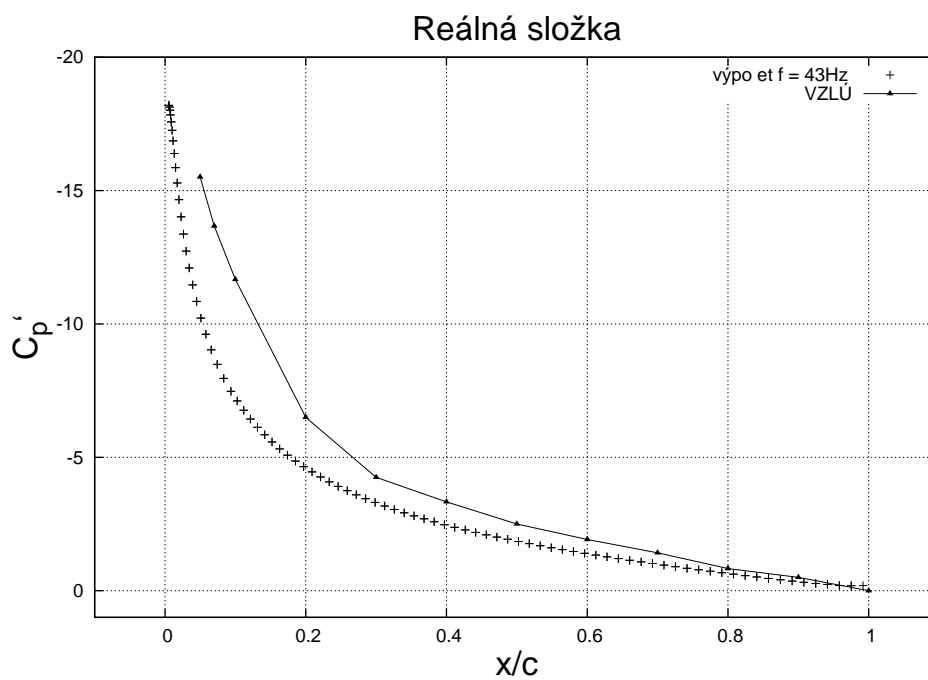
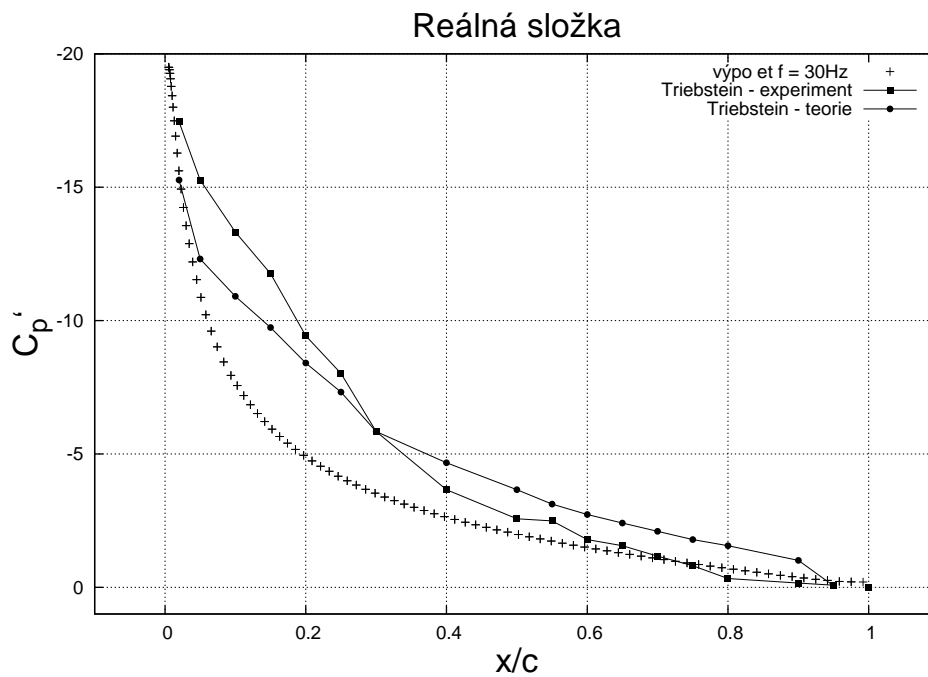


Obrázek 6.19: Reálná a imaginární složka amplitud časově závislé složky součinitele tlaku na profilu NACA 0012 rotačně kmitajícího s frekvencí 43 Hz kolem 30% tětiny; údaje jsou přepočteny na rozkmit 1 radián.

