Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Aneta Mirová

Vlastnosti a aplikace ploch nízkého stupně

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce:	RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Učitelství matematiky-deskriptivní geometrie pro střední školy

Praha 2011

Děkuji RNDr. Zbyňku Šírovi, Ph.D. za hodnotné rady a odborné vedení během psaní této práce.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne ..... Podpis autora

Název práce: Vlastnosti a aplikace ploch nízkého stupně

Autor: Aneta Mirová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: V diplomové práci "Vlastnosti a aplikace ploch nízkého stupně"se věnujeme především vlastnostem svazků kvadratických ploch. Je vysvětleno současné převedení dvou symetrických matic do kanonického tvaru, a projektivní klasifikace svazků kvadrik. Projektivní klasifikace je provedena pomocí indexové a znaménkové posloupnosti, s jejíž pomocí lze určit počet komponent průnikové křivky, jejich algebraické stupně a případné singularity. Studujeme rovněž řadu eukleidovských podmínek pro rozpad průniku dvou kvadrik. Práce je doplněna mnoha příklady, obrázky a aplikacemi kvadratických ploch. Součástí diplomové práce je přiložené CD, na kterém se nachází diplomová práce v elektronické podobě a zdrojové soubory obrázků použitých v diplomové práci.

Klíčová slova: průniková křivka, kvadratická plocha, idexová funkce, znaménková posloupnost

Title: Properties and applications of low degree surfaces

Author: Aneta Mirová

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: My thesis "Properties and applications of low degree surfaces" deals mainly with properties of two quadrics. We introduce so called canonical forms of two quadrics and classification of intersection curve of two quadrics. There are used index and signature sequence to obtain classification of intersection curve of two quadrics. These sequence can determine the number of component of the intersection curve, their algebraic degrees and singularities. Our work also contains many examples with pictures. One part of the thesis also presents possible application of intersection curve of two quadrics in practice. This thesis also contains an enclosed CD, with the thesis in an electronic form and the source files of all pictures in the thesis.

Keywords: Intersection curve, Quadric surface, index function, signature sequence

Obsah

Úvod **1**

1 Základní definice a poznatky **4**
1.1 Lineární algebra 4
1.2 Afinní a projektivní geometrie 7
1.3 Kvadriky 9

2 Klasifikace průniku dvou kvadrik pomocí znaménkových posloupností **14**
2.1 Kanonický tvar dvojice kvadrik 14
2.2 Znaménková posloupnost 20

3 Rozpad průniku dvou kvadrik **35**
3.1 Kvadriky se dvěma body dotyku 35
3.2 Kvadriky opsané téže kulové ploše 41
3.3 Konfokální kvadriky 44
3.4 Kvadriky ve středové kolineaci 53
3.5 Souosé kvadriky 66
3.6 Další zajímavé příklady rozpadu průniku dvou kvadrik 80

4 Aplikace **94**

Závěr **99**

Literatura **101**

Úvod

V této diplomové práci jsme se v souladu se zadáním zabývali především kvadrikami (plochami druhého stupně) a jejich vzájemnou polohou. Mimořádnou pozornost jsme věnovali speciální poloze dvou kvadrik, při které dochází k rozpadu průnikové křivky.

Kvadriky jsou po rovinách nejjednodušší plochy. Tradičně je jim věnována značná pozornost v rámci výuky deskriptivní geometrie a dalších vysokoškolských předmětů, např. lineární algebry a projektivní geometrie. Často jsou rovněž pro svoji jednoduchost (nízký stupeň) a další vlastnosti (ohniskové a jiné) využívány v nejrůznějších aplikacích (stavební a technické plochy, parabolické antény, aproximační plochy v geometrickém modelování a podobně).

Zkoumání vzájemné polohy dvou kvadrik je přirozený problém, který nastupuje ihned po klasifikaci kvadrik jako takových. Průnikem dvou kvadrik je obecně kvartika (algebraická prostorová křivka čtvrtého stupně). V řadě případů studovaných v deskriptivní geometrii a v řadě aplikací dochází k rozpadu této průnikové kvartiky (např. na dvě kuželosečky). Tento jev je velice žádoucí, protože silně zjednodušuje výpočet tohoto průniku a rovněž umožňuje spojení (částí) kvartik do spline plochy jejich prostým "slepením" podél rovinné křivky (kuželosečky).

Jednou z motivací mé práce je fakt, že v kontextu deskriptivní geometrie a aplikací jsou podmínky rozpadu průnikové křivky formulovány eukleidovsky (např. společná vepsaná kulová plocha, společné ohnisko, viz Kapitolu 3). Matematicky je však rozpad průnikové křivky vlastností projektivní (která se zachovává při projektivních transformacích).

V Kapitole 1 shrnujeme definice a poznatky nezbytné ve zbytku práce. Mým přínosem v této části je shromáždění známých definic a tvrzení z lineární algebry, afinní, projektivní a algebraické geometrie. Snažili jsme se přitom uspořádat je vhodným způsobem s ohledem na další kapitoly a rovněž sjednotit matematické značení. Na závěr této kapitoly definuji svazek kvadrik a jeho (různé) parametrizace.

Kapitola 2 je věnována studiu svazků kvadrik. Vycházím v ní z několika prací, především z nedávného cizojazyčného článku [16]. Tato kapitola je věnována především dvěma teoretickým nástojům. Její první část popisuje současnou diagonalizaci (přesněji převedení do kanonicého tvaru) dvojice reálných symetrických matic. Ve druhé části jsou vysvětleny

tzv. indexové a znaménkové posloupnosti. Zjednodušeně řečeno se jedná o posloupnost signatur, které jsou asociovány s parametrizací určitého svazku. Tato posloupnost plně charakterizuje svazek a určuje topologii jeho průnikové křivky. Z celkem 35 různých projektivních typů svazků uváděných v [16] a [15] jich přebíráme pouze 18, ve kterých dochází k rozpadu průnikové křivky. Náš přínos v této části má charakter netriviální kompilace. Vycházeli jsme z několika anglických pramenů, které jsou psány poměrně těžko srozumitelným způsobem. Dále náš přínos spočívá zejména ve zjednodušení a upřesnění řady formulací, v doplnění chybějícího důkazu Věty 2.24 a doplnění řady vypočítaných příkladů, bez nichž bylo pochopení této problematiky velmi pracné.

Kapitola 3 je věnována přehledu řady případů, ve kterých dochází k rozpadu průnikové křivky dvou kvadrik. Toto rozpadání průniku dvou kvadrik se vyskytuje v mnoha oborech matematiky a často je spojováno s eukleidovskými nebo afinními podmínkami. Kromě případů dobře známých z deskriptivní geometrie (např. společná vepsaná kulová plocha) uvádíme rovněž příklady známe jen okrajově (konfokální kvadriky) a dokonce zcela nové výsledky (dvě kvadriky v osové afinitě, souosé kvadriky, kužel s vrchlem v ohnisku rotační kvadriky). V každém případě nejprve studujeme podmínky rozpadu průnikové křivky, dále uvádíme řadu příkladů doplněných obrázky a vždy počítám indexovou, popř. znaménkovou, posloupnost. Tím uvádíme tyto výsledky do vztahu s projektivní klasifikací svazků. Tato část tedy obsahuje některé originální výsledky a dále přehledně a v novém kontextu uvádí výsledky známé z deskriptivní geometrie a jiných oborů.

Kapitola 4 přibližuje některé aplikace kvadrik, zejména v případě rozpadu jejich průniku. Uvádíme příklady z architektury, technických konstrukcí nebo geometrických výpočtů. Tyto aplikace osvětlujeme za pomocí nových i převzatých obrázků.

Výpočty prezentované v této práce byly často prováděny za pomoci programu Maple. Použité obrázky dvou kvadrik a jejich průnikové křivky byly vytvořeny v programu Rhino.

V této práci jsme se pokusili systematičtějším způsobem studovat projektivní a eukleidovské vlastnosti svazků kvadrik v souvislosti s rozpadem jejich průnikové křivky. Velký důraz jsme kladli na relativně snadnou srozumitelnost vytvořeného textu. Doufáme, že tak může být rovněž zajímavým přínosem pro studenty a učitele deskriptivní geometrie a všechny zájemce o aplikovanou geometrii.

Kapitola 1

Základní definice a poznatky

V této kapitole jsme shrnuli potřebné defnice a poznatky vysvětlené v předmětech Lineární algebra, Projetikvní geometrie a Geometrie, které jsou vyučovány v rámci učitelského studia matematiky a deskriptivní geometrie na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Uvedeme základní pojmy, které budeme používat ve zbytku této práce.

1.1 Lineární algebra

S kvadrikou jako takovou úzce souvisí pojem kvadratická forma, proto v úvahách budeme potřebovat i některé pojmy z lineární algebry.

Nejprve si zavedeme značení a zkratky, které nám umožní jednodušší orientaci v textu.

V_n	vektorový prostor dimenze n nad $\mathbb{R}$
$\vec{v}$	vektor (prvek vektorového prostoru)
$\{\vec{v}\}_{\mathcal{M}}$	souřadnice vektoru $\vec{v}$ v bázi $\mathcal{M}$ (sloupcový vektor), $\mathcal{M}$ někdy vynecháváme
$\det(M)$	determinant matice M
$\dim(M)$	hodnost matice M
$\operatorname{diag}(M_1, \ldots, M_n)$	diagonální matice, které má na diagonále matice $M_1, \ldots, M_n$
M^T	transponovaná matice k matici M
I	čtvercová jednotková matice s prvky δ_{ij} Kroneckerovo delta
E	čtvercová matice $n \times n$ s prvky $\delta_{i(n-j)}$ Kroneckerovo delta

Kroneckerovo delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases} .$$

V podkapitole 2.1 si ukážeme jak současně diagonalizovat dvě symetrické matice. S tímto bude úzce souviset pojem Jordanova matice.

1.1 Definice. Čtvercová matice tvaru

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

se nazývá **Jordanova buňka** (na diagonále je prvek a, na rovnoběžné linii nad diagonálou jsou jedničky). Diagonální bloková matice, jejíž bloky na diagonále jsou Jordanovy buňky, se nazývá **Jordanova matice**.

Podobnou definici Jordanovy buňky můžeme najít v [1, str. 241], kde jsou jedničky na rovnoběžné linii pod hlavní diagonálou.

Ke každé matici A existuje v oboru $\mathbb{C}$ matice P, pro kterou platí $J = P^{-1}AP$, kde J je Jordanova matice. Bude-li A matice nějakého endomorfismu f vzhledem k bázi $\mathcal{M}$, matice P matice přechodu od nějaké báze $\mathcal{N}$ k bázi $\mathcal{M}$, potom matice J je maticí endomorfismu f vzhledem k bázi $\mathcal{N}$. Podrobněji je tato úvaha rozvedena v [1, str. 250].

1.2 Definice. Nechť matice A, B jsou čtvercové matice stejného řádu. Budeme říkat, že matice A, B jsou **podobné**, pokud existuje regulární matice P taková, že platí

$$B = P^{-1}AP.$$

Tuto definici můžeme najít např. v [1, str. 235]. Každá matice A má Jordanův kanonický tvar J, tzn. každá matice A je podobná s Jordanovou maticí J.

Dalšími důležitými pojmy k nalezení kanonického tvaru dvojice kvadrik, což bude popsáno a vysvětleno v podkapitole 2.1, jsou vlastní čísla a vlastní vektory.

1.3 Definice. Nechť A je reálná čtvercová matice řádu n. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ se nazývá **vlastním číslem matice** A, pokud existuje vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{x} \neq \vec{o}$, takový, že

$$A\{\vec{x}\} = \lambda\{\vec{x}\}.$$

Vektor $\vec{x}$, který splňuje tuto rovnost se nazývá **vlastní vektor matice** A **příslušný vlastnímu číslu** λ.

Jinou ekvivalentní definici vlastních čísel a vlastních vektorů můžeme nalézt v [1, str. 219].

Předchozí definice má řadu důležitých důsledků, my si uvedeme jenom některé z nich. Polynom $\det(A - \lambda I)$ nazýváme **charakteristický polynom matice** A. Vlastní čísla matice A jsou kořeny charakteristického polynomu matice A.
Je-li λ k-násobným kořenem charakteristického polynomu, říkáme, že λ je **vlastní číslo s algebraickou násobností** k. **Geometrickou násobností vlastního čísla** λ se nazývá dimenze podprostoru vlastních vektorů příslušných k λ.
Podobné matice mají stejná vlastní čísla, včetně jejich násobností.

Abychom správně zavedli pojem kvadriky, musíme nejprve zadefinovat pojem kvadratická forma.

1.4 Definice. Nechť A je reálná symetrická čtvercová matice řádu n. Zobrazení q, které vektoru $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ přiřadí reálné číslo

$$q(\vec{x}) = \{x\}^T A \{x\}, \tag{1.1}$$

budeme nazývat **kvadratickou formou**. Matici A nazýváme **maticí kvadratické formy** q. Po provedení násobení na pravé straně (1.1) přejde tato rovnost v **analytické vyjádření** kvadratické formy q.

Jinou ekvivalentní definici kvadratické formy můžeme nalézt v [1, str. 340].

Jestliže A je matice kvadratické formy q vzhledem k bázi $\mathcal{M}$, potom maticí formy q vzhledem k bázi $\mathcal{N}$ je matice $Q^T AQ$, kde Q je matice přechodu od báze $\mathcal{N}$ k bázi $\mathcal{M}$. Budeme říkat, že báze $\mathcal{P}$ je **polární** vůči q, jestliže matice formy q vzhledem k bázi $\mathcal{P}$ je diagonální. Budeme říkat, že báze $\mathcal{P}_N$ je **kanonická** vůči q, jestliže $\mathcal{P}_N$ je polární vůči q a matice formy q vzhledem k bázi $\mathcal{P}_M$ má na diagonále pouze -1, 0 nebo 1.

1.5 Definice. Matice A, B jsou **ekvivalentní**, pokud existuje matice Q taková, že platí

$$B = Q^T AQ.$$

Symetrická matice je ekvivaletní pouze se symetrickou maticí. Matice stejné kvadratické formy v různých bázích jsou zjevně ekvivaletní.

1.6 Věta (Sylvestrův zákon setrvačnosti)**.** *Uvažujme kvadratickou formu f vyjádřenou ve dvou polárních bázích. Počty kladných, záporných a nulových koeficientů jsou v obou vyjádřeních stejné.*

Toto znění je uvedeno v [13, str. 155], jiné ekvivalentvní znění tohoto zákona je uvedeno v [1, str. 355].

Dalším důležitým pojmem je signatura kvadratické formy. Tento pojem bude důležitý k projektivní klasifikaci kvadrik nebo při určování znaménkové posloupnost svazku kvadrik, která bude vysvětlena v podkapitole 2.2.

1.7 Definice. Uvažujme kvadratickou formu f vyjádřenou v kanonické bázi. Označme si matici takto vyjádřené formy D. **Signaturou kvadratické formy** f budeme nazývat trojici (k, l, m), kde k je počet nul na diagonále matice D, l je počet 1 na diagonále matice D a m je počet -1 na diagonále matice D.

Jiná ekvivalentní definice je v [13, str. 155]. Signaturou symetrické matice A budeme rozumět signaturu příslušné kvadratické formy. Součet čísel v signatuře je roven řádu matice A. Jestliže signatura kvadratické formy f je (i, j, k), potom signatura kvadratické formy $-f$ je (i, k, j).

1.2 Afinní a projektivní geometrie

Vzájemná poloha a průnik dvou kvadrik nás bude zajímat z projektivního, afinního i eukleidovského hlediska. Proto je důležité si připomenout několik základních poznatků z projektivní, afinní a eukleidovské geometrie.

V této podkapitole připomeneme pojmy afinní prostor, projektivní prostor, kvadrika, svazek kvadrik a jim blízké pojmy. Teorie kvadrik a s ní související pojmy jsou podrobně vysvětleny např. v kapitole *Kvadriky* v [9, str.74–109].

1.8 Definice. Uvažujme neprázdnou množinu A, vektorový prostor V_n dimenze n a zobrazení $\varphi : \quad A \times A \to V_n$. Trojici $(A; V_n; \varphi)$ nazýváme n-rozměrný **afinní prostor** (značíme $\mathbb{A}_n$), jestliže platí:

- $\forall X, Y, Z \in A \qquad \varphi(X, Y) + \varphi(Y, Z) = \varphi(X, Z)\,,$
- $\forall X \in A \quad \vec{u} \in V_n \quad \exists! Y \in B \qquad \varphi(X, Y) = \vec{u}.$

Prvky množiny A nazýváme **body** afinního prostoru. Vektorový prostoru V_n se nazývá **zaměření** afinního prostoru. Tuto definici můžeme nalézt např. v [12, str. 9] nebo v [8, str. 8]

Zvolíme-li pevně bod $O \in \mathbb{A}_n$ a bázi $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \rangle \subset V_n$, potom lze každému bodu $X \in \mathbb{A}_n$ jednoznačně přiřadit vektor $\vec{x} = \varphi(X, O)$ a tím pádem i uspořádanou n-tici $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, pro kterou platí:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n.$$

Tuto n-tici budeme nazývat **afinní souřadnicí bodu** X a uspořádanou množinu $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ afinním repérem.

Eukleidovským prostorem $\mathbb{E}_n$ rozumíme n-rozměrný afinní prostor, na jehož vektorovém zaměření $\mathbb{V}_n$ je definován skalární součin. Viz např. [8, str. 46].

1.9 Definice. Buď V_{n+1} vektorový prostor dimenze $n+1$. Množinu $\mathbb{P}_n$ všech jednorozměrných vektorových podprostorů prostoru V_{n+1}, tj.

$$\mathbb{P}_n = \{\langle \vec{x} \rangle : \ \vec{x} \in V_{n+1} \backslash \{\vec{o}\}\}$$

nazýváme **projektivní prostor** dimenze n. Jeho prvky nazýváme **projektivní body**. Vektor $\vec{x} \in V_{n+1}$, $\vec{x} \neq \vec{o}$, jenž generuje bod $X \in \mathbb{P}_n$ nazýváme **zástupcem bodu** X.

Speciálně pro $n = 1$ budeme hovořit o **projektivní přímce** a pro $n = 2$ o **projektivní rovině**. Podrobněji jsou tyto definice uvedeny v [9, str. 51].

Zvolíme-li pevně bázi $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n, \vec{e}_{n+1} \rangle \subset V_{n+1} \backslash \{\vec{o}\}$, potom lze každému bodu $X \in \mathbb{P}_n$ jednoznačně až na násobek přiřadit $n+1$-tici reálných čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$, pro kterou platí:

$$\langle x_1 \vec{e}_1 + \cdots + x_{n+1} \vec{e}_{n+1} \rangle = X.$$

Například dvojice (1, 2) a (2, 4) určují stejný bod na projektivní přímce.

1.10 Definice. Nechť $\varphi : \ V_{n+1} \to V'_{m+1}$ je lineární prosté zobrazení. Buď $\mathbb{P}_n = \{\langle \vec{x} \rangle : \ \vec{x} \in V_{n+1} \backslash \{\vec{o}\}\}$ a $\mathbb{P}'_m = \left\{\langle \vec{x} \rangle : \ \vec{x} \in V'_{m+1} \backslash \{\vec{o}\}\right\}$ dva projektivní prostory. Zobrazení f se nazývá **projektivní zobrazení**, jestliže f je lineární zobrazení $\mathbb{P}_n \to \mathbb{P}'_m$ a pro každý bod $X \in \mathbb{P}_n$ a pro každého vektorového zástupce $\vec{x} \in V_{n+1}$ bodu X platí

$$f(X) = \langle \varphi(x) \rangle .$$

Budeme-li o matici A uvažovat jako o matici nějakého zobrazení, potom podobné matice k matici A jsou maticí stejného projektivního zobrazení v jiných homogenních souřadnicích.

Vynecháním (odstraněním, vyjmutím) jediné nadroviny ω_0 projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$ vznikne z tohoto prostoru afinní prostor $\mathbb{A}_n^0$. Tato myšlenka je podrobněji uvedena v [9, str. 55]. Jestliže afinní prostor $\mathbb{A}_n$ se zaměřením V_n přidáme jako $\mathbb{A}_n^0$ do projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$, potom sjednocením $\mathbb{A}_n^0$ a nadroviny $\omega_0 \subset \mathbb{P}_n$ dostaneme právě prostor $\mathbb{P}_n$. Tento n-rozměrný projektivní prostor s vyznačenou pevnou nadrovinou ω_0 představuje speciální model n-rozměrného projektivního prostoru, tzv. **(projektivně) rozšířený afinní prostor** (budeme jej označovat $\overline{\mathbb{A}}_n$). Objektům nadroviny ω_0 budeme říkat **nevlastní objekty** prostoru $\overline{\mathbb{A}}_n$,

Konkrétně vlastní body rozšířeného afinního prostoru $\overline{\mathbb{A}}_3$ můžeme vzhledem k jisté soustavě souřadnic popsat pomocí trojic reálných čísel $[x, y, z]$. Body projektivního prostoru $\mathbb{P}_3$ můžeme vzhledem k jisté soustavě souřadnic popsat pomocí čtveřic reálných čísel (x_0, x_1, x_2, x_3), předpokládáme, že $\omega_0 : \ x_0 = 0$. Přechodem od afinních souřadnic k projektivním budeme nazývat vnoření

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}_3 & \to & \mathbb{P}_3 \\ [x, y, z] & \to & (1, x, y, z) \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3)\,. \end{array}$$

Homogenní souřadnice (x_0, x_1, x_2, x_3), kde $x_0 = 0$ popisují nevlastní body, neboli směry afinního prostoru.

1.3 Kvadriky

V nádledující kapitole se omezíme na $\mathbb{R}^4$.

1.11 Definice. Uvažujme kvadratickou formu q, která je určená reálnou nenulovou symetrickou matici

$$Q = \begin{pmatrix} q_{0,0} & q_{0,1} & q_{0,2} & q_{0,3} \\ q_{0,1} & q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{0,2} & q_{1,2} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{0,3} & q_{1,3} & q_{2,3} & q_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Množinu $\mathcal{Q}$ všech bodů $X \in \mathbb{P}_3$, $X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}^T$, pro než platí $q\,(X) = 0$ nazýváme **kvadrika**.

Matici Q nazýváme **maticí kvadriky** $\mathcal{Q}$. Rovnici

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} q_{0,0} & q_{0,1} & q_{0,2} & q_{0,3} \\ q_{0,1} & q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{0,2} & q_{1,2} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{0,3} & q_{1,3} & q_{2,3} & q_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

nazýváme **projektivní rovnicí kvadriky** $\mathcal{Q}$.

Více kvadratických forem může určovat stejnou kvadriku. Dvě reálné nenulové kvadratické formy q a r určují tutéž kvadriku, právě když existuje $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ takové, že $q = k\,r$.

1.12 Definice. Je-li matice kvadriky $\mathcal{Q}$ regulární, nazveme kvadriku $\mathcal{Q}$ **regulární**. Je-li matice kvadriky $\mathcal{Q}$ singulární, nazveme kvadriku $\mathcal{Q}$ **singulární**.

Body A, $B \in \mathbb{P}_3$ nazýváme **polárně sdružené** vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$, jestliže platí:

$$\{A\}\, Q\, \{B\}^T = 0.$$

Bod Y nazveme singulárním bodem kvadriky $\mathcal{Q}$, je-li polárně sdružen se všemi body prostoru. Body kvadriky, které nejsou singulární, nazýváme **regulární**.

1.13 Příklad. Uvažujme kvadriku s projektivní rovnicí $x_1^2+4x_2^2+3x_3^2 = 0$. Bod $\{1,0,0,0\}^T$ je singulárním bodem této kvadriky, protože $\forall y = \{y_0, y_1, y_2, y_3\}^T$ platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0$$

Rovinu všech polárně sdružených bodů s regulárním bodem P vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$ nazýváme **polární rovina** bodu P vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$. Bod P nazýváme **pól** příslušné polární roviny.

Budeme-li o matici A uvažovat jako o matici nějaké kvadratické formy, potom ekvivalentní matice k matici A jsou matice stejné kvadratické formy vyjadřené v jiných homogenních souřadnicích. Změnou homogenních souřadnic se matice kvadriky může změnit na jinou matici, která je s tou původní ekvivaletní, stejně jako tomu je u kvadratických forem.

Každá symetrická matice Q je ekvivalentní s nějakou diagonální maticí, tzn. ke každé kvadrice existuje báze projektivního prostoru, ve kterém je matice této kvadriky diagonální. Označme p počet kladných znamének a q počet záporných znamének této diagonální matice. Vždy můžeme zajistit (vhodným uspořádáním, případně vynásobením -1), že kladné členy předcházejí záporným a navíc je $q \leq p$ a že na diagonále jsou jen $-1, 0, 1$.

