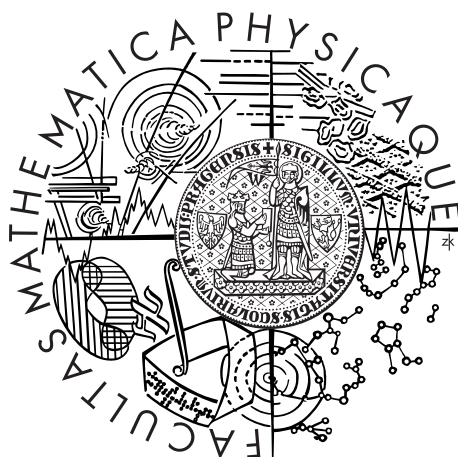


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCE



Pavla Grubhofferová

### **A posteriorní odhady chyby nespojité Galerkinovy metody pro eliptické a parabolické úlohy**

Katedra numerické matematiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Vít Dolejší, Ph.D., DSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Numerická a výpočtová matematika

Praha 2012

Děkuji vedoucímu této práce prof. RNDr. Vítovi Dolejšímu, Ph.D., DSc. za jeho ochotu, trpělivost a cenné rady. Též mu děkuji za zapůjčení literatury a pomoc při seznamování se se softwarem. Dále děkuji všem svým blízkým za jejich podporu.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Pavla Grubhofferová

Název práce: A posteriorní odhady chyby nespojité Galerkinovy metody pro eliptické a parabolické úlohy

Autor: Pavla Grubhofferová

Katedra: Katedra numerické matematiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Vít Dolejší, Ph.D., DSc., Katedra numerické matematiky

Abstrakt: Předložená práce se zabývá nespojitou Galerkinovou metodou s anizotropní adaptací sítě pro stacionární úlohy konvekce-difúze. V úvodní části zavádíme základní pojmy a obecně přibližujeme použitou metodu. V dalších částech práce jsou podrobněji popsány různé způsoby, jak získat Riemannovy metriky nutné pro anizotropní adaptaci sítě. Následuje hlavní část této práce - numerické experimenty prováděné pomocí programů ADGFEM a ANGENER. V těchto experimentech vzájemně porovnáváme jednotlivé přístupy pro výpočet Riemannových metrik a srovnáváme jejich efektivitu. Výstupem této práce jsou podprogramy pro výpočet Riemannových metrik včetně zdrojového kódu.

Klíčová slova: nespojitá Galerkinova metoda, a posteriorní odhad chyby, anizotropní adaptace sítě, Riemannovy metriky

Title: A posteriori error estimates of discontinuous Galerkin method for elliptic and parabolic methods

Author: Pavla Grubhofferová

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: prof. RNDr. Vít Dolejší, Ph.D., DSc., Department of Numerical Mathematics

Abstract: The presented work deals with the discontinuous Galerkin method with the anisotropic mesh adaptation for stationary convection-diffusion problems. Basic definitions are included in an introduction where we also present the used method. The following parts describe various methods for evaluating a Riemann metric, which is necessary for anisotropic mesh adaptation. The most important part of work follows - numerical experiments carried out with ADGFEM and ANGENER software packages. In these experiments, we compare different approaches for the definition of Riemann metrics and compare their efficiency. The main output of this thesis are subroutines for evaluation of the Riemann metric including its source code.

Keywords: discontinuous Galerkin method, a posteriori error estimate, anisotropic mesh adaptation, Riemman metric

# Obsah

Úvod	2
<b>1 Uvedení do problému</b>	<b>4</b>
1.1 Základní pojmy . . . . .	4
<b>2 Diskretizace problému</b>	<b>6</b>
2.1 Triangulace . . . . .	6
2.2 Značení . . . . .	6
2.3 Diskretizace pomocí nespojitě Galerkinovy metody . . . . .	7
2.4 Hledání řešení . . . . .	8
2.5 Algebraická reprezentace . . . . .	9
2.6 Iterační metoda . . . . .	9
2.7 Odhad rezidua . . . . .	10
2.8 hp-adaptační proces pro izotropní adaptaci sítě . . . . .	13
<b>3 Anizotropní adaptace sítě</b>	<b>15</b>
3.1 Anizotropní element . . . . .	15
3.2 Různé typy použitých metrik . . . . .	17
3.3 Výpočet metriky v prostoru $X$ s normou $\ v\ _X^2 = \ v\ _{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon v _{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2$ . . . . .	17
3.4 Výpočet metriky v prostoru $X$ s normou $\ v\ _J^2 =  v _{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 + J_h^\sigma(v, v)$ . . . . .	20
3.5 Výpočet metriky založený na Hessově matici . . . . .	20
<b>4 Algoritmy</b>	<b>21</b>
4.1 Algoritmus hlavního programu při použití anizotropní adaptace sítě . . . . .	21
4.2 Algoritmus odvození metrik v prostoru $X$ s normou $\ v\ _X^2 = \ v\ _{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon v _{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2$ . . . . .	21
4.3 Algoritmus odvození metrik v prostoru $X$ s normou $\ v\ _J^2 =  v _{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 + J_h^\sigma(v, v)$ . . . . .	22
4.4 Algoritmus odvození metrik pro metriky založené na Hessově matici . . . . .	23
<b>5 Numerické experimenty</b>	<b>24</b>
5.1 Použitý software . . . . .	24
5.2 Způsob řešení . . . . .	24
5.3 Lineární rovnice kovekce-difúze se slabou hraniční vrstvou . . . . .	25
5.4 Nelineární rovnice kovekce-difúze se singularitou v rohu . . . . .	32
5.5 Kvazi-lineární eliptická rovnice s regulárním řešením . . . . .	38
5.6 Kvazi-lineární eliptická rovnice se singularitou v rohu . . . . .	45
<b>Závěr</b>	<b>55</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>56</b>

# Úvod

V práci jsem se zabývala řešením stacionární úlohy konvekce-difúze pomocí nespojitě Galerkinovy metody s anizotropní adaptací sítě. Mým cílem nebylo odvodit garantované a robustní a posteriorní odhady chyby, ale najít vhodnou strategii pro anizotropní adaptaci sítě.

Nespojitá Galerkinova metoda používá po částech polynomiální nespojitě aproximace na různých sítích. Abychom docílili přesného numerického řešení, je třeba používat jemnější sítě. Na stranu druhou, příliš jemná síť sestává z příliš mnoha elementů a pro výpočet je zapotřebí mnoho paměti a trvá déle. Z tohoto důvodu byly vytvořeny adaptivní metody. Pomocí nich se snažíme najít podmnožiny, na kterých je numerické řešení nepřesné a síť zjemňujeme pokud možno jen v těchto oblastech. Pro zjemňování sítě se využívá izotropní a anizotropní adaptace sítě. Typickou ukázkou izotropní adaptace sítě je "red-green" zjemňování: definujeme si vhodný indikátor a zjemňujeme elementy s hodnotou indikátoru větší než je daná tolerance. Tato metoda nám dává dobré výsledky, nicméně pokud zjemňujeme síť vícekrát ( $n$ -krát, kde  $n$  je např. 4, 5, ...), vznikne nám síť s velkým počtem elementů. Jiným příkladem izotropní adaptace sítě je hp-adaptivní metoda, která nám umožňuje měnit nejen velikost elementu, ale i stupeň polynomiální aproximace. Pro určení, zda použít h-adaptaci nebo p-adaptaci používáme vhodný indikátor.

Pro získání takového indikátoru jsou jedním z užitečných nástrojů a posteriorní odhady chyby. Řešíme-li numericky nějakou úlohu, snažíme se docílit toho, aby chyba přibližného řešení splňovala předem danou toleranci a zároveň aby počet stupňů volnosti diskretní úlohy byl co nejmenší.

A posteriorním odhadem chyby rozumíme takový odhad, který závisí pouze na spočteném řešení a datech úlohy. Jestliže  $u$  je slabé řešení a  $u_h$  je přibližným řešením daného problému, pak a posteriorní odhad chyby má tvar:

$$\|u - u_h\| \leq cf(u_h), \quad (1)$$

kde  $c$  je konstanta a  $f$  je funkce přibližného řešení.

Pro praktické použití je vhodné, aby a posteriorní odhady splňovaly některé vlastnosti. Především by měly garantovat omezení chyby shora s konstantou, kterou umíme určit. Pak takový odhad nazveme spolehlivým. Naproti tomu odhad chyby zdola,

$$f(u_h) \leq c \|u - u_h\|, \quad (2)$$

je užitečný pro určení, zda odhad shora není nadhodnocený a zda jsme síť nezjemňovali příliš. Takovýto odhad nazveme efektivní. Podrobný popis a posteriorních odhadů lze nalézt např. v [13] a v [14].

Dalším přístupem pro adaptaci sítě je anizotropní adaptace sítě, která nám umožňuje dosáhnout stejné přesnosti s použitím menšího počtu elementů. Na rozdíl od izotropní adaptace sítě můžeme pomocí anizotropní adaptace sítě nejen zjemňovat, ale na některých částech i posouvat uzly sítě. Díky tomu můžeme získat triangulaci s menším počtem elementů, ale se stejnou přesností řešení jako při použití izotropní adaptace sítě. Anizotropní adaptace sítě nám umožňuje zkonstruovat optimální síť v tom smyslu, že chyba numerického řešení je rovnoměrně

rozdělena mezi celou síť. Pomocí této metody můžeme zjemňovat elementy v různých směrech různým způsobem v závislosti na velikosti chyby v daném směru. Z toho nám plyne, že potřebujeme nějaký indikátor, který nám měří nejen velikost chyby, ale i její změny vzhledem ke směru. První část tohoto indikátoru můžeme reprezentovat pomocí množiny symetrických pozitivně definitních matic  $2 \times 2$ , které nám zároveň reprezentují Riemannovu metriku ve výpočetní oblasti  $\Omega$ . Kromě velikosti chyby potřebujeme ještě směr chyby a poměr velikosti chyby v daném směru a ve směru kolmém k tomuto směru. Indikátor je tedy tvořen třemi částmi.

Ve své práci navrhuji tři různé typy výpočtu těchto indikátorů. Prvním je přístup založený na hledání maxima v prostoru  $X = H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  s normou  $\|v\|_X^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon|v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2$  specifikovanou dále, druhý přístup spočívá v hledání maxima v prostoru  $X = H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  s normou  $\|v\|_J^2 = |v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 + J_h^\sigma(v, v)$  specifikovanou dále. Třetí přístup je založen na práci s Hessovou maticí. V práci tyto přístupy popisují, následně je pak porovnávám mezi sebou navzájem a srovnávám je s přístupem pomocí izotropní adaptace sítě.

# 1. Uvedení do problému

V této kapitole zavedeme základní pojmy, které budeme dále používat. Představíme problém, kterým se budeme zabývat.

## 1.1 Základní pojmy

Na úvod je třeba definovat některé základní pojmy. Definice vycházejí z práce [6]. V práci budeme užívat následující standardní značení.

- $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , Lebesgueovy prostory s normou  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$
- $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , Sobolevovy prostory s normou  $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$
- $W^{k,p}(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , Sobolevovy prostory s normou  $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$

Uvažujme následující problém (podobně jako v [6]):

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(u) - \nabla \cdot (\mathbf{K}(u)\nabla u) = g(x), \quad (1.1)$$

$$u|_{\partial\Omega_D} = u_D, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{K}(u)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega_N} = g_N, \quad (1.3)$$

kde  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  je neznámá funkce definovaná na  $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ . Pro jednoduchost předpokládejme, že  $\Omega$  je polygonální. Dále předpokládejme, že  $\mathbf{f}(u) = (f_1(u), \dots, f_d(u)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  a  $\mathbf{K}(u) = \{K_{ij}(u)\}_{i,j=1}^d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  jsou nelineární funkce,  $\mathbf{n}$  je jednotková vnější normála na  $\partial\Omega$ . Hranici oblasti  $\Omega$  značíme  $\partial\Omega$  a tvoří ji dvě disjunktní části  $\partial\Omega_D$  a  $\partial\Omega_N$ ,  $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N \neq \emptyset$ . Symboly  $\nabla$ ,  $\nabla \cdot$  značí gradient, resp. divergenci.

Předpokládejme, že:

$$f_s \in C^1(\mathbb{R}), f_s(0) = 0, \text{ pro } s = 1, \dots, d, \quad (1.4)$$

$$\text{matice } \mathbf{K} \text{ je ohraničená a pozitivně definitní,} \quad (1.5)$$

$$g \in L^2(\Omega), \quad (1.6)$$

$$u_D \text{ je stopa } u^* \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \text{ na } \partial\Omega_D, \quad (1.7)$$

$$g_N \in L^2(\partial\Omega_N). \quad (1.8)$$

Pro jednoduchost předpokládejme existenci a jednoznačnost řešení problému (1.1) - (1.3). Dále definujme následující prostory:

$$V := \{v; v \in H^1(\Omega), v|_{\partial\Omega_D} = 0\} \quad (1.9)$$

$$W := \{v; v \in H^1(\Omega), v - u^* \in V\} \quad (1.10)$$

Položme:



$$(u, v) : = \int_{\Omega} uv \, dx, \quad u, v \in L^2(\Omega), \quad (1.11)$$

$$a(u, v) : = \int_{\Omega} (\mathbf{K}(u)\nabla u) \cdot \nabla v \, dx, \quad u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad v \in H^1(\Omega), \quad (1.12)$$

$$b(u, v) : = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{f}(u)v \, dx, \quad u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad v \in L^2(\Omega), \quad (1.13)$$

$$(u, v)_N : = \int_{\partial\Omega_N} uv \, dS, \quad u, v \in L^2(\partial\Omega). \quad (1.14)$$

Jak je vidět z definice  $a$  a  $b$ , předpokládáme, že  $u \in L^\infty(\Omega)$ . Díky tomu ihned dostáváme ohraničenost funkcí  $\mathbf{f}(u)$  a  $\mathbf{K}(u)$  a z toho nám plyne existence integrálu a tedy i námi zavedených forem.

**Definice 1.1.** Řekneme, že funkce  $u$  je slabým řešením (1.1) - (1.3), jestliže platí následující:

$$u \in W \cap L^\infty(\Omega), \quad (1.15)$$

$$b(u, v) + a(u, v) = (g, v) + (g_N, v)_N \quad \forall v \in V. \quad (1.16)$$

## 2. Diskretizace problému

V této kapitole se zabýváme obecným popisem nespojitě Galerkinovy metody. Celá kapitola je inspirovaná článkem [6]. Zavedeme triangulaci a značení, které budeme dále používat. Také představíme způsob, jakým hledáme řešení.

### 2.1 Triangulace

Nechť  $\mathcal{T}_h$ ,  $h > 0$ , je dělení uzavěru  $\bar{\Omega}$  oblasti  $\Omega$  sestávající z konečného množství uzavřených simplexů s navzájem disjunktními vnitřky.  $\mathcal{T}_h = \{K\}_{K \in \mathcal{T}_h}$  nazveme triangulací  $\Omega$ . Hranici oblasti  $\Omega$  značíme  $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$ , kde na  $\partial\Omega_D$ , resp.  $\partial\Omega_N$  je předepsána Dirichletova, respektive Neumannova okrajová podmínka. Pomocí symbolu  $\mathcal{F}_h$  označíme množinu všech hran (respektive stěn) všech elementů  $K \in \mathcal{T}_h$ . Symbolem  $\mathcal{F}_h^I$  značíme množinu všech vnitřních hran  $\Gamma \in \mathcal{F}_h$ , symboly  $\mathcal{F}_h^D$ , resp.  $\mathcal{F}_h^N$ , množinu všech hran  $\Gamma \in \Omega$  takových, že  $\Gamma \subset \partial\Omega_D$ , resp.  $\Gamma \subset \partial\Omega_N$ . Pro další použití položíme  $\mathcal{F}_h^{ID} = \mathcal{F}_h^I \cup \mathcal{F}_h^D$  a  $\mathcal{F}_h^B = \mathcal{F}_h^D \cup \mathcal{F}_h^N$ .

Dále pro každé  $\Gamma \in \mathcal{F}_h$  definujeme jednotkový normálový vektor  $\mathbf{n}_\Gamma$ . Pro  $\Gamma \in \mathcal{F}_h^B$  předpokládejme, že  $\mathbf{n}_\Gamma$  má stejnou orientaci jako vnější normála na  $\partial\Omega$ . Pro  $\mathbf{n}_\Gamma \notin \partial\Omega$  zvolme orientaci libovolnou, ale pevnou.

### 2.2 Značení

Na triangulaci  $\mathcal{T}_h$  definujeme prostor funkcí

$$H^s(\Omega, \mathcal{T}_h) := \{v; v|_K \in H^s(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad s \geq 0, \quad (2.1)$$

s normou

$$\|v\|_{H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{H^s(K)}^2 \quad (2.2)$$

a seminormou

$$|v|_{H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^s(K)}^2. \quad (2.3)$$

Dále ke každému  $K \in \mathcal{T}_h$  přiřadíme celé kladné číslo  $p_K$ , které bude značit lokální stupeň polynomu. Definujme množinu  $p_h := \{p_K, K \in \mathcal{T}_h\}$ . Dále definujme k dané triangulaci  $\mathcal{T}_h$  podprostor prostoru  $H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$

$$S_{hp} := \{v; v \in L^2(\Omega), v|_K \in P_{p_K}(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (2.4)$$

kde  $P_{p_K}(K)$  značí prostor všech polynomů stupně nejvýše  $p_K$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$ .

Ke každé hraně  $\Gamma \in \mathcal{F}_h^I$  existují dva elementy  $K^{(+)}, K^{(-)} \in \mathcal{T}_h$  takové, že  $\Gamma \subset K^{(+)} \cap K^{(-)}$ . V naší práci budeme předpokládat, že  $K^{(-)}$  leží ve směru normály  $\mathbf{n}_\Gamma$  a  $K^{(+)}$  leží v opačném směru. Pro funkce  $v \in S_{hp}$  definujeme:

$$v_\Gamma^{(+)} = \text{stopa } v|_{K_\Gamma^{(+)}} \text{ na } \Gamma, \Gamma \in \mathcal{F}_h^I, \quad (2.5)$$

$$v_\Gamma^{(-)} = \text{stopa } v|_{K_\Gamma^{(-)}} \text{ na } \Gamma, \Gamma \in \mathcal{F}_h^I, \quad (2.6)$$

$$\{v\}_\Gamma = \frac{1}{2} \left( v_\Gamma^{(+)} + v_\Gamma^{(-)} \right), \Gamma \in \mathcal{F}_h^I, \quad (2.7)$$

$$[v]_\Gamma = v_\Gamma^{(+)} - v_\Gamma^{(-)}, \Gamma \in \mathcal{F}_h^I, \quad (2.8)$$

$$\{v\}_\Gamma = [v]_\Gamma = v_\Gamma^{(+)} = \text{stopa } v|_{K^{(+)}} \quad (2.9)$$

$$\text{kde } K^{(+)} \text{ je takový element, že } \Gamma \subset K^{(+)} \cap \partial\Omega, \Gamma \in \mathcal{F}_h^B, \quad (2.10)$$

Pro zjednodušení v případě, kdy  $\mathbf{n}_\Gamma$ ,  $\{\cdot\}_\Gamma$ ,  $[\cdot]_\Gamma$  jsou argumenty integrálu  $\int_\Gamma \dots dS$ ,  $\Gamma \in \mathcal{F}_h$ , budeme vynechávat index  $\Gamma$ .

## 2.3 Diskretizace pomocí nespojité Galerkinovy metody

Rovnici (1.1) diskretizujeme pomocí IIPG verze nespojité Galerkinovy metody podobně jako v [6]. Pro  $u, v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  definujeme následující formy:

$$\tilde{a}_h(u, v) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{K}(u) \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad (2.11)$$

$$- \sum_{K \in \mathcal{F}_h^{ID}} \int_\Gamma (\{\mathbf{K}(u) \nabla u\} \cdot \mathbf{n}[v] - i \{\mathbf{K}(u) \nabla v\} \cdot \mathbf{n}[u]) \, dS, \quad (2.12)$$

$$J_h^\sigma(u, v) := \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^{ID}} \int_\Gamma \sigma[u][v] \, dS, \quad (2.13)$$

$$\tilde{b}_h(u, v) := \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h} \int_\Gamma H(u|_\Gamma^{(+)}, u|_\Gamma^{(-)}, \mathbf{n})[v] \, dS - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{f}(u) \cdot \nabla v \, dx, \quad (2.14)$$

$$l_h(u, v) := (g, v) + (g_N, v)_N + \int_{\partial\Omega_D} (i\mathbf{K}(u) \nabla v \cdot \mathbf{n}u_D + \sigma v u_D) \, dS, \quad (2.15)$$

kde  $i = -1, 0, 1$  odpovídá SIPG, IIPG a NIPG variantám nespojité Galerkinovy metody. Penalizační parametr  $\sigma$  volíme

$$\sigma|_\Gamma = \varepsilon C_W h_\Gamma^{-1}, \Gamma \in \mathcal{F}_h, \quad (2.16)$$

kde  $h_\Gamma = \text{diam}(\Gamma)$ ,  $\Gamma \in \mathcal{F}_h$ ,  $\varepsilon$  značí velikost difúze a  $C_W > 0$  je vhodná konstanta zvolená tak, aby byla zajištěna konvergence metody, viz např. [8]. Funkce  $H$  je numerický tok známý z metody konečných objemů, viz [10]. Pomocí numerického toku aproximujeme konvektivní tok následujícím způsobem:

$$f(u) \cdot \mathbf{n} \approx H(u|_\Gamma^{(+)}, u|_\Gamma^{(-)}, \mathbf{n}). \quad (2.17)$$

Hodnoty  $u|_\Gamma^{(-)}$  na  $\partial\Omega_D$  bereme z okrajové podmínky (1.2), hodnoty  $u|_\Gamma^{(-)}$  na  $\partial\Omega_N$  jsou extrapolovány z vnitřku  $\Omega$ . Předpokládejme, že numerický tok je konzervativní a konzistentní, tj.  $H(u, v, \mathbf{n}) = -H(v, u, -\mathbf{n})$  a  $H(u, u, \mathbf{n}) = f(u) \cdot \mathbf{n}$ .

Dále položíme

$$\tilde{c}_h(u, v) := \tilde{a}_h(u, v) + \tilde{b}_h(u, v) + J_h^\sigma(u, v) - l_h(u, v), \quad u, v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h). \quad (2.18)$$

Nyní můžeme definovat diskrétní problém:

**Definice 2.1.** Řekneme, že funkce  $u_h \in S_{hp}$  je přibližným řešením rovnice (1.15) - (1.16), jestliže

$$\tilde{c}_h(u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in S_{hp}. \quad (2.19)$$

Zavedme si nyní pro potřeby odhadu chyby formu  $N_h : H^1(\Omega, \mathcal{T}_h) \rightarrow \mathbb{R}$  následujícím způsobem:

$$N_h(v) := \left( 2 \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^I} \int_{\Gamma} h_{\Gamma}^{-1} [v]^2 dS + \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^D} \int_{\Gamma} h_{\Gamma}^{-1} (v - u_D)^2 dS \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.20)$$

Uvedme si nyní lemma, které nám charakterizuje řešení.

**Lemma 2.2.** *Platí následující dva výroky:*

1. *Nechť  $u \in H^2(\Omega)$  je slabé řešení problému (1.15) - (1.16). Potom:*

$$\tilde{c}_h(u, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h), \quad (2.21)$$

$$N_h(u) = 0. \quad (2.22)$$

2. *Pokud  $u \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  splňuje (2.21) - (2.22), potom  $u$  je slabým řešením problému (1.15) - (1.16).*

Lemma bylo dokázáno v [6].