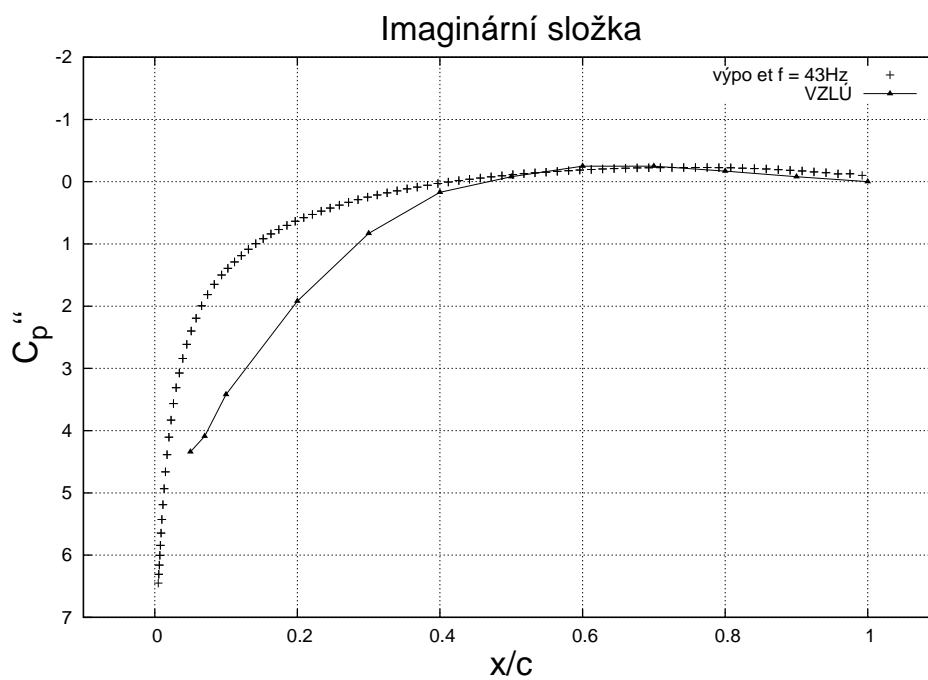
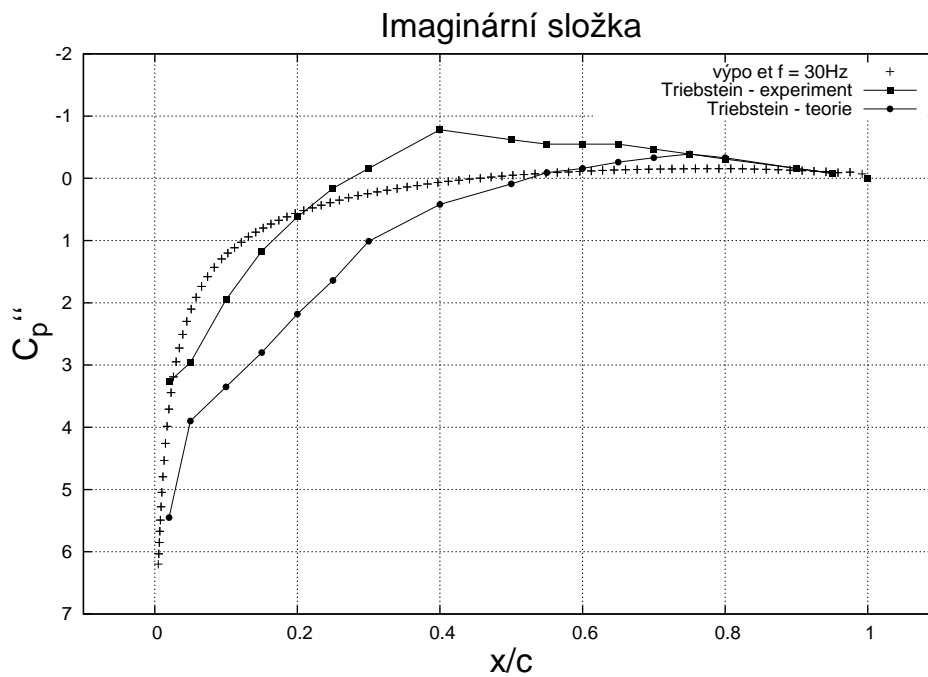
6.2.3 Srovnání výsledků se zprávou [3]



Obrázek 6.20: Průběh časově střední hodnoty součinitele tlaku $C_{p_{st\bar{r}}}$ podél profilu NACA 0012 podle článku Dixona, zprávy VZLÚ a Triebsteina. Srovnání s vypočtenými výsledky $f = 30\text{Hz}$ (nahore) a $f = 43\text{Hz}$ (dole).



Obrázek 6.21: Reálná složka amplitud časově závislé složky součinitele tlaku na profilu NACA 0012 rotačně kmitajícího s frekvencí 30 Hz kolem 25% tětiny (nahore) a frekvencí 43 Hz kolem 30% tětiny (dole); údaje jsou přepočteny na rozkmit 1 radián a $M = 0.4$ (dle Triebssteina a VZLÚ). Srovnání s vypočtenými výsledky.