Vhodnou volbou homogenních souřadnic má kvadrika v prostoru jednu z následujícíh rovnic:

1. $x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 0$, regulární imaginární kvadrika (nemá singulární body), signatura příslušné kvadratické formy je $(0,4,0)$,

2. $x_0^2+x_1^2+x_2^2-x_3^2 = 0$, regulární nepřímková kvadrika (nemá singulární body), signatura příslušné kvadratické formy je $(0,3,1)$,

3. $x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2 = 0$, regulární přímková kvadrika (nemá singulární body), signatura příslušné kvadratické formy je $(0,2,2)$,

4. $x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$, imaginární kuželová plocha (jeden reálný singulární bod), signatura příslušné kvadratické formy je $(1,3,0)$,

5. $x_0^2+x_1^2-x_2^2=0$, reálná kuželová plocha (jeden singulární bod), signatura příslušné kvadratické formy je $(1,2,1)$,

6. $x_0^2+x_1^2=0$, dvě imaginární roviny (jedna reálná přímka singulárních bodů), signatura příslušné kvadratické formy je $(2,2,0)$,

7. $x_0^2-x_1^2=0$, dvě reálné roviny (jejichž průsečnice je přímka singulárních bodů), signatura příslušné kvadratické formy je $(2,1,1)$,

8. $x_0^2=0$, jedna dvojnásobná rovina (všechny body jsou singulární), signatura příslušné kvadratické formy je $(3,1,0)$.

Rovnici

$$(1,x,y,z)\begin{pmatrix} q_{0,0} & q_{0,1} & q_{0,2} & q_{0,3} \\ q_{0,1} & q_{1,1} & q_{1,2} & q_{1,3} \\ q_{0,2} & q_{1,2} & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{0,3} & q_{1,3} & q_{2,3} & q_{3,3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$$

nazýváme **afinní rovnicí kvadriky** $\mathcal{Q}$.

1.14 Příklad. Uvažujme kvadriku danou afinní rovnicí

$$x^2-4xy+3y^2-10xz+4x-1=0.$$

Projektivní rovnice této kvadriky je

$$-x_0^2+4x_0x_1+x_0^2-4x_1x_2+3x_2^2-10x_1x_3=0.$$

Matice této kvadriky je

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bod S nazveme **středem** kvadriky $\mathcal{Q}$, je-li vzhledem ke $\mathcal{Q}$ polárně sdružen se všemi nevlastními body. Kvadrika, která má alespoň jeden vlastní střed, se nazývá **středová kvadrika**. V opačném případě hovoříme o **nestředové kvadrice**.

Směr určený nevlastním bodem se nazývá **hlavní směr** kvadriky $\mathcal{Q}$, je-li vzhledem ke $\mathcal{Q}$ polárně sdružen se všemi k němu kolmými směry.

Polární rovina hlavního směru kvadriky $\mathcal{Q}$, který není bodem kvadriky, se nazývá **osová rovina** kvadriky $\mathcal{Q}$. Pokud je hlavní směr kvadriky jejím nevlastním singulárním bodem, definujeme osovou rovinu jako libovolnou rovinu kolmou na tento hlavní směr. **Osou kvadriky** rozumíme každou vlastní přímku, která je průsečnicí dvou osových rovin. Vlastní průsečík kvadriky s její osou se nazývá **vrchol kvadriky**.

Svazky kvadrik

Algebraické nadplochy je možno chápat jako body jistého projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$. Algebraická rovinná křivka C stupně n má

$$N = \frac{n\,(n+3)}{2}$$

stupňů volnosti, tzn. homogenní polynom v proměnných x_0, x_1, x_2 má $N+1$ koeficientů. Můžeme tedy říct, že $C \in \mathbb{P}_N$. Tato úvaha je detailně popsána např. v [19, str. 62].
Podobně homogenní rovnice kvadriky má 10 koeficientů. které jsou dány až na násobek. Můžeme tedy říct, že kvadriky jsou body projektivního prostoru $\mathbb{P}_9$.

Přímku projektivního prostoru $\mathbb{P}_9$ z předchozí poznámky budeme nazývat **svazkem kvadrik**.

Řekneme, že

$$\lambda\mathcal{A} + \nu\mathcal{B}, \text{ kde } (\lambda, \nu) \in \mathbb{P}_1 \tag{1.2}$$

je **homogenní parametrizace svazku kvadrik** $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$. Kvadriky

$$\mathcal{A},\, \mathcal{B}$$

nazýváme **zakladní kvadriky parametrizovaného svazku**. Homogenní parametrizaci svazku kvadrik můžeme také chápat jako zobrazení $\mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_9$.

Pro pozdější zjednodušení výpočtů můžeme v 1.2 položit $\nu = -1$ a zvolit konkrétní matice kvadrik $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.

1.15 Definice. Řekneme, že

$$\lambda A - B$$

je **parametrizovaný svazek**.

Touto parametrizací svazku jsme z původního svazku vynechali kvadriku $\mathcal{A}$. Proto v některých případech změníme základní kvadriky svazku na $\mathcal{A}' = a\mathcal{A} + b\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}' = c\mathcal{A} + d\mathcal{B}$, kde

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

1.16 Příklad. Uvažujme svazek kvadrik určen maticemi základních kvadrik svazku

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matice kvadriky

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

určují stejný svazek kvadrik, protože $\mathcal{C} = \mathcal{B} - \mathcal{A}$.

1.17 Definice. Charakteristickým polynomem parametrizovaného svazku kvadrik $\lambda A - B$ budeme rozumět $\det(\lambda A - B)$.

Pro reálné kořeny λ_i, $i \in \{1, \ldots, 4\}$, charakteristického polynomu parametrizovaného svazku $\lambda\mathcal{A} - \mathcal{B}$ jsou kvadriky $\lambda_i\mathcal{A} - \mathcal{B}$ singulární.

Kapitola 2

Klasifikace průniku dvou kvadrik pomocí znaménkových posloupností

Tato kapitola je hlavní teoeretickou částí celé práce a vychází především z článku [16]. V této kapitole si ukážeme jak současně diagonalizovat dvojici kvadrik, tzv. kanonický tvar dvojice kvadrik, znaménkovou posloupnost a jak pomocí znaménkové posloupnosti zjistit,zda se jejich průnik rozpadá na dvě kuželosečky.

V předchozí kapitole byly definice a pojmy připomenuty, v této kapitole budeme zavádět nové. Pro přehlednost a úplnost budou nově zaváděné pojmy doplněny o příklady.

Doposud jsme písmeny $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \ldots$ označovali kvadriky, tj. množiny bodů projektivního prostoru $\mathbb{P}_3$ a písmeny $A, B, C \ldots$ nenulové matice kvadrik, tj. reálné symetrické matice. Ke každé nenulové matici A existuje právě jedna kvadrika $\mathcal{A}$. Pro jednoduchost budeme v této kapitole matice kvarik nazývat přímo kvadrikou.

2.1 Kanonický tvar dvojice kvadrik

Současná diagonalizace dvou kvadrik úzce souvisí s Jordanovými maticemi, které byly zopakovány v podkapitole 1.1. Budeme zkoumat reálné vlastnosti kvadrik, proto musíme původní definici Jordanových matic 1.1 rozšířit.

2.1 Definice. Pro $a \in \mathbb{R}$ nazveme čtvercovou matici tvaru

$$(a)\,, \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{nebo} \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

reálnou Jordanovou buňkou typu I a budeme ji značit $J(a)$. Reálnou Jordanovu buňku typu I budeme uvažovat pouze řádů 1, 2, 3 nebo 4.

Pro $a,\, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$ nazveme čtvercovou matici tvaru

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{nebo} \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

reálnou Jordanovou buňkou typu II a budeme ji značit $J(a,\, b)$. Reálnou Jordanovu buňku typu II budeme uvažovat pouze řádů 2 nebo 4.

Vlastní číslo $J(a)$ reálných Jordanových buněk typu I je reálné číslo a. Vlastní čísla $J(a,\, b)$ reálných Jordanových buněk typu II jsou komplexní čísla $a \pm ib$.

2.2 Příklad. Matice

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

je reálnou Jordanovou buňkou typu I s vlastním číslem 4.

Matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

je reálnou Jordanovou buňkou typu II, její vlastní čísla jsou $2 \pm 3i$ a její klasický Jordanovský typ, dle Definice 1.1, je

$$\begin{pmatrix} 2+3i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-3i \end{pmatrix}.$$

Máme dva typy reálných Jordanových buněk, ale reálnou Jordanovu matici definujeme podobně jako v Definici 1.1. Abychom v reálném Jordanovém typu matice A zaručili správné pořadí reálných Jordanových buněk na diagonále, musíme si zavést pojem řetěz Jordanových buněk.

2.3 Definice. Nechť $J_1, \ldots, J_n$ $(n \leq 4)$ jsou reálné Jordanovy buňky (typu I nebo II) se stejným vlastním číslem λ, potom matici

$$C(\lambda) = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_n), \text{ kde } \dim(J_i) \leq \dim(J_{i+1})$$

budeme nazývat **řetězem Jordanových buněk** odpovídající λ.

2.4 Příklad. Příkladem řetězu Jordanových buněk jsou například matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ nebo také } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Předchozí definice a příklady musely být takto zavedeny kvůli algebraické a geometrické násobnosti vlastních čísel matic.

2.5 Definice. Nechť $L = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_4\}$ jsou všechna vlastní čísla včetně algebraické násobnosti reálné matice A. Nechť $\tilde{L} = \left\{\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_n\right\}$ $(n \leq 4)$ je taková podmnožina vlastních čísel matice A, že se v ní vyskytuje každé reálné vlastní číslo právě jedno a právě jedno z každé komplexně sdružené dvojice vlastních čísel. Potom **reálným Jordanovým typem matice** A budeme rozumět matici

$$J = diag\left(C\left(\tilde{\lambda}_1\right), \ldots, C\left(\tilde{\lambda}_m\right)\right),$$

kde $C\left(\tilde{\lambda}_i\right)$, $i = \{1, \ldots, m\}$, jsou řetězy Jordanových buněk.

2.6 Příklad. Pro reálnou matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 4 & -4 \\ -2 & 11 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

je $L = \{2, 3, 3+i, 3-i\}$ a proto $\tilde{L} = \{2, 3, 3+i\}$.

Reálný Jordanův typ matice A je matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.7 Příklad. Pro reálnou matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

je $L = \{2, 3, 3, 3\}$ a proto $\tilde{L} = \{2, 3\}$.

Reálný Jordanův typ matice A je matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Následující věta je důležitá. Popisuje současnou diagonalizaci dvou symetrických matic. Důkaz téty věty je velmi obsáhlý a bude uveden pouze jeho náznak.

2.8 Věta. *Nechť A a B jsou dvě reálné, symetrické matice velikosti 4×4. Dále předpokládejme, že A je regulární. Nechť matice $A^{-1}B$ má reálný Jordanův typ*

$$diag\,(J_1, \ldots, J_n)\,.$$

Potom platí následující:

1. *A a B jsou současně ekvivaletní maticím*

$$diag\,(\epsilon_1 E_1, \ldots, \epsilon_n E_n)$$

a

$$diag\,(\epsilon_1 E_1 J_1, \ldots, \epsilon_n E_n J_n)\,,\ kde$$

$\epsilon_i = \pm 1$, *pokud J_i má reálné vlastní číslo,*
$\epsilon_i = 1$, *pokud J_i má komplexní vlastní čísla a*

$$E_i = (1)\,,\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ nebo\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ a\ dim\,(E_i) = dim\,(J_i).$$

O maticích A a B potom hovoříme jako o ***současně diagonalizovatelných maticích****.*

2. *Charakteristický polynom $A^{-1}B$ a charakteristický polynom parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ mají stejné kořeny včetně násobností.*

Náznak důkazu: Označme $J = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_n)$. Matice $A^{-1}B$ má reálný Jordanův typ J, tzn. existuje regulární matice P, pro kterou platí

$$J = P^{-1}A^{-1}BP.$$

Hladání ekvivalentních matic k maticím A, B souvisí s touto maticí P.

V předchozí větě se nejedná o diagonalizaci v pravém slova smyslu, protože $\dim(J_i)$ může být větší než jedna.

Jinak řečeno matice kvadratických forem A, B můžeme pomocí stejné reálné změny souřadnic diagonalizovat.

Tato věta je uvedena v [16, str. 320]. Důkaz této věty pro libovolně velké matice A, B má poměrně dlouhou historii, která je detailně popsána v [7]. Pro případ dvou regulárních kvadrik byla tato věta dokázana již v roce 1905 v [10].

Pokud by kvadrika A nebyla regulární, můžeme změnit základní kvadriky parametrizovaného svazku, proto v dalších úvahách budeme předpokládat, že A je regulární. Nicméně existují svazky kvadrik, ve který jsou všechny kvadriky singulární.Tyto svazky kvadrik lze popsat velmi triviálně a proto se nich nebudeme dále zmiňovat.

Příklad pro matice 2×2 se objevuje v diferenciální geometrii v souvislosti s první a druhou základní formou plochy. Hlavní směry diagonalizují obě základní formy.

2.9 Příklad. Uvažujme dvě matice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 16 & -20 & 34 \\ 16 & 37 & -9 & 64 \\ -20 & -9 & -47 & 41 \\ 34 & 64 & 41 & 90 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 36 & 78 & -33 & 126 \\ 78 & 163 & -1 & 256 \\ -33 & -1 & -90 & 113 \\ 126 & 256 & 113 & 394 \end{pmatrix}.$$

Matice

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2190 & -4342 & -259 & -6436 \\ 1998 & 3959 & 236 & 5864 \\ 24 & 48 & 5 & 72 \\ -603 & -1194 & -71 & -1767 \end{pmatrix}$$

má reálný Jordanův typ

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Matice A, B jsou současně diagonalizovatelné. Jsou současně ekvivalentní maticím

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

tzn. existuje matice P, pro kterou platí $A' = P^T AP$ a $B' = P^T BP$. Tato matice je

$$P = \begin{pmatrix} 269 & -11 & -14 & -91 \\ -245 & 10 & 13 & 83 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 74 & -3 & -4 & -25 \end{pmatrix}.$$

2.10 Příklad. Uvažujme dvě matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 2 \\ -4 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -7 & 7 & -18 & -5 \\ 7 & -4 & -11 & 2 \\ -18 & -11 & 15 & -9 \\ -5 & 2 & -9 & -4 \end{pmatrix}.$$

Matice

$$4A^{-1}B = \begin{pmatrix} 50 & 27 & -25 & 31 \\ -4 & 14 & -10 & -2 \\ 2 & -3 & 13 & 1 \\ -58 & -53 & 35 & 41 \end{pmatrix}$$

má reálný Jordanův typ

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Matice A, B jsou současně diagonalizovatelné, protože jsou současně ekvivalentní maticím

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

tzn. existuje matice P, pro kterou platí $A' = P^T AP$ a $B' = P^T BP$. Tato matice je

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -1 & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} & 2 & -1 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

2.2 Znaménková posloupnost

K určení projektivního typu průnikové křivky dvou kvadrik nám bude sloužit tzv. znaménková posloupnost. Silný nástroj, který umožuje popsat projektivní vlastnosti svazku kvadrik.

Nejprve si zavedeme index matice A a indexovou funkci svazku kvarik.

2.11 Definice. Indexem matice A budeme rozumět funkci

$$\operatorname{index}(A) = l, \text{ kde}$$

(k, l, m) je signatura matice A.

2.12 Definice. Indexová funkce parametrizovaného svazku kvadrik $\lambda A - B$ je definována jako

$$\operatorname{In}(\lambda) = \operatorname{index}(\lambda A - B).$$

Tato funkce popisuje projektivní typ kvadriky parametrizovaného svazku.

2.13 Příklad. Uvažujme parametrizovaný svazek kvadrik $\lambda A - B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$3A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \approx \text{(je ekvivalentní maticí)} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Signatura matice $3A - B$ je $(0, 2, 2)$. Potom $\operatorname{In}(3) = 2$. Kvadrika $3A - B$ je regulární přímková kvadrika.

2.14 Věta (Věta o konstantnosti indexové funkce svazku kvadrik)**.** *Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ($n \leq 4$), $\lambda_i \leq \lambda_{i+1}$, $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ jsou uspořdané reálné kořeny charakteristického polynomu $\lambda A - B$, potom indexová funkce $In(\lambda)$ je konstantní na intervalech $(-\infty, \lambda_1)$, $(\lambda_i, \lambda_{i+1})$ a (λ_n, ∞).*

Důkaz. Důkaz provedeme pro případ, že charakteristický polynom $\lambda A - B$ má čtyři různé reálné kořeny. Ostatní případy se dokáží analogicky.
λ-matice $\lambda A - B$ je ekvivaletní s λ-maticí $diag\left(p_1\left(\lambda\right), \ldots, p_4\left(\lambda\right)\right)$, kde $p_i\left(\lambda\right)$ jsou lineární polynomy s kořeny λ_i, pro $i \in \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}$.
Hodnoty polynomů $p_i\left(\lambda\right)$ mají stejné znaménko na intervalech $(-\infty, \lambda_i)$ a (λ_i, ∞).
Z čehož plyne tvrzení věty. □

Jinými slovy nám tato věta říká, že kvadriky z intervalů $(-A, \lambda_1 A - B)$, $(\lambda_1 A - B, \lambda_2 A - B)$, $(\lambda_2 A - B, \lambda_3 A - B)$, $(\lambda_3 A - B, \lambda_4 A - B)$ a $(\lambda_4 A - B, A)$ jsou stejného projektivního typu a jsou regulární.

Tuto větu využijeme v následující definici indexové posloupnosti parametrizovaného svazku $\lambda A - B$, kdy q_i budeme volit libovolně z výše uvedených intervalů.

2.15 Definice. Mějme vzestupně seřazeny různé reálné kořeny charakteristického polynomu parametrizovaného svazku $\lambda A - B$, $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ $(n \leq 4)$, dále mějme q_k $(k = 0, \ldots, n)$ takové, že $q_0 < \lambda_1$, $q_n > \lambda_n$ a $q_i \in (\lambda_i, \lambda_{i+1})$, pro $i = 1, \ldots, n-1$. Označme $s_i = In\left(q_i\right)$.
Indexovou posloupností parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ rozumíme

$$\left\langle s_0 \uparrow s_1 \uparrow \ldots \uparrow s_n \right\rangle,$$

kde $\uparrow$ označují reálný kořen charakteristického polynomu parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ bez ohledu na jeho násobnost.

Indexová posloupnost popisuje projektivní typy kvadrik na intervalech přímky parametrizovaného svazku $\lambda A - B$.

2.16 Lemma. *Pro s_0 a s_n z předchozí definice platí*

$$s_0 + s_n = 4$$

Důkaz. Signatura matice A je $(0, k, l)$.

$$\lim_{\lambda \to \infty} (\lambda A - B) = A, \lim_{\lambda \to -\infty} (\lambda A - B) = -A$$

$$\text{index}\left(A\right) = k, \text{ index}\left(-A\right) = l$$

$$\text{index}\left(A\right) + \text{index}\left(-A\right) = k + l = 4$$

z předcházejícícíh úvah vyplývá

$$s_0 + s_n = 4.$$

□

2.17 Příklad. Uvažujme dvě symetrické reálné matice A, B.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda A - B = \begin{pmatrix} -1\lambda + 9 & 0 & -3\lambda & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 2\lambda \\ -3\lambda & 0 & -4\lambda + 1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 & -6\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = 2\lambda(5\lambda - 3)\left(5\lambda^2 + 37\lambda - 9\right).$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = -\frac{37}{10} - \frac{\sqrt{1549}}{10}$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -\frac{37}{10} + \frac{\sqrt{1549}}{10}$ a $\lambda_4 = \frac{3}{5}$.

Volíme $q_0 = -10$, $q_1 = -1$, $q_2 = \frac{1}{10}$, $q_3 = \frac{1}{2}$ a $q_4 = 1$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = -10$

$$-10A - B = \begin{pmatrix} 19 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & -20 \\ 30 & 0 & 41 & 0 \\ & 0 & -20 & 60 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 30 - \sqrt{1021} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 + \sqrt{1021} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{49}{2} + \frac{\sqrt{6641}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{49}{2} - \frac{\sqrt{6641}}{2} \end{pmatrix}.$$

  Signatura této matice je $(0, 2, 2)$. $In(-10) = 2 = s_0$.

- $q_1 = -1$

$$-1A - B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 2 - 2\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + 2\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} + \frac{\sqrt{61}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{15}{2} - \frac{\sqrt{61}}{2} \end{pmatrix}.$$

Signatura této matice je $(0,3,1)$. $In\,(-1) = 3 = s_1$.

- $q_2 = \frac{1}{10}$

$$\frac{1}{10}A - B = \begin{pmatrix} \frac{89}{10} & 0 & -\frac{3}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{9}{10} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} \frac{19}{4} - \frac{\sqrt{277}}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{19}{4} + \frac{\sqrt{277}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Signatura této matice je $(0,2,2)$. $In\left(\frac{1}{10}\right) = 2 = s_2$.

- $q_3 = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}A - B = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} \frac{15}{4} - \frac{\sqrt{397}}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} + \frac{\sqrt{397}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{4} - \frac{\sqrt{41}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{41}}{4} \end{pmatrix}.$$

Signatura této matice je $(0,1,3)$. $In\left(\frac{1}{2}\right) = 1 = s_3$.

- $q_4 = 1$

$$1A - B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} -3 - \sqrt{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 + \sqrt{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{157}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{157}}{2} \end{pmatrix}.$$

Signatura této matice je $(0,2,2)$. $In\,(1) = 2 = s_4$.

Indexová posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je tedy $\langle 2 \uparrow 3 \uparrow 2 \uparrow 1 \uparrow 2 \rangle$.

2.18 Příklad. Uvažujme dvě symetrické reálné matice A, B.

$$A = \begin{pmatrix} -16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda A - B = \begin{pmatrix} -16\lambda + 9 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\lambda - 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 4\lambda - 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = -2(\lambda - 1)(4\lambda - 1)\left(32\lambda^2 - 26\lambda + 9\right).$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = \frac{1}{4}, \lambda_2 = 1$, zbylé dva kořeny jsou komplexní.

Volíme $q_0 = 0$, $q_1 = \frac{1}{2}$ a $q_2 = 2$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = 0$

$$0A - B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 4 - \sqrt{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 + \sqrt{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  Signatura této matice je $(0, 1, 3)$. $In\,(0) = 1 = s_0$.

- $q_1 = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

  Signatura této matice je $(0, 2, 2)$. $In\left(\frac{1}{2}\right) = 2 = s_1$.

- $q_2 = 2$

$$2A - B = \begin{pmatrix} -23 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} -8-3\sqrt{26} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8+3\sqrt{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Signatura této matice je $(0, 3, 1)$. $In\,(2) = 1 = s_2$.

Indexová posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je tedy $\langle 1 \uparrow 2 \uparrow 3 \rangle$.

Ve většině příkladů nám ke klasifikaci průnikové křivky dvou kvadrik bude stačit indexová posloupnost. U několika příkladů musíme indexovou posloupnost rozšíři na tzv. znaménkovou posloupnost.

2.19 Definice. Mějme dvě reálné symetrické matice A, B. Potom **znaménkovou posloupnost parametrizovaného svazku** $\lambda A - B$ definujeme jako rozšíření indexové posloupnosti, kde místo $\uparrow$, který označuje reálný kořen λ_i charakteristického polynomu parametrizovaného svazku $\lambda A - B$, budeme psát $(\ldots (l_i, m_i) \ldots)$, kde (k_i, l_i, m_i) je signatura matice $\lambda_i A - B$. Čísla l_i, m_i uzevřeme do tolik závorek, kolik je algebraická násobnost čísla λ_i.

Indexovou posloupnost jsme zapisovali do $\langle\,\rangle$, znaménkovou posloupnost budeme zapisovat do $(\,)$.

Znaménková posloupnost nejenže popisuje projektivní typ kvadrik na vnitřních částech projektivní úsečky parametrizovaného svazku, ale také projektivní typ singulárních kvadrik svazku, tj. krajních bodů těchto úseček.

2.20 Příklad. Uvažujme dvě symetrické reálné matice A, B, stejné jako v Příkladě 2.18. Víme, že reálné kořeny charakteristického polynomu $\lambda A - B$ jsou $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ a $\lambda_2 = 1$ a dále víme, že indexová posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je $\langle 1 \uparrow 2 \uparrow 3 \rangle$.
Signatura matice $\frac{1}{4}A - B$ je $(1, 1, 2)$. Signatura matice $1A - B$ je $(1, 2, 1)$.
Znaménková posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je

$$(1, (1, 2), 2, (2, 1), 3).$$

2.21 Příklad. Uvažujme dvě symetrické reálné matice A, B.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda A - B = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4\lambda + 2 & 0 \\ & 0 & 0 & 6\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = 12\lambda^2 (\lambda - 1)(2\lambda - 1).$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \frac{1}{2}$ a $\lambda_4 = 1$.
Volíme $q_0 = -1$, $q_1 = \frac{1}{4}$, $q_2 = \frac{3}{4}$ a $q_3 = 2$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = -1$

$$-1A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

  Signatura této matice je $(0, 2, 2)$. $In(-1) = 2$.

- $q_1 = \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4}A - B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

  Signatura této matice je $(0, 2, 2)$. $In\left(\frac{1}{4}\right) = 2$.

- $q_2 = \frac{3}{4}$

$$\frac{3}{4}A - B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

  Signatura této matice je $(0, 1, 3)$. $In\left(\frac{3}{4}\right) = 2$.

- $q_3 = 2$

$$2A - B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Signatura této matice je $(0, 2, 2)$. $In\,(2) = 2$.