## 2.4 Hledání řešení

Řešení hledáme metodou popsanou v článku [6]. Diskrétní problém (2.19) můžeme reprezentovat pomocí soustavy  $N_h = \dim S_{hp}$  nelineárních algebraických rovnic. Tuto soustavu řešíme pomocí Newtonovské iterační metody. Předpokládejme, že numerický tok můžeme rozepsat jako:

$$H(u_1, u_2, \mathbf{n}) := P^+(u_1, u_2, \mathbf{n})u_1 + P^-(u_1, u_2, \mathbf{n})u_2, \quad (2.23)$$

kde  $P^+, P^-$  jsou vhodné funkce.

Nyní zavedeme funkci  $A_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s = 1, \dots, d$  takto:

$$f_s(u) \approx A_s(u)u, \quad u \in \mathbb{R}, \quad s = 1, \dots, d. \quad (2.24)$$

Pro naše potřeby položíme:

$$A_s(u) := f'_s(u), \quad u \in \mathbb{R}, \quad s = 1, \dots, d, \quad (2.25)$$

což vede k aproximaci prvního řádu rovnice (2.24).

Dále pro  $u, v, w \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$  definujme následující formy:

$$a_h(v, u, w) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{K}(v) \nabla u \cdot \nabla w \, dx - \quad (2.26)$$

$$- \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^{ID}} \int_{\Gamma} (\{\mathbf{K}(v) \nabla u\} \cdot \mathbf{n}[w] - \quad (2.27)$$

$$i \{\mathbf{K}(v) \nabla w\} \cdot \mathbf{n}[u]) \, dS, \quad (2.28)$$

$$b_h(v, u, w) := \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h} \int_{\Gamma} (P^+(v|_{\Gamma}^+, v|_{\Gamma}^-, \mathbf{n})u|_{\Gamma}^{(+)} + \quad (2.29)$$

$$+ P^-(v|_{\Gamma}^+, v|_{\Gamma}^-, \mathbf{n})u|_{\Gamma}^{(-)})[w] \, dS - \quad (2.30)$$

$$- \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \sum_{s=1}^d A_s(v) u \frac{\partial w}{\partial x_s} \, dx, \quad (2.31)$$

$$c_h(v, u, w) := a_h(v, u, w) + b_h(v, u, w) + J_h^{\sigma}(u, w). \quad (2.32)$$

S pomocí právě definovaných forem dostáváme:

$$c_h(u, u, v) - l_h(u, v) \approx \tilde{c}_h(u, v) \quad \forall u, v \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h). \quad (2.33)$$

## 2.5 Algebraická reprezentace

Úlohu, kterou jsme si definovali v předchozí kapitole, můžeme reprezentovat algebraicky následujícím způsobem: Nechť  $N_h$  značí dimenzi po částech polynomiálního prostoru  $S_{hp}$  a necht

$$B_h := \{\varphi_i(x), i = 1, \dots, N_h\} \quad (2.34)$$

značí množinu lineárně nezávislých funkcí tvořících bázi prostoru  $S_{hp}$ . Bázi  $B_h$  je možno vytvořit složením lokálních bází zkonstruovaných zvlášť pro každý element  $K \in \mathcal{T}_h$ .

Nechť  $u_h \in S_{hp}$  je polynomiální funkce. Potom ji lze vyjádřit následujícím způsobem:

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{N_h} u^j \varphi_j(x), \quad U_h := \{u^j\}_{j=1}^{N_h} \in \mathbb{R}^{N_h}, \quad (2.35)$$

kde  $u^j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, N_h$  jsou bázové koeficienty. Je zřejmé, že (2.35) definuje izomorfismus mezi  $u_h \in S_{hp}$  a  $U_h \in \mathbb{R}^{N_h}$ .

Dále definujeme vektorovou funkci

$$F_h : \mathbb{R}^{N_h} \rightarrow \mathbb{R}^{N_h}, \quad F_h(U_h) := \{\tilde{c}_h(u_h, \varphi_i)\}_{i=1}^{N_h}. \quad (2.36)$$

Díky tomu můžeme přepsat diskrétní problém (2.19) následujícím způsobem:

$$\text{nalézt } U_h \in \mathbb{R}^{N_h} \text{ takové, že } F_h(U_h) = 0. \quad (2.37)$$

Úlohu řešíme pomocí přístupu popsaného v [6]. Autor zde používá iterační tlumenou Newtonovskou metodu. Nyní si tuto metodu přiblížíme.

## 2.6 Iterační metoda

Abychom získali řešení  $U_h$  systému (2.37), představíme si tlumenou Newtonovskou metodu, která nám generuje posloupnost aproximací  $U_h^n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  hledaného numerického řešení  $U_h$  pomocí následujícího algoritmu:

1. Nechť je dána  $n$ -tá iterace  $U_h^n$ .
2. Najdeme  $d^n \in \mathbb{R}^{N_h}$  pomocí vzorce  $\mathbb{C}_h(U_h^n)d^n = -F_h(U_h^n)$ .
3. Spočteme další iteraci  $U_h^{n+1}$  pomocí  $U_h^{n+1} := U_h^n + \lambda^n d^n$ .

Symbolem  $\mathbb{C}_h$  značíme matici toku danou pomocí:

$$\mathbb{C}_h(U_h) := \{c_h(u_h, \varphi_j, \varphi_i)\}_{i,j=1}^{N_h}. \quad (2.38)$$

Díky charakteru bázových funkcí je zřejmé, že matice  $\mathbb{C}_h$  je řídká s blokovou strukturou. Navíc  $\lambda \in (0, 1]$  je parametr tlumení, který nám zajišťuje konvergenci

uvedeného algoritmu pro případ, kdy se naše počáteční iterace  $U_h^0$  příliš liší od řešení (2.37). Díky (2.33) máme

$$F_h(U_h) \approx \mathbb{C}_h(U_h)U_h - q_h(U_h) \quad \forall U_h \in \mathbb{R}^{N_h}, \quad (2.39)$$

kde  $q_h(U_h) \in \mathbb{R}^{N_h}$  odpovídá formě  $l_h$  následujícím způsobem:

$$q_h(U_h) = \{l_h(u_h, \varphi_i)\}_{i=1}^{N_h}. \quad (2.40)$$

Pro výpočet pomocí výše uvedeného algoritmu použijeme standartní Newtonovu tlumenou metodu, viz [2]. Jakobián aproximujeme pomocí

$$\frac{DF_h(U_h)}{DU_h} \approx \mathbb{C}_h(U_h). \quad (2.41)$$

Pro praktické použití si výpočet zjednodušíme, nepočítáme matici toku pro každou Newtonovu iteraci, místo toho ji často nahrazujeme následujícím způsobem:

$$\mathbb{C}_h(U_h^0)d^n = -F_h(U_h^n). \quad (2.42)$$

Počáteční hodnotu parametru tlumení jsme zvolili  $\lambda^n = 1$ . Též jsme zavedli monitorovací funkci  $\theta^n := \frac{\|F_h(U_h^{n+1})\|}{\|F_h(U_h^n)\|}$ . Pomocí této funkce se rozhodujeme, jak pokračovat ve výpočtu. Je-li  $\theta^n < 1$ , přejdeme k další Newtonově iteraci. V opačném případě položíme  $\lambda^n = \frac{\lambda^n}{2}$  a zopakujeme výpočet se současnou Newtonovou iterací.

Výpočet ukončíme pomocí vhodného zastavovacího kritéria, např.

$$\|F_h(U_h^n)\| \leq \text{tol}, \quad (2.43)$$

kde  $\text{tol}$  a  $\|\cdot\|$  jsou předem daná tolerance a vhodně zvolená norma.

## 2.7 Odhad rezidua

Naším dalším cílem je zkoumat chybu diskretizace  $u - u_h$  ve vhodné normě a zavést si "odhady", které nám dají potřebné informace o těchto chybách. Tyto odhady následně využijeme v programu v iteračním procesu a pomocí nich volíme hp-adaptační strategii. Náš odhad vychází z článku [6]. Podobně jako v článku používáme odhad chyby sestávající ze dvou částí motivovaných vzorci (2.21) - (2.22). Nejprve je třeba zavést si prostor, na kterém budeme pracovat. Nechť  $X$  je lineární prostor funkcí takový, že  $u \in X$  a  $u_h \in X$ . Na tomto prostoru zavedeme normu  $\|\cdot\|_X$ , kterou specifikujeme dále. V našem případě  $X = H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ . Označme nyní  $X'$  prostor duální k prostoru  $X$ . Dále nechť  $A_h : X \rightarrow X'$  je nelineární operátor odpovídající formě  $\tilde{c}_h$  následujícím způsobem:

$$\langle A_h u, v \rangle := \tilde{c}_h(u, v), \quad u, v \in X, \quad (2.44)$$

kde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  značí dualitu mezi prostory  $X$  a  $X'$ . Duální normu definujeme pomocí vzorce:

$$\|A_h u\|_{X'} := \sup_{0 \neq v \in X} \frac{\langle A_h u, v \rangle}{\|v\|_X}. \quad (2.45)$$

Je zřejmé, že pokud  $u \in H^2(\Omega) \subset X$  je řešením problému, potom dostáváme  $A_h u = 0$ . Chybu rezidua v duální normě příslušného přibližného řešení  $u_h \in S_{hp}$  potom můžeme definovat následujícím způsobem:

$$R_h(u_h) := \|A_h u_h - A_h u\|_{X'} = \|A_h u_h\|_{X'} = \quad (2.46)$$

$$= \sup_{0 \neq v \in X} \frac{\langle A_h u_h, v \rangle}{\|v\|_X} = \sup_{0 \neq v \in X} \frac{\tilde{c}_h(u_h, v)}{\|v\|_X}. \quad (2.47)$$

Jak je vidět, reziduuum závisí pouze na přibližném řešení  $u_h$ , lze ho spočítat i bez znalosti přesného řešení  $u$ . Nicméně není možné najít přesné supremum na nekonečně dimenzionálním prostoru, z tohoto důvodu při výpočtu pracujeme s vhodnými dostatečně velkými podprostory prostoru  $X$ .

Druhá část našeho odhadu chyby je odvozena ze vzorce, který charakterizuje míru konformity slabého řešení a míru narušení Dirichletovy okrajové podmínky. Tuto část reprezentuje hodnota  $N_h(u_h)$  zavedená pomocí (2.20) a nazýváme ji nekonformita přibližného řešení. Hodnotu  $N_h(u_h)$  můžeme spočítat přímo ze vzorce (2.20).

Nyní již můžeme definovat odhad chyby:

$$\varepsilon(u_h) := \sqrt{R_h(u_h)^2 + N_h(u_h)^2}. \quad (2.48)$$

Jak již bylo řečeno, hodnotu  $N_h(u_h)$  není obtížné spočítat. Přesnou hodnotu  $R_h(u_h)$  spočítat neumíme, je tedy nutné ji aproximovat vhodným způsobem. Definujme ke každému elementu  $K \in \mathcal{T}_h$  a pro každé nezáporné celé číslo  $p \geq 0$  prostor

$$S_K^p := \{\phi_h \in X, \phi|_K \in P^p(K), \phi_h|_{\Omega \setminus K} = 0\}. \quad (2.49)$$

Je zřejmé, že  $S_K^p \subset S_K^{p+1} \subset S_K^{p+2} \subset \dots$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$ . Dále položme

$$S_{hp}^+ := \left\{ \phi \in X; \phi = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} c_K \phi_K, c|_K \in \mathbb{R}, \phi_K \in S_K^{pK+1}, K \in \mathcal{T}_h \right\}. \quad (2.50)$$

Z definice prostorů plyne, že  $S_{hp} \subset S_{hp}^+$ .

Nyní definujme pro každý element  $K \in \mathcal{T}_h$  odhad rezidua na elementu

$$\rho_{h,K}(u_h) := \sup_{0 \neq \psi_h \in S_K^{pK+1}} \frac{\tilde{c}_h(u_h, \psi_h)}{\|\psi_h\|_X} = \sup_{\psi_h \in S_K^{pK+1}, \|\psi_h\|_X=1} \tilde{c}_h(u_h, \psi_h), u_h \in X \quad (2.51)$$

a globální odhad rezidua

$$\rho_h(u_h) := \sup_{0 \neq \psi_h \in S_{hp}^+} \frac{\tilde{c}_h(u_h, \psi_h)}{\|\psi_h\|_X} = \sup_{\psi_h \in S_{hp}^+, \|\psi_h\|_X=1} \tilde{c}_h(u_h, \psi_h), u_h \in X. \quad (2.52)$$

Tyto hodnoty můžeme snadno spočítat, pokud vhodně zvolíme  $\|\cdot\|_X$ . Je zřejmé, že pokud  $u \in X$  je přesné řešení problému (1.15) - (1.16), pak dostáváme díky (2.21)  $0 = \rho_h(u) = \rho_{h,K}(u)$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$ . Navíc, jelikož  $\rho_h$  je supremum přes podprostory  $S_{hp}^+ \subset X$ , dostáváme ihned odhad zdola

$$\rho_h(u_h) \leq R_h(u_h) = \|Au_h - Au\|_{X'}. \quad (2.53)$$

Nyní již stačí nalézt vhodný prostor  $X$ , na kterém budeme odhady rychle počítat. Uvedme si následující lemma:

**Lemma 2.3.** *Nechť  $((\cdot, \cdot))_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  je skalární součin, který generuje normu  $\|\cdot\|_X$ . Nechť dále pro  $((\cdot, \cdot))_X$  je splněna následující podmínka na ortogonalitu elementů:*

$$((\psi_h, \psi'_h))_X = 0 \quad \forall \psi_h \in S_K^p \quad \forall \psi'_h \in S_{K'}^p, \quad K \neq K' \quad \forall p \geq 0. \quad (2.54)$$

Potom

$$\rho_h(u_h)^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \rho_{h,K}(u_h)^2. \quad (2.55)$$

Důkaz je uveden v [6].

Abychom splnili výše uvedenou podmínku, zvolili jsme skalární součin představený v [6]:

$$((u, v))_X := \delta(u, v)_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\nabla u, \nabla v)_{L^2(K)}, \quad u, v \in X, \quad (2.56)$$

kde  $\delta$  a  $\varepsilon$  jsou konstanty odrážející velikost konvekce a difúze. V případě skalární rovnice (1.1) - (1.3) pokládáme  $\delta \approx |f(\cdot)|$  a  $\varepsilon \approx |K(\cdot)|$ . Tento skalární součin splňuje (2.54) a zároveň odpovídající norma

$$\|v\|_X^2 := \delta \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon |v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 \quad (2.57)$$

se často používá pro numerickou analýzu singulárních perturbovaných problémů s  $\delta = 1$  (s touto hodnotou  $\delta$  budeme dále pracovat).

Jako druhou jsme uvažovali variantu s normou danou následujícím způsobem:

$$\|v\|_J^2 = |v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 + J_h^\sigma(v, v) \quad (2.58)$$

Numerické experimenty jsme prováděli s oběma normami, respektive skalárními součiny, které je generují.

Nyní již jen zbývá spočítat  $\rho_{h,K}$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$ . To je podrobně ukázáno v následující kapitole.

Jak již bylo zmíněno, druhá část odhadu chyby se dá měřit pomocí nekonformity  $N_h(u_h)$  definované pomocí (2.20). Abychom mohli lépe adaptovat síť, zavedli jsme si lokální variantu nekonformity následujícím způsobem:

$$N_{h,K}(v) := \left( \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^I \cap \partial K} \int_{\Gamma} \sigma[v]^2 dS + \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}_h^D \cap \partial K} \int_{\Gamma} \sigma(v - u_D)^2 dS \right)^{\frac{1}{2}}, \quad v \in H^1(\Omega, \mathcal{T}_h). \quad (2.59)$$

Je zřejmé, že

$$N_h(v)^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} N_{h,K}(v)^2. \quad (2.60)$$

Nyní již máme vše potřebné pro definování lokálního a globálního odhadu přibližného řešení  $u_h \in S_{hp}$ . Definujme si tyto odhady následujícím způsobem:

$$\eta_{h,K}(u_h) := (\rho_{h,K}(u_h)^2 + N_{h,K}(u_h)^2)^{\frac{1}{2}}, \quad K \in \mathcal{T}_h, \quad (2.61)$$

$$\eta_h(u_h) := (\rho_h(u_h)^2 + N_h(u_h)^2)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{h,K}(u_h)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.62)$$

Vzhledem k předchozímu očekáváme, že nám globální odhad  $\eta_h(u_h)$  dobře aproximuje velikost chyby  $\varepsilon_h(u_h)$ .



## 2.8 hp-adaptační proces pro izotropní adaptaci sítě

Pro srovnání provádíme výpočty také pomocí izotropní adaptace sítě. Popišme si nyní tento přístup. Cílem celého programu je nalézt řešení  $\tilde{u}_h \in S_{hp}$  takové, aby

$$\eta_{h,K} \leq \omega, \quad (2.63)$$

kde  $\omega > 0$  je předem daná tolerance.

Nechť  $\mathcal{T}_h$  je daná síť a  $\tilde{u}_h$  je odpovídající aproximace (2.19) získaná pomocí iterační metody. Požadujeme, aby

$$\eta_{h,K}(\tilde{u}_h) \leq \frac{\omega}{\sqrt{\#\mathcal{T}_h}} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad (2.64)$$

kde  $\#\mathcal{T}_h$  značí počet elementů v triangulaci  $\mathcal{T}_h$ . Z předchozího je zřejmé, že pokud je (2.64) splněno, je splněna podmínka (2.63) a adaptační proces může být ukončen. V opačném případě označíme pro adaptaci ty elementy, které podmínku nesplňují. U každého označeného elementu provedeme h-adaptaci nebo p-adaptaci. Při h-adaptaci dochází k rozdělení mateřského elementu na 4 menší, při p-adaptaci zvyšujeme pro daný element polynomiální stupeň aproximace.

Pro rozhodování, zda provedeme h-adaptaci nebo p-adaptaci je třeba si zavést indikátor regularity. Ten je nezbytnou součástí hp-adaptační strategie. Přístup, ze kterého vycházíme, zkoumá jednak velikost skoků mezi elementy (viz. [9]) a jednak se zabývá shock capturing technikou představenou v [11]. Numerická analýza pro skalární rovnici konvekce-difúze (viz [3]) nám dává

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} [u_h - u]^2 dS = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} [u_h]^2 dS \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{2\mu_K - 1} |u|_{H^{s_K}(\Omega)}^2, \quad (2.65)$$

kde  $u$  a  $u_h$  značí přesné a přibližné řešení,  $C > 0$  je konstanta nezávislá na  $h$  a  $\mu_K = \min(p_K + 1, s_K)$ . Dále  $p_K$  označuje stupeň polynomiální aproximace a  $s_K$  je celé kladné číslo značící stupeň lokální regularity  $u$ , např.  $u|_K \in H^{s_K}(K)$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$ . A priori odhad (2.65) nám říká, že pokud je přesné řešení dostatečně regulární, potom nám zvýšení stupně aproximace (p-adaptace) zmenší chybu více. V opačném případě je více efektivní h-adaptace.

Navíc, pomocí numerických experimentů bylo ukázáno, že

$$\int_{\partial K} [u_h - u]^2 dS = \int_{\partial K} [u_h]^2 dS \approx Ch_K^{2\mu - 1} |u|_{H^{s_K}(\Omega)}, \quad K \in \mathcal{T}_h. \quad (2.66)$$

Nyní můžeme obdobně jako v [6] představit indikátor regularity

$$g_K(u_h) := \frac{\int_{\partial K \cap \Omega} [u_h]^2 dS}{|K| h_K^{2p_K - 2}}, \quad K \in \mathcal{T}_h, \quad (2.67)$$

kde  $|K|$  značí plochu elementu  $K \in \mathcal{T}_h$ . Jestliže je řešení dostatečně regulární, což je splněno např. pokud  $s_K \geq p_K + 1$ , potom

$$g_K(u_h) \approx O\left(\frac{h_K^{2p_K + 1}}{h_K^2 h_K^{2p_K - 2}}\right) = O(h_K). \quad (2.68)$$

Na druhou stranu, pokud přesné řešení není dostatečně regulární, tedy např.  $s_K < p_k + 1$ , potom

$$g_K(u_h) \approx O\left(\frac{h_K^{2s_K-1}}{h_K^2 h_K^{2p_K-2}}\right) = O(h_K^{2(s_K-p_K)-1}). \quad (2.69)$$

Z těchto důvodů volíme následující strategii:

- pokud  $g_K(u_h) \leq 1 \Rightarrow$  řešení je regulární  $\Rightarrow$  p-adaptace,  $K \in \mathcal{T}_h$ ,
- pokud  $g_K(u_h) > 1 \Rightarrow$  řešení není regulární  $\Rightarrow$  h-adaptace,  $K \in \mathcal{T}_h$ .

V programu stejně jako ve výše uvedeném článku používáme následující drobnou modifikaci:

$$\tilde{g}_K(u_h) := \frac{\int_{\partial K \cap \Omega} [u_h]^2 dS}{|K| h_K^{2p_K-4}}, \quad K \in \mathcal{T}_h. \quad (2.70)$$

### 3. Anizotropní adaptace sítě

Naším hlavním cílem bylo zjistit efektivitu výpočtu odhadu chyby s anizotropní adaptací sítě oproti přístupu pomocí izotropní adaptací sítě. Přibližme si nyní, co rozumíme anizotropní adaptací sítě. Pomocí této metody se snažíme zkonstruovat optimální síť v tom smyslu, že chyba řešení uvažovaného problému je rovnoměrně rozdělena po celé triangulaci. Anizotropní adaptace nám umožňuje zjemňovat elementy triangulace jen v tom směru, ve kterém je to potřeba. Pro zjemňování tedy potřebujeme nějaký indikátor, který nám dává informaci nejen o velikosti chyby, ale i o jejím směru. Takovýto indikátor můžeme reprezentovat pomocí množiny matic  $M_i$  o rozměru  $2 \times 2$ , které jsou symetrické a pozitivně definitní. Tyto matice zároveň reprezentují Riemannovu metriku ve výpočetní oblasti  $\Omega$ . Tím získáme údaj o velikosti chyby. Dále potřebujeme získat informaci o směru chyby a poměr velikosti chyby vůči velikosti chyby ve směru kolmém na směr chyby. Ve své práci počítám tyto indikátory třemi různými způsoby a následně pak porovnávám, jak jsou tyto způsoby efektivní pro anizotropní adaptaci sítě.

#### 3.1 Anizotropní element

Jak už bylo řečeno, v práci používáme anizotropní adaptaci sítě pro nespojitou Galerkinovu metodu. Popišme si tedy anizotropii trojúhelníků v rovinné oblasti (popis je převzatý z [7]).

Nechť  $K \subset \mathbb{R}^2$  je ostroúhlý rovnoramenný trojúhelník. Označme  $h_K$  jeho velikost ve směru osy,  $h_K^\perp$  jeho velikost ve směru kolmém na směr osy a  $\phi_K$  úhel mezi osou  $x_1$  a počátkem souřadnic. Uspořádanou trojici  $(h_K, h_K^\perp, \phi_K)$  pak nazveme anizotropií elementu  $K$ .