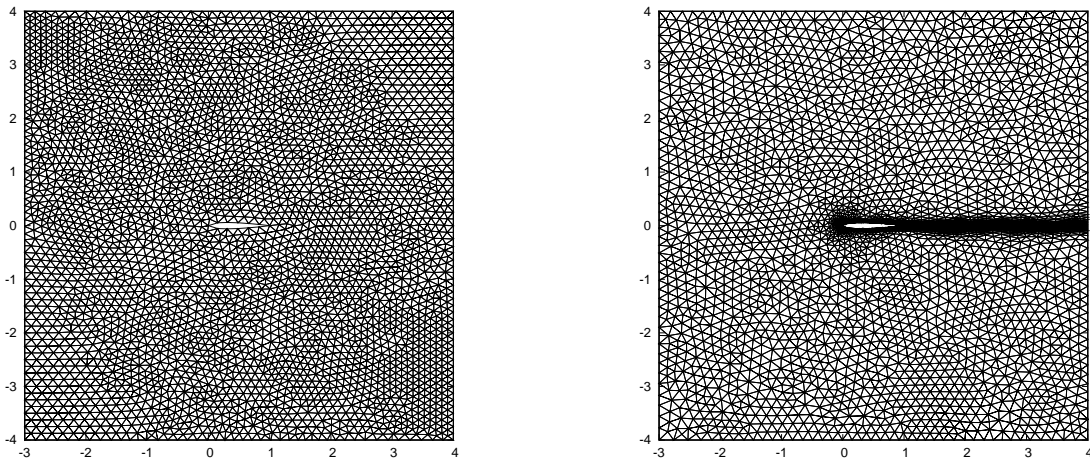


Obrázek 6.22: Imaginární složka amplitud časově závislé složky součinitele tlaku na profilu NACA 0012 rotačně kmitajícího s frekvencí 30 Hz kolem 25% tětiny (nahore) a frekvencí 43 Hz kolem 30% tětiny (dole); údaje jsou přepočteny na rozkmit 1 radián a $M = 0.4$ (dle Trebsteina a VZLÚ). Srovnání s vypočtenými výsledky.

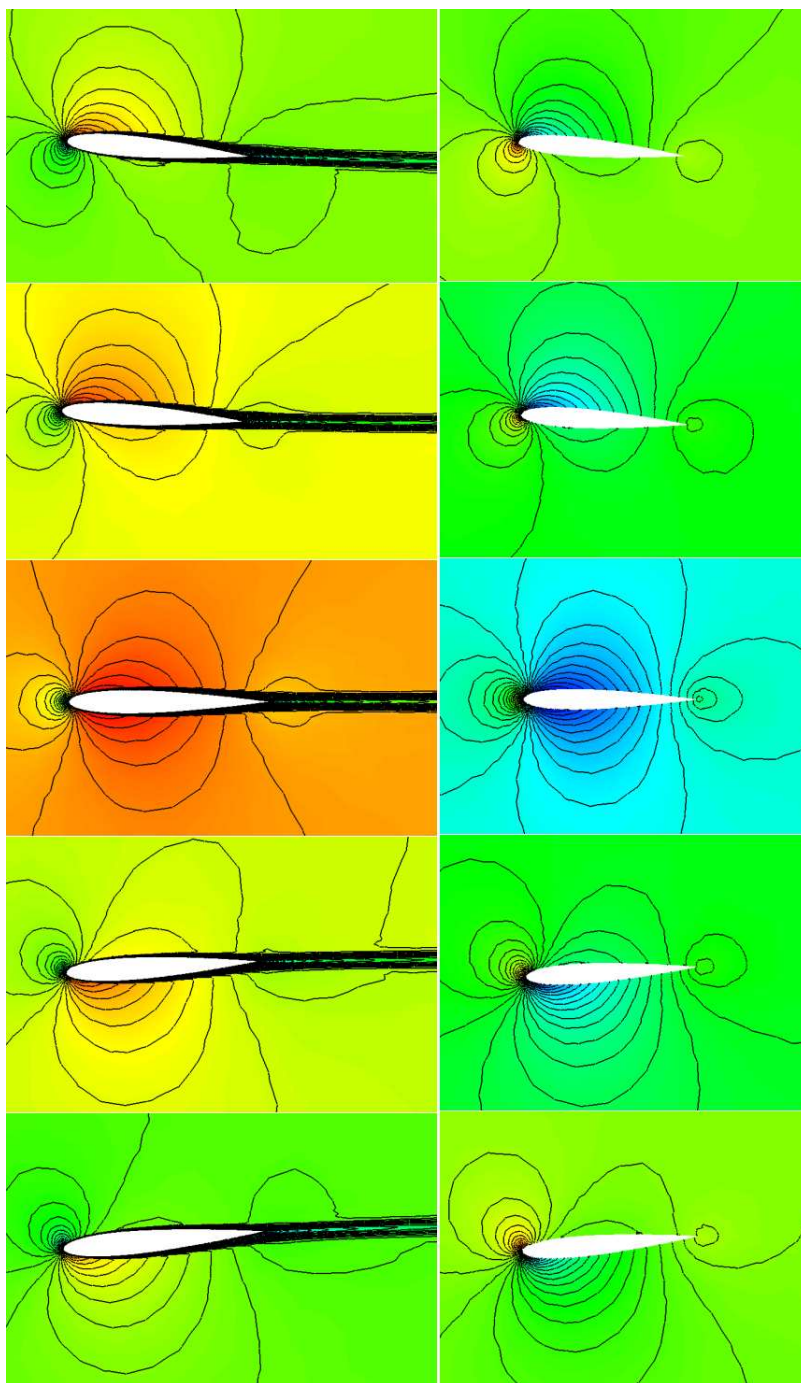
Na obr. 6.20 - 6.22 je porovnání experimentálních dat a numerických výsledků. Přestože použitý algebraický model turbulence není příliš přesný, dává použitá numerická metoda poměrně dobré výsledky. Nepřesnosti numerických výsledků mohou být dány právě algebraickým modelem turbulence, jehož empirické konstanty byly "naladěny" pro případ obtékání desky. Pro obtékání profilu podobná data neexistují. Přesnějších výsledků bychom mohli dosáhnout pomocí některého složitějšího modelu turbulence, který by byl vhodnější pro kmitající profil a větší úhly náběhu, ale kde by bylo nutné řešit další přídatné rovnice. Výsledky by bylo také možné zpřesnit zjemněním sítě, zmenšením časového kroku nebo zvětšením počtu Oseenových iterací.