Indexová posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je tedy $\langle 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow 1 \uparrow 2 \rangle$.
Nyní ještě dopočítáme znaménkovou posloupnost.

$$\lambda_1 A - B = -B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

má signaturu (2, 1, 1).

$$\lambda_2 A - B = \frac{1}{2}A - B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

má signaturu (1, 1, 2).

$$\lambda_3 A - B = A - B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

má signaturu (1, 1, 2).

Parametrizovaný svazek $\lambda A - B$ má znaménkovou posloupnost

$$(2,\ ((1,\ 1))\,,\ 2,\ (1,\ 2)\,,\ 1,\ (1,\ 2)\,,\ 2)\,.$$

2.22 Poznámka. *Libovolné dvě kvadriky svazku mají stejný průnik. Průnik dvou kvadrik svazku nezávisí na parametrizaci svazku. Změnou parametrizace svazku na $\bar{\lambda}\bar{A} - \bar{B}$, kde*

$$\bar{A} = aA + bB \ \ a \ \bar{B} = cA + dB$$

$$det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$$

by se mohla změnit indexová posloupnost. Nyní popíšeme vztahy mezi indexovými posloupnosti různých parametrizací stejného svazku kvadrik.

2.23 Definice. Mějme indexovou posloupnost $\sigma = \langle s_0 \uparrow \ldots \uparrow s_n \rangle$, $(n \leq 4)$. Definujeme následující pravidla:

- $\sigma_r = \langle 4 - s_{n-1} \uparrow s_0, \uparrow \ldots \uparrow s_{n-1} \rangle$, **pravidlo rotace** (rotation rule),
- $\sigma_z = \langle s_n \uparrow \ldots \uparrow s_0 \rangle$, **zpětné pravidlo** (reversal rule),
- $\sigma_d = \langle 4 - s_0 \uparrow \ldots \uparrow 4 - s_n \rangle$, **pravidlo doplňku** (complement rule).

Budeme říkat, že indexová posloupnost σ_r (σ_z, σ_d) vznikla z indexové posloupnosti σ pomocí pravidla rotace (zpětného pravidla, pravidla doplňku).

2.24 Věta. *Mějme parametrizovaný svazek kvadrik $\lambda A - B$ s indexovou posloupností σ. Potom platí:*

1. *Jestliže $\bar{\lambda}\bar{A} - \bar{B}$ je parametrizací stejného svazku kvadrik s indexovou posloupností $\bar{\sigma}$, potom $\bar{\sigma}$ dotaneme ze σ pomocí opakovaného úžití pravidel z Definici 2.23.*
2. *Naopak, mějme $\bar{\sigma}$ vzniklou ze σ pomocí pravidel v Definici 2.23 a jejich kombinací, potom existuje jiná parametrizace stejného svazku $\bar{\lambda}\bar{A} - \bar{B}$, jenž má indexovou posloupnost $\bar{\sigma}$.*

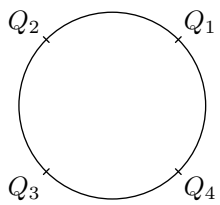
Důkaz. Tato věta a pouze náznak jejího důkazu jsou uvedeny v [16, str. 322]. My tuto větu dokážeme podrobně.

Budeme říkat, že indexové sekvence σ a $\bar{\sigma}$ z předchozí věty jsou podobné.

Svazek kvadrik si můžeme představit jako projektivní přímku v prostoru $\mathbb{P}_9$. Na této projektivní přímce mohou být až čtyři singulární kuželosečky $Q_1, \ldots Q_n$, kde $n \leq 4$.

Větu dokážeme pro $n = 4$, důkaz pro menší počet singulárních kuželoseček je stejný.

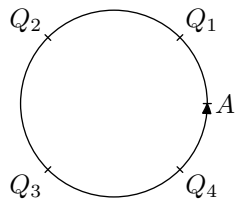
Svazek kvadrik tvoří projektivní přímku, kterou si topologicky můžeme představit jako kružnici. Na této kružnici si vyznačíme singulární kuželosečky Q_1, Q_2, Q_3 a Q_4.



Na každém ze čtyř intervalů (Q_i, Q_{i+1}) (bráno cyklicky) mají kvadriky svazku stejný projektivní typ, viz 2.14

Dále uvažujme parametrizaci svazek kvadrik $\lambda A - B$. Touto parametrizací jsme na projektivní přímce (ve svazku kvadrik) pevně určili bod $A \neq Q_i$, $i \in \{1, \ldots, 4\}$ (regulární kvadriku). Dále jsme určili směr parametrizace. Předpokládejme, že $A \in (Q_4, Q_1)$ a směr

parametrizace je v pořadí Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, tj. „proti směru chodu hodinových ručiček“, jak vidíme na obrázku.



Z původních čtyř intervalů jsme jeden rozdělily na dvě části a máme pět intervalů.

Platí

$$Q_i = \lambda_i A - B$$

a A odpovídá $\pm\infty$. Pro každý z vnitřích intervalů $(\lambda_i, \lambda_{i+1}), i \in \{1, \ldots, 3\}$ zafixujeme signaturu kvadratické formy (proveme volbu jedné z možností $\pm A$).

Interval (Q_4, Q_1) se rozpadne na dva intervaly $(-\infty, \lambda_1)$ a (λ_4, ∞). Na těchto intervalech budou signatury kvadratických forem doplňkové, viz. Lemma 2.16.

Mějme dvě různé parametrizace stejného svazku kvadrik

$$S(\lambda) = \lambda A - B,\ \bar{S}\left(\bar{\lambda}\right) = \bar{\lambda}\bar{A} - \bar{B},\ \text{kde}$$

$$\bar{A} = aA + bB,\ \bar{B} = cA + dB \text{ a } \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

Označme jejich indexové posloupnosti σ a $\bar{\sigma}$. Dále označme Σ množinu všech pravidel, ze kterých vznikla z posloupnosti σ posloupnost $\bar{\sigma}$. Dosazením a úpravami dostáváme

$$\bar{S}\left(\bar{\lambda}\right) = \bar{\lambda}\left(aA + bB\right) - \left(cA + dB\right) = \left(a\bar{\lambda} - c\right)A + \left(b\bar{\lambda} - d\right)B =$$

$$= \left(-\frac{a\bar{\lambda} - c}{b\bar{\lambda} - d}A - B\right)\left(-b\bar{\lambda} + d\right) = S\left(-\frac{a\bar{\lambda} - c}{b\bar{\lambda} - d}\right)\left(-b\bar{\lambda} + d\right)$$

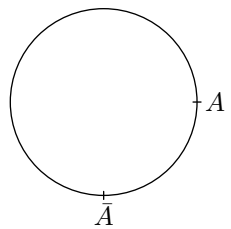
$$\bar{S}\left(\bar{\lambda}\right) = S\left(-\frac{a\bar{\lambda} - c}{b\bar{\lambda} - d}\right)\left(-b\bar{\lambda} + d\right) \tag{2.1}$$

Stejné kvadriky v obou parametrizacích se liší o násobek $\left(-b\bar{\lambda} + d\right)$, který je kladný nebo záporný. Máme reparametrizaci $\bar{\lambda} = -\frac{a\bar{\lambda}-c}{b\bar{\lambda}-d}$. Tato reparametrizace mění směr parametrizace nebo-li $\bar{\sigma}$ vznikla ze σ pomocí zpětného pravidla, právě tehdy když

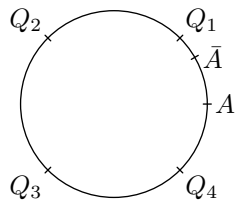
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} < 0.$$

Z vyjádření 2.1 je jasné, že dostáváme stejnou nebo doplňkovou signaturu podle znaménka $\left(-b\bar{\lambda}+d\right)$. Kritická hodnota je $\bar{\lambda}=\frac{d}{b}$, ted pro $\bar{S}\left(\frac{d}{b}\right)=A$. Kvadriky $A, \bar{A}$ rozdělí projektivní přímku na dvě části.

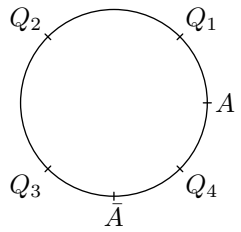
Doplňkovou signaturu tedy dostáváme pro kvadriky pouze z jedné této části.



Pokud je kvadrika $\bar{A}$ v intervalu (Q_4, Q_1), tj. ve stejném intervalu jako kvadrika A, $\bar{\sigma}$ nevznikla ze σ pomocí pravidla rotace. Pokud doplňkovou signaturu dostáváme na té části mezi $A\bar{A}$, kde nejsou singulární kvadriky, $\bar{\sigma}$ nevznikla ze σ pomocí pravidla doplňku. Pokud doplňkovou signaturu dostáváme na té části mezi $A\bar{A}$, kde jsou singulární kvadriky, $\bar{\sigma}$ vznikla ze σ pomocí pravidla doplňku.



Pokud je kvadrika $\bar{A}$ v intervalu (Q_3, Q_4), tj. v sousedním proti směru rotace jako kvadrika A, $\bar{\sigma}$ vznikla ze σ pomocí pravidla rotace. Pokud doplňkovou signaturu dostáváme na té části mezi $A\bar{A}$, kde je singulární kvadrika Q_4, $\bar{\sigma}$ nevznikla ze σ pomocí pravidla doplňku. Pokud doplňkovou signaturu dostáváme na té části mezi $A\bar{A}$, kde jsou singulární kvadriky Q_1, Q_2, Q_3, $\bar{\sigma}$ vznikla ze σ pomocí pravidla doplňku.



Pokud je $\bar{A}$ v $n-$tém sousedním intervalu proti směru rotace jako kvadrika A, $\bar{\sigma}$ vznikla ze σ pomocí n-násobného pravidla rotace.

$\square$

Některé podobné indexové posloupnosti ukážeme na konkrétních příkladech.

2.25 Příklad. Uvažujme dvě symetrické reálné matice jako v Příkladě 2.21. Parametrizovaný svazek $\lambda A - B$ má indexovou posloupnost $\sigma = \langle 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow 1 \uparrow 2 \rangle$. Singulární kvadriky tohoto svazku jsou $Q_1 = -B$, $Q_2 = \frac{1}{2}A - B$ a $Q_3 = A - B$.

Uvažujme jinou parametrizaci stejného svazku $\bar{\lambda}\bar{A} - \bar{B}$ s indexovou posloupností $\bar{\sigma}$, kde

$$\bar{A} = 3A + B,\ \bar{B} = 4A + B.$$

- $\bar{A}$ leží na intervalu (Q_1, Q_3), tj. na stejném intervalu jako A. Posloupnost $\bar{\sigma}$ nevznikla z posloupnosti σ pomocí pravidla rotace.

- $$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

  Posloupnost $\bar{\sigma}$ vznikla z posloupnosti σ pomocí zpětného pravidla.

- $$\frac{ad - bc}{b} = \frac{-1}{1} = -1 < 0$$

  Posloupnost $\bar{\sigma}$ vznikla z posloupnosti σ pomocí pravidla doplňku.

Parametrizovaný svazek kvadrik $\bar{\lambda}\bar{A} - \bar{B}$ má indexovou posloupnost $\bar{\sigma} = \langle 2 \uparrow 3 \uparrow 2 \uparrow\uparrow 2 \rangle$, která vznikla z posloupnosti σ aplikací zpětného pravidla a pravidla doplňku.

2.26 Příklad. Uvažujme dvě reálné symetrické matice jako v Příkladě 2.21. Parametrizovaný svazek $\lambda A - B$ má indexovou posloupnost $\sigma = \langle 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow 1 \uparrow 2 \rangle$. Singulární kvadriky tohoto svazku jsou $Q_1 = -B$, $Q_2 = \frac{1}{2}A - B$ a $Q_3 = A - B$.

Uvažujme podobnou indexovou posloupnost $\bar{\sigma} = \langle 3 \uparrow 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow 1 \rangle$. Tato indexová posloupnost vznikla z posloupnosti σ pomocí jednoho pravidla rotace a pravidla doplňku.

Zvolme $\bar{A}$ z intervalu (Q_2, Q_3), abychom zajistili pravidlo rotace.

$$\bar{A} = 3A - 4B$$

$$\bar{B} = cA + dB$$

$$\frac{ad - bc}{b} = \frac{3d + 4c}{-4} < 0,$$

tím zajistíme pravidlo doplňku. Tato nerovnost je splněna např. pro $c = 0, d = 1$.

$$\bar{B} = B$$

Parametrizovaný svazek kvadrik $\bar{\lambda}\bar{A} - \bar{B}$,kde

$$\bar{A} = 3A - 4B,\ \bar{B} = B$$

má indexovou posloupnost $\bar{\sigma}$.

Pravidla v Definici 2.23 lze rozšířit na znaménkovou posloupnost, stejně jako Věta 2.24.

Indexová a znaménková posloupnost přesně popisují chování svazku kvadrik. Ukazují počet a typ singulárních kvadrik ve svazku a také při jaké volbě parametru získáme regulární kvadriky a jejich typy. Dle [15][str. 20], svazky, které mají stejnou nebo podobnou znaménkovou posloupnost a stejné projektivní typy singulárních kvadrik, mají projektivně stejnou průnikovou křivku.

Celkem existuje 35 projektivních typů průnikové křivky dvou kvadrik. Přehled všech těchto typů najdeme v [15] nebo [16] v tabulkách 1–3. V článku je představen důlaz [15, str. 20–53], že projektivních typů průnikové křivky dvou kvadrik není více. V tomto důkazu se využívá současná diagonalizace dvou symetrických matic.

V následující kapitole nás budou zajímat pouze případy, kdy se průniková křivka rozpadá. Tyto případy jsou v [15][str. 9].

Pro úplnost v následujících tabulkách všechny tyto případy uvedeme. Může se jednat o rozpan na křivku třetího stupně a přímku nebo na dvě kuželosečky. Kromě indexové posloupnosti musíme uvádět také znaménkovou posloupnost, protože některé svazky kvadrik se stejnou indexovou posloupností nemají stejný projektivní typ průnikové křivky. Toto vidíme například v případech, kdy se průniková křivka rozpadá na jednu dvojnásobnou reálnou kuželosečku, na dvě reálné kuželosečky s jedním bodem dotyku a na dvě imaginární kuželosečky s jedním reálným bodem dotyku. Tyto případy mají stejnou indexovou posloupnost $\langle 1 \uparrow\uparrow\uparrow 2 \uparrow 3 \rangle$ a liší se až v té znaménkové.

	Indexová posloupnost	**Znaménková posloupnost**	**Typ průniku**
1.	$\langle 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 2 \rangle$	$(2, ((2,1)), 2, ((2,1)), 2)$	Křivka třetího stupně a přímka, které se protínají ve dvou bodech.
2.	$\langle 2 \rangle$	(2)	Křivka třetího stupně a přímka, které se neprotínají.
3.	$\langle 2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 2 \rangle$	$(2, ((((2,1)))), 2)$	Křivka třetího stupně a přímka, která je její tečnou.

Tabulka 2.1: Přehled indexových posloupností svazků kvadrik, jejichž průnik se rozpadá na přímku a křivku třetího stupně

	Indexová posloupnost	**Znaménková posloupnost**	**Typ průniku**
4.	$\langle 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow 1 \uparrow 2 \rangle$	$(2, ((1,1)), 2, (1,2), 1, (1,2), 2)$	Dvě reálné kuželosečky, protínající se ve dvou bodech.
5.	$\langle 1 \uparrow\uparrow 3 \uparrow 2 \uparrow 3 \rangle$	$(1, ((1,1)), 3, (2,1), 2, (2,1), 3)$	Dvě neprotínající se reálné kuželosečky.
6.	$\langle 1 \uparrow\uparrow 1 \uparrow 2 \uparrow 3 \rangle$	$(1, ((0,2)), 1, (1,2), 2, (2,1), 3)$	Dvě imaginární kuželosečky, protínající se ve dvou reálných bodech.
7.	$\langle 0 \uparrow\uparrow 2 \uparrow 3 \uparrow 4 \rangle$ $\langle 1 \uparrow\uparrow 3 \uparrow 4 \uparrow 3 \rangle$	$(0, ((0,2)), 2, (2,1), 3, (3,0), 4)$ $(1, ((1,1)), 3, (3,0), 4, (3,0), 3)$	Dvě neprotínající se imaginární kuželosečky.
8.	$\langle 1 \uparrow\uparrow 3 \rangle$	$(1, ((1,1)), 3)$	Jedna reálná a jedna imaginární kuželosečka.
9.	$\langle 2 \uparrow\uparrow 2 \rangle$	$(2, ((1,1)), 2)$	Dvě reálné kuželosečky s dvěma body dotyku.
10.	$\langle 1 \uparrow\uparrow\uparrow 2 \uparrow 3 \rangle$	$(1, (((0,1))), 2, (2,1), 3)$	Jedna dvojnásobná reálná kuželosečka.
11.	$\langle 0 \uparrow\uparrow\uparrow 3 \uparrow 4 \rangle$	$(0, (((0,1))), 3, (3,0), 4)$	Jedna dvojnásobná imaginární kuželosečka.
12.	$\langle 1 \uparrow\uparrow\uparrow 2 \uparrow 3 \rangle$	$(1, (((1,1))), 2, (2,1), 3)$	Dvě reálné kuželosečky s jedním bodem dotyku.
13.	$\langle 1 \uparrow\uparrow\uparrow 2 \uparrow 3 \rangle$	$(1, (((0,2))), 2, (2,1), 3)$	Dvě imaginární kuželosečky s jedním reálným bodem dotyku.

Tabulka 2.2: Přehled indexových posloupností svazků kvadrik, jejichž průnik se rozpadá na dvě regulární kuželosečky

	Indexová posloupnost	**Znaménková posloupnost**	**Typ průniku**
14.	$\langle 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 2 \rangle$	$(2, ((2,1)), 2, ((1,1)), 2)$	Jedna reálná kuželosečka a dvě reálné přímky, protínající se ve třech bodech.
15.	$\langle 1 \uparrow\uparrow 1 \uparrow\uparrow 3 \rangle$	$(1, ((1,2)), 1, ((1,1)), 3)$	Jedna reálná kuželosečka a dvojice imaginárních přímek, které se protínají v jednom bodě.
16.	$\langle 1 \uparrow\uparrow 1 \uparrow\uparrow 3 \rangle$	$(1, ((0,3)), 1, ((1,1)), 3)$	Jedna imaginární kuželosečka a dvojice imaginárních přímek, které se protínají v jednom bodě.
17.	$\langle 2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 2 \rangle$	$(2, ((((1,1)))), 2)$	Jedna reálná kuželosečka a dvě reálné přímky, které se všechny protínají v jednom bodě.
18.	$\langle 1 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 \rangle$	$(1, ((((1,1)))), 3)$	Jedna reálná kuželosečka a dvojice imaginárních přímek, které se všechny protínají v jednom bodě.

Tabulka 2.3: Přehled indexových posloupností svazků kvadrik, jejichž průnik se rozpadá na dvě kuželosečky, jednu regulární a druhou singulární

Kapitola 3

Rozpad průniku dvou kvadrik

V mnoha oborech a disciplínách matematiky je průnik dvou kvadrik většinou spojován s eukleidovskými nebo afinními vlastnostmi kvadrik. V odborných knížkách existuje řada vět, které tyto vlastnosti spojují s rozpadem průniku dvou kvadrik. V této kapitole si některé takové věty uvedeme a ke konkrétním příkladům také vypočítáme indexovou, popř. znaménkovou posloupnost, kterou porovnáme s Tabulkami 2.2 a 2.3. Také zde uvedeme některé eukleidovskými nebo afinními vlastnostmi, ke kterým jsme úvahami a ověřováním dospěli sami.

Každou průnikovou křivku dvou kvadrik lze vhodně parametrizovat, což popisuje článek [17].

3.1 Kvadriky se dvěma body dotyku

Tato podkapitola bude o dvojicích kvadrik, které se dotýkají ve dvou bodech. Tento klasický příklad se vyskytuje v deskriptivní geometrii. Předpokládáme, že v těchto bodech dotyku mají kvadriky obyčejný dotyk ploch, tj. mají společnou tečnou rovinu.

3.1 Věta. *Dvě kvadriky, které se dotýkají ve dvou bodech, mají průnikovou křivku složenou ze dvou kuželoseček, které procházejí těmito body*

Důkaz. Body dotyku si označme T_1, T_2. Společnou tečnou rovinu v bodě T_1 označme τ_1, v bodě T_2 ji označme τ_2. Na průnikové křivce k zvolme libovolně další bod M. Tento bod s body dotky T_1 a T_2 určují rovinu ρ, která protíná tečnou rovinu τ_1 v přímce t_1 a tečnou rovinu τ_2 v přímce t_2. Rovina ρ protíná první kvadriku v kuželosečce, která je určená dvěma tečnami t_1 a t_2 s body dotyku T_1 a T_2 a bodem M. Stejnou kuželosečku, vzhledem k jejímu určení, dostaneme jako řez roviny ρ s druhou kvadrikou. Průniková křivka k se proto rozpadá na tuto kuželosečku a ještě jednu další. □

Tato věta je pro rotační kvadriky uvedena v [11, str. 95] a [5, str. 151]. Afinní transformací můžeme z rotačních kvadrik získat nerotační, ale typ průnikové křivky se nezmění.

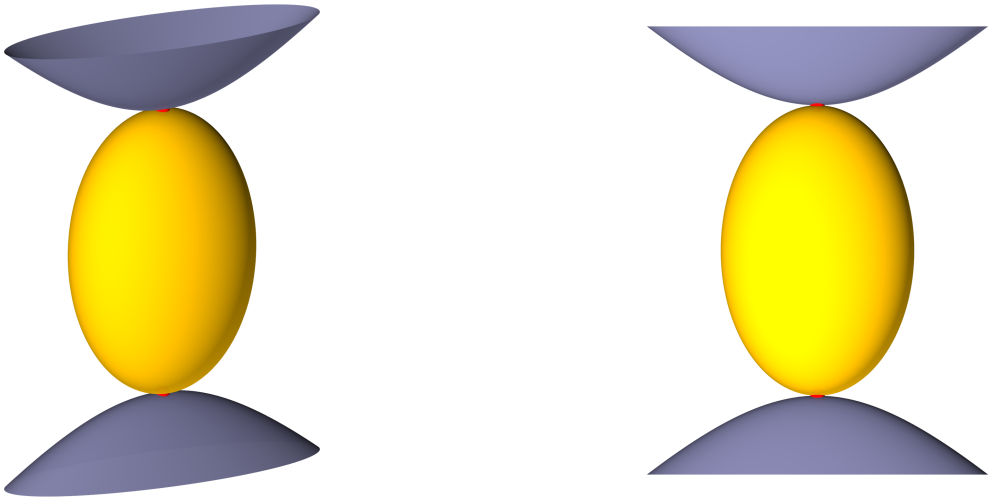
V důkazu Věty 3.1 volili bod M na průnikové křivce, čímž jsme předpokládali, že tato křivka existuje. Obecně průniková křivka dvou kvadrik je křivka čtvrtého stupně., tzv. kvartika. Tato kvartika může být imaginární. V tom případě by bod M, rovina ρ i průniková kuželosečka k byly imaginární.

3.2 Příklad. Uvažujme elipsoid

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$$

a hyperboloid

$$x^2 - 3y^2 - z^2 = 1.$$



Obrázek 3.1: Elipsoid a hyperboloid s dvěma body dotyku. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.2 a jejich průnikovou křivku–dva body. Tyto dvě kvadriky se dotýkají ve svých vrcholech.

Spočítáme indexovou posloupnost parametrizovaného svazku uvažovaných kvadrik.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = -(\lambda - 1)^2 (9\lambda + 1)(4\lambda + 3)$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = -\frac{3}{4}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{9}$ a $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$.
Volíme $q_0 = -1$, $q_1 = -\frac{1}{2}$, $q_2 = 0$ a $q_3 = 2$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = -1$

$$-A - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_0) = 1 = s_0$.

- $q_1 = -\frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2}A - B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_1) = 2 = s_1$.

- $q_2 = 0$

$$-B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_2) = 3 = s_2$.

- $q_3 = 2$

$$2A - B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_3) = 3 = s_3$.

Indexová posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je $\langle 1 \uparrow 2 \uparrow 3 \uparrow\uparrow 3 \rangle$. Z Tabulky 2.2 plyne, že se průnik těchto kvadrik rozpadá na dvě imaginární kuželosečky, protínající se ve dvou reálných bodech.