Ukažme si nyní, jak zavést anizotropii jiným způsobem. Nechť  $\lambda_K^1 > 0$  a  $\lambda_K^2 > 0$  a nechť  $\phi_K \in [0, 2\pi)$ . Definujme matice  $M_K$  následujícím způsobem:

$$M_K := R^T(\phi_K) \begin{pmatrix} \lambda_K^1 & 0 \\ 0 & \lambda_K^2 \end{pmatrix} R(\phi_K) = \begin{pmatrix} a_K & b_K \\ b_K & c_K \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

kde  $R^T(\phi_K)$  je matice transponovaná k matici rotace:

$$R(\phi_K) := \begin{pmatrix} \cos(\phi_K) & -\sin(\phi_K) \\ \sin(\phi_K) & \cos(\phi_K) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Jak je zřejmé,  $M_K$  je symetrická pozitivně definitní matice s vlastními čísly  $\lambda_K^1$  a  $\lambda_K^2$ . Rovnice

$$x^T M_K x = a_K x_1^2 + 2b_K x_1 x_2 + c_K x_2^2 \leq 1, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.3)$$

nám definuje pro každý element  $K$  elipsu  $\epsilon_K$  se středem v počátku souřadnic a poloosami délek

$$r_K^1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_K^1}}, \quad r_K^2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_K^2}} \quad (3.4)$$

a úhel mezi osou  $x_1$  a hlavní poloosou elipsy  $\epsilon_K$  je dán pomocí  $\phi_K$ . Zřejmě tedy můžeme anizotropii elementu definovat pomocí uspořádané trojice  $(\lambda_K^1, \lambda_K^2, \phi_K)$  nebo pomocí uspořádané trojice  $(r_K^1, r_K^2, \phi_K)$ .

Zavedme nyní normu vektoru  $v$  vzhledem k matici  $M$  následujícím způsobem:

$$\|v\|_M := (vMv^T)^{\frac{1}{2}} = \left[ \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right]^{\frac{1}{2}} = (av_1^2 + 2bv_1v_2 + cv_2^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5)$$

Z definice této normy je zřejmé, že v případě  $M = I$ , kde  $I$  je jednotková matice, norma odpovídá Eukleidovské.

**Definice 3.1.** *Optimálním trojúhelníkem  $T_M$  vzhledem k matici  $M$  nazveme takový trojúhelník, pro který  $T_M \subset \epsilon_M$  a navíc  $|T_M| \geq |T|$  pro libovolný trojúhelník  $T \subset \epsilon_M$ .*

Poznamenejme, že v případě  $M = I$  je elipsa  $\epsilon_M$  jednotkovým kruhem a tedy trojúhelník  $T_M$  je rovnostranný se stranami o velikosti  $\sqrt{3}$ .

Zavedme si nyní optimální triangulaci. Nebudeme ji definovat jako množinu optimálních trojúhelníků, tento postup by nebyl vhodný pro numerickou realizaci. Namísto toho využijeme postup uvedený v [5].

**Definice 3.2.** *Nechť  $\mathcal{T}$  je triangulace výpočetní oblasti  $\Omega$ . Dále nechť  $M_i$  jsou symetrické pozitivně definitní matice o rozměru  $2 \times 2$  definované pro každý uzel  $P_i$  triangulace  $\mathcal{T}$ , kde  $i \in I$  (příčemž  $I$  je množina indexů).*

*Potom pro každou hranu  $S_j$  triangulace  $\mathcal{T}_h$ ,  $j \in J$  (kde  $J$  je množina indexů) položíme  $\bar{M}_j := \frac{1}{2}(M_{j_1} + M_{j_2})$ , kde  $P_{j_1}$  a  $P_{j_2}$  jsou počáteční a koncový bod tvořící hranu  $S_j$  a  $M_{j_1}$  a  $M_{j_2}$  jsou odpovídající matice.*

*Řekneme, že triangulace  $\mathcal{T}$  je optimální, jestliže*

$$\|S_j\|_{\bar{M}_j} = \sqrt{3}, \quad j \in J. \quad (3.6)$$

Pochopitelně ve většině případů se nám nepodaří zkonstruovat optimální síť (jelikož by měla sestávat z rovnostranných trojúhelníků, tak např. pro  $\Omega$  čtvercovou ji nelze sestavit). Z tohoto důvodu definujeme pro každý element  $K \in \mathcal{T}$  parametr kvality následujícím způsobem:

$$q_K := \sum_{l=1}^3 (\|v_{K_l}\|_{\bar{M}_{K_l}} - \sqrt{3})^2, \quad (3.7)$$

kde  $\|v_{K_l}\|_{\bar{M}_{K_l}}$ ,  $l = 1, 2, 3$  jsou normy jednotlivých hran trojúhelníku  $K$ . Dále definujeme parametr kvality  $Q_{\mathcal{T}}$  pro síť  $\mathcal{T}$  jako

$$Q_{\mathcal{T}} := \frac{1}{\#K} \sum_{K \in \mathcal{T}} q_K, \quad (3.8)$$

kde  $q_K$  je parametr kvality elementu  $K$  a  $\#K$  značí počet trojúhelníků v triangulaci  $\mathcal{T}$ .

Z definice  $Q_{\mathcal{T}}$  plyne, že  $Q_{\mathcal{T}} \geq 0$  a navíc, pokud je  $\mathcal{T}$  optimální, potom  $Q_{\mathcal{T}} = 0$ . Parametr kvality sítě nám tedy ukazuje, jak blízko je naše síť síti optimální. Naší snahou je pochopitelně zkonstruovat takovou triangulaci, aby parametr  $Q_{\mathcal{T}}$  byl co nejmenší. Podrobněji viz [5].

Abychom našli novou triangulaci  $\mathcal{T}_{new}$  s parametrem kvality menším, použijeme iterační proces. Během něho používáme následující operace:

- Přidání uzlu
- Odstranění hrany
- Prohození diagonály
- Posunutí uzlu

Celý proces je podrobně popsán v [5].

## 3.2 Různé typy použitých metrik

Metriky jsme počítali třemi různými způsoby. Dva z nich jsou založené na hledání vázaného extrému v ortogonálních podprostorech prostoru  $X$ , třetí je založen na výpočtu Hessovy matice. Zabýváme se tedy těmito třemi přístupy:

- Výpočet metriky v prostoru  $X$  s normou  $\|v\|_X^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon|v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2$
- Výpočet metriky v prostoru  $X$  s normou  $\|v\|_J^2 = |v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 + J_h^\sigma(v, v)$
- Výpočet metrik založený na výpočtu Hessovy matice

Popíšeme si je nyní blíže.

## 3.3 Výpočet metriky v prostoru $X$ s normou $\|v\|_X^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon|v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2$

Tento přístup je založen na hledání vázaného extrému v prostorech  $S_K^{p_K+1}$  s vazbou  $\|\psi_h\|_X = 1$ . Výpočet vychází z dodatku B v článku [6]. Zde se autor snaží najít

$$\eta_{h,K}(u_h) = \sup_{0 \neq \psi_h \in S_K^{p_K+1}} \frac{\tilde{c}_h(u_h, \psi_h)}{\|\psi_h\|_X}, \quad K \in \mathcal{T}_h. \quad (3.9)$$

Připomeňme, že  $K \in \mathcal{T}_h$  je libovolný pevně daný element a  $\psi_i, i = 1, \dots, N$  jsou báze funkce odpovídajícího prostoru  $S_K^{p_K+1}$ . Dále označme pomocí  $((\cdot, \cdot))_X$  skalární součin, který generuje normu  $\|\cdot\|_X$ . Matici "tuhosti"  $\mathbb{S}$  definujeme následujícím způsobem:

$$\mathbb{S} := \{S_{ij}\}_{i,j=1}^N, \quad S_{ij} := ((\psi_i, \psi_j))_X, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (3.10)$$

Dále položme

$$d := \{d_i\}_{i=1}^N, \quad d_i := \tilde{c}_h(u_h, \psi_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.11)$$

Nechť  $\psi \in S_K^{p_K+1}$ . Potom můžeme  $\psi$  napsat jako  $\psi = \sum_{i=1}^N \xi_i \psi_i$ , kde  $\xi_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, N$  jsou báze koeficienty. Označme  $\alpha = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ . Zřejmě  $\|\psi\|_X = \sum_{i=1}^N \xi_i \xi_j S_{ij}$ . Úloha hledání maxima (3.9) je tedy ekvivalentní s problémem nalezení reálných koeficientů  $\xi_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, N$  takových, aby funkcionál

$$\Psi(\xi_1, \dots, \xi_N) = \tilde{c}_h(u_h, \psi) = \sum_{i=1}^N \xi_i \tilde{c}_h(u_h, \psi_i) = \sum_{i=1}^N \xi_i d_i \quad (3.12)$$

byl maximální za předpokladu, že  $\sum_{i=1}^N \xi_i \xi_j S_{ij} = 1$ . Úlohu řešíme způsobem popsaným v [6].

Dále hledáme "ortogonální" maximum, tedy  $\psi$  a  $\tilde{\psi}$  takové, aby:

$$\psi \cdot \tilde{\psi} = 0, \quad (3.13)$$

$$\|\tilde{\psi}\|_X = 1. \quad (3.14)$$

K tomu potřebujeme maximalizovat následující funkcionál

$$\Psi(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_N) = \tilde{c}_h(u_h, \psi) = \sum_{i=1}^N \tilde{\xi}_i \tilde{c}_h(u_h, \varphi_i) = \sum_{i=1}^N \tilde{\xi}_i d_i. \quad (3.15)$$

Jelikož hledáme maximum, vede úloha na úlohu hledání vázaného extrému pomocí Lagrangeových multiplikátorů se dvěma vazbami:

$$\tilde{\Psi} = \Psi(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_N) + \lambda \sum_{i=1}^N \tilde{\xi}_i \tilde{\xi}_j S_{ij} + \mu \sum_{i=1}^N \tilde{\xi}_i \xi_j S_{ij}, \quad (3.16)$$

$$0 = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{\xi}_i} = d_i + 2\lambda \tilde{\xi}_i S_{ii} + \lambda \sum_{i=1, i \neq j}^N \tilde{\xi}_j S_{ij} + \mu \sum_{i=1}^N \xi_j S_{ij}, \quad (3.17)$$

$$1 = \sum_{i=1}^N \tilde{\xi}_i \tilde{\xi}_j S_{ij}, \quad (3.18)$$

$$0 = \sum_{i=1}^N \tilde{\xi}_i \xi_j S_{ij}. \quad (3.19)$$

Označme  $\beta = (\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_N)$ . Rovnice (3.17) - (3.19) nám tvoří soustavu, kterou si přepíšeme maticově následujícím způsobem:

$$0 = d + 2\lambda \bar{S} \beta + \lambda \tilde{S} \beta + \mu S \alpha, \quad (3.20)$$

$$1 = \beta^T S \beta, \quad (3.21)$$

$$0 = \beta^T S \alpha, \quad (3.22)$$

kde  $\bar{S} = \{\bar{S}_{ij}\}_{i,j=1}^N$ ,  $\bar{S}_{ij} = 2S_{ij}\delta_{ij}$ , a  $\tilde{S} = \{\tilde{S}_{ij}\}_{i,j=1}^N$ ,  $\tilde{S}_{ij} = S_{ij} - \bar{S}_{ij}$ . Rovnice nadále upravujeme následujícím způsobem:

$$2\lambda \bar{S} \beta + \lambda \tilde{S} \beta = -(d + \mu S \alpha), \quad (3.23)$$

$$(2\lambda \bar{S} + \lambda \tilde{S}) \beta = -(d + \mu S \alpha), \quad (3.24)$$

$$(2\bar{S} + \tilde{S}) \beta = -\frac{d + \mu S \alpha}{\lambda}, \quad (3.25)$$

$$\beta = \mathbb{S}^{-1} \frac{-(d + \mu S \alpha)}{\lambda}, \quad (3.26)$$

kde  $\mathbb{S} = 2\bar{S} + \tilde{S}$ .

Z rovnice (3.21) dostáváme:

$$1 = \left( \mathbb{S}^{-1} \frac{d + \mu S \alpha}{\lambda} \right)^T \mathbb{S} \mathbb{S}^{-1} \frac{d + \mu S \alpha}{\lambda}, \quad (3.27)$$

$$\lambda^2 = (\mathbb{S}^{-1} (d + \mu S \alpha))^T \mathbb{S} \mathbb{S}^{-1} (d + \mu S \alpha). \quad (3.28)$$

$$\lambda = \sqrt{(\mathbb{S}^{-1} d + \mu S \alpha)^T \mathbb{S} (\mathbb{S}^{-1} d + \mu S \alpha)} \quad (3.29)$$

Úpravami rovnice (3.22) získáme:

$$0 = \left( \mathbb{S}^{-1} \frac{-(d + \mu S \alpha)}{\lambda} \right)^T S \alpha, \quad (3.30)$$

$$\mathbb{S}^{-1} \mu S \alpha S \alpha = -\mathbb{S}^{-1} d S \alpha, \quad (3.31)$$

$$\mu = -\frac{\alpha^T \mathbb{S} \mathbb{S}^{-1} d}{\alpha^T \mathbb{S} \mathbb{S}^{-1} S \alpha}. \quad (3.32)$$

Nyní již snadno najdeme hledané maximum  $\eta_{h,K}^\perp(u_h) = \sum_{i=1}^N \tilde{\xi}_i d_i$ . V programu pro výpočet používáme vztah (3.32), spočteme  $\bar{\beta} = \bar{S}^{-1}(d + \mu S \alpha)$ , následně dopočítáme  $\lambda = \sqrt{\bar{\beta}^T S \bar{\beta}}$  a  $\beta = -\frac{1}{\lambda} \bar{\beta}$ . Hodnoty gradientu  $\nabla \psi$ ,  $\nabla \psi^\perp$  pak získáme pomocí následujícího výpočtu:

$$\nabla \psi = \alpha \nabla \varphi, \quad (3.33)$$

$$\nabla \psi^\perp = \beta \nabla \varphi. \quad (3.34)$$

Hodnoty gradientů zprůměrujeme a získáme tak dvousložkové vektory  $\vec{g} = (g_1, g_2)$  a  $\vec{g}^\perp = (g_1^\perp, g_2^\perp)$ ,

$$\vec{g} = \frac{1}{\|\nabla \psi\|_{L^2(K)}} \int_K \nabla \psi \, dS, \quad (3.35)$$

$$\vec{g}^\perp = \frac{1}{\|\nabla \psi^\perp\|_{L^2(K)}} \int_K \nabla \psi^\perp \, dS, \quad (3.36)$$

Spočteme poměr

$$r = \frac{\eta_{h,K}^\perp}{\eta_{h,K}}. \quad (3.37)$$

Dále získáme hodnotu

$$\text{est} := \frac{1}{h_K} \left( \frac{\eta_{h,K}}{\frac{\omega + 10^{-i}}{2}} \right)^{1/(p+j)}, \quad (3.38)$$

kde  $\omega$  je tolerance pro výpočet řešení,  $i$  je  $i$ -tá iterace výpočtu,  $p$  je aktuální stupeň polynomiální aproximace na daném elementu a  $j$  značí změnu polynomiální aproximace v současné iteraci (může nabývat hodnot  $-1, 0, 1$  podle toho zda stupeň snižujeme, ponecháváme stejný nebo ho zvyšujeme). Spočteme

$$\text{est}^\perp := \text{est} \cdot r. \quad (3.39)$$

Nyní již máme všechny hodnoty nutné pro výpočet metrik:

$$h_K = \text{est} g_1^2 + \text{est}^\perp g_2^2, \quad (3.40)$$

$$h_K^\perp = (\text{est} - \text{est}^\perp) g_1 g_2, \quad (3.41)$$

$$\phi_K = \text{est} g_2^2 + \text{est}^\perp g_1^2, \quad (3.42)$$

Tímto postupem jsme získali potřebné parametry pro anizotropní adaptaci sítě.

### 3.4 Výpočet metriky v prostoru $X$ s normou

$$\|v\|_J^2 = |v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 + J_h^\sigma(v, v)$$

Výpočet je v tomto případě velmi podobný předchozímu případu. Pouze pracujeme s jinou normou. Dostáváme zde proto jinou matici tuhosti

$$D := \{D_{ij}\}_{i,j=1}^N, \text{ kde } D_{ij} = ((\psi_i, \psi_j))_J, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (3.43)$$

Hodnotu  $\eta_{h,K}$  získáme stejně jako v předchozím případě. Hodnotu  $\eta_{h,K}^\perp$  získáme pomocí upravených vzorců:

$$(3.44)$$

$$\mu = -\frac{\tilde{\mathbb{S}}^{-1} dD\alpha}{\tilde{\mathbb{S}}^{-1} D\alpha D\alpha} \quad (3.45)$$

$$\lambda = \sqrt{(\mathbb{S}^{-1} \tilde{\mathbb{S}}^{-1} dSS^{-1} \tilde{\mathbb{S}}^{-1})} \quad (3.46)$$

$$\beta = \frac{\mathbb{S}^{-1} \tilde{\mathbb{S}}^{-1}}{\lambda} \quad (3.47)$$

Z tohoto již snadno získáme  $\eta_{h,K}^\perp(u_h) = \sum_{i=1}^N \tilde{\xi}_i d_i$ . Dále je již výpočet stejný jako v předešlém případě.

### 3.5 Výpočet metriky založený na Hessově matici

Výpočet založený na Hessově matici navazuje na výše uvedené postupy. Z předchozího postupu si vezme poměr  $r$  a dále orientaci elementu. Pro každý element odvodíme Hessovu matici. Obdobně jako při výpočtu metrik v prostoru  $X$  získáme maximum  $\eta_{h,K}$  funkcionálu (3.12). Spočteme Hessián, spočteme jeho vlastní čísla  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  a vlastní vektory  $v_1$  a  $v_2$ . Pomocí nich získáme poměr  $r$  a orientaci elementu  $\vec{g}$ .

Nyní spočteme

$$\lambda = \max\left(\left|\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right|\right) \quad (3.48)$$

Snadným dosazením získáme:

$$\phi_K = \frac{\min\left(\left|\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right|\right)}{\lambda} \quad (3.49)$$

Nyní již jen dopočítáme metriky pomocí (3.40) - (3.42).

Tento přístup je užíváný pro polynomiální aproximaci prvního stupně, my jsme ho aplikovali i pro polynomiální aproximaci vyšších stupňů.



## 4. Algoritmy

Popišme si nyní podrobně algoritmy, které jsme používali. Algoritmus pro případ izotropní adaptace sítě lze nalézt v [6].

### 4.1 Algoritmus hlavního programu při použití anizotropní adaptace sítě

Algoritmus běhu celého programu může být popsán následujícím způsobem (v případě použití anizotropní adaptace sítě):

1. nechť  $\omega > 0$  je daná tolerance
2. nechť  $\mathcal{T}_h$  je daná síť a  $S_{hp}$  je prostor konečných prvků
3. pomocí iterační metody s pomocí předem daného zastavovacího kritéria získáme přibližné řešení
4. spočítáme  $\eta_{h,K}(\tilde{u}_h)$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$
5. spočítáme  $\eta_h(\tilde{u}_h)$ , pokud  $\eta_h(\tilde{u}_h) \leq \omega$ , zastavíme výpočet
6. spočteme metriky  $h_K, h_K^\perp, \phi_K$ , pomocí nich zkonstruujeme novou síť  $\mathcal{T}_h$
7. zpět na krok 3.

Já jsem upravovala především výpočty jednotlivých metrik. Do ostatních částí programu nebylo příliš zasahováno. Popišme si tedy nyní algoritmy pro výpočet jednotlivých metrik:

### 4.2 Algoritmus odvození metrik v prostoru $X$ s normou $\|v\|_X^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|v\|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2$

Algoritmus vychází ze vzorců uvedených v kapitole 3. Ukazuje nám, jak získat metriky na elementu  $K$ .

1. nechť  $K$  je daný element
2. odvodíme  $\eta_{h,K}$ :
  - (a) s pomocí báze funkcí získáme matice  $\mathbb{S}$  a  $\tilde{\mathbb{S}}^{-1}$
  - (b)  $\alpha = \tilde{\mathbb{S}}^{-1}d$
  - (c)  $\lambda = \sqrt{\alpha^T \mathbb{S} \alpha}$
  - (d)  $\alpha = \frac{\alpha}{\lambda}$
  - (e)  $\eta_{h,K} = \sum_{i=1}^N \xi_i d_i$
3. odvodíme  $\eta_{h,K}^\perp$

- (a) s pomocí bázových funkcí získáme matice  $\mathbb{S}$  a  $\tilde{\mathbb{S}}^{-1}$
  - (b)  $\mu = -\frac{\alpha^T \mathbb{S} \tilde{\mathbb{S}}^{-1} d}{\alpha^T \mathbb{S} \tilde{\mathbb{S}}^{-1} S \alpha}$
  - (c)  $\lambda = \sqrt{(\mathbb{S}^{-1} d + \mu S \alpha)^T S (\mathbb{S}^{-1} d + \mu S \alpha)}$
  - (d)  $\beta = \mathbb{S}^{-1} \frac{-(d + \mu S \alpha)}{\lambda}$
  - (e)  $\eta_{h,K}^\perp(u_h) = \sum_{i=1}^N \tilde{\xi}_i d_i$
4. spočteme hodnoty gradientů maximalizujících funkcí  $\nabla \psi$ ,  $\nabla \psi^\perp$  pomocí vzorců (3.33) - (3.34) a jejich průměry pomocí (3.35) - (3.36)
  5. odhady  $est$ ,  $est^\perp$  získáme pomocí (3.38) - (3.39)
  6. hodnotu ratio získáme jako  $ratio = \frac{\eta_{h,K}^\perp}{\eta_{h,K}}$
  7. dopočítáme metriky pomocí (3.40) - (3.42)

### 4.3 Algoritmus odvození metrik v prostoru $X$ s normou $\|v\|_J^2 = |v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 + J_h^\sigma(v, v)$

Algoritmus je podobný předešlému algoritmu, pouze pracujeme s jiným skalárním součinem

1. nechť  $K$  je daný element
2. odvodíme  $\eta_{h,K}$ :
  - (a) s pomocí bázových funkcí získáme matice  $\mathbb{S}$  a  $\tilde{\mathbb{S}}^{-1}$
  - (b)  $\alpha = \tilde{\mathbb{S}}^{-1} d$
  - (c)  $\lambda = \sqrt{\alpha^T \mathbb{S} \alpha}$
  - (d)  $\alpha = \frac{\alpha}{\lambda}$
  - (e)  $\eta_{h,K} = \sum_{i=1}^N \xi_i d_i$
3. odvodíme  $\eta_{h,K}^\perp$ 
  - (a) s pomocí bázových funkcí získáme matice  $\mathbb{S}$  a  $\tilde{\mathbb{S}}^{-1}$
  - (b)  $\mu = -\frac{\tilde{\mathbb{S}}^{-1} d D \alpha}{\tilde{\mathbb{S}}^{-1} D \alpha D \alpha}$
  - (c)  $\lambda = \sqrt{(\mathbb{S}^{-1} \tilde{\mathbb{S}}^{-1} d S \mathbb{S}^{-1} \tilde{\mathbb{S}}^{-1})}$
  - (d)  $\beta = \frac{\mathbb{S}^{-1} \tilde{\mathbb{S}}^{-1}}{\lambda}$
  - (e)  $\eta_{h,K}^\perp(u_h) = \sum_{i=1}^N \tilde{\xi}_i d_i$
4. spočteme hodnoty gradientů maximalizujících funkcí  $\nabla \psi$ ,  $\nabla \psi^\perp$  pomocí vzorců (3.33) - (3.34) a jejich průměry pomocí (3.35) - (3.36)
5. odhady  $est$ ,  $est^\perp$  získáme pomocí (3.38) - (3.39)
6. hodnotu ratio získáme jako  $ratio = \frac{\eta_{h,K}^\perp}{\eta_{h,K}}$
7. dopočítáme metriky pomocí (3.40) - (3.42)

## 4.4 Algoritmus odvození metrik pro metriky založené na Hessově matici

Připomeňme, že při hledání metrik pomocí Hessovy matice se snažíme nalézt uspořádanou trojici  $(\lambda_K^1, \lambda_K^2, \phi_K)$ . Předpokládejme, že  $\lambda_K^1 > \lambda_K^2$ . Algoritmus vychází z popisu v kapitole (3.5).