6.2.4 Obrázky

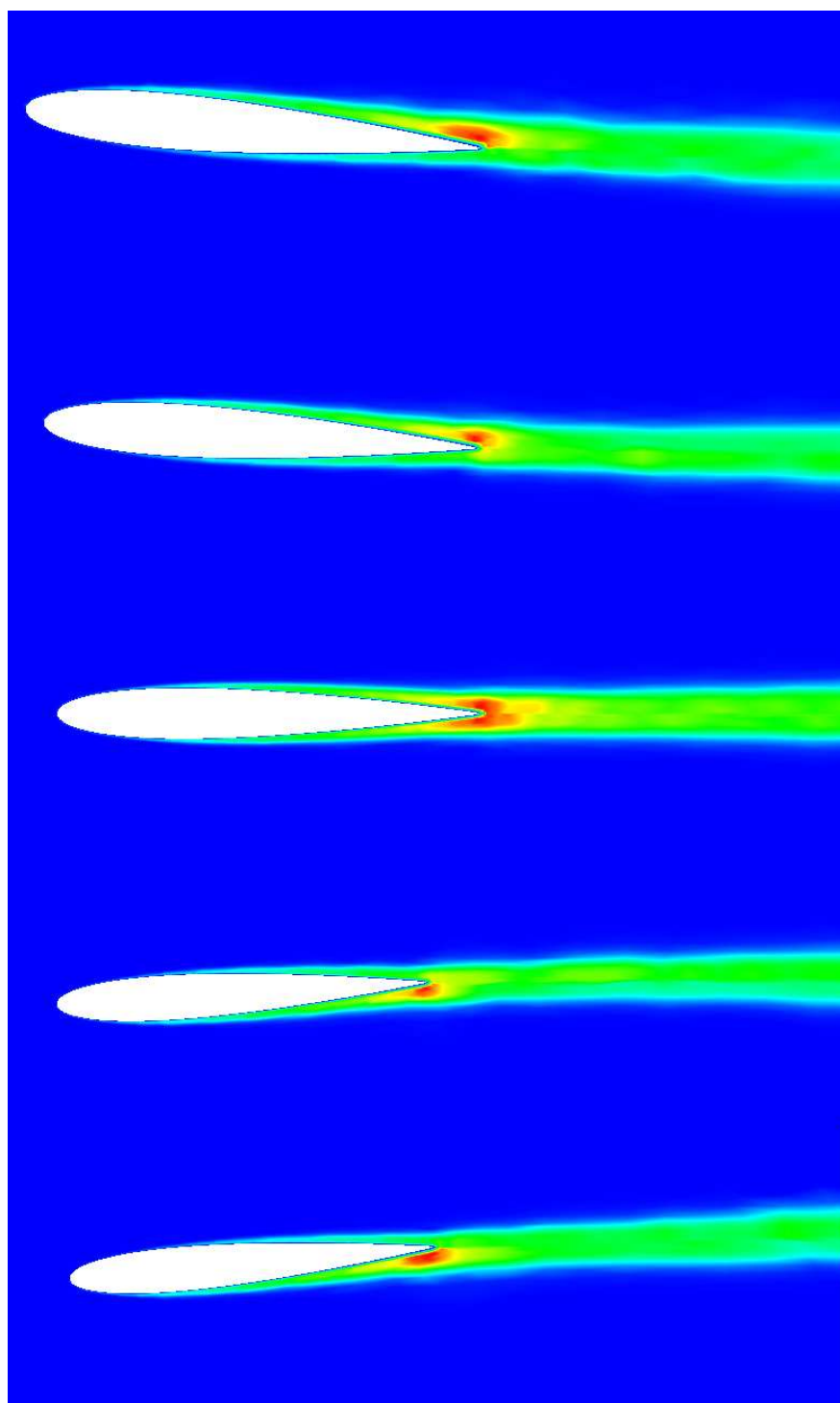
Na následujících obrázcích je znázorněno rozložení velikosti rychlosti, tlaku a turbulentní vazkosti ve výpočetní oblasti pro nuceně kmitající profil ($f = 30\text{Hz}$, $\alpha^* = 5^\circ$) v různých časových okamžicích, pro $\alpha = 5^\circ$, $\alpha = 2.5^\circ$, $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = -2.5^\circ$, $\alpha = -5^\circ$. Aby bylo možné znázornit i rychlost a turbulentní vazkost v úplavu za obtékaným profilem, použili jsme jinou síť než v případě výpočtu rozložení tlaku na profilu. Síť byla získána pomocí programu ANGENER (viz [6]). Nejprve jsme pomocí programu vygenerovali počáteční izotropní síť (obr. 6.23). Na této síti jsme provedli výpočet na profilu fixovaném v rovnovážné poloze a získané výsledky (hodnoty složky u_1) jsme použili pro adaptaci sítě pomocí programu ANGENER. Opakováním tohoto postupu jsme získali síť, která je na obr. 6.23. Ukázky rozložení velikosti bezrozměrné rychlosti, bezrozměrného tlaku a poměru ν_T/ν v čase jsou na příloženém CD nosiči. Obrázky a videa byly pořízeny pomocí programu GeneralMeshViewer.