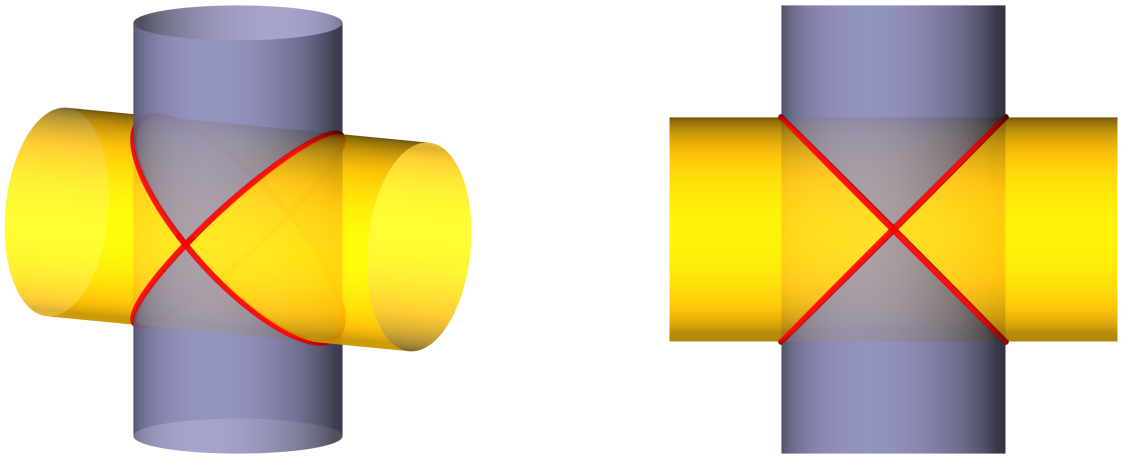
Kvadriky se dotýkají ve svých hlavních vrcholech $A[1, 0, 0]$ a $B[-1, 0, 0]$. Dle Věty 3.1 se jejich průniková křivka se rozpadá na dvě kuželosečky, které jsou dle indexové posloupnosti imaginární a protínají se ve dvou reálných bodech – vrcholech těchto kvadrik, ve kterých se dotýkají kvadriky navzájem.

3.3 Příklad. Uvažujme dva válce

$$x^2 + z^2 = 1$$

a

$$y^2 + z^2 = 1.$$



Obrázek 3.2: Dva válce s dvěma body dotyku. Dva pohledy na válce v Příkladu 3.3 a jejich průnikovou křivku – dvě kuželosečky s dvěma body dotyku. Jedná se o válce se stejným průměrem.

Žádná z uvažovaných kvadrik není regulární. Označme $\bar{A} = A + B$ a $\bar{B} = B$. Spočítáme indexovou posloupnost parametrizovaného svazku kvadrik $\bar{\lambda}\bar{A} - \bar{B}$.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\bar{\lambda}\bar{A} - \bar{B}\right) = -\left(2\bar{\lambda} - 1\right)^2 \left(\bar{\lambda} - 1\right) \bar{\lambda}$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\bar{\lambda}_1 = 0$, $\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_3 = \frac{1}{2}$ a $\bar{\lambda}_4 = 1$.
Volíme $q_0 = -1$, $q_1 = \frac{1}{4}$, $q_2 = \frac{3}{4}$ a $q_3 = 2$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = -1$

$$-\bar{A} - \bar{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_0) = 1 = s_0$.

- $q_1 = \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4}\bar{A} - \bar{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_1) = 2 = s_1$.

- $q_2 = \frac{3}{4}$

$$\frac{3}{4}\bar{A} - \bar{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_2) = 2 = s_2$.

- $q_3 = 2$

$$2\bar{A} - \bar{B} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_3) = 3 = s_3$.

Indexová posloupnost parametrizovaného svazku svazku $\bar{\lambda}\bar{A} - \bar{B}$ je $\langle 1 \uparrow 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow 3 \rangle$. Z Tabulky 2.2 plyne, že se průnik uvažovaných kvadrik rozpadá na dvě reálné kuželosečky, protínající se ve dvou bodech.

Uvažované válce se dotýkají v bodech $A[0,0,1]$ a $B[0,0,-1]$. (Jejich tečné roviny v těchto bodech jsou: $\tau_A :\ z - 1 = 0$ a $\tau_B :\ z + 1 = 0$). Dle Věty 3.1 se jejich průniková křivka se rozpadá na dvě kuželosečky.

3.4 Příklad. Uvažujme elipsoid

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 1$$

a hyperboloid

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 + z^2 + 2\sqrt{2}xz + 2yz - 2\sqrt{2}z = 1.$$

Spočítáme indexovou posloupnost uvažovaných kvadrik.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = 4(\lambda - 2)^2 \left(2\lambda^2 + 5\lambda - 2\right)$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = -\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{41}}{4}$, $\lambda_2 = -\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{41}}{4}$ a $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$. Volíme $q_0 = -3$, $q_1 = 0$, $q_2 = 1$ a $q_3 = 3$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = -3$

$$-3A - B = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 6\sqrt{2} \\ 0 & -10 & 0 & -6\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -5 & -6 \\ 6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} & -6 & -7 \end{pmatrix}.$$

  Tato kvadrika je jednodílný hyperboloid. $In(q_0) = 2 = s_0$.

- $q_1 = 0$

$$-B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  $In(q_1) = 1 = s_1$.

- $q_2 = 1$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & -2 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Tato kvadrika je jednodílný hyperboloid. $In(q_2) = 2 = s_2$.

- $q_3 = 3$

$$3A - B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -6\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 & 6\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ -6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

  Tato kvadrika je jednodílný hyperboloid. $In\,(q_3) = 2 = s_3$.

Indexová posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je $\langle 2 \uparrow 1 \uparrow 2 \uparrow\uparrow 2 \rangle$. Z Tabulky 2.2 plyne, že se průnik kvadrik A, B rozpadá na dvě reálné kuželosečky protínající se ve dvou bodech.

Body $A[0, \sqrt{2}, 0]$ a $B[1, 0, 0]$ leží na obou těchto kvadrikách. Pomocí parciálních derivací spočítáme normálový vektor tečné roviny v bodě A ke kvadrikce q:

$$n_A^q = \left(0, \sqrt{2}, 0\right)$$

Normálový vektor tečné roviny v bodě B ke kvadrice q:

$$n_B^q = (1, 0, 0)$$

Normálový vektor tečné roviny v bodě A ke kvadrice p:

$$n_A^p = \left(0, 2\sqrt{2}, 0\right)$$

Normálový vektor tečné roviny v bodě B ke kvadrice p:

$$n_B^p = \left(2 + 2\sqrt{2}, 0, 0\right)$$

Normálové vektory ve společných bodech obou kvadrik jsou stejné, proto se v těchto bodech kvadriky p a q dotýkají, čímž splňují předpoklady Věty 3.1 a jejich průniková křivka se rozpadá na dvě kuželosečky.

3.2 Kvadriky opsané téže kulové ploše

Tento speciální průnik dvou kvadrik se vyskytuje v řadě učebnic deskriptivní geometrie. Následující tvrzení je speciálním případem Věty 3.1 a má řadu aplikací – rozvětvené potrubí, okapové plochy, atd. Viz Kapitola 4.

3.5 Věta. *Pokud jsou dvě rotační singulární kvadriky opsány stejné kulové ploše, jejich průniková křivka se rozpadne na dvě kuželosečky.*

Důkaz. Kvadriky se dotýkají kulové plochy podél povrchových kružnic k_1 a k_2, v jejichž průsečících D_1 a D_2 se dotýkají obě kvadriky navzájem. Průnik se tedy v důsledku Věty 3.1 rozpadá. $\square$

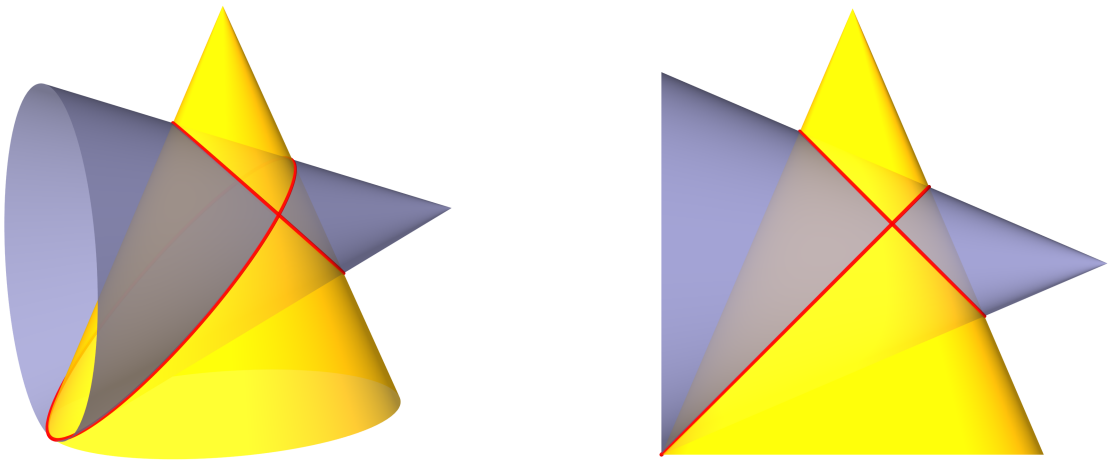
Tato věta je uvedena v [18, str. 124] a můžeme ji formulovat pro nerotační kvadriky opsané stejnému elipsoidu. Afinní transformací můžeme z rotačních kvadrik získat nerotační, ale stupeň ani typ průnikové křivky se nezmění.

3.6 Příklad. Uvažujme dvě kuželové plochy

$$3x^2 + 2y^2 - (z-7)^2 = 0$$

a

$$3x^2 - (y-7)^2 + 2z^2 = 0.$$



Obrázek 3.3: Dva rotační kužele opsané stejné kulové ploše. Střed této kulové plochy leží na průsečíku os kuželů. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.6 a jejich průnikovou křivku – dvě kuželosečky protínající se ve dvou bodech.

Žádná z uvažovaných kvadrik není regulární. Označme $\bar{A} = A + B$ a $\bar{B} = B$. Spočítáme indexovou posloupnost parametrizovaného svazku $\bar{\lambda}\bar{A} - \bar{B}$.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -98 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \bar{B} = \begin{pmatrix} -49 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\bar{\lambda}\bar{A}-\bar{B}\right)=-294\bar{\lambda}\left(\bar{\lambda}-1\right)^2\left(2\bar{\lambda}-1\right)$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\bar{\lambda}_1=0$, $\bar{\lambda}_2=\bar{\lambda}_3=\frac{1}{2}$ a $\bar{\lambda}_4=1$.
Volíme $q_0=-1$, $q_1=\frac{1}{4}$, $q_2=\frac{3}{4}$ a $q_3=2$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0=-1$

$$-\bar{A}-\bar{B}=\begin{pmatrix} 147 & 0 & -14 & -7 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \\ -14 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

  $In\left(q_0\right)=1=s_0$.

- $q_1=\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4}\bar{A}-\bar{B}=\begin{pmatrix} \frac{49}{2} & 0 & -\frac{21}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{21}{4} & 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ \frac{7}{4} & 0 & 0 & -\frac{7}{4} \end{pmatrix}.$$

  $In\left(q_1\right)=2=s_1$.

- $q_2=\frac{3}{4}$

$$\frac{3}{4}\bar{A}-\bar{B}=\begin{pmatrix} -\frac{49}{2} & 0 & -\frac{7}{4} & \frac{21}{4} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{7}{4} & 0 & \frac{7}{4} & 0 \\ -\frac{21}{4} & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

  $In\left(q_2\right)=2=s_2$.

- $q_3=2$

$$2\bar{A}-\bar{B}=\begin{pmatrix} -147 & 0 & 7 & 14 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 3 & 0 \\ 14 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  $In\left(q_3\right)=3=s_3$.

Indexová posloupnost parametrizovaného svazku $\bar{\lambda}\bar{A}-\bar{B}$ je $\langle 1\uparrow 2\uparrow\uparrow 2\uparrow 3\rangle$. Z Tabulky 2.2 plyne, že se průnik kvadrik rozpadá na dvě reálné kuželosečky, protínající se ve dvou bodech.

Uvažované kvadriky jsou opsány stejné kulové ploše se středem na průsečíku os kuželů. Dle Věty 3.5 se jejich průnik rozpadá na dvě kuželosečky.

3.3 Konfokální kvadriky

Konfokálními kvadrikami budeme rozumět dvojici rotačních kvadrik se společným ohniskem. Tyto kvadriky mohou vzniknout rotací paraboly kolem její osy nebo rotací středové kuželosečky, kolem její hlavní osy, tj. kolem osy procházející jejími ohnisky.

V důkazu následující věty budeme používat, tzv. jednoohniskové definice kvadrik.

3.7 Definice. V prostoru je dána rovina δ a bod F, který na ní neleží. Množinu všech bodů prostoru, které mají poměr vzdáleností od bodu F a od řídicí roviny δ rovny $\varepsilon > 0$ nazveme kvadrikou.

$$\left\{X, \frac{|XF|}{|X\delta|}\right\} = \varepsilon$$

Pokud

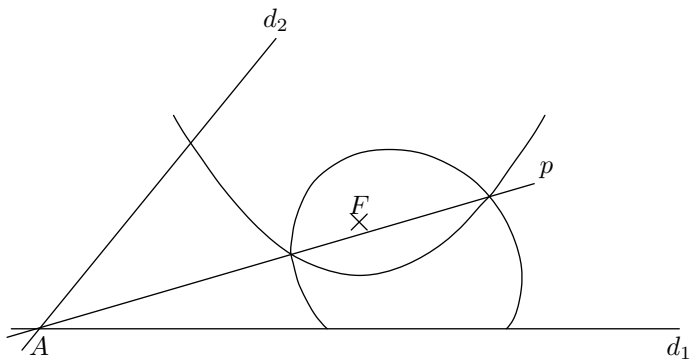
- $\varepsilon < 1$ jedná se o elipsoid
- $\varepsilon = 1$ jedná se o paraboloid
- $\varepsilon > 1$ jedná se o hyperboloid.

Lze ukázat, že bod F v této definici je ohniskem rotační kvadriky. Pro $F \in \delta$ a$\varepsilon > 1$ v předchozí definici dostáváme rotační kuželovou plochu. Bod F je vrcholem tohoto kuželu. Pro rotační kvadriky i pro kuželovou plochu budeme bod F budeme nazývat **zobecněným ohniskem.**

V [14] je následující věta formulována pro regulární kvadriky, my tuto větu rozšíříme na regulární kvadriky a kužel.

3.8 Věta. *Nechť S_1 a S_2 jsou kvadriky vzniklé rotací kuželosečky kolem její hlavní osy nebo kužel. (Kolem osy paraboly nebo kolem osy procházející oběma ohnisky pro elipsu a hyperbolu.) Předpokládejme, že S_1 a S_2 mají společné zobecněné ohnisko. Potom se průnik kvadrik S_1 a S_2 rozpadá na dvě kuželosečky.*

Důkaz.



Obrázek 3.4: Řez prostorové situace popsané ve Věte 3.8 rovinou určenou osami kvadrik. Jedná o konfokální paraboloid a elipsoid.

Označme společné zobecněné ohnisko F. Osy kvadrik S_1 a S_2 se protínají v bodě F. Kvadriky S_1 a S_2 můžeme definovat pomocí tzv. jednoohniskových definic. S_1 je množina bodů v prostoru, které mají od ohniska F a roviny δ_1 konstantní podíl vzdáleností, tj.

$$S_1 = \left\{ X, \frac{|XF|}{|X\delta_1|} = \varepsilon_1 \right\}.$$

Stejně můžeme definovat S_2 jako množinu bodů v prostoru,které mají od ohniska F a roviny δ_2 konstantní podíl vzdáleností, tj.

$$S_2 = \left\{ X, \frac{|XF|}{|X\delta_2|} = \varepsilon_2 \right\}.$$

Pro body průniku $X \in S_1 \cap S_2$ platí

$$\frac{|X\delta_1|}{|X\delta_2|} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Tato rovnost popisuje všechny body ležící ve dvou rovinách, které procházejí průsečnicí $\delta_1 \cap \delta_2$. Protože průnik kvadriky a roviny je kuželosečka, musí se průnik kvadrik S_1 a S_2 rozpadat na dvě kuželosečky. □

Tato věta je i s důkazem uvedena v [14, str. 4].

V následující příkladech nejprve sestrojíme dvě kvadriky se společným zobecněným ohniskem a poté dopočítáme jejich indexovou posloupnost. K určení rovnice kvadriky, které se dána svým ohniskem použijeme následující úvahy.

Rotační elipsoid E se může definovat jako množinu bodů, které od dvou pevně zvolených ohnisek F_1 a F_2 mají konstantní součet vzdáleností, tj.

$$E = \{X, |XF_1| + |XF_2| = a_E\}, \text{ kde } a_E > |F_1F_2|.$$

Po úpravách dostáváme

$$(|XF_1| - a_E)^2 = (|XF_2|)^2 .$$

Rotační hyperboloid H se může definovat jako množinu bodů, které od dvou pevně zvolených ohnisek F_1 a F_2 mají konstantní rozdíl vzdáleností, tj.

$$H = \{X, ||XF_1| - |XF_2|| = a_H\} , \text{ kde } a_H < |F_1F_2| .$$

Po úpravách dostáváme

$$(|XF_1| - a_H)^2 = (|XF_2|)^2 ,$$

což je podobná rovnice jako při definici elipsoidu, ale $a_E > |F_1F_2|$ a $a_H < |F_1F_2|$.

3.9 Příklad. Sestrojme hyperboloid H s ohnisky $F_1[0,0,0]$ a $F_2[2,0,0]$ a s délkou hlavní osy $a_H = 1$. Z předchozích úvah vyplývá

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} - 1\right)^2 - \left((x-2)^2 + y^2 + z^2\right) &= 0 \\
\sqrt{x^2+y^2+z^2} &= -\tfrac{3}{2} + 2x \\
-3x^2 + y^2 + z^2 - \tfrac{9}{4} + 6x &= 0.
\end{aligned}$$

Tento hypeboloid bude mít afinní rovnici $-3x^2 + y^2 + z^2 - \frac{9}{4} + 6x = 0$.

Dále uvažujme elipsoid E s ohnisky hnisky $F_1[0,0,0]$ a $F_3[1,2,3]$ a s délkou hlavní osy $a_E = 7$. Z předchozích úvah vyplývá

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} - 7\right)^2 - \left(x^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2\right) &= 0 \\
\sqrt{x^2+y^2+z^2} &= \tfrac{18}{7} + \tfrac{2}{7}y + \tfrac{3}{7}z \\
x^2 + \tfrac{45}{49}y^2 + \tfrac{40}{49}z^2 - \tfrac{12}{49}yz - \tfrac{72}{49}y - \tfrac{108}{49}z - \tfrac{324}{39} &= 0.
\end{aligned}$$

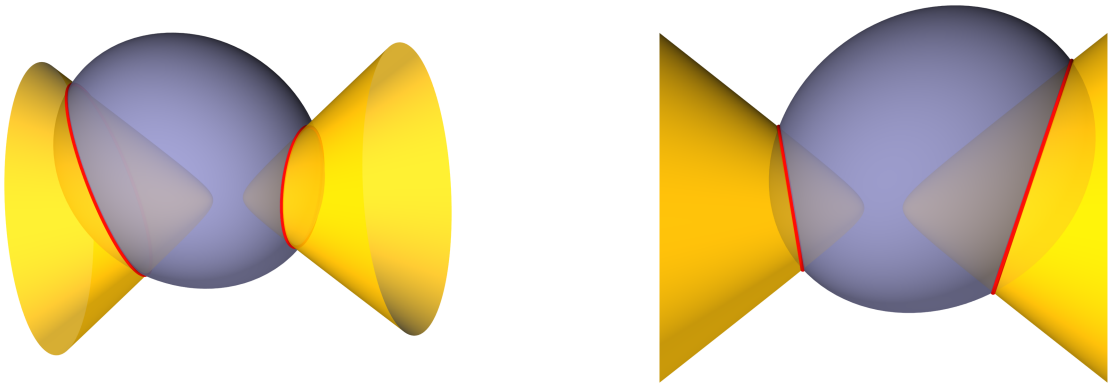
Tento elipsoid bude mít afinní rovnici $x^2 + \frac{45}{49}y^2 + \frac{40}{49}z^2 - \frac{12}{49}yz - \frac{72}{49}y - \frac{108}{49}z - \frac{324}{39} = 0$.

Dostáváme tedy hyperboloid

$$-3x^2 + y^2 + z^2 - \frac{9}{4} + 6x = 0$$

a elipsoid

$$x^2 + \frac{45}{49}y^2 + \frac{40}{49}z^2 - \frac{12}{49}yz - \frac{72}{49}y - \frac{108}{49}z - \frac{324}{39} = 0.$$



Obrázek 3.5: Konfokální hyperboloid a elipsoid. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.9 a jejich průnikovou křivku – dvě kuželosečky, které se neprotínají. Tyto kvadriky mají společné ohnisko a různoběžné osy.

Spočítáme indexovou posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$.

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 12 & 0 & 0 \\ 12 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -324 & 0 & -36 & -54 \\ 0 & 49 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 45 & -6 \\ -54 & 0 & -6 & 40 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = -64(\lambda - 49)^2 \left(\lambda^2 + 1400\lambda + 60028\right)$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = -700 - 105\sqrt{39}$, $\lambda_2 = -700 + 105\sqrt{39}$ a $\lambda_3 = \lambda_4 = 49$.
Volíme $q_0 = -1500$, $q_1 = -50$, $q_2 = 0$ a $q_3 = 50$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = 1500$

$$-1500A - B = \begin{pmatrix} 13824 & -1800 & 36 & 54 \\ -1800 & 17951 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & -6045 & 6 \\ 54 & 0 & 6 & -6040 \end{pmatrix}.$$

  $In(q_0) = 1 = s_0$.

- $q_1 = -50$

$$-50A - B = \begin{pmatrix} 774 & -600 & 36 & 54 \\ -600 & 551 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & -245 & 6 \\ 54 & 0 & 6 & -240 \end{pmatrix}.$$

  Tato kvadrika je hyperbolický paraboloid. $In\,(q_1) = 2 = s_1$.

- $q_2 = 0$

$$-B = \begin{pmatrix} 324 & 0 & 36 & 54 \\ 0 & -49 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & -45 & 6 \\ 54 & 0 & 6 & -40 \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_2) = 1 = s_2$.

- $q_1 = -50$

$$-50A - B = \begin{pmatrix} 774 & -600 & 36 & 54 \\ -600 & 551 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & -245 & 6 \\ 54 & 0 & 6 & -240 \end{pmatrix}.$$

  Tato kvadrika je hyperbolický paraboloid. $In\,(q_1) = 2 = s_1$.

- $q_3 = 50$

$$50A - B = \begin{pmatrix} -126 & 600 & 36 & 54 \\ 600 & -649 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & 155 & 6 \\ 54 & 0 & 6 & 160 \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_3) = 3 = s_3$.

Indexová posloupnost svazku $\lambda A - B$ je $\langle 1 \uparrow 2 \uparrow 1 \uparrow\uparrow 3 \rangle$. Dle Tabulky 2.2 se průnik zadaných kvadrik rozpadá na dvě neprotínající se kuželosečky.

Kvadriky E a H mají společné ohnisko F_1. Dle Věty 3.8 se jejich průnik rozpadá na dvě kuželosečky.

3.10 Příklad. Sestrojme paraboloid P s ohniskem $F_1[0,0,0]$ a řídicí rovinou $\rho:\ z = -2$. Z jednoohniskové definice vyplývá

$$\begin{aligned} |XF_1| &= |X\rho| \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} &= |z+2| \\ x^2+y^2+z^2 &= z^2+4z+4 \\ x^2+y^2-4z-4 &= 0. \end{aligned}$$

Tento paraboloid bude mít afinní rovnici $x^2 + y^2 - 4z - 4 = 0$.

Dále sestrojme elipsoid E s ohnisky hnisky $F_1[0,0,0]$ a $F_2[1,2,3]$ a s délkou hlavní osy $a_E = 7$. Z předchozích úvah vyplývá

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-7\right)^2 - \left(x^2+(y-2)^2+(z-3)^2\right) &= 0 \\
\sqrt{x^2+y^2+z^2} &= \tfrac{18}{7} + \tfrac{2}{7}y + \tfrac{3}{7}z \\
x^2 + \tfrac{45}{49}y^2 + \tfrac{40}{49}z^2 - \tfrac{12}{49}yz - \tfrac{72}{49}y - \tfrac{108}{49}z - \tfrac{324}{39} &= 0.
\end{aligned}$$

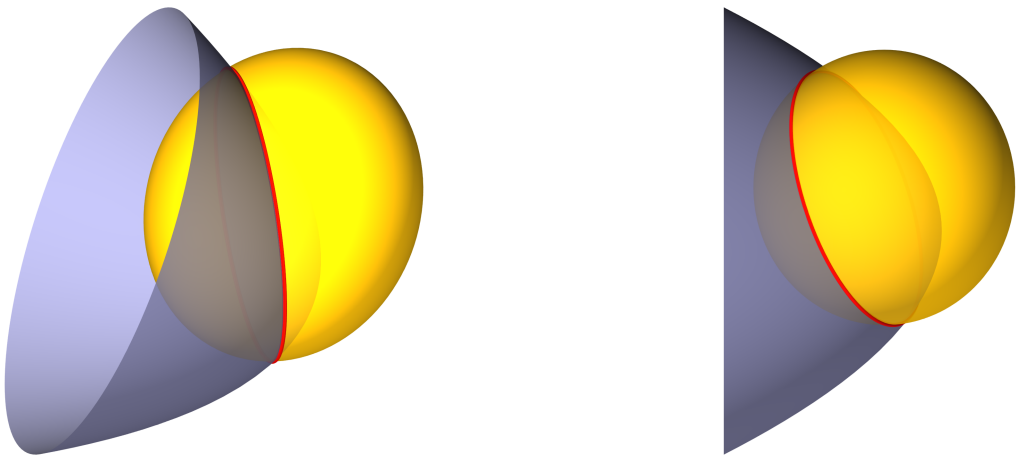
Tento elipsoid bude mít afinní rovnici $x^2 + \frac{45}{49}y^2 + \frac{40}{49}z^2 - \frac{12}{49}yz - \frac{72}{49}y - \frac{108}{49}z - \frac{324}{39} = 0$.