1. nechť  $K$  je daný element
2. spočítáme Hessián pro  $K$
3. odvodíme  $\eta_{h,K}$ :
  - (a) s pomocí bázových funkcí získáme matice  $\mathbb{S}$  a  $\tilde{\mathbb{S}}^{-1}$
  - (b)  $\alpha = \tilde{\mathbb{S}}^{-1}d$
  - (c)  $\lambda = \sqrt{\alpha^T \mathbb{S} \alpha}$
  - (d)  $\alpha = \frac{\alpha}{\lambda}$
  - (e)  $\eta_{h,K} = \sum_{i=1}^N \xi_i d_i$
4. spočteme vlastní čísla  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  a vlastní vektory  $v_1, v_2$  Hessiánu
5.  $\lambda = \max(|\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}|, |\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}|)$
6.  $\phi_K = \min(|\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}|, |\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}|) / \lambda$
7. získáme orientaci elementu pomocí vlastních vektorů
8. dopočítáme metriky pomocí (3.40) - (3.42)

# 5. Numerické experimenty

## 5.1 Použitý software

Pro výpočet jsem použila softwarové balíčky ADGFEM (viz [1]) a ANGENER (viz [4]). ANGENER (ANisotropic mesh adaptation GENERator) je balíček pro Fortran, pomocí kterého lze generovat triangulace. S použitím řešení získaného na staré síti generuje novou triangulaci pomocí anizotropní adaptace sítě. Pomocí ANGENERu můžeme taktéž vytvářet uniformní triangulace s předepsaným počtem elementů. Pokud používáme anizotropní adaptaci sítě, je třeba ANGENERu zadat Riemannovy metriky, pomocí nichž generuje novou triangulaci.

ADGFEM (Adaptive Discontinuous Galerkin Finite Element Method) je balíček sloužící pro řešení nelineárních problémů konvekce - difúze pomocí nespojitě Galerkinovy metody. Je vyvíjen ve Fortranu 90 na Karlově Univerzitě v Praze, Matematicko - fyzikální fakultě, Katedře numerické matematiky.

## 5.2 Způsob řešení

V předchozích kapitolách jsem ukázala tři různé přístupy pro anizotropní adaptaci sítě pro řešení stacionárních rovnic konvekce-difúze pomocí nespojitě Galerkinovy metody. Mým cílem bylo porovnat je pomocí numerických experimentů mezi sebou navzájem. Také ukázu jejich srovnání s přístupem pomocí izotropní adaptace sítě, který je podrobně popsán v [6].

Používáme výše uvedené algoritmy, pro algoritmus pomocí izotropní adaptace sítě používáme algoritmus uvedený v [6]. Algoritmus začínáme na síti s krokem  $h_0$  a  $P_1$  polynomiální aproximací. Počítáme  $e_h := \|u - \tilde{u}_h\|_X$ ,  $N_h(\tilde{u}_h)$  a  $\rho_h(\tilde{u}_h)$  s odpovídajícími experimentálními řády konvergence (experimental orders of convergence - EOC) vzhledem k počtu stupňů volnosti  $N_h$  definovanými následujícím způsobem:

$$\text{EOC} := \frac{\log e_{h_{l+1}} - \log e_{h_l}}{\log\left(\frac{1}{\sqrt{N_{h_{l+1}}}}\right) - \log\left(\frac{1}{\sqrt{N_{h_l}}}\right)}, \quad l = 1, 2, \dots \quad (5.1)$$

V některých případech nám EOC vyjde záporný. Stane se to v případě, kdy se sníží chyba a zároveň počet stupňů volnosti. Z toho je zřejmé, že záporný EOC nám nevádí.

Dále definujeme index efektivity:

$$i_{eff} := \frac{\eta_h(\tilde{u}_h)}{(\|u - \tilde{u}_h\|_X^2 + N_h(\tilde{u}_h^2))^{\frac{1}{2}}} = \frac{(\rho(\tilde{u}_h)^2 + N_h(\tilde{u}_h)^2)^{\frac{1}{2}}}{(\|u - \tilde{u}_h\|_X^2 + N_h(\tilde{u}_h^2))^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.2)$$

Poznamenejme, že index efektivity  $i_{eff}$ , který zde uvádíme, není standartním indexem efektivity, protože  $\rho(\tilde{u}_h)$  je aproximací  $R_h(\tilde{u}_h)$  a ne  $\|u - \tilde{u}_h\|_X$ . Z definice indexu je zřejmé, že pokud je člen  $N_h(\tilde{u}_h)$  oproti členům  $\rho_h(\tilde{u}_h)$  a  $\|u - \tilde{u}_h\|_X$  dominantní, potom je hodnota  $i_{eff}$  blízka jedné.

Výpočty jsme prováděli na čtyřech různých rovnicích. Nyní si jednotlivé příklady uvedeme, porovnáme různé přístupy pro výpočet metrik a zjistíme jejich

efektivitu pro různé problémy. Použité metody jsme si označily pro naše potřeby následujícími zkratkami:

- Výpočet založený na Hessově matici - HES
- Výpočet založený na hledání maxima v prostoru  $X$  s normou  $\|v\|_X^2 = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|v\|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2$  - SHX
- Výpočet založený na hledání maxima v prostoru  $X$  s normou  $\|v\|_J^2 = \|v\|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 + J_h^\sigma(v, v)$  - SHP
- Výpočet pomocí izotropní adaptace sítě - IZO

Ve výsledných tabulkách značí *lev* číslo adaptace,  $\#\mathcal{T}_h$  počet elementů sítě,  $\text{dof}_h$  počet stupňů volnosti a CPU(s) čas potřebný k výpočtu v sekundách.

### 5.3 Lineární rovnice kovekce-difúze se slabou hraniční vrstvou

Uvažujme následující rovnici:

$$-\varepsilon \Delta u - \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2} = g \text{ v } \Omega := (0, 1)^2, \quad (5.3)$$

kde  $\varepsilon > 0$  je konstantní koeficient difúze, v našem případě  $\varepsilon = 10^{-2}$ . Předepíšeme takovou Dirichletovu podmínku na hranici  $\partial\Omega$  a takový zdroj  $g$ , aby přesné řešení mělo tvar

$$u(x_1, x_2) = (c_1 + c_2(1 - x_1) + e^{-x_1/\varepsilon})(c_1 + c_2(1 - x_2) + e^{-x_2/\varepsilon}), \quad (5.4)$$

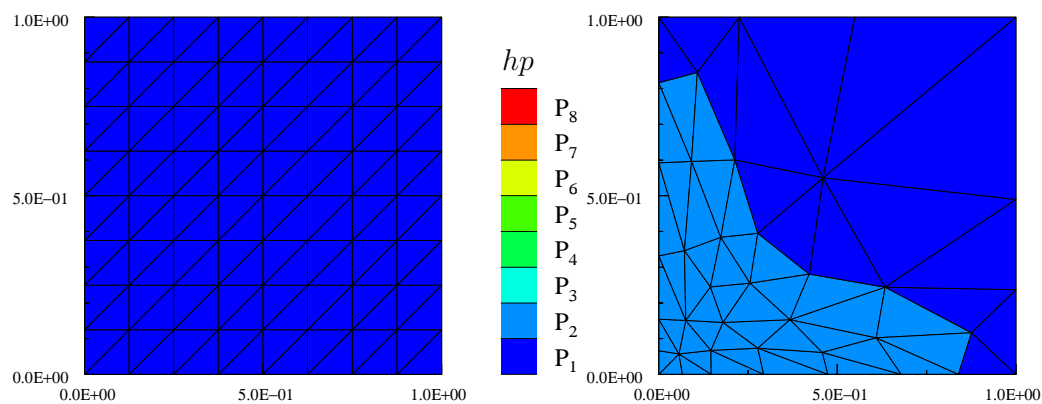
kde  $c_1 = -e^{-1/\varepsilon}$  a  $c_2 = -1 - c_1$ . Řešení obsahuje dvě hraniční vrstvy, první podél  $x_1 = 0$  a druhou podél  $x_2 = 0$ . Jejich šířka odpovídá námi zvolenému  $\varepsilon$ . Při výpočtu jsme nastavili toleranci  $\omega = 10^{-5}$ .

Spočtené hodnoty nám ukazuje Tabulka 5.1. Jak je vidět, požadované tolerance na chybu  $\|e_h\|_X$  jsme dosáhli nejrychleji pro variantu výpočtu pomocí Hessovy matice. V dalších dvou anizotropních případech požadované chyby dosáhneme také, ale za daleko delší čas. V případě izotropní adaptace sítě se nám požadované tolerance nepodařilo dosáhnout ani za čas sedmkrát delší než v případě výpočtu pomocí Hessovy matice. Pro tuto úlohu je tedy anizotropní adaptace výhodná.

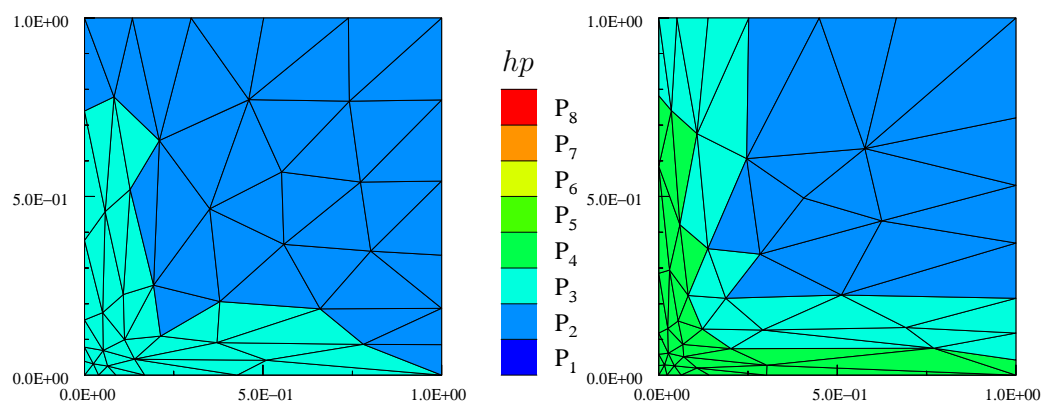
<b>HES</b>											
lev	$\#T_h$	dof <sub>h</sub>	$\ e_h\ _X$	EOC	$\ e_h\ _J$	EOC	$\eta$	EOC	$i_{\text{eff}}^p$	$i_{\text{eff}}^\eta$	CPU(s)
0	128	384	3.93E-01	–	1.12E+00	–	1.04E+00	–	2.65	1.29	0.5
1	57	297	2.68E-01	-2.98	5.65E-01	-5.36	3.07E-01	-9.52	1.14	1.03	0.9
2	70	568	9.10E-02	3.33	1.91E-01	3.34	6.64E-02	4.72	0.73	0.96	1.4
3	77	897	1.07E-02	9.36	2.18E-02	9.52	6.87E-03	9.93	0.64	0.94	2.2
4	89	1397	1.98E-03	7.63	3.85E-03	7.82	1.52E-03	6.82	0.77	0.96	3.4
5	102	2072	4.51E-04	7.50	8.29E-04	7.79	3.25E-04	7.82	0.72	0.94	5.6
6	139	3236	9.98E-05	6.76	1.90E-04	6.61	7.35E-05	6.67	0.74	0.95	9.8
<b>SHX</b>											
lev	$\#T_h$	dof <sub>h</sub>	$\ e_h\ _X$	EOC	$\ e_h\ _J$	EOC	$\eta$	EOC	$i_{\text{eff}}^p$	$i_{\text{eff}}^\eta$	CPU(s)
0	128	384	3.93E-01	–	1.12E+00	–	1.04E+00	–	2.65	1.29	0.6
1	75	387	2.82E-01	84.63	6.03E-01	158.53	3.92E-01	249.41	1.39	1.08	1.1
2	178	1540	8.62E-02	1.71	1.92E-01	1.66	1.14E-01	1.79	1.32	1.06	2.2
3	304	3886	1.31E-02	4.07	2.63E-02	4.30	1.56E-02	4.29	1.19	1.04	5.3
4	431	7000	1.19E-03	8.16	2.55E-03	7.92	1.25E-03	8.59	1.05	1.01	11.7
5	550	10944	3.29E-04	5.76	6.61E-04	6.05	3.23E-04	6.05	0.98	1.00	23.4
6	644	15305	7.95E-05	8.46	1.60E-04	8.47	7.73E-05	8.52	0.97	0.99	43.0
<b>SHP</b>											
lev	$\#T_h$	dof <sub>h</sub>	$\ e_h\ _X$	EOC	$\ e_h\ _J$	EOC	$\eta$	EOC	$i_{\text{eff}}^p$	$i_{\text{eff}}^\eta$	CPU(s)
0	128	384	3.93E-01	–	1.12E+00	–	1.04E+00	–	2.65	1.29	0.5
1	138	714	2.33E-01	1.68	4.99E-01	2.62	3.22E-01	3.78	1.38	1.08	1.3
2	280	2423	4.00E-02	2.89	8.52E-02	2.89	4.90E-02	3.08	1.22	1.04	3.2
3	604	7372	2.80E-03	4.78	5.85E-03	4.81	3.20E-03	4.90	1.14	1.03	9.3
4	708	11968	1.67E-04	11.65	3.51E-04	11.62	1.80E-04	11.89	1.08	1.02	21.7
5	711	14888	8.33E-05	6.35	1.73E-04	6.46	8.27E-05	7.12	0.99	1.00	40.4
6	845	20563	1.87E-05	9.26	3.90E-05	9.24	1.89E-05	9.14	1.01	1.00	66.5
<b>IZO</b>											
lev	$\#T_h$	dof <sub>h</sub>	$\ e_h\ _X$	EOC	$\ e_h\ _J$	EOC	$\eta$	EOC	$i_{\text{eff}}^p$	$i_{\text{eff}}^\eta$	CPU(s)
0	128	384	3.93E-01	–	1.12E+00	–	1.04E+00	–	2.65	1.29	0.6
1	128	768	3.91E-01	0.01	8.45E-01	0.82	6.09E-01	1.55	1.56	1.12	0.9
2	128	1272	2.52E-01	1.75	5.67E-01	1.58	3.41E-01	2.30	1.35	1.07	1.5
3	170	2252	1.15E-01	2.75	2.60E-01	2.72	1.47E-01	2.93	1.28	1.05	2.7
4	260	4126	3.50E-02	3.92	7.81E-02	3.98	4.25E-02	4.11	1.21	1.04	5.5
5	548	9780	6.72E-03	3.83	1.43E-02	3.94	7.17E-03	4.12	1.07	1.01	12.3
6	776	15944	7.22E-04	9.13	1.51E-03	9.18	7.42E-04	9.29	1.03	1.01	21.7
7	980	23726	5.05E-04	1.79	9.46E-04	2.36	4.68E-04	2.32	0.93	0.98	34.1
8	890	25320	5.05E-04	0.03	9.44E-04	0.06	4.67E-04	0.06	0.92	0.98	45.4
9	668	20116	5.05E-04	-0.00	9.44E-04	-0.00	4.67E-04	-0.00	0.92	0.98	54.9
10	920	29716	5.05E-04	0.00	9.44E-04	0.00	4.67E-04	0.00	0.92	0.98	69.8

Tabulka 5.1: Výsledky pro problém (5.3)

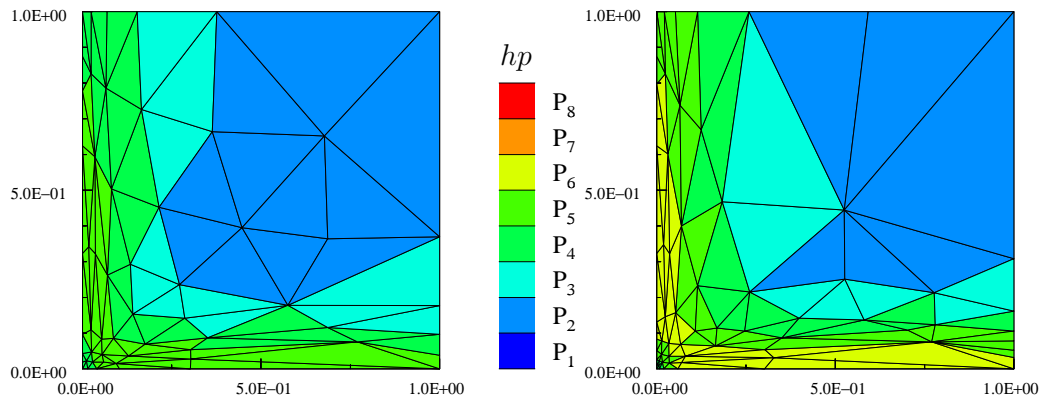
Podívejme se nyní na Obrázky 5.1 - 5.4, jak se nám zjemňovala síť v případě výpočtu pomocí Hessovy matice. Jak je vidět, síť se nejvíce zjemňovala podél hraniční vrstvy, naopak mimo ni se zhrubovala:



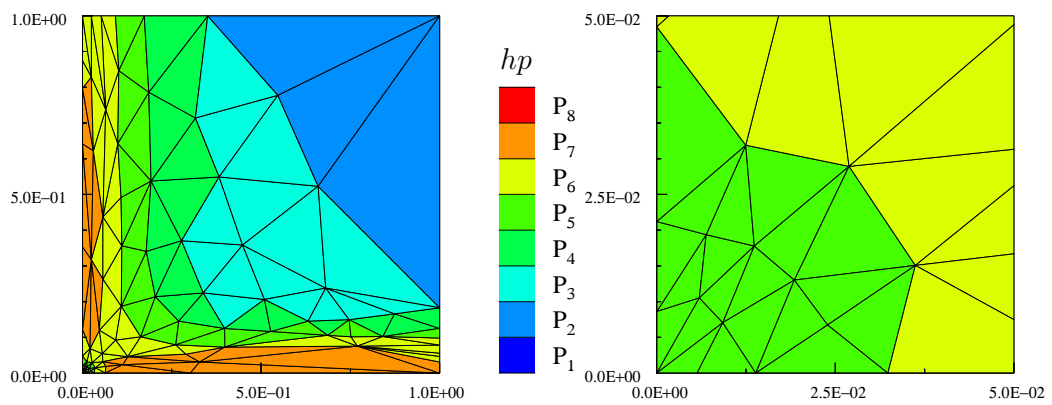
Obrázek 5.1: Původní síť a síť po 1. adaptaci pro problém (5.3)



Obrázek 5.2: Síť po 2. a 3. adaptaci pro problém (5.3)



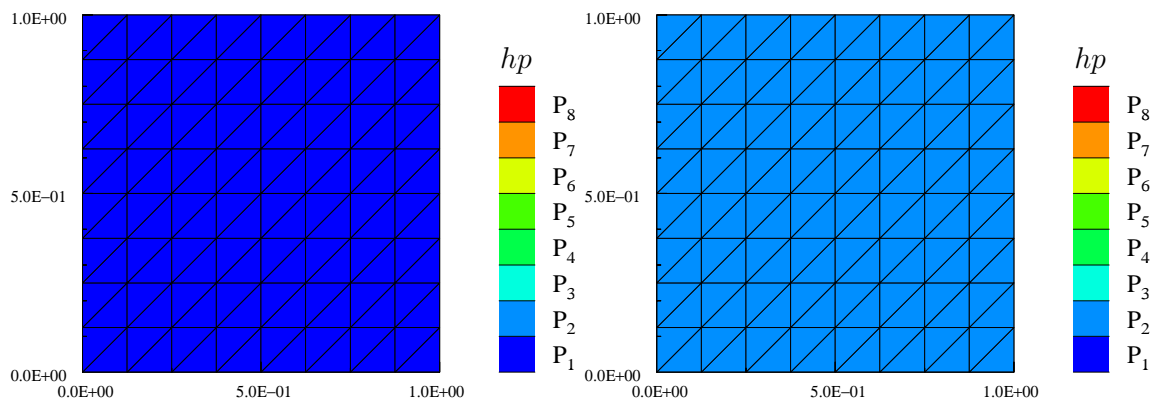
Obrázek 5.3: Síť po 4. a 5. adaptaci pro problém (5.3)



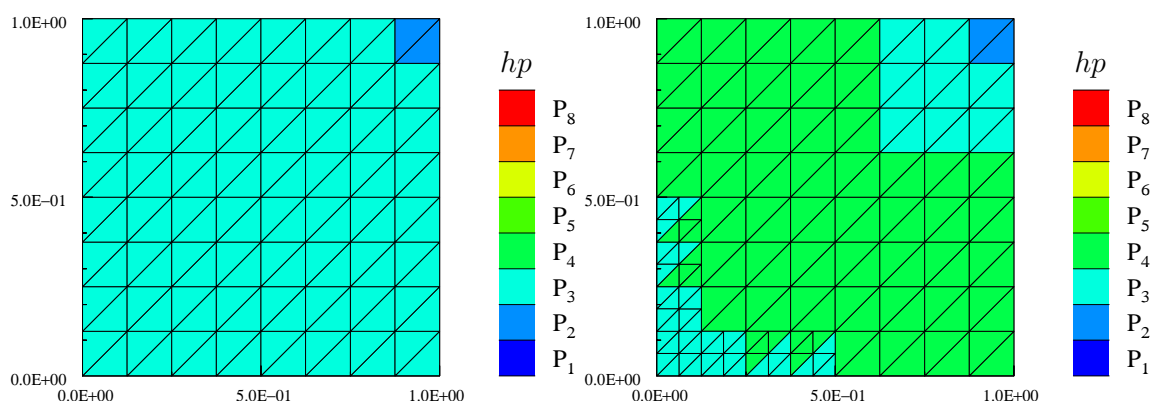
Obrázek 5.4: Finální síť a její detail pro problém (5.3)



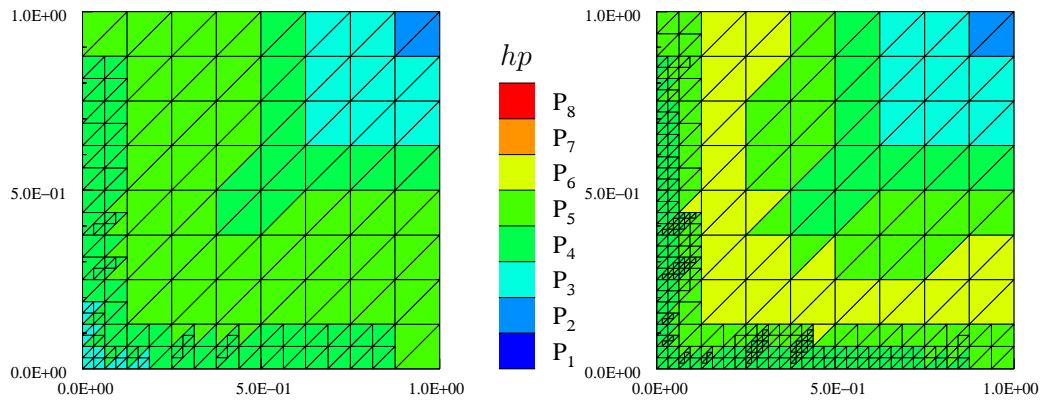
Jak je vidět, při anizotropní adaptaci se síť zjemňuje více na místech, kde je to potřeba, ostatní elementy mohou zůstat dostatečně velké. Na Obrázcích 5.5 - 5.8 můžeme pozorovat, jak adaptace probíhala v izotropním případě. Z obrázků je vidět, že nejprve se zvyšoval stupeň polynomiální aproximace a to na všech elementech (oproti metodě s anizotropní adaptací sítě), k dělení elementů dochází až při 3. adaptaci:



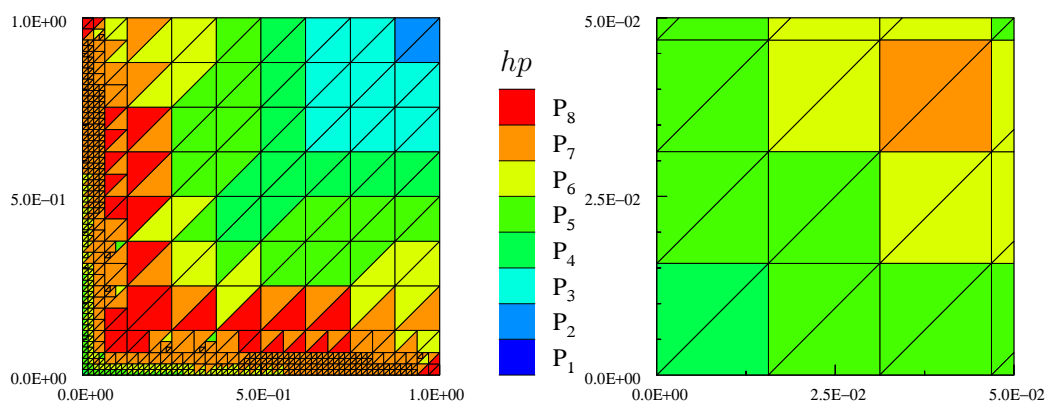
Obrázek 5.5: Původní síť a síť po 1. adaptaci pro problém (5.3)



Obrázek 5.6: Síť po 2. a 3. adaptaci pro problém (5.3)

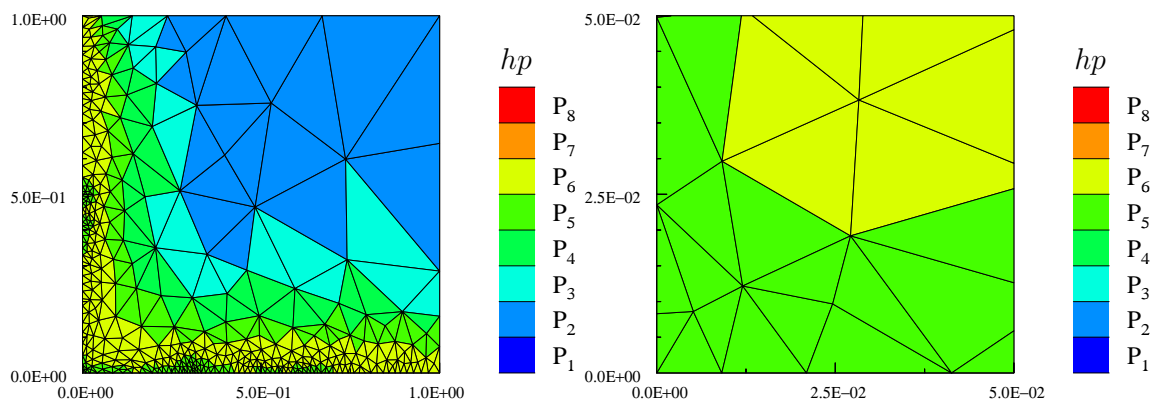


Obrázek 5.7: Síť po 4. a 5. adaptaci pro problém (5.3)

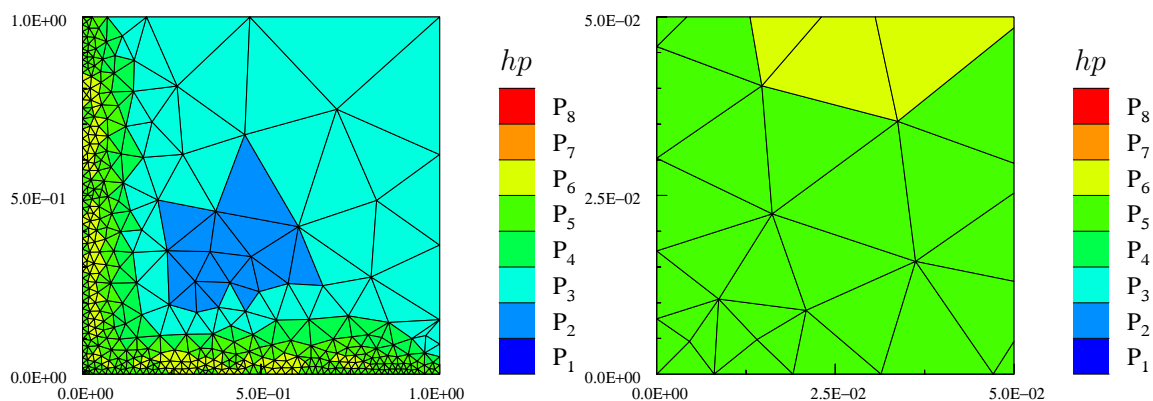


Obrázek 5.8: Finální síť a její detail pro problém (5.3)

Podívejme se ještě na finální síť pro výpočet metrik v prostoru  $X$ . I zde je vidět, že síť se zjemňovala podél hraniční vrstvy a mimo ni se naopak zhrubovala:



Obrázek 5.9: Finální síť pro výpočet v prostoru  $X$  s normou  $\|\cdot\|_X$  a její detail pro problém (5.3)



Obrázek 5.10: Finální síť pro výpočet v prostoru  $X$  s normou  $\|\cdot\|_J$  a její detail pro problém (5.3)

## 5.4 Nelineární rovnice kovekce-difúze se singularitou v rohu

Uvažujme následující rovnici:

$$-\nabla \cdot (K(u)\nabla u) - \frac{\partial u^2}{\partial x_1} - \frac{\partial u^2}{\partial x_2} = g \text{ v } \Omega := (0, 1)^2, \quad (5.5)$$

kde  $K(u)$  je nesymetrická matice daná následujícím způsobem:

$$K(u) = \varepsilon \begin{pmatrix} 2 + \arctan(u) & \frac{2 - \arctan(u)}{4} \\ 0 & \frac{4 + \arctan(u)}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Parametr  $\varepsilon > 0$  hraje roli množství difúze, pro naše potřeby pokládáme  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Na hranici  $\partial\Omega$  předepisujeme Dirichletovu podmínku a  $g$  volíme takové, že přesné řešení je

$$u(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\alpha}{2}} x_1 x_2 (1 - x_1)(1 - x_2), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (5.7)$$

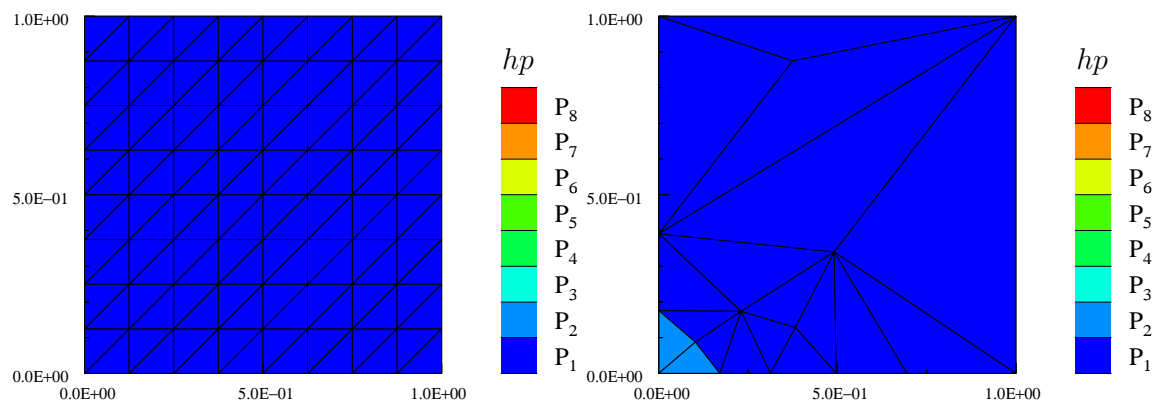
Pro náš výpočet pokládáme  $\alpha = -\frac{3}{2}$ . Tato volba  $\alpha$  vede k singularitě v  $x_1 = x_2 = 0$ . Ukažme si nyní výsledky pro problém (5.5) - (5.6) a předepsanou toleranci  $\omega = 10^{-4}$ .

Spočtené hodnoty nám ukazuje Tabulka 5.2. Pro tuto úlohu nám metoda konvergovala pouze v případě výpočtu metrik v prostoru  $X$  s normou  $\|\cdot\|_J$ . Tabulka nám ukazuje, kam až jsme se dostali pomocí ostatních metod.

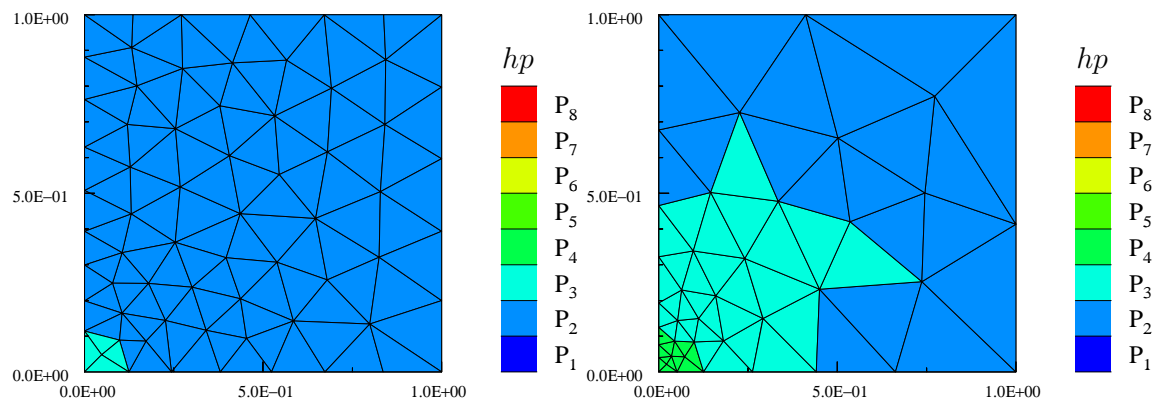
<b>HES</b>											
lev	$\#T_h$	dof <sub>h</sub>	$\ e_h\ _X$	EOC	$\ e_h\ _J$	EOC	$\eta$	EOC	$i_{\text{eff}}^p$	$i_{\text{eff}}^\eta$	CPU(s)
0	128	384	1.32E-02	–	1.41E-01	–	4.52E-02	–	3.43	1.05	0.9
1	12	36	3.01E-02	0.70	2.49E-01	0.48	1.01E-01	0.68	3.35	1.07	1.2
2	41	246	6.33E-03	1.62	6.49E-02	1.40	1.34E-02	2.10	2.11	1.02	1.7
3	37	366	4.10E-03	2.19	4.41E-02	1.94	4.88E-03	5.08	1.19	1.00	2.4
4	35	525	2.09E-03	3.74	2.64E-02	2.86	2.54E-03	3.62	1.22	1.00	3.7
5	53	1047	1.08E-03	1.90	1.35E-02	1.94	1.23E-03	2.10	1.14	1.00	7.0
<b>SHX</b>											
lev	$\#T_h$	dof <sub>h</sub>	$\ e_h\ _X$	EOC	$\ e_h\ _J$	EOC	$\eta$	EOC	$i_{\text{eff}}^p$	$i_{\text{eff}}^\eta$	CPU(s)
0	128	384	1.32E-02	–	1.41E-01	–	4.52E-02	–	3.43	1.05	0.9
1	7	21	1.04E-01	1.42	3.34E-01	0.59	1.36E-01	0.76	1.31	1.03	1.2
2	60	360	6.41E-03	1.96	7.46E-02	1.05	1.27E-02	1.67	1.98	1.01	2.0
3	63	574	3.93E-03	2.10	4.67E-02	2.01	3.98E-03	4.96	1.01	1.00	3.2
4	61	785	1.48E-03	6.24	1.57E-02	6.97	1.30E-03	7.15	0.88	1.00	5.1
5	36	582	1.60E-03	0.53	1.64E-02	0.28	1.90E-03	2.54	1.19	1.00	7.1
<b>SHP</b>											
lev	$\#T_h$	dof <sub>h</sub>	$\ e_h\ _X$	EOC	$\ e_h\ _J$	EOC	$\eta$	EOC	$i_{\text{eff}}^p$	$i_{\text{eff}}^\eta$	CPU(s)
0	128	384	1.32E-02	–	1.41E-01	–	4.52E-02	–	3.43	1.05	0.9
1	18	60	3.84E-02	1.15	1.98E-01	0.37	6.49E-02	0.39	1.69	1.03	1.2
2	105	646	4.96E-03	1.72	4.95E-02	1.17	4.94E-03	2.17	1.00	1.00	2.4
3	60	584	2.68E-03	-12.17	2.71E-02	-11.96	2.47E-03	-13.72	0.92	1.00	3.8
4	134	1594	1.31E-03	1.43	1.35E-02	1.38	1.02E-03	1.76	0.78	1.00	7.3
5	89	1399	9.24E-04	-5.36	9.88E-03	-4.80	8.86E-04	-2.16	0.96	1.00	11.0
<b>IZO</b>											
lev	$\#T_h$	dof <sub>h</sub>	$\ e_h\ _X$	EOC	$\ e_h\ _J$	EOC	$\eta$	EOC	$i_{\text{eff}}^p$	$i_{\text{eff}}^\eta$	CPU(s)
0	128	384	1.32E-02	–	1.41E-01	–	4.52E-02	–	3.43	1.05	0.9
1	128	768	5.98E-03	2.28	6.70E-02	2.14	1.26E-02	3.68	2.11	1.01	1.7
2	128	1280	5.50E-03	0.33	6.36E-02	0.21	6.25E-03	2.74	1.14	1.00	2.9
3	128	1600	4.29E-03	2.21	5.52E-02	1.27	4.32E-03	3.31	1.01	1.00	4.2
4	134	1822	2.97E-03	5.68	3.95E-02	5.13	3.06E-03	5.33	1.03	1.00	5.6
5	140	2011	2.09E-03	7.14	2.74E-02	7.41	2.02E-03	8.34	0.97	1.00	7.1
6	152	2321	1.48E-03	4.80	1.92E-02	4.93	1.39E-03	5.28	0.94	1.00	8.2
7	155	2533	1.74E-03	-3.70	2.27E-02	-3.78	1.81E-03	-6.08	1.04	1.00	9.3
8	155	2561	1.74E-03	0.25	2.27E-02	0.13	1.81E-03	0.00	1.04	1.00	10.1
9	158	2645	1.74E-03	0.03	2.27E-02	0.00	1.81E-03	0.00	1.04	1.00	10.8

Tabulka 5.2: Výsledky pro problém (5.5) - (5.6)

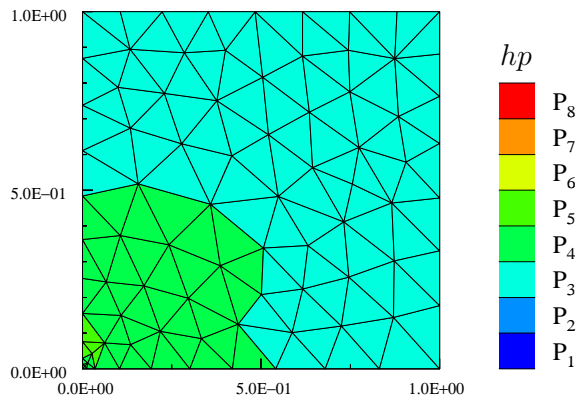
Obrázky 5.11 - 5.14 ukazují, jak se nám zjemňovala síť v případě výpočtu v prostoru  $X$  s normou  $\|\cdot\|_J$ . Můžeme zde pozorovat, jak se síť zjemňovala v okolí singularity, naopak mimo ni se zhrubovala. Navíc můžeme pozorovat, jak je zjemňování jemnější s každou další iterací, což odpovídá naší nastavené toleranci na velikost chyby na jednom elementu - s každou další iterací požadujeme větší přesnost.



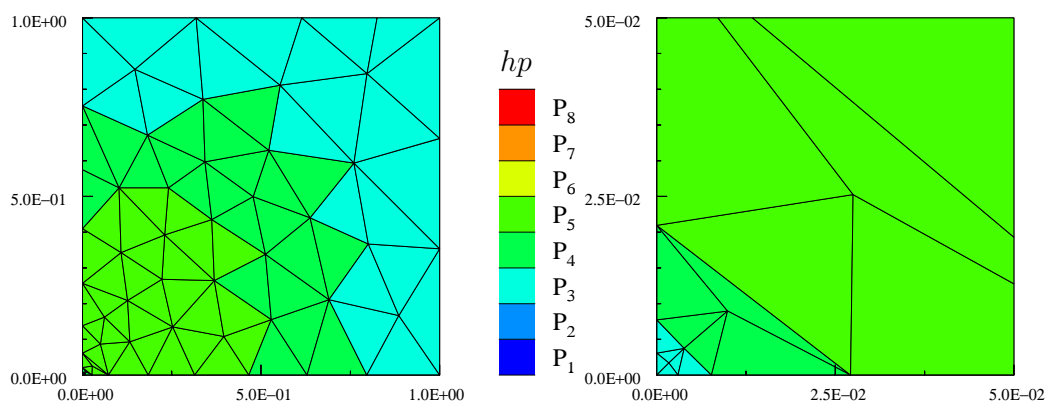
Obrázek 5.11: Původní síť a síť po 1. adaptaci pro problém (5.5) - (5.6)



Obrázek 5.12: Síť po 2. a 3. adaptaci pro problém (5.5) - (5.6)

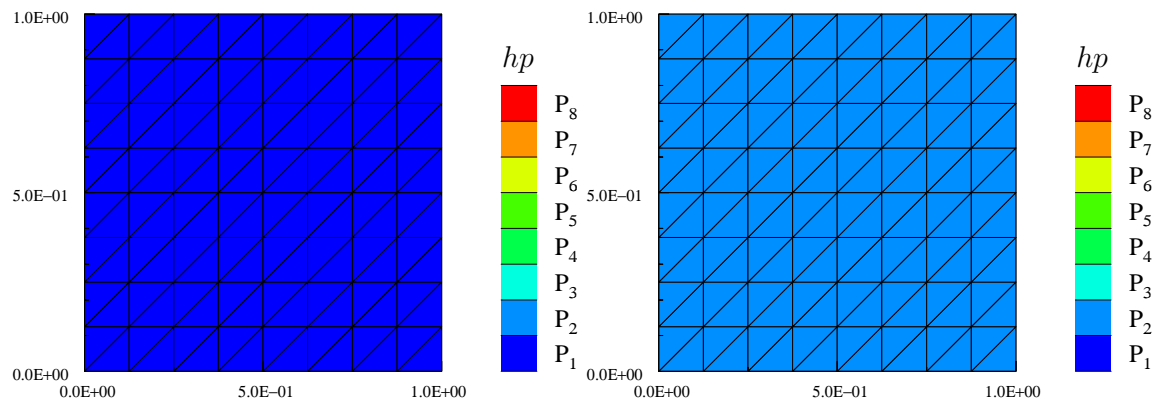


Obrázek 5.13: Síť po 4. adaptaci pro problém (5.5) - (5.6)

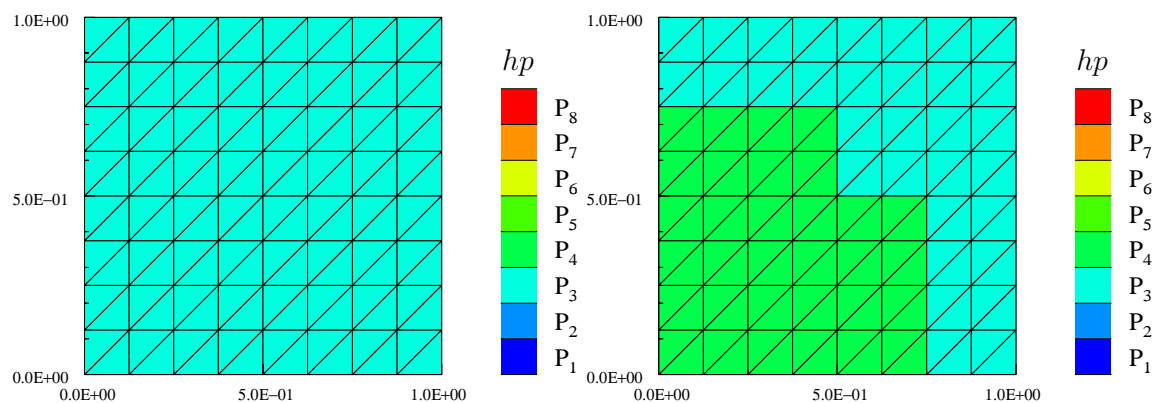


Obrázek 5.14: Finální síť a její detail pro problém (5.5) - (5.6)

Na Obrázkách 5.15 - 5.18 je vidět, jak adaptace probíhala v izotropním případě. Podobně jako pro izotropní adaptaci v předchozím příkladě se nejprve zvyšoval stupeň polynomiální aproximace, až v dalších iteracích pak docházelo k h-adaptaci v okolí singularity.