Obrázek 6.23: Počáteční izotropní triangulace (vlevo) a anizotropní triangulace (vpravo) získané pomocí programu ANGENER.

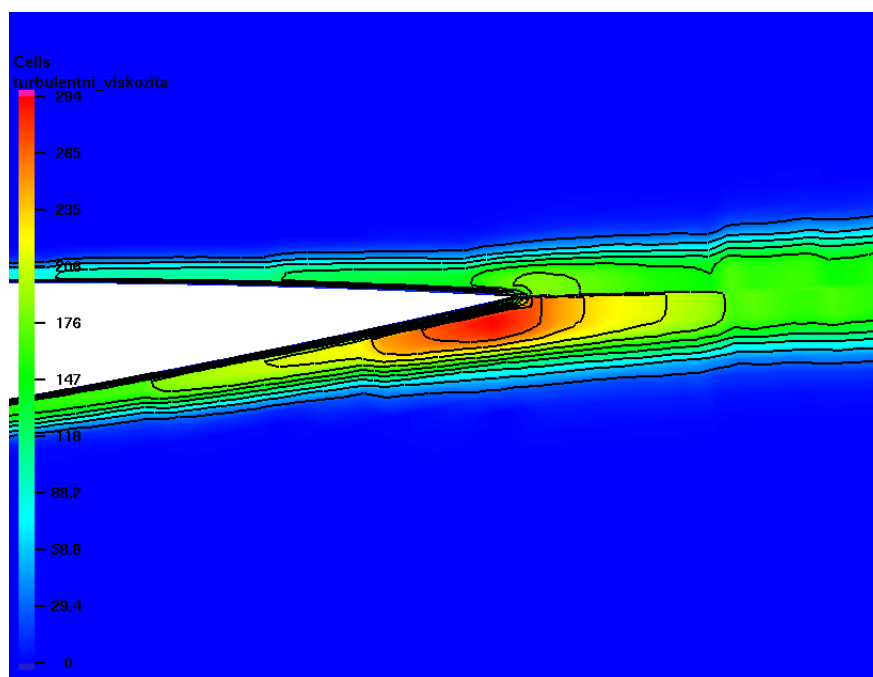
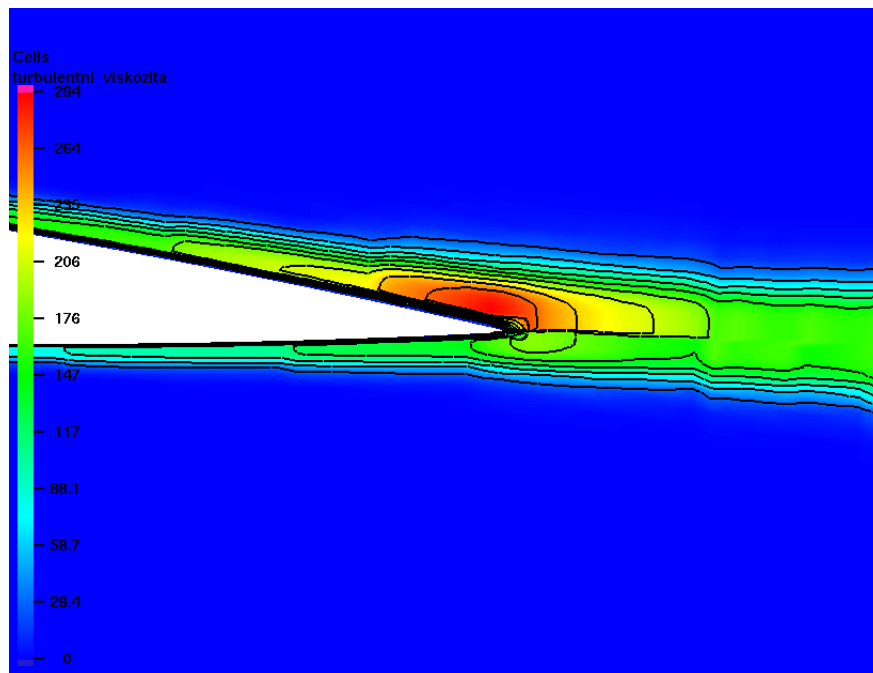


Obrázek 6.24: Rozložení velikosti rychlosti u (vlevo) a tlaku p (vpravo) na různých časových vrstvách pro $\alpha = 5^\circ$, $\alpha = 2.5^\circ$, $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = -2.5^\circ$, $\alpha = -5^\circ$.