Dostáváme tedy paraboloid

$$x^2 + y^2 - 4z - 4 = 0$$

a elipsoid

$$x^2 + \frac{45}{49}y^2 + \frac{40}{49}z^2 - \frac{12}{49}yz - \frac{72}{49}y - \frac{108}{49}z - \frac{324}{39} = 0.$$



Obrázek 3.6: Konfokální elipsoid a paraboloid. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.10 a jejich průnikovou křivku – jednu kuželosečku. Tyto kvadriky mají společné ohnisko a různoběžné osy.

Spočítáme indexovou posloupnost zadaných kvadrik.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -324 & 0 & -36 & -54 \\ 0 & 49 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 45 & -6 \\ -54 & 0 & -6 & 40 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = -4(\lambda - 49)^2 \left(\lambda^2 - 90\lambda + 3969\right)$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = 49$.
Volíme $q_0 = 0$ a $q_1 = 50$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = 0$

$$-B = \begin{pmatrix} 324 & 0 & 36 & 54 \\ 0 & -49 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & -45 & 6 \\ 54 & 0 & 6 & -40 \end{pmatrix}.$$

  $In(q_0) = 1 = s_0$.

- $q_1 = 50$

$$50A - B = \begin{pmatrix} 124 & 0 & 36 & -46 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & 5 & 6 \\ -46 & 0 & 6 & -40 \end{pmatrix}.$$

  $In(q_1) = 3 = s_1$.

Indexová posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je $\langle 1 \uparrow\uparrow 3 \rangle$. Dle Tabulky 2.2 se průnik zadaných kvadrik rozpadá na jednu reálnou a jednu imaginární kuželosečku.

Kvadriky E a P mají společné ohnisko F_1. Dle Věty 3.8 se jejich průnik rozpadá na dvě kuželosečky, jednu reálnou a jednu imaginární, jak plyne indexové posloupnosti.

3.11 Příklad. Sestrojme paraboloid P s ohniskem $F_1[0,0,0]$ a řídicí rovinou $\rho: \; z = -2$. Z jednoohniskové definice vyplývá

$$\begin{aligned} |XF_1| &= |X\rho| \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} &= |z + 2| \\ x^2 + y^2 + z^2 &= z^2 + 4z + 4 \\ x^2 + y^2 - 4z - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Tento paraboloid bude mít afinní rovnici $x^2 + y^2 - 4z - 4 = 0$.

Dále sestrojme kužel K s vrcholem $V[0,0,0]$ a řídicí rovinou $\delta:\ x+y+z=0$. V jednoohniskové definici pro kužele položme $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{3}$ a potom vyplývá

$$\begin{aligned} |X\delta|\sqrt{3} &= |XV| \\ \tfrac{x+y+z}{\sqrt{3}}\sqrt{3} &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ 2xy+2yz+2zx &= 0. \end{aligned}$$

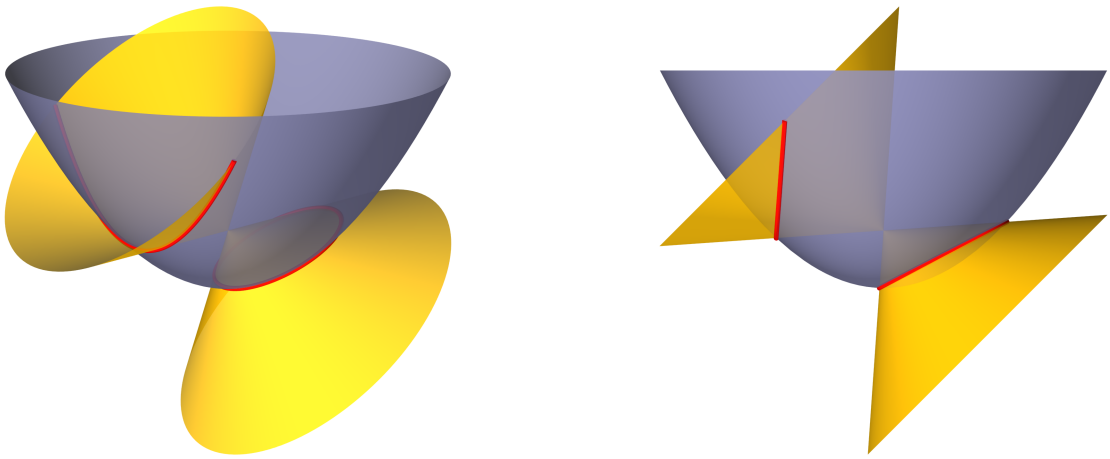
Tento kužel bude mít afinní rovnici $2xy+2yz+2zx=0$.

Dostáváme tedy paraboloid

$$x^2+y^2-4z-4=0$$

a kužel

$$2xy+2yz+2zx=0.$$



Obrázek 3.7: Konfokální paraboloid a kužel. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.10 a jejich průnikovou křivku – dvě kuželosečky. Tyto kvadriky mají společné ohnisko a různoběžné osy.

Spočítáme indexovou posloupnost zadaných kvadrik.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = -4\lambda(\lambda - 2)(1 + \lambda)^2$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$ a $\lambda_4 = 2$.
Volíme $q_0 = -2$, $q_1 = -\frac{1}{2}$, $q_2 = 1$ a $q_3 = 3$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = -2$

$$-2A - B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

  $In(q_0) = 1 = s_0$.

- $q_1 = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}A - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

  $In(q_1) = 3 = s_1$.

- $q_2 = 1$

$$A - B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

  $In(q_2) = 2 = s_2$.

- $q_3 = 3$

$$3A - B = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

  $In(q_3) = 3 = s_3$.

Indexová posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je $\langle 1 \uparrow\uparrow 3 \uparrow 2 \uparrow 3 \rangle$. Dle Tabulky 2.2 se průnik zadaných kvadrik rozpadá na dvě reálné neprotínající se kuželosečky.

Kvadriky K a P mají společné zobecněné ohnisko F_1. Dle Věty 3.8 se jejich průnik rozpadá na dvě kuželosečky.

3.4 Kvadriky ve středové kolineaci

Tato podkapitola je jedním z hlavních přínosů této práce a výsledky z této podkapitoly dosud nebyly publikovány. Uvažujme dvě kvadriky a středovou kolineaci takovou, že převádí jednu kvadriku na druhou.

3.12 Definice. Projektivní transformace projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$ různá od identity se nazývá **středová kolineace**, jsou-li samodružné všechny body pevně zvolené nadroviny $\nu = \mathbb{P}'_{n-1} \subset \mathbb{P}_n$ (tzv. osy kolineace) a rovněž všechny nadroviny procházející pevně zvoleným bodem $S \in \mathbb{P}_n$ (tzv. středem kolineace). Jestliže střed inciduje s osou, potom hovoříme o tzv. **elaci**, v opačném případě o **homologii**.

Osa kolineace je tzv. silně samodružná, tj. každý její bod je samodružný. nadroviny procházející středem kolineace jsou tzv. slabě samodružné.

Tato definice je uvedena v [9, str. 70]. Zvláštními afinními případy středové kolineace jsou osová afinita (nevlastní střed kolineace, vlastní osa kolineace), posunutí (nevlastní střed kolineace, nevlastní osa kolineace) nebo stejnolehlost (vlastní střed kolineace, nevlastní osa kolineace).

3.13 Věta. *Máme-li dvě kvadrik a středovou kolineaci, která jednu zobrazuje na druhou, pak se jejich průnik rozpadá na na dvě kuželosečky.*

Důkaz. Označme si tyto kvadriky A a B. Osou středové kolineace v prostoru je rovina, kterou si označíme ν. Průnik kvadriky A s rovinou ν je kuželosečka k, která je také průnikem kvadriky B s rovinou ν. Průnik kvadrik A, B se rozpadá na tuto kuželosečku k a další kuželosečku. □

Při dokazování Věty 3.13 jsme využili pouze vlastnosti, že středová kolineace v prostoru má rovinu silně samodružných bodů. Větu 3.13 můžeme zobecnit na projektivní zobrazení, která mají rovinu samodružných bodů.

3.14 Příklad. Uvažujme dvě kuželové plochy

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{9}z^2 = 0$$

a

$$(x-1)^2 + \frac{1}{4}(y+1)^2 - \frac{1}{9}(z+2)^2 = 0.$$

Obrázek 3.8: Dva posunuté kužele. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.14 a jejich průnikovou křivku – dvě kuželosečky. Tyto kužele mají rovnoběžné osy a jsou shodné, proto mají společnou nevlastní kuželosečku.

Žádná z uvažovaných kvadrik není regulární. Označme $\bar{A} = A + B$ a $\bar{B} = B$. Spočítáme indexovou posloupnost parametrizovaného svazku $\bar{\lambda}\bar{A} - \bar{B}$.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 29 & -36 & 9 & -8 \\ -36 & 72 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 18 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 29 & -36 & 9 & -8 \\ -36 & 36 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 9 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\bar{\lambda}\bar{A} - \bar{B}\right) = -37584\left(2\bar{\lambda} - 1\right)^2\left(\bar{\lambda} - 1\right)\bar{\lambda}$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\bar{\lambda}_1 = 0$, $\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_3 = \frac{1}{2}$ a $\bar{\lambda}_4 = 1$.
Volíme $q_0 = -1$, $q_1 = \frac{1}{4}$, $q_2 = \frac{3}{4}$ a $q_3 = 2$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = -1$

$$-\bar{A} - \bar{B} = \begin{pmatrix} -58 & 72 & -18 & 16 \\ 72 & -108 & 0 & 0 \\ -18 & 0 & -27 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

  $In\left(q_0\right) = 1 = s_0$.

- $q_1 = \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{4}\bar{A} - \bar{B} = \begin{pmatrix} -\frac{87}{4} & 27 & -\frac{27}{4} & 6 \\ 27 & -18 & 0 & 0 \\ -\frac{27}{4} & 0 & -\frac{9}{2} & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

  Tato kvadrika je jednodílný hyperboloid. $In\,(q_1) = 2 = s_1$.

- $q_2 = \frac{3}{4}$

$$\frac{3}{4}\bar{A} - \bar{B} = \begin{pmatrix} -\frac{29}{4} & 9 & -\frac{9}{4} & 2 \\ 9 & 18 & 0 & 0 \\ -\frac{9}{4} & 0 & \frac{9}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  Tato kvadrika je jednodílný hyperboloid. $In\,(q_2) = 2 = s_2$.

- $q_3 = 2$

$$2\bar{A} - \bar{B} = \begin{pmatrix} 29 & -36 & 9 & -8 \\ -36 & 108 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 27 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_3) = 3 = s_3$.

Indexová posloupnost parametrizovaného svazku $\bar{\lambda}\bar{A} - \bar{B}$ je $\langle 1 \uparrow 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow 3 \rangle$. Z Tabulky 2.2 plyne, že se průnik uvažovaných kvadrik rozpadá na dvě reálné kuželosečky protínající se ve dvou bodech.

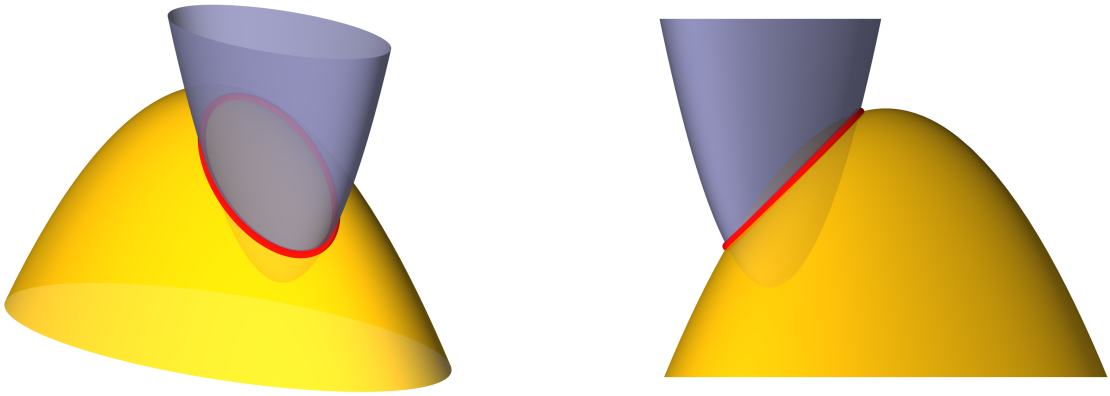
Uvažované kvadriky jsou shodné, liší se pouze posunutím. Posunutí je speciálním případem středové kolineace. Průniková křivka se dle Věty 3.13 rozpadá na dvě kuželosečky. Protože se jedná o shodné posunuté kužely, jedna z těchto kuželoseček je nevlastní. Dle indexové posloupnosti se kuželosečky průniku protínají, proto druhá kuželosečky musí být hyperboloid.

3.15 Příklad. Uvažujme dva paraboloidy

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 - 2z = 0$$

a

$$\frac{1}{4}(-x+1)^2 + \frac{1}{16}(-y+2)^2 + z - 6 = .$$



Obrázek 3.9: Dva paraboloidy ve stejnolehnosti se záporným koeficientem. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.15 a jejich průnikovou křivku. Osy paraboloidů jsou rovnoběžné, tzn. dotýkají se nevlastní roviny ve stejném bodě. Tuto stejnolehlost lze popsat rovnicemi $x' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, $y' = -\frac{1}{2}y + 1$ a $z' = -\frac{1}{2}z + 3$.

Spočítáme indexovou posloupnost určených kvadrik.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -88 & -4 & -2 & 8 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = 16(\lambda + 2)^2(\lambda - 1)^2$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ a $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$.
Volíme $q_0 = -5$, $q_1 = 0$ a $q_2 = 2$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = -5$

$$-5A - B = \begin{pmatrix} 88 & 4 & 2 & 12 \\ 4 & -24 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  $In(q_0) = 1 = s_0$.

- $q_1 = 0$

$$-B = \begin{pmatrix} 88 & 4 & 2 & -8 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_1) = 1 = s_1$.

- $q_2 = 2$

$$2A - B = \begin{pmatrix} 88 & 4 & 2 & -16 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_2) = 3 = s_2$.

Indexová posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je $\langle 1 \uparrow\uparrow 1 \uparrow\uparrow 3 \rangle$. Dle Tabulky 2.3 zatím není průnik kvadrik určen jednoznačně. Ještě musíme dopočítat znaménkovou posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$.

$$\lambda_0 A - B = -2A - B = \begin{pmatrix} 88 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -12 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

má signaturu $(1, 1, 2)$.

$$\lambda_1 A - B = A - B = \begin{pmatrix} 88 & 4 & 2 & -12 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

má signaturu $(2, 1, 1)$. Znaménková posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je $(1\,((1, 2))\,1\,((1, 1))\,3)$. Průnik zadaných kvadrik se rozpadá na jednu reálnou kuželosečku a dvojici imaginárních přímek, které se protínají v reálném bodě.

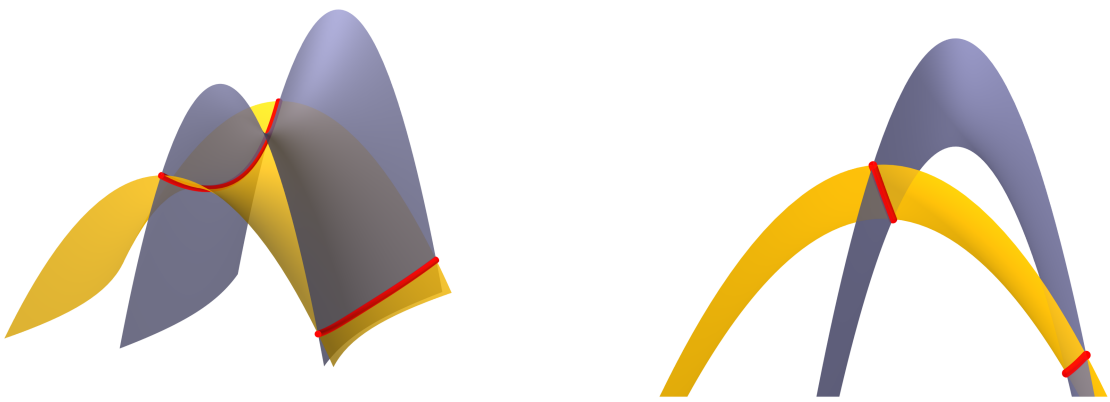
Uvažované kvadriky jsou vzorem a obrazem ve středové kolineaci – mají rovnoběžné osy a jejich hlavní poloosy jsou ve stejném poměru. Stejnolehlost je speciálním případem středové kolineace. Průniková křivka se dle Věty 3.13 na dvě kuželosečky. Jedna tato kuželosečky je elipsa a druhá kuželosečka jsou dvě přímky, které se protínají v nevlastním bodě, který tyto paraboloidy mají společný.

3.16 Příklad. Uvažujme dva hyperbolické paraboloidy

$$x^2 - 2y^2 - 2z = 0$$

a

$$(2x-4)^2 - 2(2y+2)^2 - 4z = 0.$$



Obrázek 3.10: Dva paraboloidy ve stejnolehlosti s kladným koeficientem. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.16 a jejich průnikovou křivku. Osy paraboloidů jsou rovnoběžné, tzn. protínají nevlastní nadrovinu ve stejný nevlastních přímkách. Tuto stejnolehlost lze popsat rovnicemi $x' = 2x - 4$,$y' = 2y + 2$ a $z' = 2z$.

Spočítáme indexovou posloupnost určených kvadrik.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 8 & -8 & -8 & -2 \\ -8 & 4 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = 2(\lambda - 2)^2(\lambda - 4)^2$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ a $\lambda_3 = \lambda_4 = 4$.
Volíme $q_0 = 0$, $q_1 = 3$ a $q_2 = 5$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = 0$

$$-B = \begin{pmatrix} -8 & 8 & 8 & 2 \\ 8 & -4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Tato kvadrika je hyperbolický paraboloid. $In\,(q_0) = 3 = s_0$.

- $q_1 = 2$

$$3A - B = \begin{pmatrix} -8 & 8 & 8 & -1 \\ 8 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Tato kvadrika je hyperbolický paraboloid. $In\,(q_1) = 2 = s_1$.

- $q_2 = 5$

$$5A - B = \begin{pmatrix} -8 & 8 & 8 & -3 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Tato kvadrika je hyperbolický paraboloid. $In\,(q_2) = 2 = s_2$.

Indexová posloupnost svazku $\lambda A - B$ je $\langle 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 2 \rangle$. Dle Tabulek 2.3 a 2.1 zatím není průnik kvadrik určen jednoznačně. Ještě musíme dopočítat znaménkovou posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$.

$$\lambda_0 A - B = 2A - B = \begin{pmatrix} -8 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & -2 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

má signaturu $(1, 2, 1)$.

$$\lambda_1 A - B = 4A - B = \begin{pmatrix} -8 & 8 & 8 & -2 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 + 2\sqrt{37} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 - \sqrt{37} \end{pmatrix}$$

má signaturu $(2, 1, 1)$. Znaménková posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je $(2\,((2, 1))\,2\,((1, 1))\,2)$. Průnik určených kvadrik se rozpadá na jednu reálnou kuželosečku

a dvě reálné přímky (nevlastní), protínající se ve třech bodech (nevlastních).

Uvažované paraboloidy si mohou být navzájem vzorem a obrazem ve stejnolehlosti – mají rovnoběžné osy a jejich hlavní poloosy jsou ve stejném poměru. Stejnolehlost je speciálním případem středové kolineace. Průniková křivka se dle Věty 3.13 rozpadá na dvě kuželosečky. Jedna tato kuželosečka je vlastní a je to hyperbola, druhá kuželosečka je dvojice nevlastních přímek – asymptot nevlastní hypeboly, které se protínají v nevlasním bodě – ose paraboloidů.

Nyní budou následovat tři příklady osové afinity.

3.17 Příklad. Uvažujme kulovou plochu

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$$

. Dále uvažujme osovou afinitu s rovinou samodružných bodů $y = 0$. Obraz středu této kulové plochy $S\,[0,1,0]$ je $S'\,[1,2,1]$. Nyní dopočítáme analytické vyjádření této osové afinity

$$(x', y', z') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

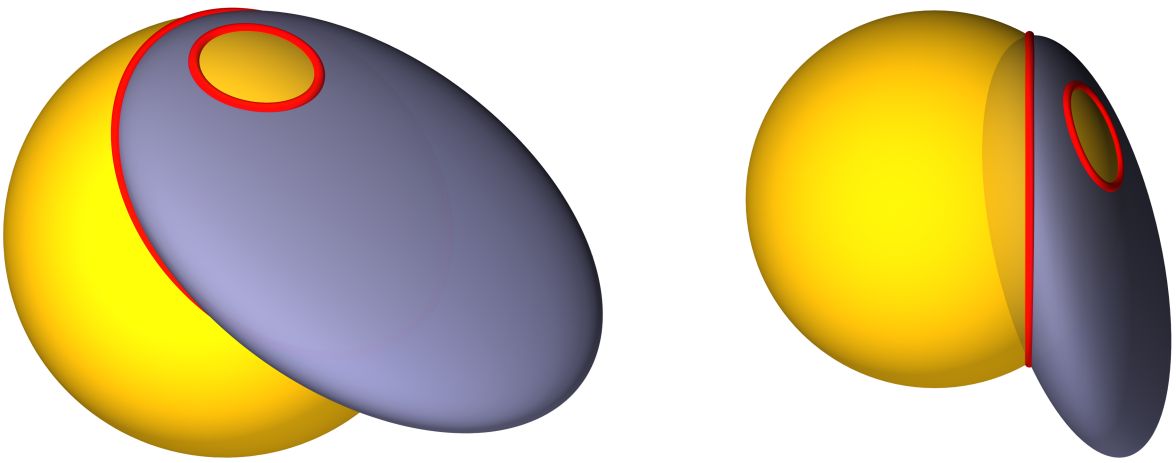
Obrazem kulové plochy v této afinitě je elipsoid $\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}y + z\right)^2 = 4$.

Máme tedy kulovou plochu

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$$

a elipsoid

$$\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}y + z\right)^2 = 4.$$



Obrázek 3.11: Sféra a elipsoid–vzor a obraz osové afinity. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.17 a jejich průnikovou křivku – dvě elipsy v různoběžných rovinách.

Spočítáme indexovou posloupnost zadaných kvadrik.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -12 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = -(\lambda - 4)^2 \left(4\lambda^2 - 25\lambda + 16\right)^2$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = \frac{25-3\sqrt{41}}{8}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$ a $\lambda_4 = \frac{25+3\sqrt{41}}{8}$. Volíme $q_0 = 0$, $q_1 = 1$, $q_2 = 5$ a $q_3 = 6$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = 0$

$$-B = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

  $In(q_0) = 1 = s_0$.

- $q_1 = 1$

$$A - B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$In\,(q_1) = 2 = s_1$.

- $q_2 = 5$

$$5A - B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}).$$

$In\,(q_2) = 2 = s_2$.

- $q_1 = 6$

$$6A - B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$In\,(q_1) = 3 = s_1$.

Indexová posloupnost svazku $\lambda A - B$ je $\langle 1 \uparrow 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow 3 \rangle$. Dle Tabulky 2.2 se průnik zadaných kvadrik rozpadá na dvě neprotínající se kuželosečky.

Elipsoid je obrazem koule v osové afinitě. Afinita je speciálním případem středové kolineace. Průniková křivka se dle Věty 3.13 rozpadá na dvě kuželosečky.

3.18 Příklad. Uvažujme kulovou plochu

$$x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$$

. Dále uvažujme osovou afinitu s rovinou samodružných bodů $y = 0$. Obraz středu této kulové plochy $S\,[0, 2, 0]$ je $S'\,[2, 4, 0]$. Nyní dopočítáme analytické vyjádření této osové afinity

$$(x', y', z') = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

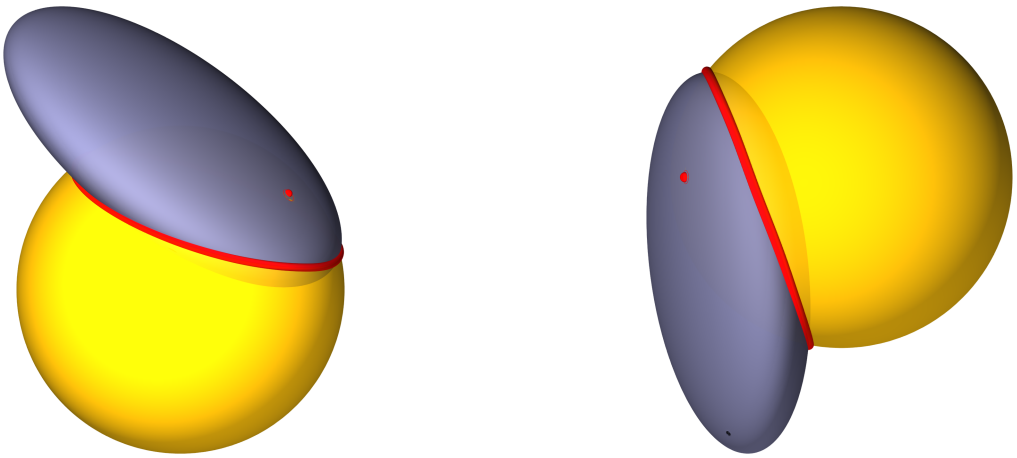
Obrazem kulové plochy v této afinitě je elipsoid $(x+y)^2 + (2y-2)^2 + z^2 = 4$.