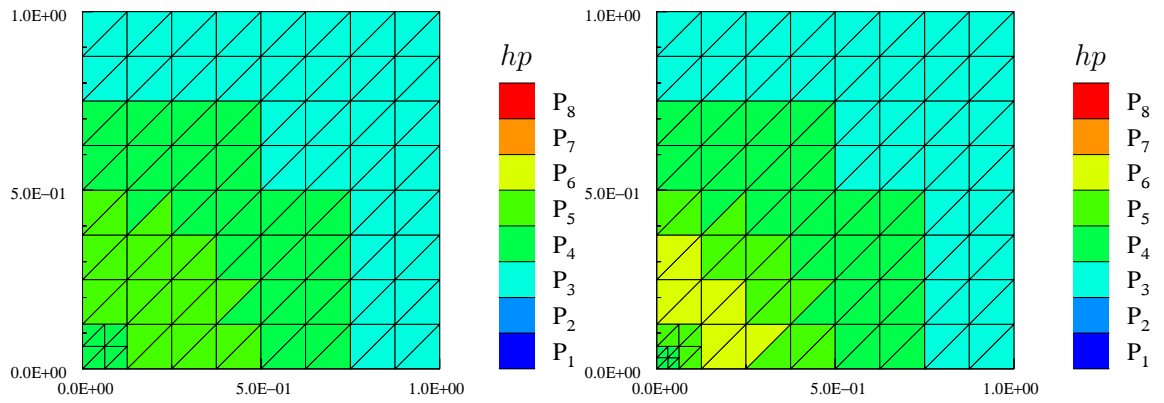


Obrázek 5.15: Původní síť a síť po 1. adaptaci pro problém (5.5) - (5.6)

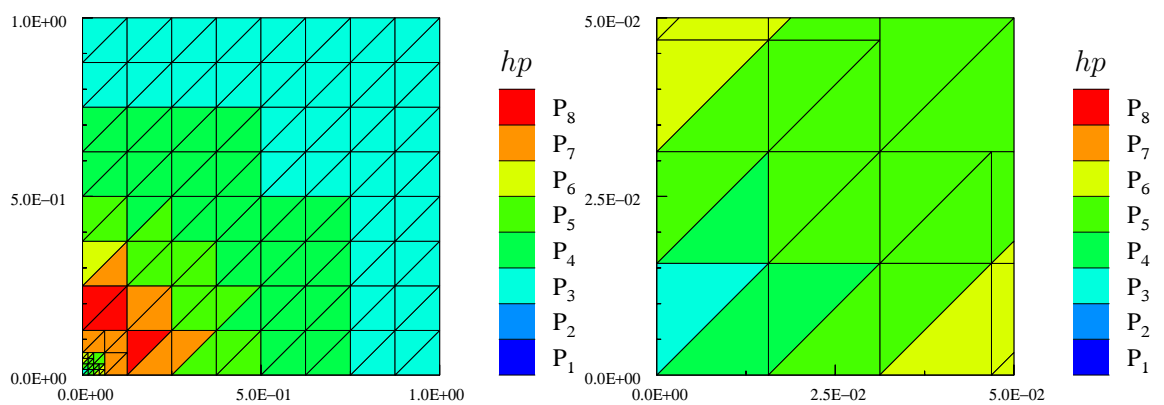


Obrázek 5.16: Síť po 2. a 3. adaptaci pro problém (5.5) - (5.6)



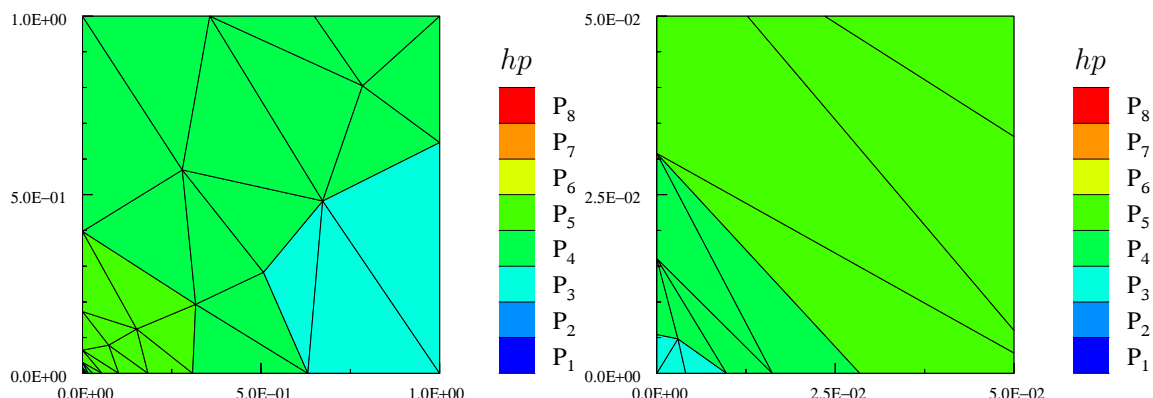


Obrázek 5.17: Síť po 4. a 5. adaptaci pro problém (5.5) - (5.6)

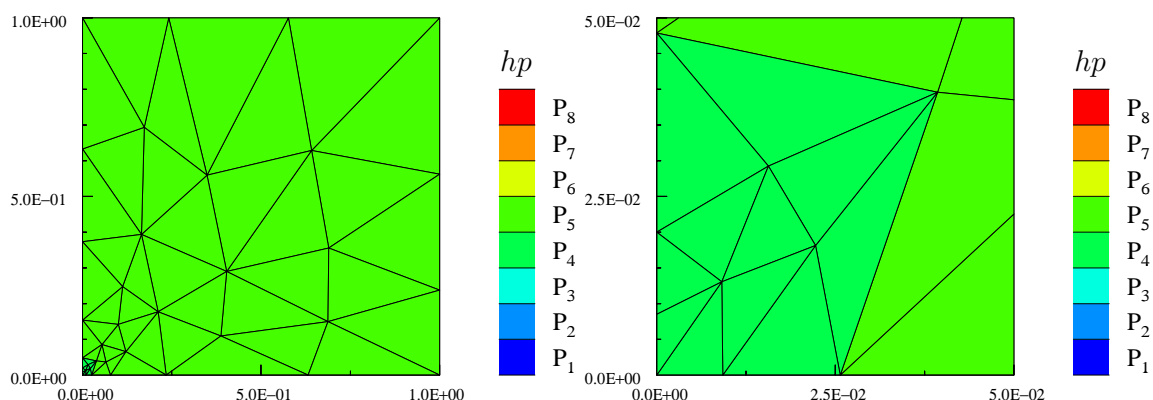


Obrázek 5.18: Finální síť a její detail pro problém (5.5) - (5.6)

Podívejme se ještě na finální síť v ostatních případech. Můžeme zde pozorovat, že síť se hodně zhrubila mimo singularitu, naopak v jejím okolí se zjemnila.



Obrázek 5.19: Finální síť pro výpočet v prostoru  $X$  s normou  $\|\cdot\|_X$  a její detail pro problém (5.5) - (5.6)



Obrázek 5.20: Finální síť pro výpočet založený na Hessově matici a její detail pro problém (5.5) - (5.6)

## 5.5 Kvazi-lineární eliptická rovnice s regulárním řešením

Uvažujme následující rovnici:

$$-\nabla \cdot (\mu(|\nabla u|)\nabla u) = f \text{ v } \Omega := (0, 1)^2, \quad (5.8)$$

kde

$$\mu(|\nabla u|) = 2 + \frac{1}{1 + |\nabla u|}. \quad (5.9)$$

Uvažujme homogenní Dirichletovu podmínku na hranici  $\partial\Omega$  a  $g$  zvolme takové, aby analytické řešení problému (5.8) - (5.9)

$$u(x_1, x_2) = x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2)(1 - 2x_2)e^{-20(2x_1-1)^2}. \quad (5.10)$$

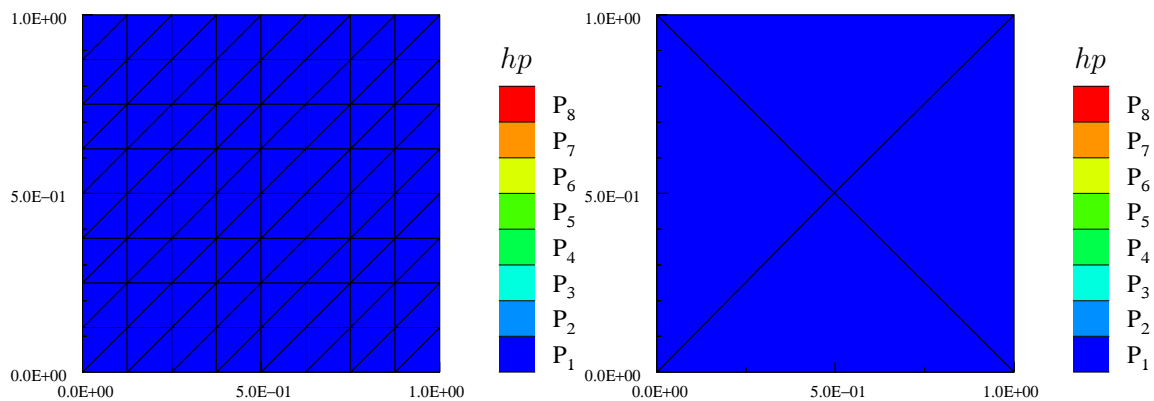
Ukažme si nyní výsledky pro problém (5.8) - (5.9) a předepsanou toleranci  $\omega = 10^{-5}$ . Spočtené hodnoty nám ukazuje Tabulka 5.3.

Jak je z výsledků vidět, na zadanou toleranci jsme se dostali nejrychleji v případě výpočtu metrik v prostoru  $X$  s normou  $\|\cdot\|_J$ . V tomto případě pracujeme s nejmenším počtem elementů. Ostatní tři přístupy jsou přibližně srovnatelné a dostat se na požadovanou toleranci zabere zhruba o čtvrtinu času více než v případě výpočtu metrik v prostoru  $X$  s normou  $\|\cdot\|_J$ .

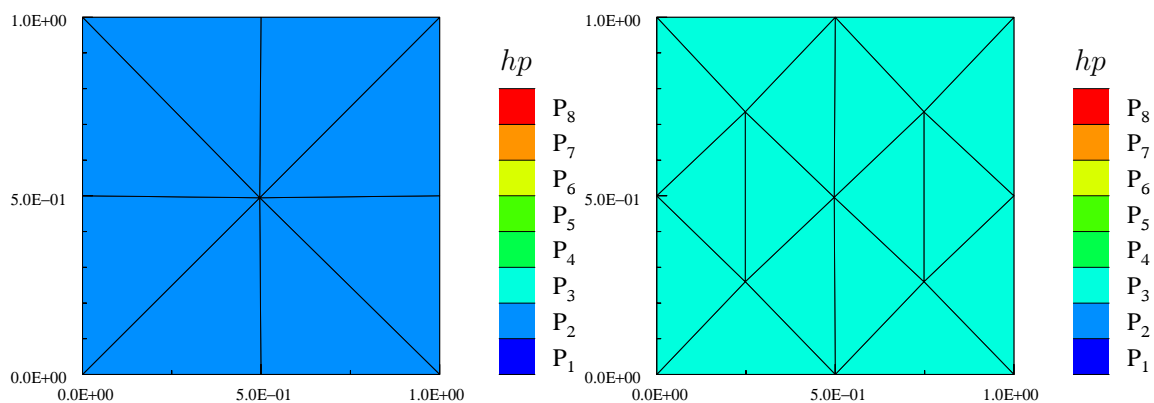
<b>HES</b>											
lev	$\#T_h$	dof <sub>h</sub>	$\ e_h\ _X$	EOC	$\ e_h\ _J$	EOC	$\eta$	EOC	$i_{\text{eff}}^p$	$i_{\text{eff}}^\eta$	CPU(s)
0	128	384	9.38E-03	-	9.31E-03	-	3.23E-02	-	3.44	2.54	0.7
1	4	12	2.67E-02	0.60	5.93E-02	1.07	1.91E-01	1.03	7.15	3.07	0.8
2	6	36	3.17E-02	-0.31	3.12E-02	1.17	7.88E-02	1.61	2.49	1.91	0.9
3	18	180	9.99E-03	1.43	8.18E-03	1.66	2.47E-02	1.44	2.47	2.02	1.0
4	48	720	2.91E-03	1.78	2.95E-03	1.47	6.74E-03	1.88	2.32	1.78	1.6
5	164	3444	3.70E-05	5.58	4.95E-05	5.22	8.68E-05	5.56	2.34	1.62	5.6
6	110	2933	3.02E-06	-31.19	4.32E-06	-30.35	6.54E-06	-32.17	2.17	1.49	10.2
7	39	1022	4.69E-05	5.20	6.57E-05	5.16	1.01E-04	5.19	2.15	1.49	11.7
8	38	1280	2.16E-05	6.88	2.77E-05	7.65	4.06E-05	8.08	1.88	1.40	13.8
9	22	909	3.84E-05	3.36	5.31E-05	3.79	6.17E-05	2.45	1.61	1.24	15.8
10	15	745	1.21E-04	11.51	1.37E-04	9.52	1.75E-04	10.46	1.45	1.22	17.5
<b>SHX</b>											
lev	$\#T_h$	dof <sub>h</sub>	$\ e_h\ _X$	EOC	$\ e_h\ _J$	EOC	$\eta$	EOC	$i_{\text{eff}}^p$	$i_{\text{eff}}^\eta$	CPU(s)
0	128	384	9.38E-03	-	9.31E-03	-	3.23E-02	-	3.44	2.54	0.6
1	6	18	3.22E-02	0.81	1.67E-02	0.38	5.67E-02	0.37	1.76	1.63	0.8
2	4	12	2.68E-02	-0.91	5.90E-02	6.24	1.93E-01	6.04	7.20	3.11	0.9
3	42	252	7.31E-03	0.85	5.91E-03	1.51	2.06E-02	1.47	2.82	2.28	1.0
4	123	1230	5.99E-04	3.16	8.69E-04	2.42	1.58E-03	3.24	2.65	1.71	2.4
5	184	2735	3.49E-05	7.11	4.87E-05	7.21	8.55E-05	7.31	2.45	1.64	5.8
6	134	2730	1.26E-05	-1113.54	1.83E-05	-1069.80	2.94E-05	-1166.80	2.33	1.56	9.8
7	75	1911	7.48E-06	-2.93	1.07E-05	-2.98	1.54E-05	-3.63	2.06	1.44	13.0
8	34	981	1.14E-04	8.17	1.55E-04	8.02	2.47E-04	8.32	2.17	1.51	14.4
9	35	1264	5.70E-05	5.46	7.08E-05	6.21	1.02E-04	6.99	1.78	1.36	16.5
10	26	1143	7.25E-05	4.77	9.89E-05	6.68	1.28E-04	4.61	1.77	1.32	19.2
<b>SHP</b>											
lev	$\#T_h$	dof <sub>h</sub>	$\ e_h\ _X$	EOC	$\ e_h\ _J$	EOC	$\eta$	EOC	$i_{\text{eff}}^p$	$i_{\text{eff}}^\eta$	CPU(s)
0	128	384	9.38E-03	-	9.31E-03	-	3.23E-02	-	3.44	2.54	0.7
1	4	12	2.67E-02	0.60	5.92E-02	1.07	1.91E-01	1.03	7.15	3.07	0.8
2	8	48	1.34E-02	1.00	9.84E-03	2.59	2.51E-02	2.93	1.88	1.62	0.9
3	16	160	4.82E-03	1.69	4.53E-03	1.29	1.21E-02	1.21	2.51	1.96	1.0
4	54	810	7.17E-04	2.35	8.51E-04	2.06	1.54E-03	2.54	2.15	1.58	1.7
5	92	1932	6.17E-05	5.64	8.16E-05	5.39	1.52E-04	5.33	2.46	1.69	4.0
6	104	2863	6.03E-06	11.82	7.90E-06	11.87	1.34E-05	12.34	2.22	1.56	8.3
7	59	1781	1.70E-05	4.37	2.21E-05	4.33	3.31E-05	3.80	1.94	1.43	11.2
8	51	1884	8.48E-06	24.91	1.13E-05	24.02	1.48E-05	28.74	1.74	1.32	15.0
9	40	1656	1.72E-05	10.97	2.34E-05	11.35	3.08E-05	11.37	1.79	1.33	18.7
10	31	1525	1.37E-05	-5.60	1.95E-05	-4.44	2.55E-05	-4.59	1.87	1.35	22.5
<b>IZO</b>											
lev	$\#T_h$	dof <sub>h</sub>	$\ e_h\ _X$	EOC	$\ e_h\ _J$	EOC	$\eta$	EOC	$i_{\text{eff}}^p$	$i_{\text{eff}}^\eta$	CPU(s)
0	128	384	9.38E-03	-	9.31E-03	-	3.23E-02	-	3.44	2.54	0.7
1	128	768	3.77E-03	2.63	3.84E-03	2.55	1.22E-02	2.82	3.22	2.37	1.1
2	128	1280	6.32E-04	6.99	8.07E-04	6.11	1.68E-03	7.74	2.66	1.82	2.0
3	128	1920	2.09E-04	5.45	2.13E-04	6.56	5.64E-04	5.40	2.69	2.02	3.2
4	128	2628	3.17E-05	12.03	4.50E-05	9.91	7.44E-05	12.90	2.35	1.58	5.1
5	128	3272	7.15E-06	13.58	8.03E-06	15.73	1.62E-05	13.93	2.26	1.68	7.0
6	128	3656	1.45E-06	28.86	1.99E-06	25.16	3.13E-06	29.63	2.17	1.51	9.7

Tabulka 5.3: Výsledky pro problém (5.8) - (5.9)

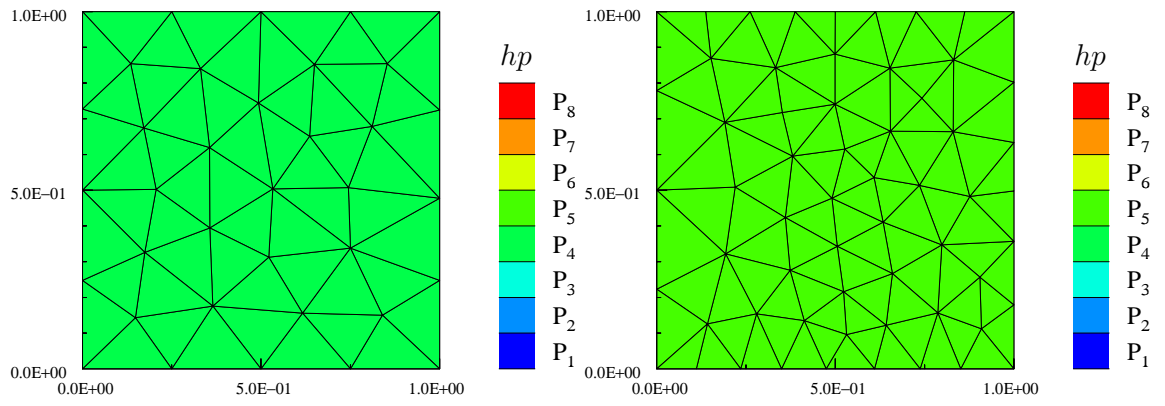
Na Obrázcích 5.21 - 5.24 můžeme pozorovat, jak se nám zjemňovala síť v případě výpočtu v prostoru  $X$  s normou  $\|\cdot\|_J$ :



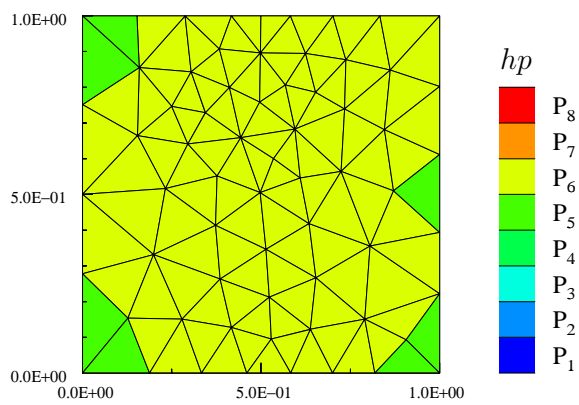
Obrázek 5.21: Původní síť a síť po 1. adaptaci pro problém (5.8) - (5.9)



Obrázek 5.22: Síť po 2. a 3. adaptaci pro problém (5.8) - (5.9)

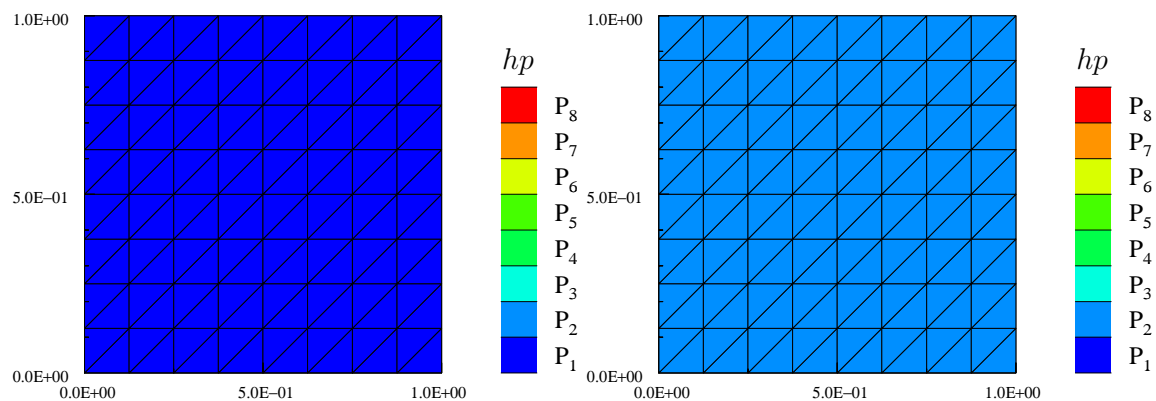


Obrázek 5.23: Síť po 4. a 5. adaptaci pro problém (5.8) - (5.9)

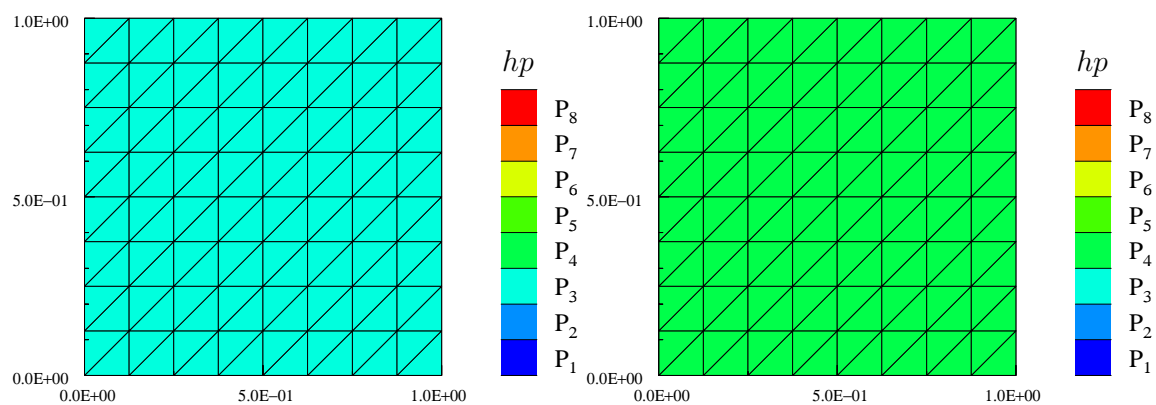


Obrázek 5.24: Finální síť pro problém (5.8) - (5.9)

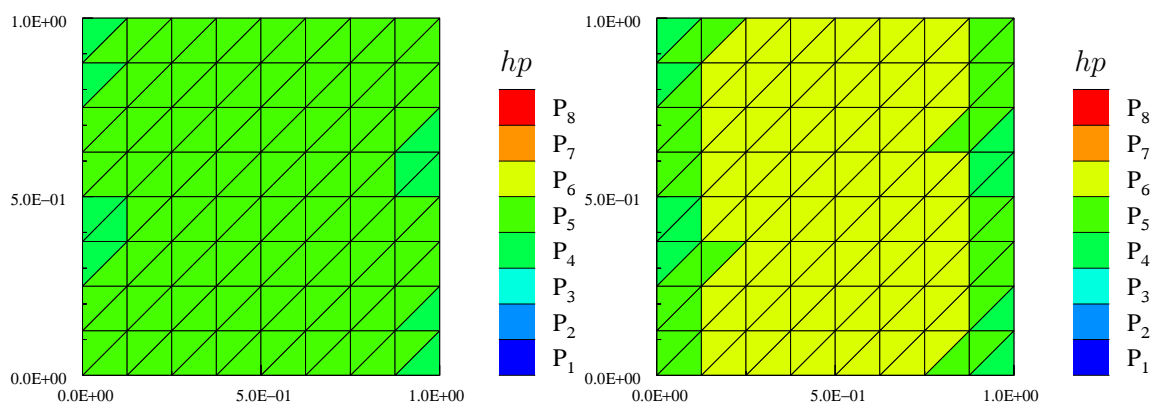
Pro porovnání můžeme na Obrázcích 5.25 - 5.27 pozorovat, jak adaptace probíhala v izotropním případě:



Obrázek 5.25: Původní síť a síť po 1. adaptaci pro problém (5.8) - (5.9)

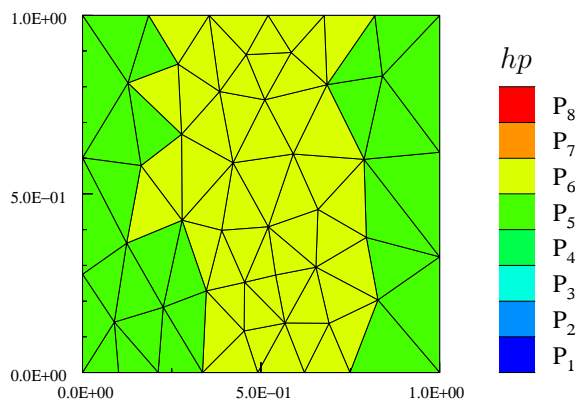


Obrázek 5.26: Síť po 2. a 3. adaptaci pro problém (5.8) - (5.9)

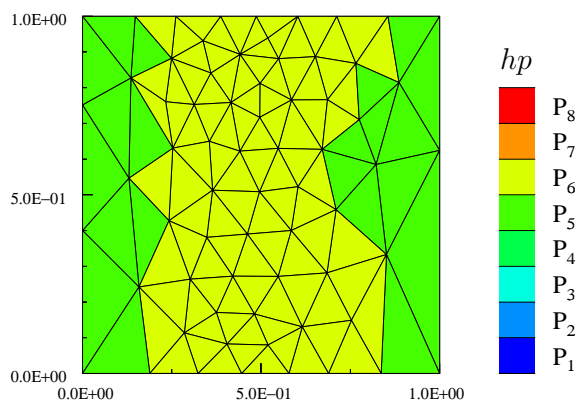


Obrázek 5.27: Síť po 4. adaptaci a finální síť pro problém (5.8) - (5.9)

Podívejme se ještě na finální síť v ostatních případech:



Obrázek 5.28: Finální síť pro výpočet v prostoru  $X$  s normou  $\|\cdot\|_X$  pro problém (5.8) - (5.9)



Obrázek 5.29: Finální síť pro výpočet založený na Hessově matici pro problém (5.8) - (5.9)



## 5.6 Kvazi-lineární eliptická rovnice se singularitou v rohu

Uvažujme následující kvazi-eliptickou lineární rovnici v oblasti ve tvaru L

$$-\nabla \cdot (\mu(|\nabla u|)\nabla u) = f \text{ v } \Omega := (-1, 1)^2 \setminus [0, 1] \times (-1, 0), \quad (5.11)$$

kde

$$\mu(|\nabla u|) = 1 + e^{-|\nabla u|^2}, \quad (5.12)$$

s Dirichletovou okrajovou podmínkou na  $\partial\Omega$  a  $g$  takovým, že analytické řešení problému (5.11) - (5.12) je dáno pomocí (v polárních souřadnicích)

$$u(r, \varphi) = r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2\varphi}{3}\right). \quad (5.13)$$

Ukažme si výsledky pro problém (5.11) - (5.12) a předepsanou toleranci  $\omega = 10^{-4}$ . Spočtené hodnoty nám ukazují Tabulky 5.4 a 5.5.