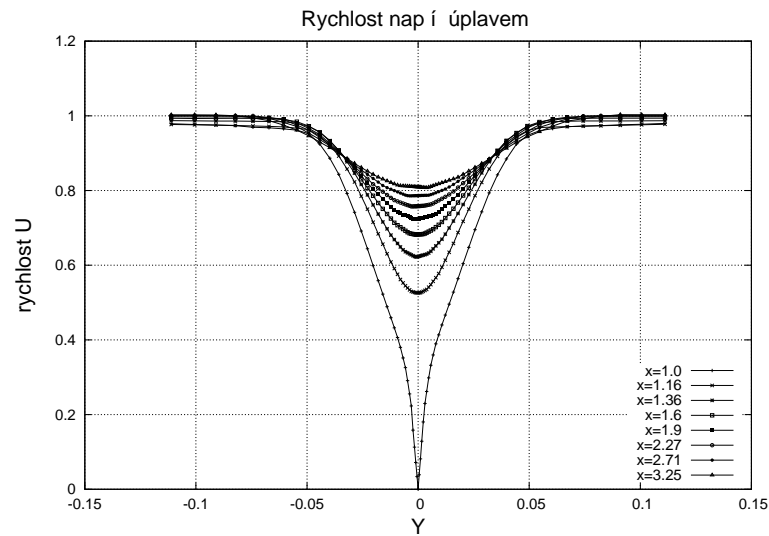


Obrázek 6.25: Turbulentní vazkost pro $\alpha = 5^\circ, 2.5^\circ, 0^\circ, -2.5^\circ, -5^\circ$.

Na následujících obrázcích je detail turbulentní vazkosti za profilem (poměr ν_T/ν) na symetrické jemnější síti (viz 6.14) pro maximální výchylky profilu $\alpha = 5^\circ$ a $\alpha = -5^\circ$.

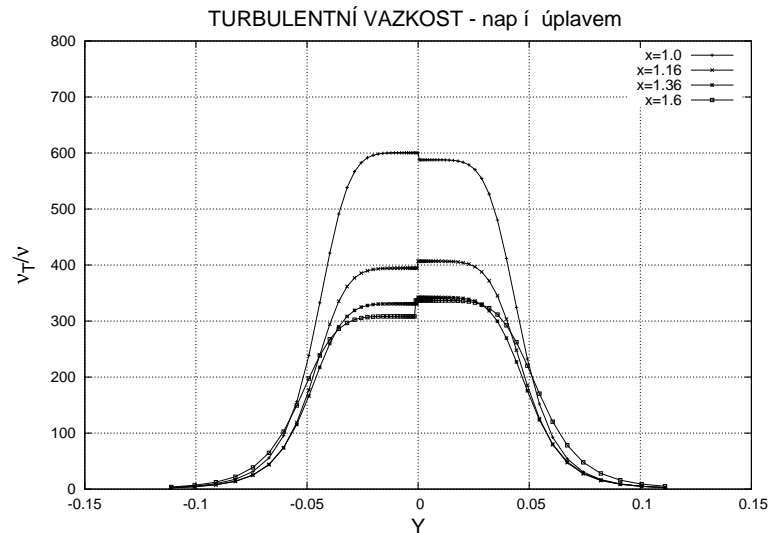


Na obr. 6.26 je závislost složky U rychlosti \mathbf{u} na souřadnici Y napříč úplavem. Výpočet byl proveden na profilu fixovaném v rovnovážné poloze. Se vzrůstající vzdáleností od konce profilu úplav postupně mizí.