Máme tedy kulovou plochu

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$$

a elipsoid

$$(x+y)^2 + (2y-2)^2 + z^2 = 4.$$



Obrázek 3.12: Sféra a elipsoid–vzor a obraz osové afinity. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.18 a jejich průnikovou křivku – jedna elipsa a bod, ve kterém se kvadriky dotýkají.

Spočítáme indexovou posloupnost zadaných kvadrik.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = -4(\lambda - 2)^2 \left(\lambda^4 - 1\right)^2$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ a $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$.
Volíme $q_0 = 0$, $q_1 = \frac{3}{2}$ a $q_2 = 3$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = 0$

$$-B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  $In(q_0) = 1 = s_0$.

- $q_1 = \frac{3}{2}$

$$\frac{3}{2}A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$In\,(q_1) = 3 = s_1.$

- $q_2 = 3$

$$3A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1+\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1-\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix}.$$

$In\,(q_2) = 3 = s_2.$

Indexová posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je $\langle 1 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow 3 \rangle$. Dle Tabulky 2.2 zatím není průnik kvadrik určen jednoznačně. Ješzě musíme dopočítat znaménkovou posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$.

$$\lambda_0 A - B = A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

má signaturu $(2, 1, 1)$.

$$\lambda_1 A - B = 2A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

má signaturu $(1, 2, 1)$. Znaménková posloupnosti parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je $(1\,((1,1))\,1\,((2,1))\,3)$. Průnik zadaných kvadrik se rozpadá na jednu reálnou kuželosečku a dvojici imaginárních přímek, které se protínají v reálném bodě, ve kterém se uvažované kvadriky dotýkají.

Elipsoid je obrazem koule v osové afinitě. Afinita je speciálním případem středové kolineace. Průniková křivka se dle Věty 3.13 rozpadá na dvě kuželosečky.

3.19 Příklad. Uvažujme kulovou plochu

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$$

. Dále uvažujme osovou afinitu s rovinou samodružných bodů $y = 0$. Obraz středu této kulové plochy $S\,[0, 1, 0]$ je $S'\left[\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right]$. Nyní dopočítáme analytické vyjádření této osové

afinity

$$(x', y', z') = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

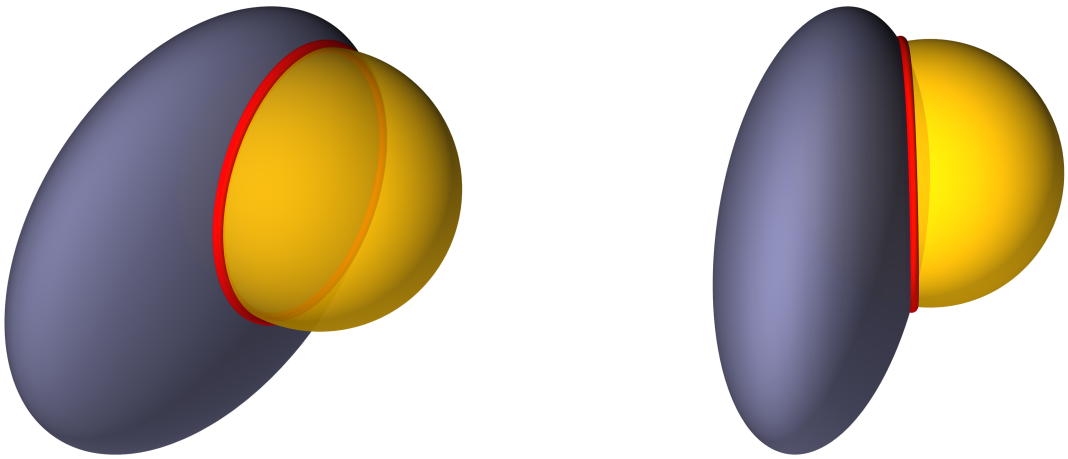
Obrazem kulové plochy v této afinitě je elipsoid $\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + (2y-1)^2 + \left(\frac{1}{2}y + z\right)^2 = 1$.

Máme tedy kulovou plochu

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$$

a elipsoid

$$\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + (2y-1)^2 + \left(\frac{1}{2}y + z\right)^2 = 1.$$



Obrázek 3.13: Sféra a elipsoid–vzor a obraz osové afinity. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.19 a jejich průnikovou křivku – jednu kuželosečku.

Spočítáme indexovou posloupnost zadaných kvadrik.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -8 & 1 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = -(\lambda - 2)^2 \left(\lambda^4 + \lambda + 16\right)^2$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.
Volíme $q_0 = 0$ a $q_1 = 3$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = 0$

$$-B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 8 & -1 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_0) = 1 = s_0$.

- $q_1 = 3$

$$3A - B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_1) = 3 = s_1$.

Indexová posloupnost svazku $\lambda A - B$ je $\langle 1 \uparrow\uparrow 3 \rangle$. Dle Tabulky 2.2 se průnik zadaných kvadrik rozpadá na jednu reálnou a jednu imaginární kuželosečku.

Elipsoid je obrazem koule v osové afinitě. Afinita je speciálním případem středové kolineace. Průniková křivka se dle Věty 3.13 rozpadá na dvě kuželosečky.

3.5 Souosé kvadriky

Každou kvadriku lze ve vhodných eukleidovských souřadnicích popsat tzv. kanonickou rovnicí.
Pro regulární kvadriky se jedná o tyto rovnice:

1. elipsoid: $\frac{(x-p_x)^2}{a^2} + \frac{(y-p_y)^2}{b^2} + \frac{(z-p_z)^2}{c^2} = 1$
2. jednodílný hyperboloid: $\frac{(x-p_x)^2}{a^2} + \frac{(y-p_y)^2}{b^2} - \frac{(z-p_z)^2}{c^2} = 1$
3. dvojdílný hyperboloid: $\frac{(x-p_x)^2}{a^2} - \frac{(y-p_y)^2}{b^2} - \frac{(z-p_z)^2}{c^2} = 1$
4. eliptický paraboloid: $\frac{(x-p_x)^2}{p^2} + \frac{(y-p_y)^2}{q^2} + 2\,(z - p_z) = 0$
5. hyperbolický paraboloid: $\frac{(x-p_x)^2}{p^2} - \frac{(y-p_y)^2}{q^2} + 2\,(z - p_z) = 0$,

kde a, b, $c\,p$ a q jsou nenulová realná čísla. Koeficienty p_x, p_y a p_z budeme nazývat koeficienty posunutí.

3.20 Definice. Budeme-li uvažovat regulární kvadriky popsané v předchozí poznámce, jejich **orientovanými poloosami** budeme rozumět čísla

1. a, b a c, pokud se jedná o elipsoid
2. a, b a $-c$, pokud se jedná o jednodílný hyperboloid
3. a, $-b$ a $-c$, pokud se jedná o dvojdílný hyperboloid
4. p, q a 0, pokud se jedná o eliptický paraboloid
5. p, $-q$ a 0, pokud se jedná o hyperbolický paraboloid.

Tyto orientované poloosy budeme znači o_x, o_y a o_z.

„Běžné“ poloosy jsou kladná reálná čísla a orientované poloosy jsou reálná čísla. Platí, že „běžná poloosa“ = |orientovaná poloosa|.

Každou regulární středovou kvadriku lze při vhodné volbě souřadnic popsat rovnicí $sgn\,(o_x)\,\frac{(x-p_x)^2}{o_x^2} + sgn\,(o_y)\,\frac{(y-p_y)^2}{o_y^2} + sgn\,(o_z)\,\frac{(z-p_z)^2}{o_z^2} = 1$. (Viz 1, 2. a 3. v Definice 3.20.) Každou regulární nestředovou kvadriku lze při vhodné afinní volbě souřadnic popsat rovnicí $sgn\,(o_x)\,\frac{(x-p_x)^2}{o_x^2} + sgn\,(o_y)\,\frac{(y-p_y)^2}{o_y^2} + 2\,(z-p_z) = 0$. (Viz 4. a 5. v Definici 3.20.)

3.21 Definice. Kvadriky, které mají stejné směry os nazveme **souosými kvadrikami**. Souosé středové kvadriky nemusí mít společný střed.

3.22 Věta. *Mějme dvě středové souosé regulární kvadriky se společným středem, s nulovými koeficienty posunutí a s orientovanými poloosami o_x, o_y, o_z, $\bar{o}_x$, $\bar{o}_y$ a $\bar{o}_z$. Průnik těchto kvadrik se rozpadá na dvě kuželosečky, právě tehdy, když:*

a) $\exists i \in \{x, y, z\}\ \ o_i = \bar{o}_i$ *nebo*

b) $\exists i,\, j \in \{x, y, z\}\ \ \frac{o_i}{\bar{o}_i} = \frac{o_j}{\bar{o}_j}$.

Důkaz. Uvažujme tyto dvě kvadriky v projektivním prostoru. Matice těchto kvadrik jsou

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sgn\,(o_x)\,\frac{1}{o_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sgn\,(o_y)\,\frac{1}{o_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sgn\,(o_z)\,\frac{1}{o_z^2} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sgn\left(\bar{o}_x\right)\frac{1}{\bar{o}_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sgn\left(\bar{o}_y\right)\frac{1}{\bar{o}_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sgn\left(\bar{o}_z\right)\frac{1}{\bar{o}_z^2} \end{pmatrix}.$$

Substituce k zjednodušení zápisu: $c_i = sgn\left(o_i\right)\frac{1}{o_i^2}$ a $\bar{c}_i = sgn\left(\bar{o}_i\right)\frac{1}{\bar{o}_i^2}$, pro $i \in \{x, y, z\}$.

Průnik dvou kvadrik se rozpadá, jestliže matice parametrizovaného svazku $\lambda A - B$, který určují tyto dvě kvadriky, má alespoň jedno vlastní číslo s geometrickou násobností 2.

$$\lambda A - B = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda c_x - \bar{c}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda c_y - \bar{c}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda c_z - \bar{c}_z \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\lambda A - B\right) = \left(\lambda - 1\right)\left(\lambda c_x - \bar{c}_x\right)\left(\lambda c_y - \bar{c}_y\right)\left(\lambda c_z - \bar{c}_z\right).$$

Vlastní číslo této matice bude mít geometrickou násobnost 2, pokud $c_i = \bar{c}_i$ pro $i \in \{x, y, z\}$ nebo pokud $\frac{c_i}{\bar{c}_i} = \frac{c_j}{\bar{c}_j}$ pro $i \neq j$ a $i, j \in \{x, y, z\}$.

Po vrácení substituce dostáváme: $sgn\left(o_i\right) o_i^2 = sgn\left(\bar{o}_i\right) \bar{o}_i^2$ a $\frac{sgn(o_i)o_i^2}{sgn(\bar{o}_i)\bar{o}_i^2} = \frac{sgn(o_j)o_j^2}{sgn(\bar{o}_j)\bar{o}_j^2}$ a po úpravách $o_i = \bar{o}_i$ pro $i \in \{x, y, z\}$ nebo $\frac{o_i}{\bar{o}_i} = \frac{o_j}{\bar{o}_j}$ pro $i \neq j$ a $i, j \in \{x, y, z\}$. □

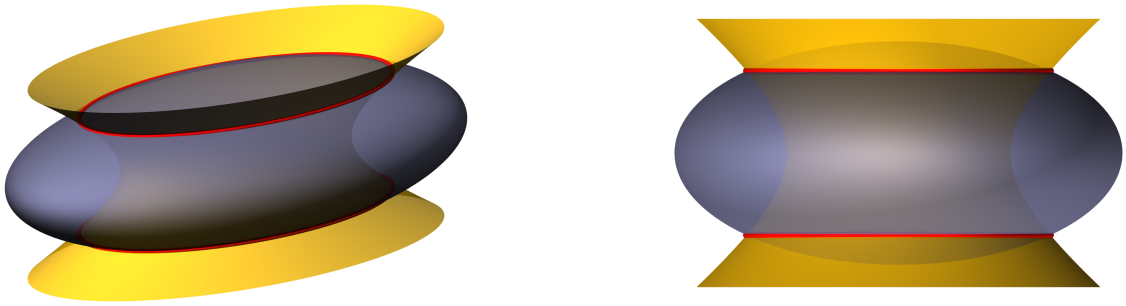
Jinými slovy tato věta říká, že průnik dvou souosých středových kvadrik se rozpadá na dvě kuželosečky, pokud mají shodnou dvojici vrcholů nebo pokud poměr dvou jejich poloosy je shodný. Pokud mají kvadriky shodnou dvojici vrcholů, pak se v těchto vrcholech dotýkají a jejich průnik se rozpadá v důsledku Věty 3.1.

3.23 Příklad. Uvažujme elipsoid

$$2x^2 + 4y^2 + 6z^2 = 1$$

a hyperboloid

$$4x^2 + 8y^2 - 5z^2 = 1.$$



Obrázek 3.14: Souosý elipsoid a hyperboloid. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.23 a jejich průnikovou křivku. Poměr jejich poloos je shodný a roven 2. Půrnik se rozpadá an dvě kuželosečky, které eleží v rovnoběžných rovinách.

Spočítáme indexovou posloupnost parametrizovaného svazku uavžovaných kvadrik.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = 2(1-\lambda)(2\lambda - 4)^2(6\lambda + 5)$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = -\frac{5}{6}$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$.
Volíme $q_0 = -1$, $q_1 = 0$, $q_2 = \frac{3}{2}$ a $q_3 = 3$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = -1$

$$-A - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  $In(q_0) = 1 = s_0$.

- $q_1 = 0$

$$-B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_1) = 2 = s_1$.

- $q_2 = \frac{3}{2}$

$$2\left(\frac{3}{2}A - B\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_2) = 1 = s_2$.

- $q_3 = 3$

$$3A - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 23 \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_3) = 3 = s_3$.

Indexová posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je $\langle 1 \uparrow 2 \uparrow 1 \uparrow\uparrow 3 \rangle$. Z Tabulky 2.2 plyne, že se průnik zadaných kvadrik rozpadá na dvě neprotínající se reálné kuželosečky.

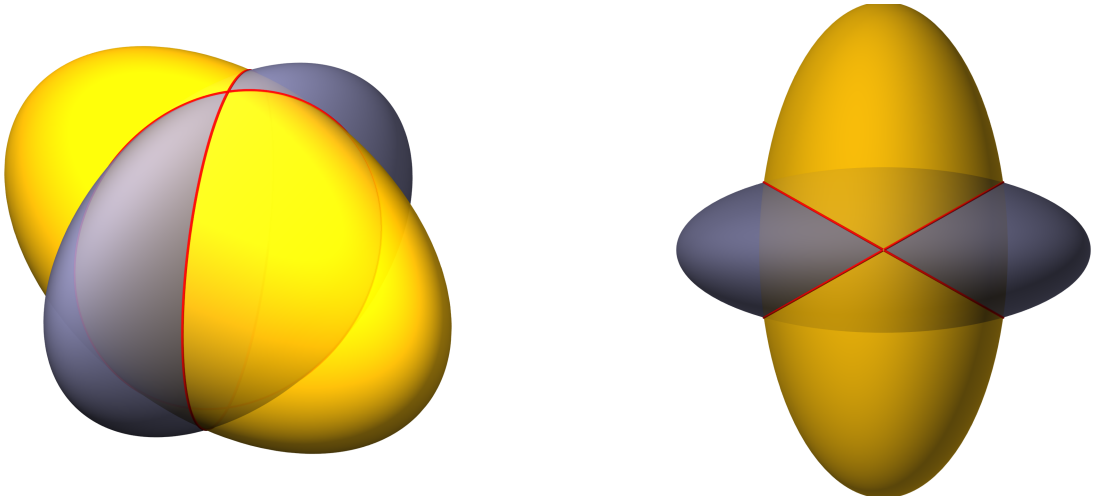
Dle Věty 3.22 se průnik zadaných kvadrik rozpadá na dvě kuželosečky, protože $\frac{o_x}{\bar{o}_x} = \frac{o_y}{\bar{o}_y} = 2$.

3.24 Příklad. Uvažujme dva elipsoidy

$$2x^2 + 8y^2 + 4z^2 = 1$$

a

$$7x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1.$$



Obrázek 3.15: Souosé elipsoidy. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.24 a jejich průnikovou křivku. Tyto elipsoidy se dotýkají ve svých hlavních vrcholech, v důsledku Věty 3.1 se jejich průnik rozpadá na dvě kuželosečky, které s eprotínají v těchto bodech dotyku.

Spočítáme indexovou posloupnost parametrizovaného svazku zadaných kvadrik.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = -4(\lambda - 1)^2 (2\lambda - 7)(8\lambda - 3)$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = \frac{3}{8}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = \frac{7}{2}$.
Volíme $q_0 = 0$, $q_1 = \frac{1}{2}$, $q_2 = 2$ a $q_3 = 4$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = 0$

$$-B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

  $In(q_0) = 1 = s_0$.

- $q_1 = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}A - B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_1) = 2 = s_1$.

- $q_2 = 2$

$$2A - B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_2) = 2 = s_2$.

- $q_3 = 4$

$$4A - B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_3) = 3 = s_3$.

Indexová posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je $\langle 1 \uparrow 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow 3 \rangle$. Z Tabulky 2.2 plyne, že se průnik zadaných kvadrik rozpadá na dvě reálné kuželosečky protínající se ve dvou bodech.

Průnik zadaných elipsoidů se dle Věty 3.22 rozpadá na dvě kuželosečky, protože $o_z = \bar{o}_z = 4$. Průnik těchto dvou kvadrik se také rozpadá v důsledku Věty 3.1.

3.25 Věta. *Mějme dvě souosé regulární kvadriky, jednu středovou s nulovými koeficienty posunutí a s orientovanými poloosami o_x, o_y a o_z a druhou nestředovou s nulovými koeficienty posunutí a s orientovanými poloosami $\bar{o}_x$, $\bar{o}_y$ a 0. Průnik těchto kvadrik se rozpadá na dvě kuželosečky, jestliže :*

$$\frac{o_x}{\bar{o}_x} = \frac{o_y}{\bar{o}_y}.$$

Důkaz. Budeme postupovat analogicky jako při dokazování Věty 3.22.

Uvažujme kvadriky v projektivním prostoru. Jejich matice jsou:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sgn\,(o_x)\,\frac{1}{o_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sgn\,(o_y)\,\frac{1}{o_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sgn\,(o_z)\,\frac{1}{o_z^2} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & sgn\,(\bar{o}_x)\,\frac{1}{\bar{o}_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sgn\,(\bar{o}_y)\,\frac{1}{\bar{o}_y^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Použijeme substituci $c_i = sgn\,(o_i)\,\frac{1}{o_i^2}$ a $\bar{c}_i = sgn\,(\bar{o}_i)\,\frac{1}{\bar{o}_i^2}$.
Průnik dvou kvadrik A, B se rozpadá, jestliže matice svazku $A - \lambda B$, který určují tyto dvě kvadriky, má alespoň jedno vlastní číslo s geometrickou násobností 2.

$$A - \lambda B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & c_x - \lambda\bar{c}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_y - \lambda\bar{c}_y & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & c_z \end{pmatrix}.$$

$$\det\,(A - \lambda B) = -\,(c_x - \lambda\bar{c}_x)\,(c_y - \lambda\bar{c}_y)\,\left(c_z + \lambda^2\right)$$

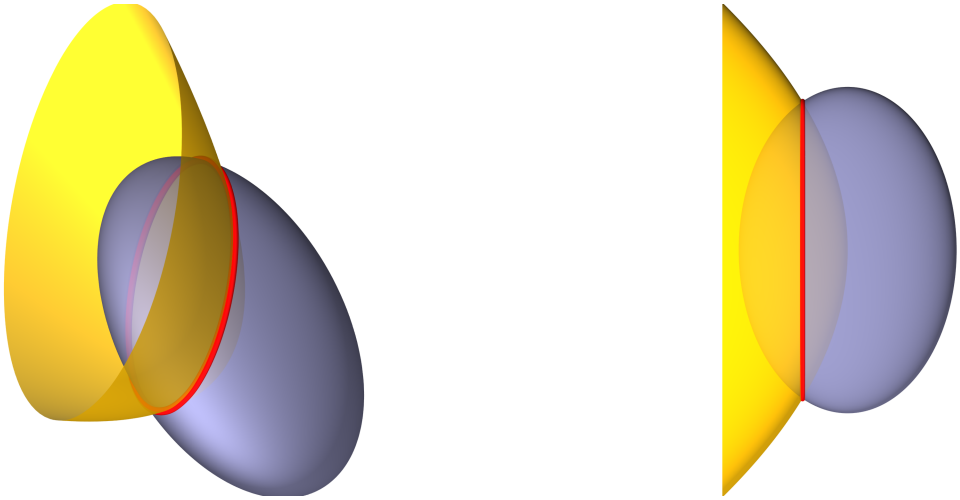
Matice kvadriky z tohoto svazku bude mít vlastní číslo s geometrickou násobností 2, pokud $\frac{o_x}{\bar{o}_x} = \frac{o_y}{\bar{o}_y}$. V případě, kdy $sgn\,(o_z) = -1$ a $|o_z| = \frac{o_i^2}{\bar{o}_i^2}$, pro $i \in \{x, y\}$ se jedná o vlastní číslo s algebraickou násobností 2 a geometrickou 1. □

3.26 Příklad. Uvažujme elipsoid

$$2x^2 + 4y^2 + 6z^2 = 1$$

a paraboloid

$$x^2 + 2y^2 + 2z = 0.$$



Obrázek 3.16: Souosý elipsoid a paraboloid. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.26 a jejich průnikovou křivku – jednu kuželosečku.

Spočítáme indexovou posloupnost parametrizovaného svazku kvadrik.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = -8\left(6\lambda^2 + 1\right)(-2 + \lambda)^2$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$.
Volíme $q_0 = 0$ a $q_1 = 1$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = 0$

$$-B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

  $In(q_0) = 1 = s_0$.

- $q_1 = 1$

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{53}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{53}}{2} \end{pmatrix}.$$

$In\,(q_1) = 3 = s_1.$

Indexová posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je $\langle 1 \uparrow\uparrow 3 \rangle$. Z Tabulky 2.2 plyne, že se průnik zadaných kvadrik rozpadá na jednu reálnou a jednu imaginární kuželosečku.

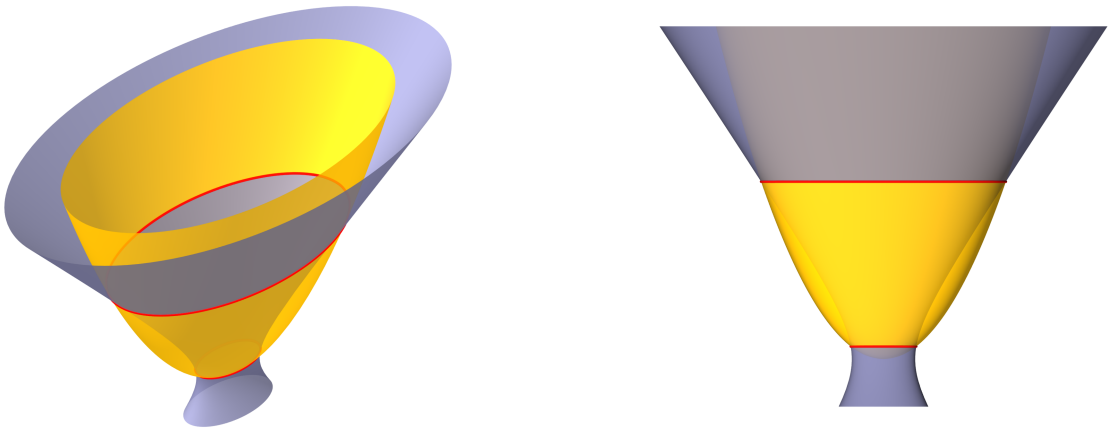
Průnik uvažovaného elipsoidu a paraboloidu se dle Věty 3.25 rozpadá na dvě kuželosečky, protože $\frac{o_x}{\bar{o}_x} = \frac{o_y}{\bar{o}_y} = 2$.

3.27 Příklad. Uvažujme hyperboloid

$$2x^2 + 8y^2 - 2z^2 = 1$$

a paraboloid

$$x^2 + 4y^2 + 2z = 0.$$



Obrázek 3.17: Souosý hyperboloid a paraboloid. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.27 a jejich průnikovou křivku – dvě kuželosečky, které leží v rovnoběžných rovinách.

Spočítáme indexovou posloupnost parametrizovaného svazku zadaných kvadrik.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = 4\left(2\lambda^2 - 1\right)(2\lambda - 1)^2$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$ a $\lambda_4 = \sqrt{\frac{1}{2}}$.
Volíme $q_0 = -1$, $q_1 = 0$, $q_2 = \frac{2}{3}$ a $q_3 = 1$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = -1$

$$-A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_0) = 2 = s_0$.

- $q_1 = 0$

$$-B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_1) = 1 = s_1$.

- $q_2 = \frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3}A - B = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 - \frac{\sqrt{10}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 + \frac{\sqrt{10}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{2} \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_2) = 3 = s_2$.

- $q_3 = 1$

$$A - B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_3) = 2 = s_3$.