Jak je z výsledků vidět, nejúspěšnější byl výpočet s výpočtem metrik v prostoru  $X$  s normou  $\|\cdot\|_J$ . S ostatními přístupy pro anizotropní adaptaci se dostaneme k řádu  $10^{-4}$ , ale trvá to déle. Izotropní adaptace sítě nám k získání dostatečné přesnosti nevede.

<b>HES</b>											
lev	$\#T_h$	dof <sub>h</sub>	$\ e_h\ _X$	EOC	$\ e_h\ _J$	EOC	$\eta$	EOC	$i_{\text{eff}}^\rho$	$i_{\text{eff}}^\eta$	CPU(s)
0	150	450	1.29E-01	-	2.53E-02	-	2.01E-01	-	1.55	1.54	1.0
1	10	30	4.04E-01	0.84	9.49E-02	0.98	1.08E+00	1.24	2.68	2.62	1.2
2	118	708	5.25E-02	1.29	1.55E-02	1.14	6.88E-02	1.74	1.31	1.29	2.6
3	124	1100	2.20E-02	3.95	6.05E-03	4.28	2.18E-02	5.22	0.99	0.99	5.1
4	274	3310	1.04E-02	1.36	2.97E-03	1.29	7.17E-03	2.02	0.69	0.72	12.6
5	238	4079	5.01E-03	6.99	1.29E-03	8.02	2.64E-03	9.56	0.53	0.57	23.0
6	233	4617	3.53E-03	5.65	8.80E-04	6.13	1.90E-03	5.29	0.54	0.58	34.9
7	164	3565	3.03E-03	-1.17	7.84E-04	-0.89	1.91E-03	0.01	0.63	0.66	45.5
8	151	3702	2.56E-03	8.91	6.10E-04	13.26	1.75E-03	4.38	0.69	0.71	55.8
9	109	2667	2.01E-03	-1.48	4.67E-04	-1.62	1.39E-03	-1.42	0.69	0.71	63.4
10	122	3139	1.77E-03	1.51	4.10E-04	1.60	1.19E-03	1.93	0.67	0.69	72.3
11	119	3289	1.32E-03	12.34	3.31E-04	9.00	9.37E-04	9.96	0.71	0.73	82.8
12	111	3062	1.18E-03	-3.17	3.05E-04	-2.28	8.25E-04	-3.57	0.70	0.72	92.9
13	127	3484	1.18E-03	0.05	2.96E-04	0.45	8.59E-04	-0.63	0.73	0.75	106.1
14	135	3668	8.91E-04	10.93	2.17E-04	12.30	1.23E-03	-14.09	1.38	1.36	119.5
15	258	7301	1.40E-03	-1.32	3.74E-04	-1.58	3.00E-03	-2.59	2.14	2.09	144.7
16	403	11773	3.18E-04	6.21	8.35E-05	6.27	2.07E-03	1.55	6.52	6.32	190.6
17	476	14342	2.80E-04	1.30	7.36E-05	1.27	2.16E-03	-0.40	7.71	7.46	246.2
18	518	14835	2.61E-04	4.22	7.28E-05	0.67	2.28E-03	-3.47	8.74	8.42	299.8
19	562	15599	2.56E-04	0.72	7.22E-05	0.30	3.01E-03	-11.25	11.74	11.30	359.5
20	668	17547	2.53E-04	0.23	7.18E-05	0.11	3.56E-03	-2.86	14.08	13.55	426.9
21	752	19428	2.52E-04	0.06	7.16E-05	0.04	2.59E-03	6.28	10.27	9.88	495.7
22	820	20887	2.78E-04	-2.71	7.62E-05	-1.75	3.00E-03	-4.11	10.80	10.42	571.7
23	970	24742	3.02E-04	-0.98	8.22E-05	-0.89	5.79E-03	-7.78	19.21	18.53	657.1
24	1128	28041	4.02E-04	-4.60	1.21E-04	-6.18	3.77E-03	6.90	9.37	8.98	755.1
25	1319	33513	2.54E-04	5.14	7.20E-05	5.81	3.87E-03	-0.30	15.22	14.65	878.7
<b>SHX</b>											
lev	$\#T_h$	dof <sub>h</sub>	$\ e_h\ _X$	EOC	$\ e_h\ _J$	EOC	$\eta$	EOC	$i_{\text{eff}}^\rho$	$i_{\text{eff}}^\eta$	CPU(s)
0	150	450	1.29E-01	-	2.53E-02	-	2.01E-01	-	1.55	1.54	1.0
1	7	21	4.26E-01	0.78	9.25E-02	0.85	9.14E-01	0.99	2.15	2.11	1.3
2	123	738	4.64E-02	1.25	1.24E-02	1.13	5.79E-02	1.55	1.25	1.23	2.9
3	69	574	2.72E-02	-4.27	7.83E-03	-3.69	2.78E-02	-5.83	1.03	1.02	4.4
4	206	2415	1.70E-02	0.65	4.70E-03	0.71	1.25E-02	1.12	0.74	0.76	10.3
5	148	2659	6.66E-03	19.39	1.64E-03	21.79	3.59E-03	25.84	0.54	0.58	17.3
6	141	3039	7.95E-03	-2.65	1.94E-03	-2.52	4.34E-03	-2.83	0.55	0.58	25.8
7	82	2016	4.77E-03	-2.49	1.12E-03	-2.68	2.12E-03	-3.48	0.45	0.49	31.4
8	71	1959	4.72E-03	-0.85	1.14E-03	1.33	2.64E-03	15.04	0.56	0.59	37.1
9	60	1698	3.65E-03	-3.60	9.25E-04	-2.95	2.06E-03	-3.44	0.57	0.60	42.2
10	72	2287	3.14E-03	1.00	7.25E-04	1.64	1.82E-03	0.86	0.58	0.61	49.7
11	64	2150	2.58E-03	-6.43	6.00E-04	-6.12	1.44E-03	-7.50	0.56	0.59	57.6
12	57	1963	3.28E-03	5.28	7.54E-04	5.01	2.05E-03	7.79	0.63	0.65	65.4
13	67	2336	2.59E-03	2.69	6.09E-04	2.45	1.76E-03	1.80	0.68	0.70	75.2
14	123	4804	3.02E-03	-0.43	7.07E-04	-0.41	1.80E-03	-0.06	0.59	0.62	96.9
15	108	3791	1.10E-03	-8.57	2.56E-04	-8.57	7.57E-04	-7.31	0.69	0.71	113.4
16	111	4138	7.20E-04	9.60	1.80E-04	8.02	5.76E-04	6.22	0.80	0.81	133.5
17	82	3032	8.62E-04	1.16	2.16E-04	1.17	7.52E-04	1.71	0.87	0.88	147.9
18	67	2502	1.04E-03	1.99	2.55E-04	1.73	7.29E-04	-0.32	0.70	0.72	159.0
19	87	3483	6.80E-04	2.59	1.90E-04	1.77	6.16E-04	1.02	0.91	0.91	175.5
20	85	3101	6.50E-04	-0.78	1.74E-04	-1.52	5.93E-04	-0.67	0.91	0.92	189.6
21	107	3995	7.55E-04	-1.18	2.06E-04	-1.30	5.51E-04	0.57	0.73	0.75	207.0
22	117	4625	6.07E-04	2.96	1.67E-04	2.80	5.01E-04	1.31	0.82	0.84	228.4
23	102	3892	5.62E-04	-0.89	1.59E-04	-0.61	5.65E-04	1.40	1.00	1.00	246.4
24	78	2877	6.13E-04	0.57	1.64E-04	0.22	4.74E-04	-1.15	0.77	0.79	259.3
25	81	3036	7.76E-04	-8.75	2.07E-04	-8.53	5.81E-04	-7.49	0.75	0.77	272.6

Tabulka 5.4: Výsledky pro problém (5.11) - (5.12)

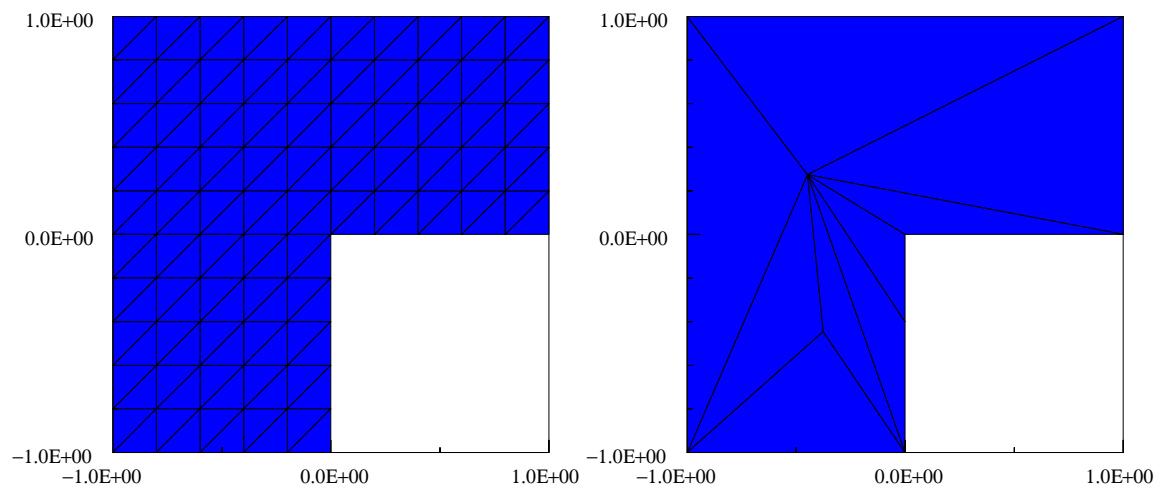
<b>SHP</b>											
lev	$\#T_h$	dof <sub>h</sub>	$\ e_h\ _X$	EOC	$\ e_h\ _J$	EOC	$\eta$	EOC	$i_{\text{eff}}^\rho$	$i_{\text{eff}}^\eta$	CPU(s)
0	150	450	1.29E-01	-	2.53E-02	-	2.01E-01	-	1.55	1.54	1.0
1	9	27	4.30E-01	0.85	9.60E-02	0.95	9.98E-01	1.14	2.32	2.28	1.2
2	176	1056	4.07E-02	1.29	1.08E-02	1.19	4.94E-02	1.64	1.21	1.20	3.5
3	196	1752	1.59E-02	3.70	4.58E-03	3.39	1.57E-02	4.52	0.99	0.99	7.8
4	340	3995	6.46E-03	2.19	1.80E-03	2.27	4.49E-03	3.04	0.70	0.72	17.1
5	297	4657	3.27E-03	8.87	8.14E-04	10.33	1.83E-03	11.74	0.56	0.59	28.6
6	232	4160	2.06E-03	-8.16	5.63E-04	-6.49	1.40E-03	-4.66	0.68	0.71	38.6
7	173	3592	1.61E-03	-3.36	3.78E-04	-5.43	1.12E-03	-3.08	0.69	0.71	48.4
8	160	3629	9.71E-04	113.33	2.66E-04	78.00	7.21E-04	98.33	0.74	0.76	58.7
9	139	3449	8.58E-04	-4.87	2.06E-04	-9.98	6.13E-04	-6.38	0.71	0.73	68.5
10	118	2952	7.24E-04	-2.19	1.76E-04	-2.06	5.29E-04	-1.90	0.73	0.75	77.1
11	132	3553	5.28E-04	3.40	1.43E-04	2.25	6.91E-04	-2.89	1.31	1.29	87.6
12	138	3786	6.06E-04	-4.28	1.62E-04	-3.97	4.39E-04	14.22	0.72	0.75	99.8
13	176	5038	3.44E-04	3.95	9.42E-05	3.79	4.62E-04	-0.36	1.34	1.32	116.1
14	201	5913	3.10E-04	1.33	8.42E-05	1.40	6.48E-04	-4.22	2.09	2.04	137.1
15	210	6217	2.76E-04	4.59	7.42E-05	5.14	9.06E-04	-13.62	3.28	3.18	161.0
16	221	6520	2.52E-04	3.76	6.65E-05	4.53	1.05E-03	-6.08	4.15	4.02	185.0
17	228	6715	2.44E-04	2.34	6.40E-05	2.55	1.77E-03	-34.90	7.26	7.03	211.7
18	253	7303	3.13E-04	-5.96	7.87E-05	-4.92	2.44E-03	-7.64	7.80	7.56	240.6
19	284	8115	3.93E-04	-4.32	9.48E-05	-3.56	2.22E-03	1.81	5.65	5.50	272.6
20	299	8203	7.11E-04	-109.53	1.75E-04	-113.67	1.55E-03	84.67	2.18	2.13	301.9
21	394	10594	6.03E-04	1.28	1.52E-04	1.09	1.74E-03	-0.91	2.88	2.81	338.8
22	416	11523	2.28E-04	23.13	6.08E-05	21.76	3.37E-03	-15.75	14.82	14.32	381.0
23	461	12564	2.27E-04	0.09	6.05E-05	0.09	1.51E-03	18.60	6.66	6.44	426.7
24	491	13147	2.28E-04	-0.20	6.07E-05	-0.09	2.84E-03	-27.29	12.49	12.07	472.5
25	534	14406	2.26E-04	0.14	6.04E-05	0.12	3.82E-03	-6.45	16.88	16.32	523.9

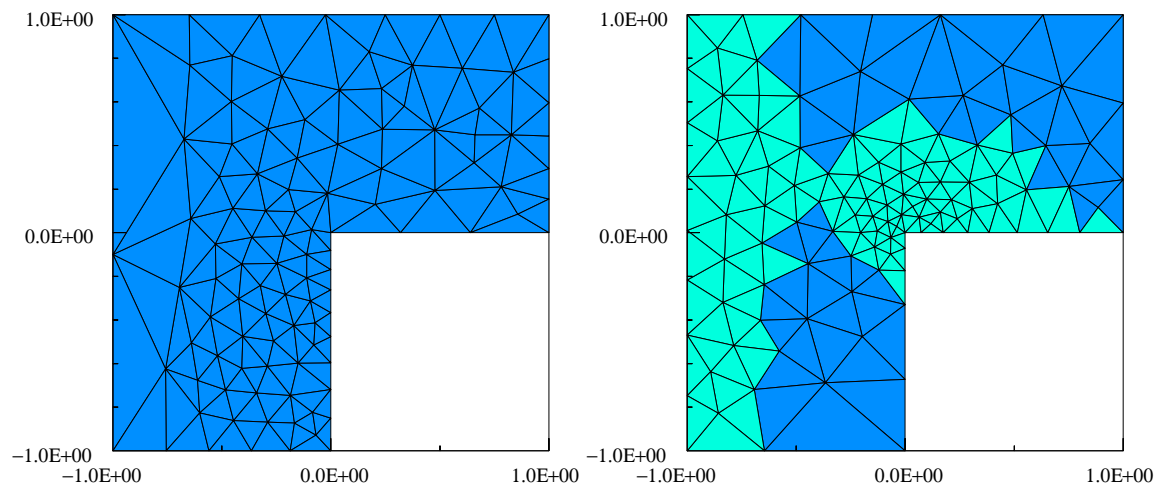
<b>IZO</b>											
lev	$\#T_h$	dof <sub>h</sub>	$\ e_h\ _X$	EOC	$\ e_h\ _J$	EOC	$\eta$	EOC	$i_{\text{eff}}^\rho$	$i_{\text{eff}}^\eta$	CPU(s)
0	150	450	1.29E-01	-	2.53E-02	-	2.01E-01	-	1.55	1.54	1.0
1	150	900	4.79E-02	2.87	1.46E-02	1.59	6.58E-02	3.22	1.37	1.35	2.3
2	150	1500	3.33E-02	1.42	9.74E-03	1.58	3.22E-02	2.79	0.97	0.97	3.8
3	150	2050	2.45E-02	1.96	6.82E-03	2.28	1.80E-02	3.75	0.73	0.75	5.9
4	150	2314	2.00E-02	3.39	4.99E-03	5.17	1.09E-02	8.23	0.55	0.58	8.3
5	150	2559	1.74E-02	2.77	3.77E-03	5.55	7.01E-03	8.78	0.40	0.45	11.3
6	150	2743	1.55E-02	3.20	2.94E-03	7.19	4.74E-03	11.24	0.30	0.35	14.8
7	165	3481	9.74E-03	3.93	1.82E-03	4.01	2.80E-03	4.42	0.29	0.34	20.4
8	195	4617	6.83E-03	2.51	1.47E-03	1.51	2.58E-03	0.57	0.38	0.43	28.3
9	234	5798	4.91E-03	2.90	1.22E-03	1.65	2.51E-03	0.25	0.51	0.55	38.4
10	195	4616	5.00E-03	0.16	1.26E-03	0.30	2.69E-03	0.62	0.54	0.58	43.3
11	195	4604	5.66E-03	11.00	1.48E-03	14.00	3.22E-03	15.50	0.57	0.61	49.1

Tabulka 5.5: Výsledky pro problém (5.11) - (5.12)

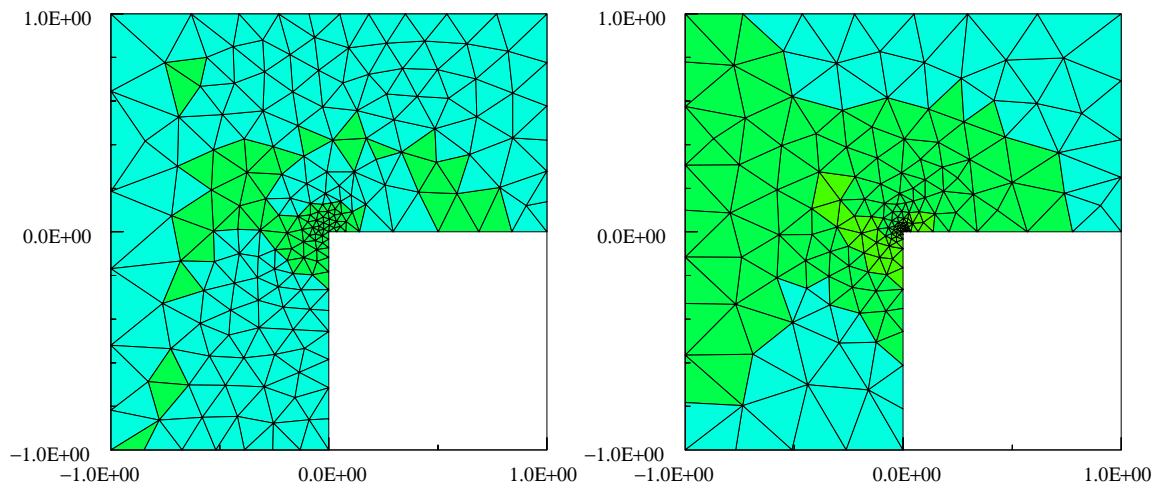
Na Obrázkách 5.30 - 5.35 můžeme sledovat, jak adaptace probíhala v případě výpočtu metrik v prostoru  $X$  s normou  $\|\cdot\|_J$ :



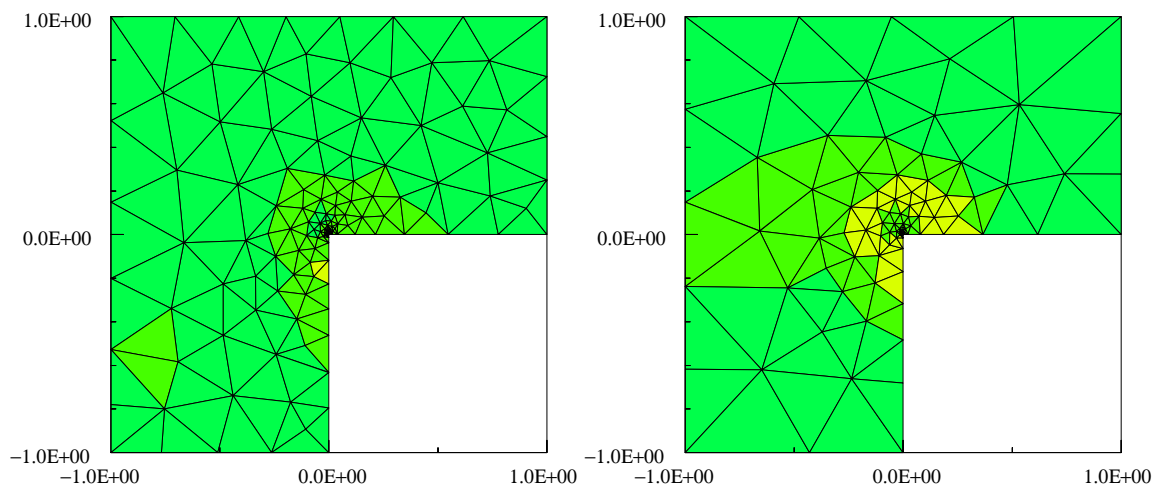
Obrázek 5.30: Původní síť a síť po 1. adaptaci pro problém (5.11) - (5.12)