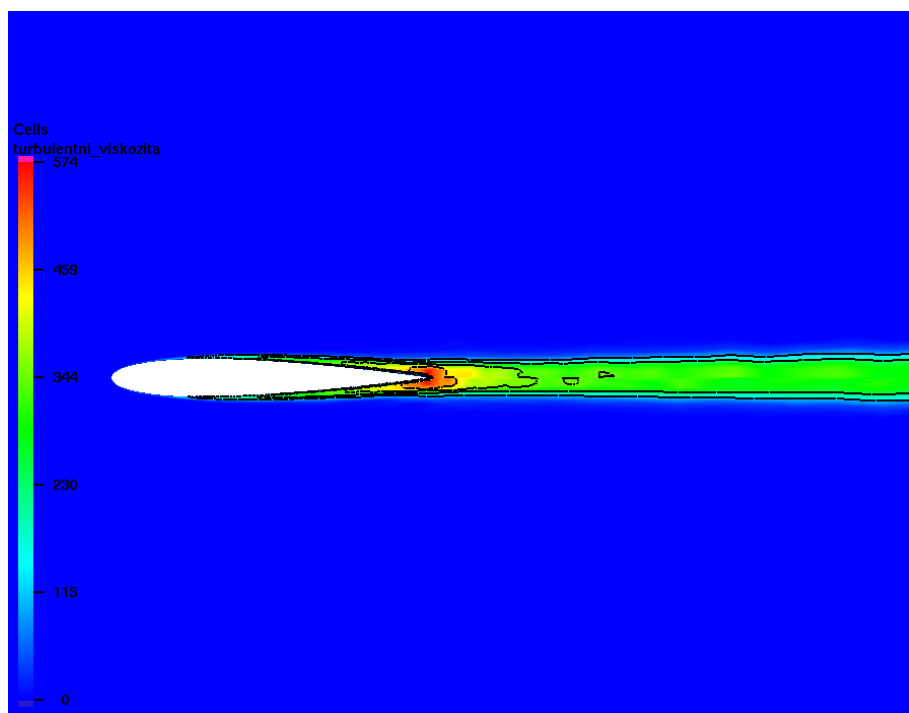
Obrázek 6.26: Závislost složky $U = u_1$ rychlosti \mathbf{u} na souřadnici Y napříč úplavem.

Na obr. 6.27 je průběh turbulentní vazkosti napříč úplavem. S rostoucí vzdáleností od konce profilu turbulentní vazkost rychle klesá, ve vzdáleném úplavu je podél střednice úplavu téměř konstantní. Malé nepřesnosti mezi horní a spodní částí úplavu jsou dány nesymetrií sítě a Rostandovým modelem turbulence, kde počítáme turbulentní vazkost zvlášť pro horní a spodní část úplavu.

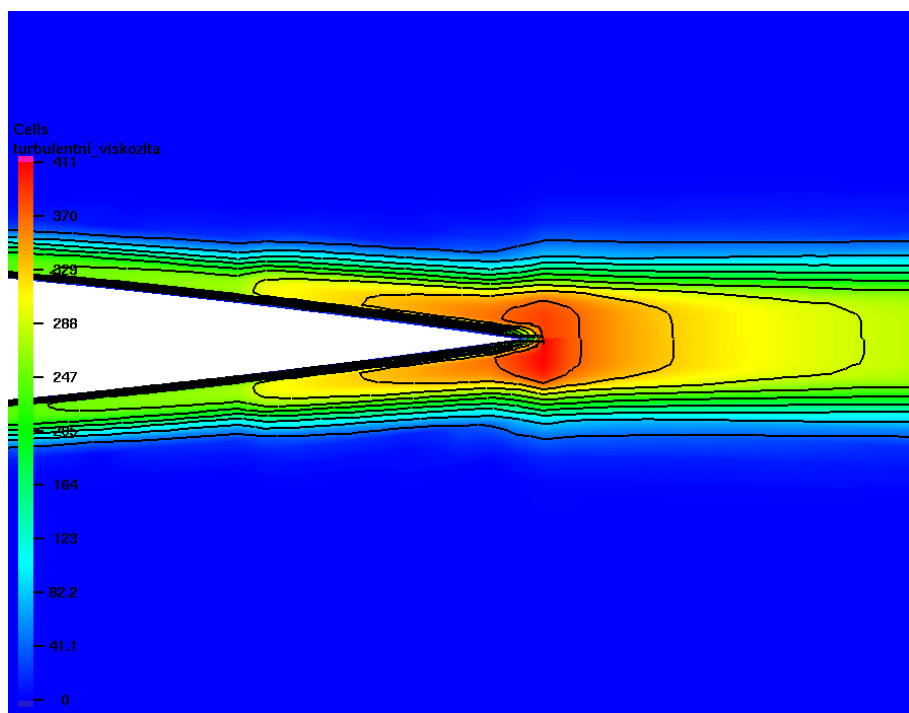


Obrázek 6.27: ν_T/ν napříč úplavem.

Na následujícím obrázku je turbulentní vazkost (poměr ν_T/ν).



Detail turbulentní vazkosti za profilem (poměr ν_T/ν) na symetrické jemnější síti je znázorněn na dalším obrázku.



Kapitola 7

Závěr

V práci jsou popsány základní rovnice popisující proudění vazké nestlačitelné tekutiny ve výpočetní oblasti závislé na čase pomocí ALE metody. Je provedena vhodná časová diskretizace, diskretizace v prostoru metodou konečných prvků - jsou použity Taylorovy-Hoodovi konečné prvky P_2/P_1 , a je aplikována stabilizace konečně-prvkového schématu. Dále je uveden numerický výpočet aerodynamických sil, jimiž tekutina působí na profil, a jsou numericky řešeny diferenciální rovnice popisující pohyb leteckého profilu. Diskrétní problém je numericky řešen pomocí Oseenových iterací a k řešení soustavy lineárních rovnic je použit dostatečně rychlý přímý řešič. V další části jsou odvozeny Reynoldsovy středované rovnice pro popis turbulentního proudění, uvedená metoda je aplikována na tyto rovnice a jsou popsány některé algebraické modely turbulence pro výpočet turbulentní vazkosti. Výslednou metodu jsme ověřili na testovacím příkladu proudění kolem turbulentní desky, kde jsme získali výsledky srovnatelné s teorií. Na závěr jsme řešili konkrétní problém, který byl studován také experimentálně. Získané výsledky jsou srovnatelné s experimentálními daty. Ukázali jsme, že souhrn vypracovaných metod je dostatečně robustní a použitelný pro daný typ úloh. Zlepšení přesnosti výpočtu lze dosáhnout aplikací přesnějších modelů turbulence.