Indexová posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je $\langle 2 \uparrow 1 \uparrow\uparrow 3 \uparrow 2 \rangle$. Z Tabulky 2.2 plyne, že se průnik zadaných kvadrik rozpadá na dvě neprotínající se reálné kuželosečky.

Průnik uvažovaného hyperboloidu a paraboloidu se dle Věty 3.25 rozpadá na dvě kuželosečky, protože $\frac{o_x}{\bar{o}_x} = \frac{o_y}{\bar{o}_y}$.

3.28 Pozorování. *V dalších úvahách budeme podobným způsobem zkoumat průnik dvou středových regulárních kvadrik, jedné s koeficienty posunutí p_x, p_y a p_z a orientovanými poloosami o_x, o_y a o_z a druhé s nulovými koeficienty posunutí a s orientovanými poloosami $\bar{o}_x$, $\bar{o}_y$ a $\bar{o}_z$. Uvažujme substituci $c_i = sgn\,(o_i)\,\frac{1}{o_i^2}$ a $\bar{c}_i = sgn\,(\bar{o}_i)\,\frac{1}{\bar{o}_i^2}$. Matice těchto kvadrik jsou*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c}_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c}_z \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} c_x p_x^2 + c_y p_y^2 + c_z p_z^2 - 1 & -c_x p_x & -c_y p_y & -c_z p_z \\ -c_x p_x & c_x & 0 & 0 \\ -c_y p_y & 0 & c_y & 0 \\ -c_z p_z & 0 & 0 & c_z \end{pmatrix}.$$

Podmínky pro rozpad průniku takto zadaných kvadrik jsou velmi komplikované, proto položíme

$$p_x = 0.$$

Rozpad průniku dvou kvadrik nastává, pokud ve svazku, který určují tyto kvadriky, je singulární kuželosečka s vlastním číslem s geometrickou násobností. Jednou z podmínek pro rozpad průniku dvou kvadrik je dvojnásobný kořech charakteristického polynomu parametrizovaného svazku $\lambda A - B$.

$$\begin{aligned} |\lambda A - B| &= \begin{pmatrix} -\lambda - c_y p_y^2 - c_z p_z^2 + 1 & 0 & c_y p_y & c_z p_z \\ 0 & \lambda \bar{c}_x - c_x & 0 & 0 \\ c_y p_y & 0 & \lambda \bar{c}_y - c_y & 0 \\ c_z p_z & 0 & 0 & \lambda \bar{c}_z - c_z \end{pmatrix} \\ |\lambda A - B| &= (\lambda \bar{c}_x - c_x) \begin{pmatrix} -\lambda - c_y p_y^2 - c_z p_z^2 + 1 & c_y p_y & c_z p_z \\ c_y p_y & \lambda \bar{c}_y - c_y & 0 \\ c_z p_z & 0 & \lambda \bar{c}_z - c_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\frac{c_x}{\bar{c}_x}$ je kořen charakteristického polynomu. Tento kořen bude dvojnásobný, poku determinant matice

$$det \begin{pmatrix} -\frac{c_x}{\bar{c}_x} - c_y p_y^2 - c_z p_z^2 + 1 & c_y p_y & c_z p_z \\ c_y p_y & \frac{c_x}{\bar{c}_x} \bar{c}_y - c_y & 0 \\ c_z p_z & 0 & \frac{c_x}{\bar{c}_x} \bar{c}_z - c_z \end{pmatrix} = 0.$$

Tato podmínka je splněna pro

1. $\bar{c}_y = \frac{c_y\bar{c}_x\left(c_x^2\bar{C}_z - c_x\bar{C}_z\bar{c}_x + c_z p_z^2\bar{c}_x\bar{c}_z c_x - c_z c_x\bar{c}_x + c_z\bar{c}_x^2\right)}{\bar{c}_x\left(c_x^2\bar{c}_z + c_x\bar{c}_z\bar{c}_x + c_y p_y^2 c_x\bar{c}_z\bar{c}_x + c_z p_z^2 c_x\bar{c}_z\bar{c}_x - c_x c_z\bar{c}_x + c_z\bar{c}_x^2 - p_y^2 c_y c_z\bar{c}_x^2\right)}$ *nebo*

2. $p_y = 0$, $\bar{c}_z = \frac{\bar{c}_x c_z(c_x - \bar{c}_x)}{c_x(c_z p_z^2\bar{c}_x - \bar{c}_x + c_x)}$ *nebo*

3. $p_z = 0$, $\bar{c}_z = \frac{c_x\bar{c}_z}{c_x}$.

Všechny tyto podmínky popisují dotyk dvou kvadrik. Dle Věty 3.1 se průnik dvou kvadrik rozpadá na dvě kuželosečky, pokud se kvadriky dotýkají.

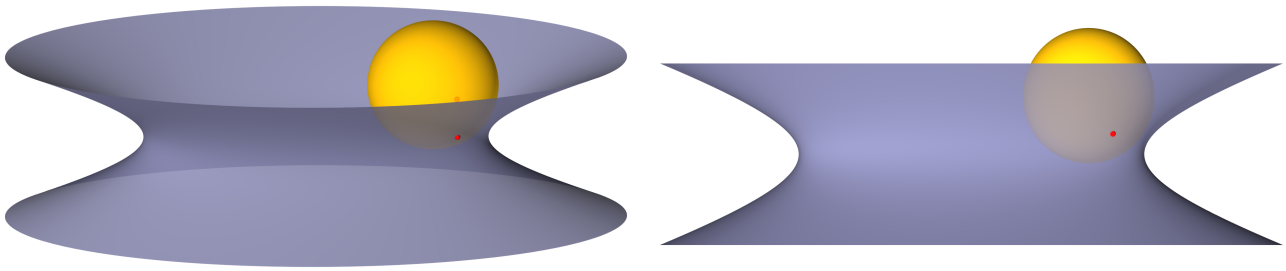
3.29 Příklad. Uvažujme hyperboloid

$$x^2 - \frac{15}{16}y^2 + \frac{1}{16}z^2 = 1$$

a elipsoid

$$\frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{4}(y-1)^2 + \frac{3}{4}(z+2)^2 = 1.$$

Koeficienty těchto kvadrik splňují podmínky 1 předcházejících úvah.



Obrázek 3.18: Souosý hyperboloid a elipsoid. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.29 a jejich průnikovou křivku. Tyto dvě kvadriky se dotýkají ve dvou bodech.

Spočítáme indexovou posloupnost parametrizovaného svazku zadaných kvadrik.

$$A = \begin{pmatrix} -16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 13 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = 5\left(3\lambda^2 - 5\lambda - 4\right)(16\lambda - 3)^2$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = \frac{5-1\sqrt{73}}{6}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{3}{16}$ a $\lambda_4 = \frac{5+1\sqrt{73}}{6}$. Volíme $q_0 = -1$, $q_1 = 0$, $q_2 = 1$ a $q_3 = 3$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = -3$

$$-3A - B = \begin{pmatrix} 35 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & -51 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 40 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

  $In(q_0) = 2 = s_0$. Tato kvadrika je jednodílný hyperboloid.

- $q_1 = 0$

$$-B = \begin{pmatrix} -13 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

  $In(q_1) = 1 = s_1$.

- $q_2 = 1$

$$A - B = \begin{pmatrix} -29 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -20 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

  $In(q_2) = 1 = s_2$.

- $q_3 = 3$

$$3A - B = \begin{pmatrix} -61 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & 45 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -50 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  $In(q_3) = 2 = s_3$. Tato kvadrika je jednodílný hyperboloid.

Indexová posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je $\langle 2 \uparrow 1 \uparrow\uparrow 1 \uparrow 2 \rangle$. Z Tabulky 2.2 plyne, že se průnik kvadrik rozpadá na dvě imaginární kuželosečky, protínající se ve dvou reálných bodech.

Protože zadaný hyperboloid a elipsoid splňují podmínky 1 předchozího Pozorování 3.28, jejich průnik se rozpadá na dvě kuželosečky.

Můžeme taky říct, že průnik zadaných kvadrik se rozpadá na dvě kuželosečky, protože kvadriky se dotýkají ve dvou bode a tím splňují předpoklady Věty 3.1.

3.6 Další zajímavé příklady rozpadu průniku dvou kvadrik

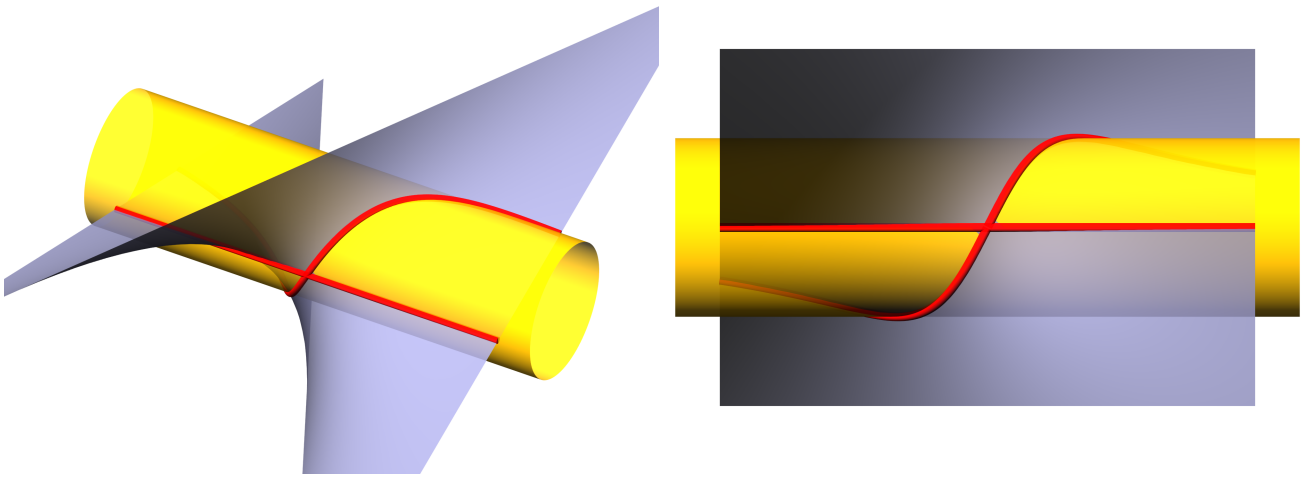
V této kapitole uvedeme další zajímavé příklady rozpadu průniku dvou kvadrich, abychom vyčerpali většinu možností v Tabulkách 2.1, 2.2 a 2.3.

3.30 Příklad. Uvažujme hyperbolický paraboloidy

$$x + yz = 0$$

a válec

$$x^2 + 2x + z^2 = 0.$$



Obrázek 3.19: Hyperbolický paraboloid a válce. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.30 a jejich průnikovou křivku. Tato průniková křivka se rozpadá na jednu křivku třetího stupně a její asymptotu.

Spočítáme indexovou posloupnost uvažovaných kvadrik.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = \frac{1}{16}(\lambda - 2)^2 \lambda^2$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ a $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$.
Volíme $q_0 = -1$, $q_1 = 1$ a $q_2 = 3$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = -1$

$$-A - B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{10}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1-\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1+\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1+\sqrt{10}}{2} \end{pmatrix}.$$

  $In(q_0) = 2 = s_0$.

- $q_1 = 1$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1-\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1+\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

  $In(q_1) = 2 = s_1$.

- $q_2 = 3$

$$3A - B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{10}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1-\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1+\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1+\sqrt{10}}{2} \end{pmatrix}.$$

  $In(q_2) = 2 = s_2$.

Indexová posloupnost svazku $\lambda A - B$ je $\langle 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 2 \rangle$. Dle Tabulek 2.3 a 2.1 zatím není průnik kvadrik určen jednoznačně. Ještě musíme dopočítat znaménkovou posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$.

$$\lambda_0 A - B = -B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

má signaturu $(1,1,2)$.

$$\lambda_1 A - B = 2A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

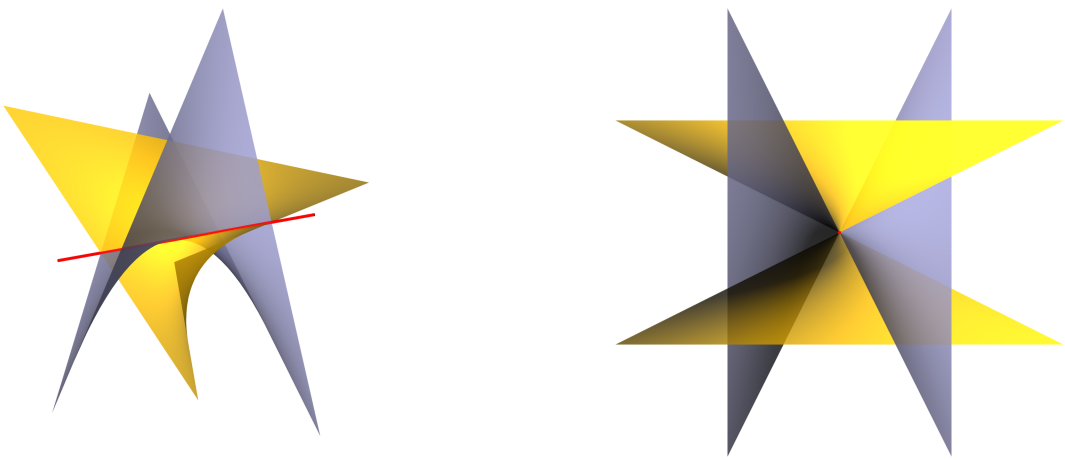
má signaturu $(1,1,2)$. Znaménková posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je $(2\,((1,2))\,2\,((1,2))\,2)$. Průnik kvadrik se rozpadá na křivku třetího stupně a přímku, které se protínají ve dvou bodech. Tato přímka je asymptotou křivky třetího stupně, proto jeden jejich průsečík je vlastní bod.

3.31 Příklad. Uvažujme dva hyperbolické paraboloidy

$$xy + z = 0$$

a

$$-xz + y = 0.$$



Obrázek 3.20: Dva hyperbolické paraboloidy. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.31 a jejich průnikovou křivku.

Průnikovou křivku těchto kvadrik můžeme najít algebraicky. Z rovnice druhé kvadriky dostáváme $y = xz$ a to dosadíme do rovnice druhé kvadriky.

$$x^2 z + z = z\left(x^2 + 1\right)$$

Z těchto výpočtů plyne, že uvažované kvadriky se protínají na průsečnici rovin $y = 0$ a $z = 0$.

Spočítáme indexovou posloupnost kvadrik.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = \frac{1}{16}\left(\lambda^2 + 1\right)^2$$

Tento polynom nemá reálné kořeny.
Volíme $q_0 = 0$. K tomuto q_0 dopočítáme s_0.

- $q_0 = 0$

$$-B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_0) = 2 = s_0$.

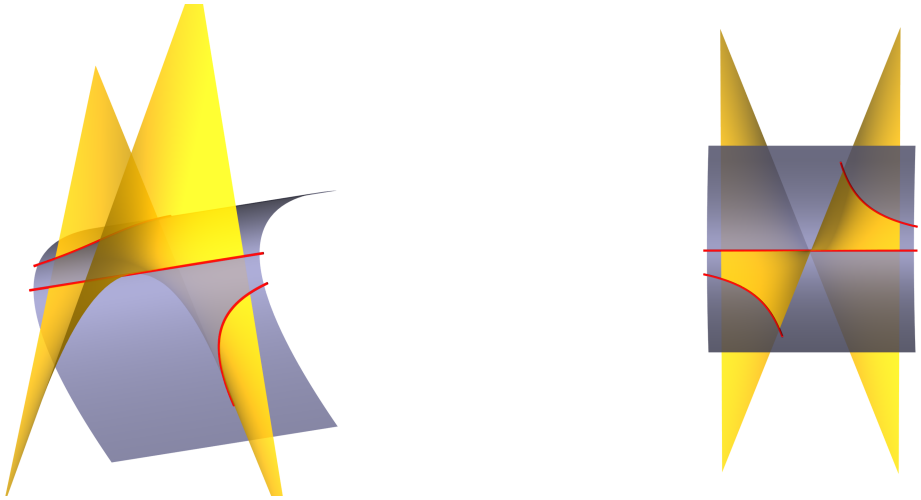
Indexová posloupnost svazku $\lambda A - B$ je $\langle 2 \rangle$. Dle Tabulky 2.1 se průnik zadaných kvadrik rozpadá na křivku třetího stupně a přímku, které se neprotínají. Tato křivka třetího stupně je imaginární.

3.32 Příklad. Uvažujme hyperbolický paraboloid

$$xy + z = 0$$

a parabolický válec

$$2x + z^2 = 0.$$



Obrázek 3.21: Hyperbolický paraboloid a parabolický válec. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.32 a jejich průnikovou křivku – křivku třetího stupně a její asymptotu

Spočítáme indexovou posloupnost kvadrik.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = \frac{1}{16}\lambda^4$$

Reálný kořen tohoto polynomu je $\lambda_0 = 0$.
Volíme $q_0 = -1$ a $q_1 = 1$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = -1$

$$-A - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}+\sqrt{12+2\sqrt{3}}}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1-\sqrt{3}+\sqrt{12-2\sqrt{3}}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1+\sqrt{3}-\sqrt{12+2\sqrt{3}}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1-\sqrt{3}-\sqrt{12-2\sqrt{3}}}{4} \end{pmatrix}.$$

$In\,(q_0) = 2 = s_0$.

- $q_0 = 1$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}+\sqrt{12+2\sqrt{3}}}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1-\sqrt{3}+\sqrt{12-2\sqrt{3}}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1+\sqrt{3}-\sqrt{12+2\sqrt{3}}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1-\sqrt{3}-\sqrt{12-2\sqrt{3}}}{4} \end{pmatrix}.$$

$In\,(q_1) = 2 = s_1$.

Indexová posloupnost svazku $\lambda A - B$ je $\langle 2 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 2\rangle$. Dle Tabulek 2.3 a 2.1 není průnik zadaných kvadrik určen jednoznačně. Ještě musíme dopočítat znaménkovou posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$.

$$\lambda_0 A - B = -B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

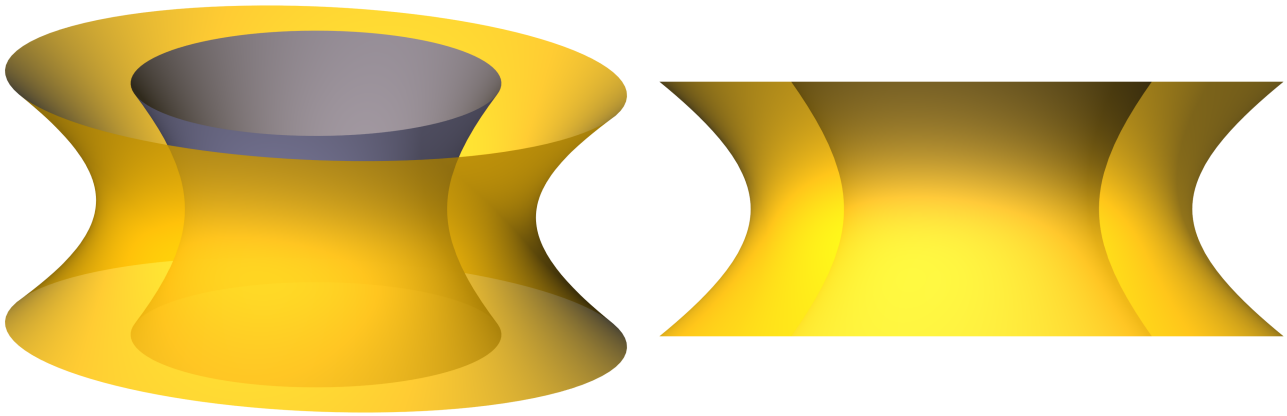
má signaturu $(1, 1, 2)$. Znaménková posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je $(2, ((((1, 2)))))$. Průnik uvažovaných kvadrik rozpadá na křivku třetího stupně a přímku, které se dotýkají. Protože přímka je asymptotou křivky třetího stupně, dotýkají se tyto křivky v nevlastním bodě.

3.33 Příklad. Uvažujme jednodílné hyperboloidy

$$-x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

a

$$-x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1.$$



Obrázek 3.22: Dva jednodílné hyperboloidy. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.33. Tyto kvadriky se neprotínají.

Spočítáme indexovou posloupnost parametrizovaného svazku kvadrik.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ a $\lambda_4 = 3$.
Volíme $q_0 = 0$, $q_1 = \frac{3}{2}$, $q_2 = \frac{5}{2}$ a $q_3 = 4$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = 0$

$$-B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

  $In(q_0) = 2 = s_0$.

- $q_1 = \frac{3}{2}$

$$\frac{3}{2}A - B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$In\,(q_1) = 0 = s_1$.

- $q_2 = \frac{5}{2}$

$$\frac{5}{2}A - B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$In\,(q_2) = 1 = s_2$.

- $q_3 = 4$

$$4A - B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$In\,(q_3) = 2 = s_3$.

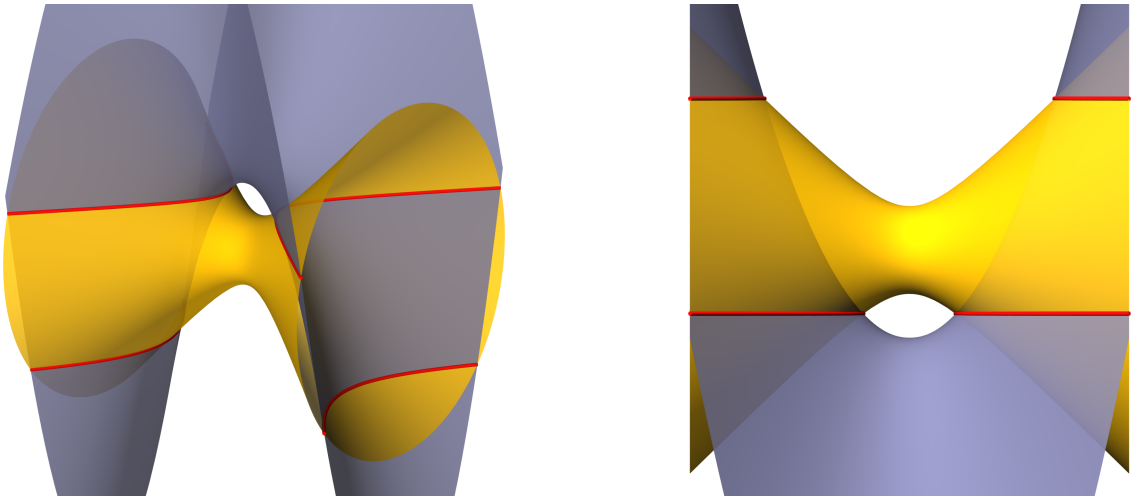
Indexová posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je $\langle 2 \uparrow\uparrow 0 \uparrow 1 \uparrow 2 \rangle$. Z Tabulky 2.2 plyne, že se průnik uvažovaných kvadrik rozpadá na dvě neprotínající se imaginární kuželosečky.

3.34 Příklad. Uvažujme hyperbolický paraboloid

$$x^2 - y^2 - 2z = 0$$

a

$$x^2 - y^2 + (z-2)^2 = 5.$$



Obrázek 3.23: Dva jednodílné hyperboloidy. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.34 a jejich průnikovou křivku – dve rovnoběžné hyperboloidy. Tyto hyperboloidy mají rovnoběžné asymptoty, proto se dotýkají v těchto nevlastních bodech.

Spočítáme indexovou posloupnost zadaných kvadrik.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = \left(\lambda^2 - 4\lambda + 5\right)(\lambda - 1)^2$$

Reálný klořen tohoto polynomu je $\lambda_0 = 1$.
Volíme $q_0 = 0$ a $q_1 = 2$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 =$

$$-B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

  $In(q_0) = 2 = s_0$.

- $q_0 = 2$

$$2A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  $In\,(q_1) = 2 = s_1$.

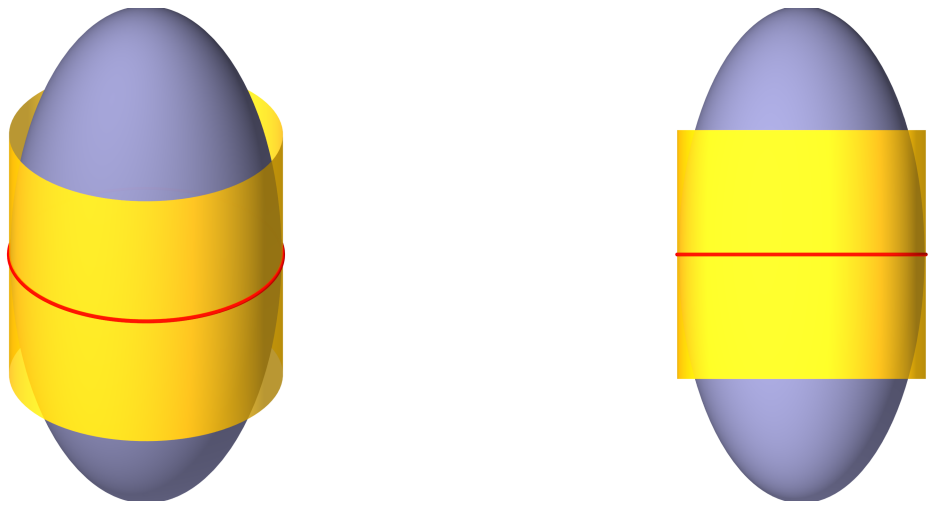
Indexová posloupnost svazku $\lambda A - B$ je $\langle 2 \uparrow\uparrow 2 \rangle$. Dle Tabulky 2.2 se průnik zadaných kvadrik rozpadá na dvě reálné kuželosečky s dvěma body dotyku. tzot bodz dotzku jsou nevlastní s jsou to asymptoty obou průnikových hyperbol.