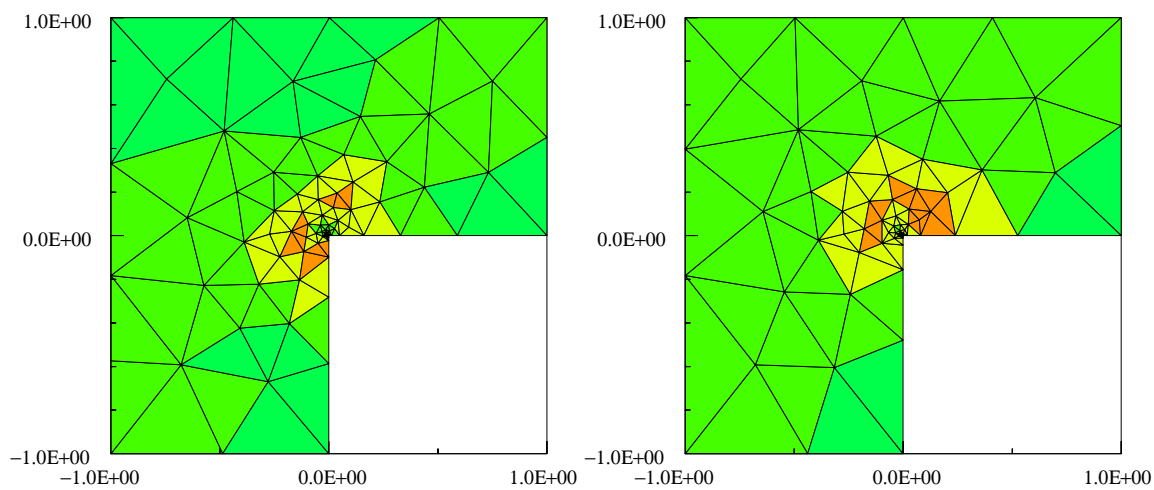
Obrázek 5.31: Síť po 2. a 3. adaptaci pro problém (5.11) - (5.12)



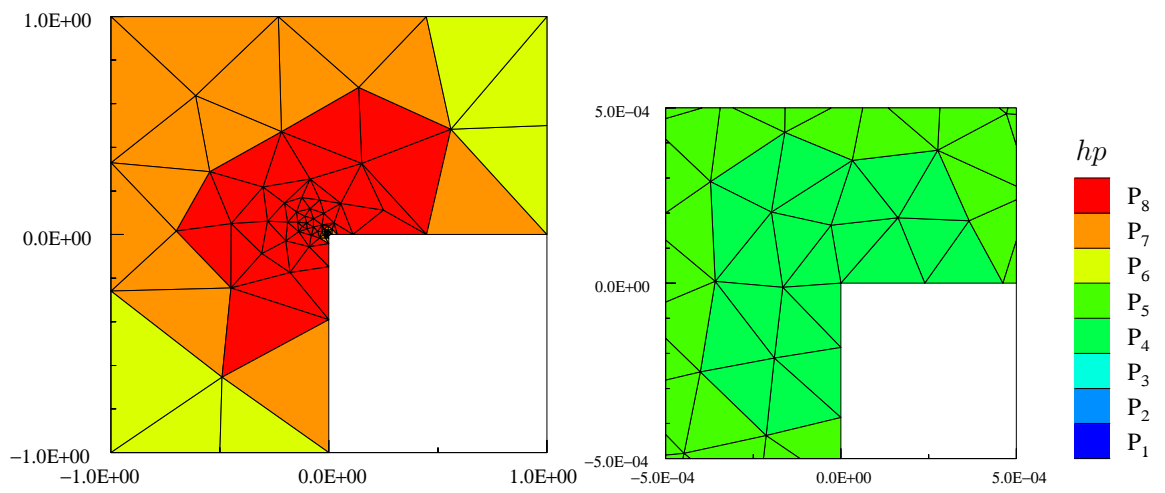
Obrázek 5.32: Síť po 4. a 5. adaptaci pro problém (5.11) - (5.12)



Obrázek 5.33: Síť po 6. a 7. adaptaci pro problém (5.11) - (5.12)

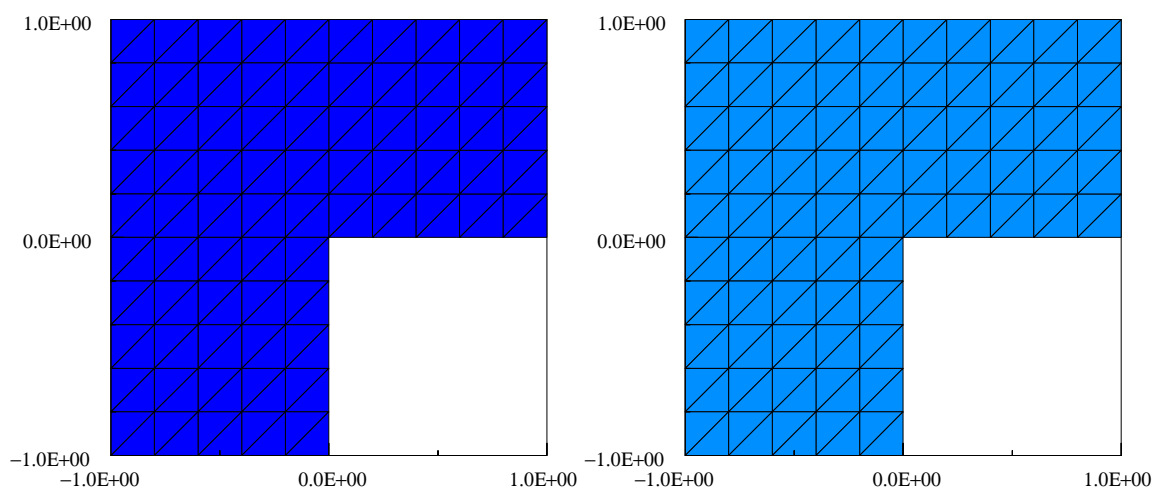


Obrázek 5.34: Síť po 8. a 9. adaptaci pro problém (5.11) - (5.12)

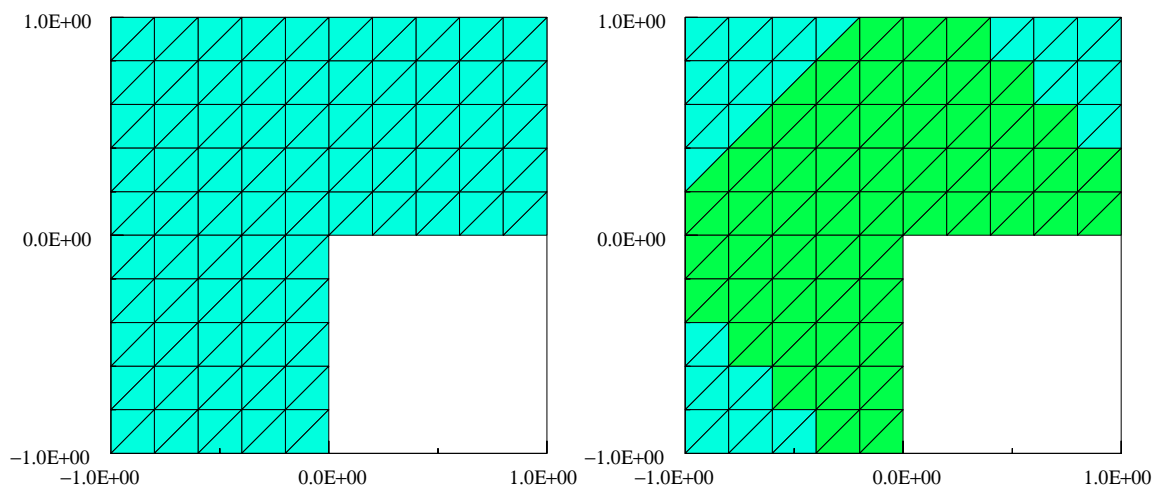


Obrázek 5.35: Finální síť a její detail pro problém (5.11) - (5.12)

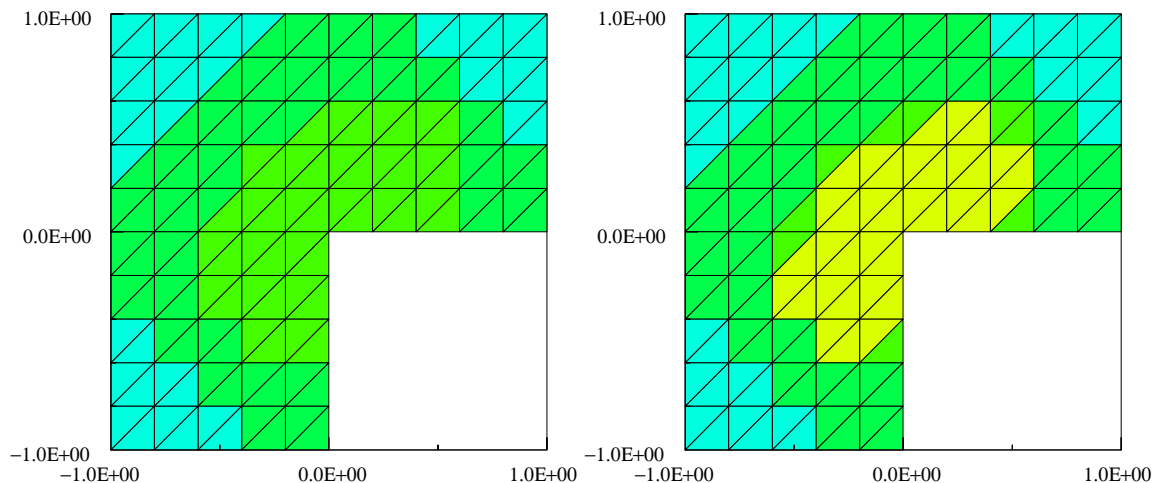
Obrázky 5.36 - 5.41 ukazují, jak adaptace probíhala v izotropním případě:



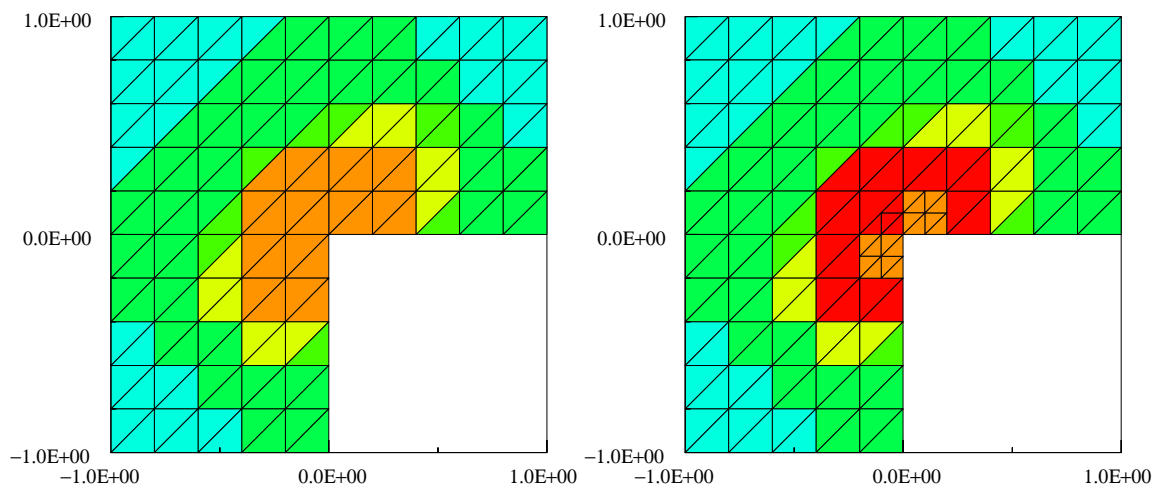
Obrázek 5.36: Původní síť a síť po 1. adaptaci pro problém (5.11) - (5.12)



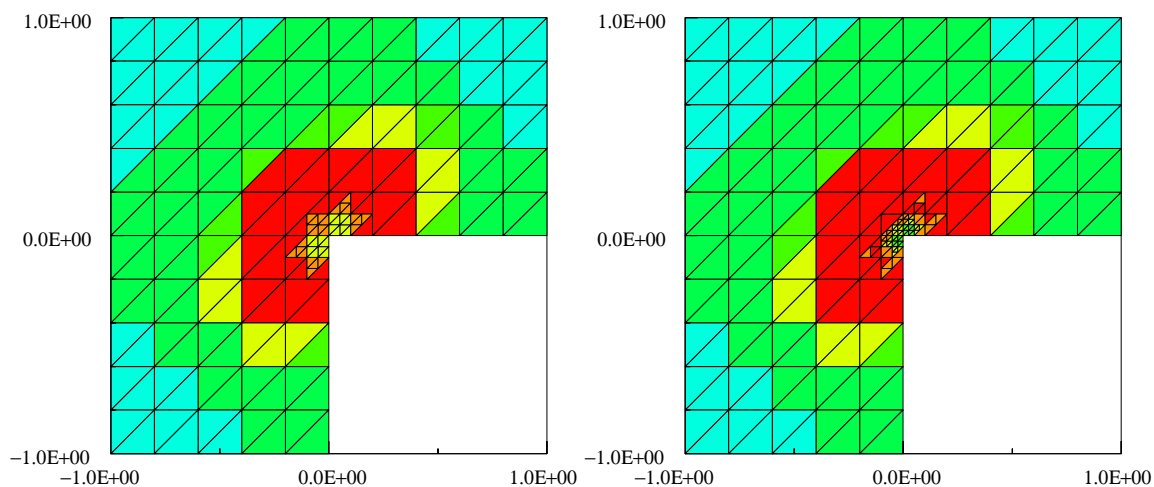
Obrázek 5.37: Síť po 2. a 3. adaptaci pro problém (5.11) - (5.12)



Obrázek 5.38: Síť po 4. adaptaci a 5. adaptaci síť pro problém (5.11) - (5.12)

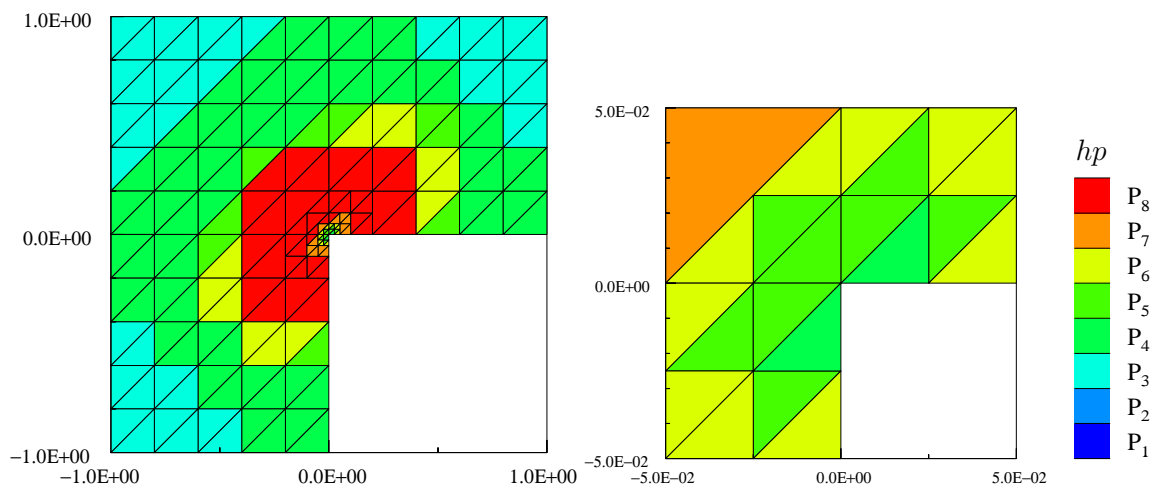


Obrázek 5.39: Síť po 6. adaptaci a 7. adaptaci síť pro problém (5.11) - (5.12)



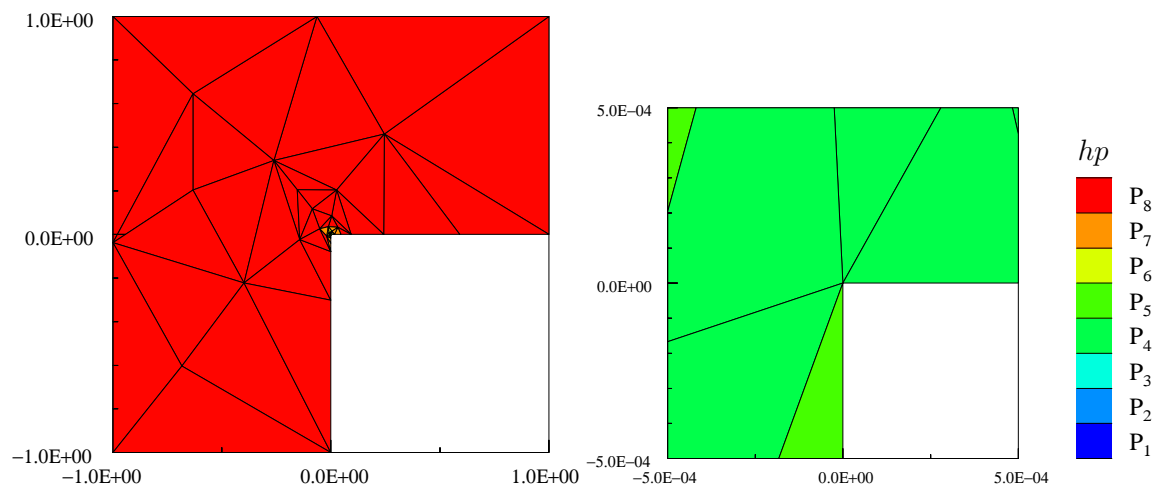
Obrázek 5.40: Síť po 8. adaptaci a 9. adaptaci síť pro problém (5.11) - (5.12)



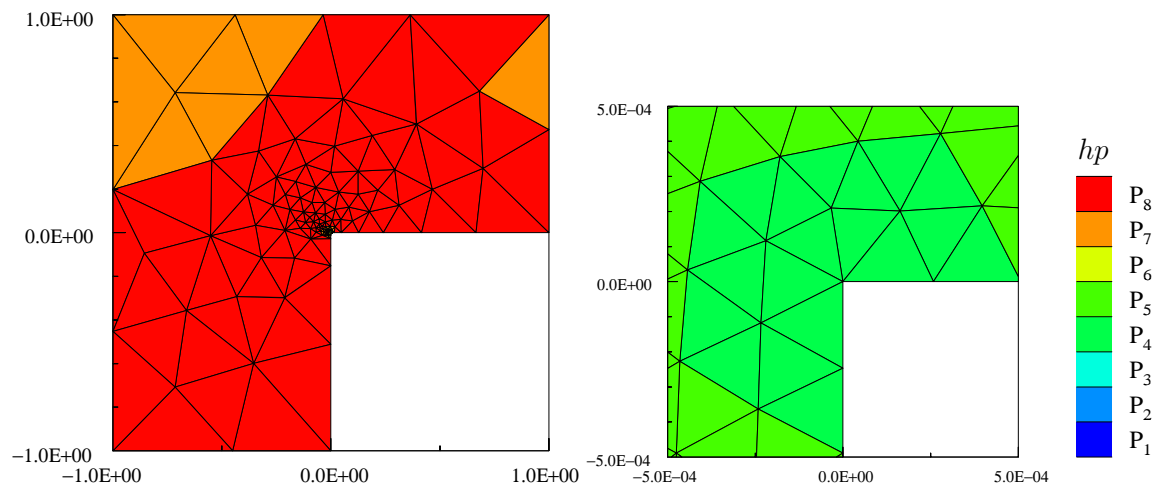


Obrázek 5.41: Finální síť a její detail pro problém (5.11) - (5.12)

Podívejme se ještě na finální sítě v ostatních případech:



Obrázek 5.42: Finální síť a její detail pro výpočet v prostoru  $X$  s normou  $\|\cdot\|_X$  pro problém (5.11) - (5.12)



Obrázek 5.43: Finální síť a její detail pro výpočet založený na Hessově matici pro problém (5.11) - (5.12)

# Závěr

V předložené práci jsme se zabývali anizotropní adaptací sítě pro nespojitou Galerkinovu metodu pro stacionární konvektivně-difúzní problémy. Zavedli jsme diskrétní problém a přiblížili anizotropní adaptaci sítě. Představili jsme různé přístupy pro výpočet Riemannových metrik nutných pro anizotropní adaptaci. Dva z těchto přístupů spočívali v hledání maxima v prostoru  $X$ , třetí přístup byl založen na výpočtu Hessovy matice.

V hlavní části práce jsme ukázali na numerických experimentech efektivitu jednotlivých přístupů. Ukázalo se, že námi představené metody pro anizotropní adaptaci sítě jsou efektivnější pro řešení některých typů úloh než pouhá izotropní adaptace. Pomocí anizotropní adaptace sítě jsme schopni dosáhnout menší chyby za kratší čas, triangulaci pak navíc tvoří menší množství elementů než v případě izotropní adaptace. V jednom případě byla efektivnější metoda založená na výpočtu Hessovy matice, v dalších pak metoda založená na hledání maxima v prostoru  $X$  s normou  $\|\cdot\|_J$ . Izotropní adaptace sítě nám na stranu druhou pro některé případy dala srovnatelné výsledky.

Na základě provedených experimentů se dá předpokládat, že anizotropní adaptace sítě má pro nespojitou Galerkinovu metodu smysl. Otevírají se otázky, jak námi představené metody ještě vylepšit. Je možné pokusit se počítat metriky jiným způsobem. Pro variantu s Hessovou maticí by bylo možno jinak interpolovat chyby pro vyšší stupně polynomiální aproximace, viz [7].

# Seznam použité literatury

- [1] *ADGFEM - Adaptive Discontinuous Galerkin Finite Element Method*, <http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/~dolejsi/adgfem/>
- [2] P. DEUFLHARD, *Newton Methods for Nonlinear Problems*, vol. 35 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer, 2004
- [3] V. DOLEJŠÍ, *Analysis and application of IIPG method to quasilinear non-stationary convection-diffusion problems*, J. Comp. Appl. Math. 222, 2008
- [4] V. DOLEJŠÍ, *ANGENER - ANisotropic mesh adaptation GENERator, Version 3.0*, <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~dolejsi/angen/angen.htm>
- [5] V. DOLEJŠÍ, *Anisotropic mesh adaptation for finite volume and finite element methods on triangular meshes, habilitační práce*, Prague, 2003
- [6] V. DOLEJŠÍ, *hp-DGFEM for nonlinear convection-diffusion problems*, Preprint No. MATH-knm-2012/2. April 12, 2012
- [7] V. DOLEJŠÍ, *hp-anisotropic mesh adaptation technique for PDE based on interpolation error estimates*, interní zpráva KNM
- [8] V. DOLEJŠÍ, M. FEISTAUER, C. SCHWAB *On Discontinuous Galerkin Methods for Nonlinear Convection-Diffusion Problems and Compressible Flow*, *Mathematica Bohemica*, Vol. 127, No. 2, pp. 163-179, 2002
- [9] V. DOLEJŠÍ, M. FEISTAUER, C. SCHWAB, *On some aspects of the discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws*, *Math. Comput. Simul.* 61, 2003
- [10] M. FEISTAUER, J. FELCMAN, I. STRAŠKRABA, *Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow*, Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [11] M. FEISTAUER, V. KUČERA, *On a robust discontinuous Galerkin technique for the solution of compressible flow*, *J. Comput. Phys.* 224, 2007
- [12] I. ŠEBESTOVÁ, *A posteriorní odhady chyby nespojité Galerkinovy metody pro konvektivně-difusní rovnice, diplomová práce*, MFF UK Praha, 2009
- [13] R. VERFÜRTH, *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*, Chichester: John Wiley
- [14] M. VOHRALÍK, *A posteriori error estimates, stopping criteria and inexpensive implementations, habilitační práce*, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, 2010