Vypracovaná metoda bude použita pro simulaci interakce proudící tekutiny a vibrujícího leteckého profilu ve spolupráci s Ústavem termomechaniky AV a VZLÚ Praha.

Literatura

- [1] D. Baldwin, T. Lomax: Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows, AIAA Paper 78 - 257, 1978.
- [2] J. Benetka: Měření kmitajícího profilu z různě vysokých měřících prostorech., Výzkumná zpráva č. Z-2610/81, VZLÚ, Praha, 1998.
- [3] J. Benetka, J. Horáček: Experimentální údaje o tlacích na kmitajících profilech NACA 64A012M5 a NACA0012, Ústav termomechaniky AV ČR, 2003.
- [4] T. Cebeci, A. M. O. Smith: *Analysis of Turbulent Boundary Layers*, Academic Press, New York, 1974.
- [5] T. A. Davis: *UMFPACK V4.0*,
<http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/umfpack>, University of Florida.
- [6] V. Dolejší: *ANGENER V3.0*,
<http://www.karlin.mff.cuni.cz/dolejsi/angen/angen.htm>, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy.
- [7] M. Feistauer: *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*, Longman, Harlow, 1993.
- [8] M. Feistauer, J. Felcman: Numerické řešení turbulentního proudění profilovými mřížemi s užitím nestrukturovaných sítí, Výzkumná zpráva pro Škoda Plzeň, MFF UK, Praha, 1998.
- [9] W. Haase, E. Chaput, E. Elsholz, M. A. Leschziner, U. R. Müller (eds.): *ECARP - Validation of CFD Codes and Assessment of Turbulence Models*. NNFM Vol. 58, Vieweg, Braunschweig, 1997.
- [10] J. Horáček: Nelineární formulace kmitání profilu pro aero-hydroelastické výpočty. In: *Dynamika strojů 2003*, Praha 11.–12.2. 2003, ÚT AVČR, Praha, 2003, 51–56. [ISBN 80-85918-81-1]
- [11] V. John: *Large Eddy Simulation of Turbulent Incompressible Flows*. Springer, Berlin, 2004.
- [12] L.G. Lojckanskij: *Mechanika židkosti i gaza*, Nauka, Moskva, 1978.

- [13] G. Lube: *Stabilized Galerkin finite element methods for convection dominated and incompressible flow problems*, Num. Anal. and Math. Model., Banach Center publications (29), Warszawa, 1994.
- [14] J. Příhoda: Řešení dvourozměrného proudění stlačitelné tekutiny pomocí algebraického modelu turbulence, interní zpráva, Ústav termomechaniky AV ČR.
- [15] J. Příhoda: Algebraické modely turbulence a jejich použití při řešení středovaných Navierových–Stokesových rovnic, Výzkumná zpráva Z-1153/90, Ústav termomechaniky ČSAV, Praha, 1990.
- [16] J. Příhoda: Popis modelů turbulence s turbulentní vazkostí pro dvourozměrné proudění stlačitelné tekutiny, Výzkumná zpráva Z-177/91, Ústav termomechaniky ČSAV, Praha, 1991.
- [17] D. A. Randall: Reynolds Averaging. Selected Notes, Department of Atmospheric Science, Colorado State University, 2003
- [18] P. Rostand: *Algebraic turbulence models for the computation of two-dimensional high speed flows using unstructured grids*, NASA CR-181741, 1988.
- [19] M. Růžička: Interakce nestlačitelné tekutiny a obtékaných těles, Diplomová práce, 2005.
- [20] H. Schlichting, K. Gersten: *Boundary Layer Theory*, 8th edition, Springer, Berlín, 2000.
- [21] P. Sváček, M. Feistauer: Application of a Stabilized FEM to Problems of Aeroelasticity, Numerical Mathematics and Advanced Applications, ENUMATH 2003, M. Feistauer, V. Dolejší, P. Knobloch, K. Najzar, eds. Springer, Berlin, 2004.
- [22] P. Sváček, M. Feistauer, J. Horáček: Numerical simulation of flow induced airfoil vibrations with large amplitudes. Preprint No. MATH-knm-2005/1, Charles University Prague, Faculty of Mathematics and Physics, School of Mathematics, Preprint Series, 30 pages (submitted to the Journal of Fluids and Structures).
- [23] M. M. Stanišić: *The Mathematical Theory of Turbulence*. Springer, New York, 1988.
- [24] H. Triebstein: Steady and unsteady transonic pressure distributions on NACA 0012. J. Aircraft 23 (1986), 213 - 219.