3.35 Příklad. Uvažujme elipsoid

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 = 1$$

a válec

$$x^2 + z^2 = 1.$$



Obrázek 3.24: Elipsoid a válec. Dva pohledy na kvadriky z Příkladu 3.35 a jejich průnikovou křivku – kružnici. Zadaný válec je opsaný elipsoidu podél jeho hlavní kružnice.

Spočítáme indexovou posloupnost kvadrik.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = -(4\lambda - 1)^3 \lambda$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{4}$.
Volíme $q_0 = -1$, $q_1 = \frac{1}{8}$ a $q_2 = 1$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = -1$

$$-A - B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

  $In(q_0) = 1 = s_0$.

- $q_1 = \frac{1}{8}$

$$\frac{1}{8}A - B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

  $In(q_1) = 2 = s_1$.

- $q_2 = 1$

$$A - B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

  $In(q_2) = 3 = s_2$.

Indexová posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je $\langle 1 \uparrow 2 \uparrow\uparrow\uparrow 3 \rangle$. Dle Tabulky 2.2 zatím není průnik kvadrik určen jednoznačně. Ještě musíme dopočítat znaménkovou posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$.

$$\lambda_0 A - B = -B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

má signaturu $(1, 1, 2)$.

$$\lambda_1 A - B = \frac{1}{4}A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

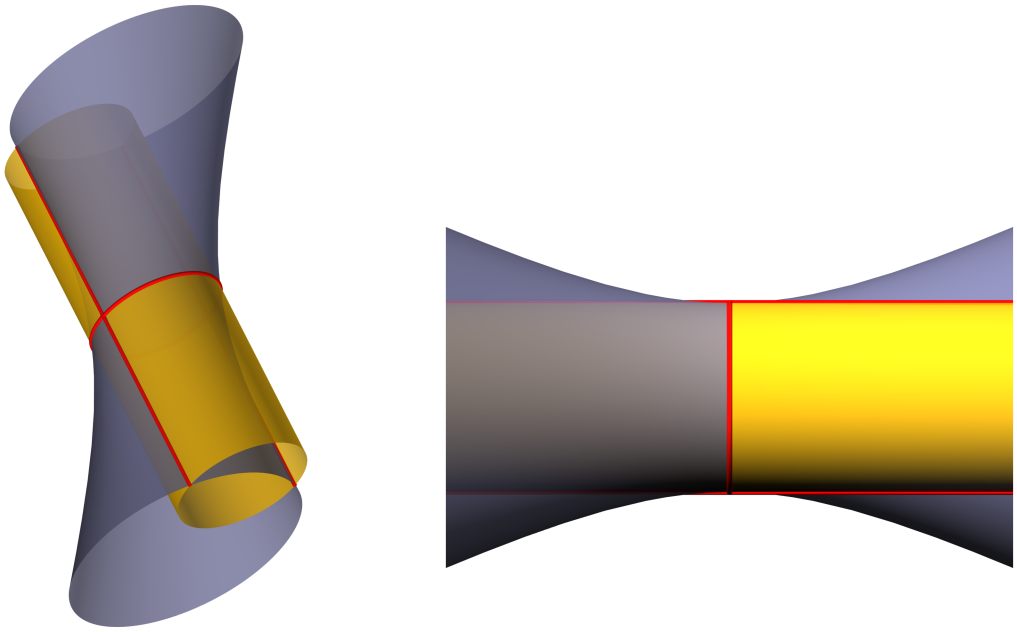
má signaturu $(3, 1, 0)$. Znaménková posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je $(1\,(1, 2)\,2\,(((1, 0)))\,3)$. Průnik uvažovaných kvadrik se rozpadá na jednu dvojnásobnou reálnou kuželosečku.

3.36 Příklad. Uvažujme jednodílný hyperboloid

$$xy + y^2 + z^2 - 2y = 1$$

a válec

$$y^2 + z^2 = 1.$$



Obrázek 3.25: Jednodílný hypeboloid a válec. Dva pohledy na kvadriky v Příkladu 3.16 a jejich průnikovou křivku. Průnikem těchto kvadrik je kuželosečky, hrdlová kružnice hyperboloidu a dvě rovnoběžky, tvořící přímky hyperboloidu. Dvě rovnoběžky se protínají v nevlastním bodě a protínají také průnikovou kuželosečku.

Spočítáme indexovou posloupnost určených kvadrik.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda A - B) = \frac{1}{4}(\lambda - 1)^2 \lambda^2$$

Reálné kořeny tohoto polynomu jsou $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ a $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$.
Volíme $q_0 = -1$, $q_1 = \frac{1}{2}$ a $q_2 = 2$. K takto voleným q_i dopočítáme s_i.

- $q_0 = -1$

$$-A - B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

  Tato kvadrika je hyperbolický paraboloid. $In(q_0) = 2 = s_0$.

- $q_1 = 2$

$$2A - B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

  Tato kvadrika je hyperbolický paraboloid. $In(q_1) = 2 = s_1$.

- $q_2 = 2$

$$2A - B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Tato kvadrika je hyperbolický paraboloid. $In(q_2) = 2 = s_2$.

Indexová posloupnost svazku $\lambda A - B$ je $\langle 2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 2 \rangle$. Dle Tabulek 2.3 a 2.1 zatím není průnik kvadrik určen jednoznačně. Ještě musíme dopočítat znaménkovou posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$.

$$\lambda_0 A - B = -B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

má signaturu $(1,1,2)$.

$$\lambda_1 A - B = A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

má signaturu $(2,1,1)$. Znaménková posloupnost parametrizovaného svazku $\lambda A - B$ je $(2\,((2,1))\,2\,((1,1))\,2)$. Průnik určených kvadrik se rozpadá na jednu reálnou kuželosečku, hrdlovou kružnici hyperboloidu a dvě reálné přímky, které jsou rovnoběžné a protínají se v nevlastním bodě.

Kapitola 4

Aplikace

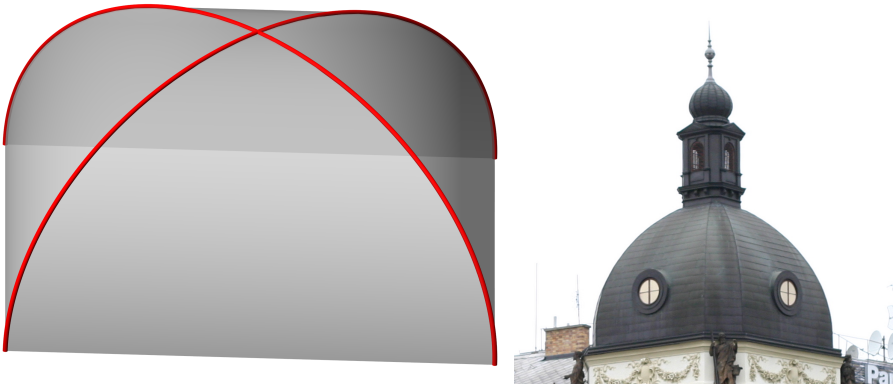
Z ploch druhého stupně se v technické praxi nejčastěji vyskytuje válec, kužel, koule, paraboloid a hyperboloid. Rotační paraboloid bývá např. odrazovou plochou reflektorů, teleskopů, televizních antén apod. Hyperbolický paraboloid se používá k zastřešování rozléhlých továrních hal, hangárů apod. Použitím této plochy se dosahuje veliké úspory materiálů. Jednodílného hyperboloidu se ve stavební praxi používá jako přímkové plochy pro konstrukce chladírenských věží nebo pro konstrukce skořepin pro zastřešování hal.

Stavební a technické konstrukce

Rozpad průnikové křivky rotačních singulárních kvadrik se často vyskytuje ve stavitelství, strojírenství nebo technické praxi.

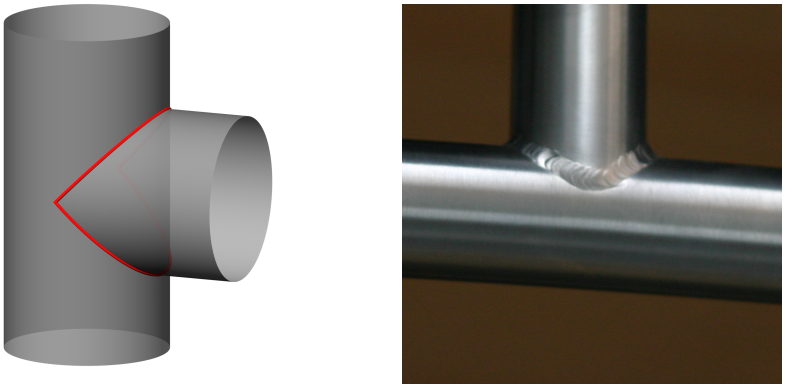
Ve stavitelství se setkáváme s průnikem válcových ploch například při zaklenutí čtvercového půdorysu. Části válcových ploch s vodorovnými tvořícími přímkami jsou nazývány valené klenby. Valené klenby můžeme nejrůznějším způsobem kombinovat, vznikají tak klenby složitější, například křížová nebo klášterní klenba.

Obrázek 4.1: Křížová klenba. *Autor fotografie: Petra Surynková.* Část průniku dvou válcových ploch.

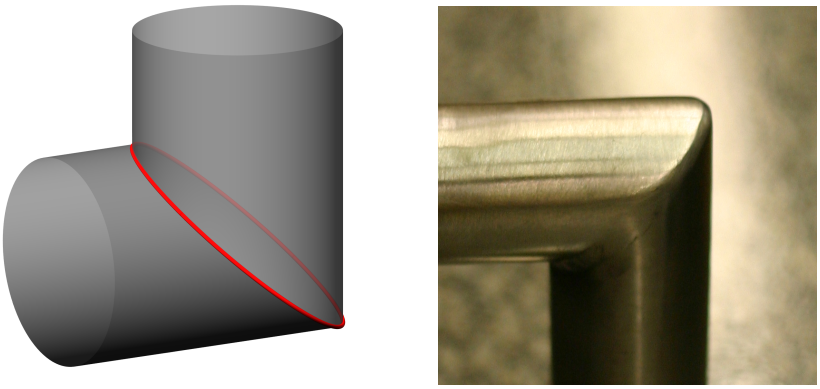


Obrázek 4.2: Klášterní klenba. Část průniku dvou válcových ploch.

V technické praxi se často setkáváme s průnikem rotačních singulárních kvadrik, např. rozvětvené potrubí, signalizační zařízení, okapové plochy, atd.



Obrázek 4.3: Využití rozpadů průniku rotačních singulárních kvadrik v technické praxi–rozvětvené potrubí.



Obrázek 4.4: Využití rozpadů průniku rotačních singulárních kvadrik v technické praxi–spojovací potrubí.

Využití průniku dvou kvadrik v designu je časté.

Obrázek 4.5: Využití průniku kvadrik v designu–stereo reproduktory.

Zatím jsme uvedly příklady aplikací průniku dvou kvadrik z vizuálních důvodů. Průnik dvou kvadrik může také vést ke zjednodušení výpočtů.

Geometrické výpočty

V technologiích má největší využití rozpad průniku dvou kvadrik při určování polohy různých objektů pomocí Global Positioning System, zkráceně GPS, nebo pasivních sledovacích systémů, zkráceně POS.

V případě určování polohy pomocí GPS hledáme průniky kulových ploch a elipsoidu, který nahrazuje geoid. K přesnějšímu určení polohy se využívájí čtyři družice. Pokud jsou ve výpočtu pouze tři družice, je určená poloha pouze na povrchu elipsoidu– tato poloha je často označovaná jako neplnohodnotná navigace 2D. V tomto případě nevyužíváme rozpad průniku dvou kvadrik v pravém slovat smyslu, ale využíváme průniky kulových ploch.

Pasivní sledovací systém je zařízení pasivní, tj. samo nic nevyzařuje a spoléhá na elektromagnetické záření vysílané cílem. POS se nejčastěji používá ke sledování letadel. Princip sytému POS je založen na měření časových rozdílů, jež uplynou mezi ozářeními odpovídajících dvojic stanic. Tím vzniká pro dvě stanice dvojdílný hyperboloid a pro tři stanice tři konfokální dvojdílné hyperboloidy a také vzniká potřeba zkoumat jejich průnikovou křivku. Mezi tyto pasivní sledovací systémy patří například české systémy Kopáč, Ramona, Tamara nebo nejnovější Věra, který umožňuje automatické sledování až 300 letounů, jak je uvedeno v [4].

Uveďme konkrétní příklad z [14, str. 5]. Uvažujme body $O\,[0,0,0]$, $A\,[30,0,0]$, $B\,[-15,26,0]$ a $C\,[-15,-26,0]$. Rovnice pro časové zpožení jsou následující:

$$
\begin{aligned}
d_{AO} &= \sqrt{x_1^2 - 60x_1 + 900 + x_2^2 + x_3^2} - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\
d_{BO} &= \sqrt{x_1^2 + 30x_1 + 901 + x_2^2 - 52x_2 + x_3^2} - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\
d_{CO} &= \sqrt{x_1^2 + 30x_1 + 901 + x_2^2 + 52x_2 + x_3^2} - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}
\end{aligned}
$$

Po umecnění těchto rovnic dostáváme rovnice tří hyperboloidů.

Konfokální kvadriky jsou symetrické podle roviny určené jejich osami, v tomto případě se jedná o rovinu $x_3 = 0$. Průnikové křivky leží v rovinách kolmých na tuto rovinu symetrie. Po vyřešení soustavy rovnic všech hypeboloidů dostáváme

$$
x_1 = \frac{d_{AO}\left(d_{BO}^2 + d_{CO}^2 - 1802\right) + \left(900 - d_{AO}^2\right)\left(d_{BO} + d_{CO}\right)}{60\left(d_{AO} + d_{BO} + d_{CO}\right)}
$$

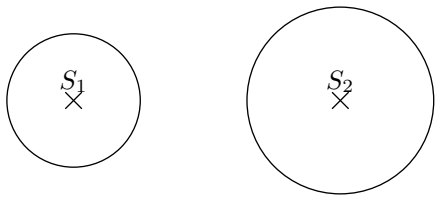
$$
x_2 = \frac{d_{AO}\left(d_{CO}^2 - d_{BO}^2\right) + \left(d_{AO}^2 - 2d_{BO}d_{CO} - 2702\right)\left(d_{BO} - d_{CO}\right)}{104\left(d_{AO} + d_{BO} + d_{CO}\right)}
$$

$$
x_3 = \pm\frac{\sqrt{P_6\left(d_{AO}, d_{BO}, d_{CO}\right)}}{d_{AO} + d_{BO} + d_{CO}},
$$

kde $P_6\left(d_{AO}, d_{BO}, d_{CO}\right)$ je polynom šestého stupně proměných d_{AO}, d_{BO} a d_{CO}.

S rozpadáním průniku dvou kvadrik se také můžeme setkat při konstrukci a výpočtu tzv. střední osy prostorových obejktů. S pojmem střední osa úzce Voroniho diagram, který je vysvětlen v [3]. V biochemii je potřeba zkoumat množinu bodů, která je střední osou zadaných kulových ploch. Tato množina se skládá z částí hyperboloidů.

Množina bodů, která je střední osou dvou kružnic.



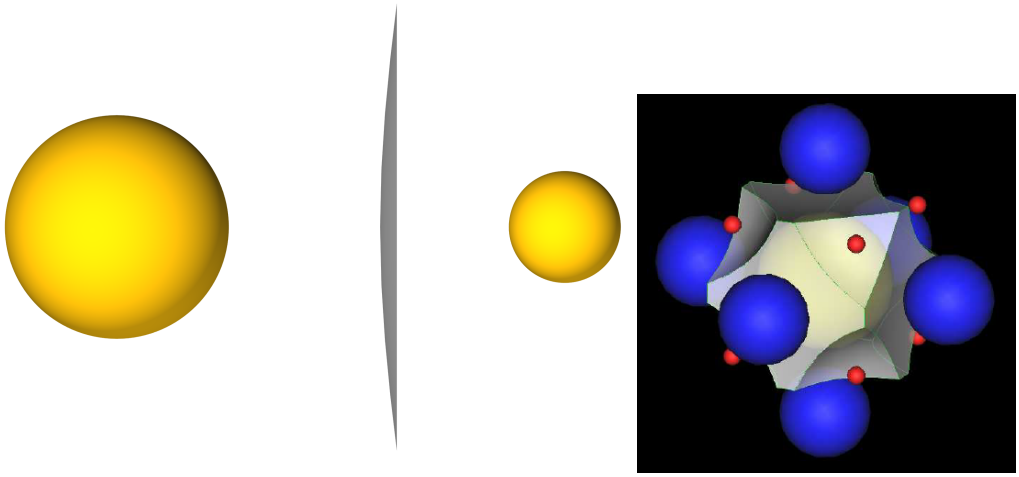
Označme poloměry kružnic r_1 a r_2. Pro body střední osy dvou kružnic platí

$$
|XS_1| - r_1 = |XS_2| - r_2
$$

$$
|XS_1| - |XS_2| = r_1 - r_2
$$

Rozdíl $r_1 - r_2$ nezávisí na poloze bodu X. Střední osa dvou kružnic je hyperboloid.

Analogicky střední osa svou kulových ploch je hypeboloid.



Obrázek 4.6: Ilustrace množiny bodů, které mají od kulových ploch stejnou vzdálenost.[3, str. 2]. Hrany střední osy množiny kulových ploch jsou části kuželosečky.

Důvodů proč se v praxi používají rozpady průniku dvou kvadrik je hned několik. Jednak to mohou být důvody estetické (klenby, design...), technické (rozvětvené potrubí, okapové plochy, GPS...) nebo důvody výpočetní jednoduchosti (POS, střední osy...). Konkrétně v pasivních sledovací systémech výpočetní programy počítají průnik tří hyperboloidů. Pokud by tyto hyperboloid měly obecnou poloh, vedlo by to k řešení rovnic osmého stupně. V případě, že jsou hyperbolidy konfokální získáváme rovnice nevýše druhého stupně., jak je zřemé z příkladu průniku konfokálních hyperboloidů.

Závěr

Za pomoci nástrojů lineární algebry, projektivní a afinní geometrie a s využitím programů Maple a Rhino jsem studovali vzájemnou polohu dvou kvadrik. Podařilo se nám objevit několik nových vlastností zaručujících rozpad průnikové křivky dvou kvadrik. Dále jsme utřídili a doplnili základní příklady takového rozpadu známé z deskriptivní geometrie a dali je do souvislosti s projektivními vlastnostmi svazků kvadrik.

Značné úsilí jsme rovněž věnovali srozumitelné prezentaci použitých nástrojů, které jsme převzali ze zahraniční literatury, ve které jsou popsány poměrně obtížně pochopitelným způsobem. Tímto způsobem vznikl text, který jak doufáme může přinést užitek studentům a učitelům deskriptivní geometrie a všem zájemcům o aplikovanou geometrii.

Výsledky této práce byly přijaty k prezentaci na 31. konferenci o geometrii a počítačové grafice pořádané Českou společností pro geometrii a grafiku. V budoucnu bychom pokračovali v tomto tématu a vytvořili eukleidovskou nebo afinní klasifikaci průnikové křivky dvou kvadrik.

Literatura

[1] Bečvář Jindřich: *Lineární algebra.* MATFYZPRESS, Praha, 2000. ISBN 80-85863-61-8.

[2] Bican Ladislav: *Lineární algebra a geometrie.* Academia, Praha, 2009. ISBN 978-80-200-1707-9.

[3] Donguk K., Youngsong Ch., Cheol-Hzung Ch, Joonghzun R., Chong-Min K a Deok-soo K.: *Voronoi diagram of 3D spheres: theory and applications. [http://www.ksiam.org/conference/annual052/upfile/KSIAM-05-11-Muju-DeoksooKIM.pdf]*

[4] Dudek P.: Hyperbolické radarové systémy (Tamara, Věra)*[http://wiki.cs.vsb.cz/images/0/0e/Gis_dud150.pdf].*

[5] Drábek K., Harant F. a Setzer O.: Deskriptivní geometrie II. *SNTL, Praha, 1979. ISBN 04-007-79.*

[6] Gantmacher F. R.: Matrix Theory, Vol. 2. *American Mathematical Society, 2000. ISBN 0821826646.*

[7] Lancaster P. a Rodman L.: Canonical forms of Hermitian matrix pairs under strict equivalence and congruence. SIAM review*, vol. 47, no. 3, s. 407–443, 2005.*

[8] Lávička Miroslav: KMA/G1 Geometrie 1 – Pomocný učební text *[http://home.zcu.cz/ lavicka/subjects/G1/texty/G1_texty.pdf]. Září 2008.*

[9] Lávička Miroslav: KMA/G2 Geometrie 2 – Pomocný učební text *[http://home.zcu.cz/ lavicka/subjects/G2/texty/G2_text.pdf]. Únor 200.*

[10] Muth P.: Über reelle Äquivalenz von Scharen reeller quadratischer Formen. Crelle's Journal*, J. 128, s. 302–343, 1905.*

[11] Piska R. a Medek V.: Deskriptivní geometrie II. *SNTL, Praha, 1975. ISBN 04-008-75.*

[12] *Sekanina M., Boček L., Kočandrle M. a Šedivý J.:* Geometrie I. *Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1986. ISBN 14-462-86.*

[13] *Sekanina M., Boček L., Kočandrle M. a Šedivý J.:* Geometrie II. *Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1988. ISBN 14-574-88.*

[14] *Šír Z.: Approximate Parametrisation of Confidence Sets. In*Computational Methods for Algebraic Spline Surface.*Dokken T., Jüttler B.. Springer, Verlag Berlin Heidelberg, 2005. ISBN 3-540-23274-5.*

[15] *Tu Ch., Wang W., Mourrain B. a Wang J.:* Signature Sequence of Intersection Curve of Two Quadrics for Exact Morphological Clasification. *2005.*

[16] *Tu Ch., Wang W., Mourrain B. a Wang J.:* Using signature sequences to classify intersection curves of two quadrics. *Computer Aided Geometric Design, vol. 26, str. 317–335, 2009.*

[17] *Wang W., Goldman R. Tu Ch.:* Enhancing Levin's method for computing quadric-surface intersections. *Computer Aided Geometric Design, vol. 20, str. 401–422, 2003.*

[18] *Urban A.:* Dekriptivní geometrie II. *SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1967. ISBN 04-0006-67.*

[19] *Walker R. J.:* Algebraic curves. *Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1950.*

Seznam tabulek

2.1 Přehled indexových posloupností svazků kvadrik, jejichž průnik se rozpadá na přímku a křivku třetího stupně 32
2.2 Přehled indexových posloupností svazků kvadrik, jejichž průnik se rozpadá na dvě regulární kuželosečky 33
2.3 Přehled indexových posloupností svazků kvadrik, jejichž průnik se rozpadá na dvě kuželosečky, jednu regulární a druhou singulární 34

Seznam obrázků

3.1 Elipsoid a hyperboloid s dvěma body dotyku. 36
3.2 Dva válce s dvěma body dotyku. 38
3.3 Dvě kuželové plochy opsané stejné kulové ploše. 42
3.4 Řez prostorové situace popsané ve Věte 3.8. 45
3.5 Konfokální hyperboloid a elipsoid. 47
3.6 Konfokální elipsoid a paraboloid. 49
3.7 Konfokální paraboloid a kužel. 51
3.8 Dva posunuté kužele. 54
3.9 Dva paraboloidy ve stejnolehnosti se záporným koeficientem. 56
3.10 Dva paraboloidy ve stejnolehlosti s kladným koeficientem. 58
3.11 Sféra a elipsoid–vzor a obraz osové afinity. 61
3.12 Sféra a elipsoid–vzor a obraz osové afinity. 63
3.13 Sféra a elipsoid–vzor a obraz osové afinity. 65
3.14 Souosý elipsoid a hyperboloid. 69
3.15 Souosé elipsoidy. 71
3.16 Souosý elipsoid a paraboloid. 74
3.17 Souosý hyperboloid a paraboloid. 75
3.18 Souosý hyperboloid a elipsoid. 78
3.19 Hyperbolický paraboloid a válce. 80
3.20 Dva hyperbolické paraboloidy. 82
3.21 Hyperbolický paraboloid a parabolický válec. 84
3.22 Dva jednodílné hyperboloidy. 86
3.23 Dva jednodílné hyperboloidy. 88
3.24 Elipsoid a válec. 89
3.25 Jednodílný hyperboloid a válec. 91

4.1 Křížová klenba. 95
4.2 Klášterní klenba. 95

4.3 Využití rozpadů průniku rotačních singulárních kvadrik v technické praxi–rozvětvené potrubí. 96
4.4 Využití rozpadů průniku rotačních singulárních kvadrik v technické praxi–spojovací potrubí. 96
4.5 Využití průniku kvadrik v designu–stereo reproduktory. 97
4.6 Ilustrace množiny bodů, které mají od kulových ploch stejnou vzdálenost. . 99