Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Analýza a priori jako součást přípravy učitele na výuku

A priori analysis as a part of teacher's lesson planning

Mgr. Hana Nováková

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Školitel: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Studijní program: Pedagogika

Studijní obor: Didaktika matematiky

2013

Prohlašuji, že jsem dizertační práci na téma ***Analýza a priori jako součást přípravy učitele na výuku*** vypracovala pod vedením školitele samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato dizertační práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Datum

....

podpis

Děkuji paní Prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za velkou trpělivost, cenné připomínky a výbornou spolupráci při tvorbě této dizertační práce. Dále děkuji paní RNDr. Miroslavě Hrabákové za ochotu a vstřícnost při realizaci experimentu.

NÁZEV: Analýza a priori jako součást přípravy učitele na výuku

AUTOR: Mgr. Hana Nováková

KATEDRA: Katedra matematiky a didaktiky matematiky

ŠKOLITEL: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Předkládaná dizertační práce je zaměřena na analýzu a priori jako součást přípravy učitele na výuku. Teoretickým rámcem je teorie didaktických situací v matematice (TDSM). TDSM charakterizuje analýzu a priori jako jeden z možných nástrojů, který má učitel při plánování výuky k dispozici. Práce si klade za cíl analyzovat rozdíly mezi tím, co je zařazeno do analýzy a priori v TDSM, a skutečností v praxi učitele, vzájemně porovnat přípravy zkušených učitelů a studentů učitelství a ukázat význam a využití analýzy a priori v učitelské a výzkumné praxi.

Práce se skládá ze tří částí: teoretické, experimentální a aplikační. V teoretické části jsou vysvětleny hlavní pojmy TDSM související s analýzou a priori, dále je zde shrnuta problematika přípravy učitele na výuku. Experimentální část je uvedena předexperimentem, jehož výsledky umožnily zpřesnit strukturu analýzy a priori pro další využití. Během hlavního experimentu se podařilo nejen porovnat vzájemně přípravy zkušených učitelů a studentů učitelství, ale také zjistit, v jakých položkách se liší a shodují s analýzou a priori. Aplikační část ukazuje konkrétní využití analýzy a priori při rozboru vyučovací hodiny a posteriori a přibližuje význam a funkce analýzy a priori ve výzkumném projektu.

Klíčová slova: analýza a priori, příprava učitele na výuku, teorie didaktických situací, Diofantova úloha.

TITLE: A priori analysis as a part of teacher's lesson planning

AUTHOR: Mgr. Hana Nováková

DEPARTMENT: Department of Mathematics and Mathematical Education

SUPERVISOR: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

This thesis focuses on a priori analysis as a part of teacher's lesson planning. The theoretical background consists of the Theory of didactical situations in Mathematics (TDSM). In TDSM, the a priori analysis is seen as one of the teacher's tools that he/she has when planning a lesson. The goal of the thesis is to analyse differences between a priori analysis as described in TDSM and the reality in teacher‘s practice, to compare lesson plans of experienced teachers with those of students and demonstrate the significance and application of a priori analysis in teacher's and researcher's practice.

The thesis consists of three parts, theoretical, experimental and applicational. In the theoretical part, the main concepts of TDSM linked with a priori analysis are explained and the issue of teacher's lesson planning is presented. The experimental part starts with a pre-experiment. Its results contributed to precise the structure of a priori analysis for further use. During the main experiment, the lesson plans of experienced teachers were compared with those of pre-service teachers. The differences and the similarities with a priori analysis were also analysed. The applicational part shows a concrete use of a priori analysis during a posteriori analysis of a lesson and describes its importance and role in a research project.

Keywords: a priori analysis, teacher's lesson plan, Theory of didactical situations in Mathematics, problem of Diophantus.

OBSAH

PŘEDMLUVA

Neplánovat znamená plánovaný neúspěch. (Petty, 2002)[1]

Štěstí přeje připraveným. (Louis Pasteur)

Asi každý učitel byl někdy nespokojen s hodinou, kterou odučil, a domníval se, že se nepovedla. Například se odchýlil od původního tématu a nestihl dokončit výklad, dořešit úlohu. Nebo někdo z žáků přišel s neočekávaným dotazem, neobvyklou strategií řešení úlohy a učitel pohotově nezareagoval. To, jak se učitel s těmito situacemi vypořádá, záleží na mnoha faktorech, jako jsou například zkušenosti, dosažené vzdělání, vstřícnost a další osobnostní charakteristiky.

Během studia učitelství jsem cítila velkou nejistotu a obavu, že nebudu schopna v takových chvílích správně reagovat. Proto jsem věnovala hodně času tvorbě přípravy. Často jsem se ale omezovala jen na výčet úloh, které s žáky spočítáme, měla jsem starost, aby úloh bylo dostatek a výsledky byly správné.

Díky studijnímu pobytu v rámci programu Erasmus na universitě V. Segalena v Bordeaux jsem měla možnost blíže se seznámit s teorií didaktických situací v matematice. S touto teorií jsem začala pracovat ve své diplomové práci. Před realizací výzkumu v rámci diplomové práce jsem poprvé využila analýzu a priori, která mi pomohla se s výše popsanými situacemi vypořádat. Začala jsem nad připravovanou aktivitou uvažovat komplexněji. Zkoušela jsem odhadnout, jak by mohl experiment probíhat, jak by mohli žáci v konkrétních situacích reagovat, jaké výsledky můžu očekávat apod.

Analýzu a priori, i když v neúplné a často jen myšlenkové podobě, jsem pak využívala a využívám i v průběhu své práce učitele. Moje tvorba přípravy na hodinu už nespočívá jen ve výběru aktivit, ale začala jsem se zamýšlet nad tím, jak by mohli žáci reagovat, jaké strategie řešení by mohli využít, jaké znalosti budou potřebovat, jakých chyb by se mohli dopustit apod. Získala jsem tak větší sebedůvěru a pocit lepší připravenosti na neočekávané situace.

Proto jsem se rozhodla pokračovat s analýzou a priori i v rámci doktorského studia a zaměřit na ni svůj výzkum. Mým cílem bylo ukázat, že analýza a priori je užitečným pomocníkem pro studenty učitelství, učitele i výzkumníky.

---

[1] S. 326.

ÚVOD

Učitel matematiky by měl ovládat nejen řešení matematických úloh, jejich výběr a analýzu, ale měl by je také ve výuce uvést tak, aby dobře stimulovaly myšlenkové procesy žáků. Každou vybranou aktivitu by tedy měl dobře promyslet a naplánovat. V teorii didaktických situací v matematice je analýza a priori popsána jako profesní nástroj, který může učitelům při plánování výuky pomoci. Tato dizertační práce se zabývá analýzou a priori jako součástí přípravy učitele na výuku.

Dizertační práce se skládá ze tří částí: teoretické, experimentální a aplikační. Teoretická část obsahuje dvě kapitoly. V první z nich vysvětlujeme klíčové pojmy teorie didaktických situací v matematice. Důraz je kladen na pojmy, které souvisejí s analýzou a priori. Druhá část se týká přípravy učitele na vyučování. Na základě literatury provádíme shrnutí různých přístupů k tvorbě přípravy, popisujeme strukturu příprav a uvádíme několik výzkumů, které se přípravou učitele na výuku zabývají.

Experimentální část je tvořena předexperimentem a experimentem, které provádíme s učiteli 1. stupně ZŠ, 2. stupně ZŠ (a nižšího stupně osmiletých gymnázií) a studenty učitelství.

Během předexperimentu zjišťujeme, jak učitelé popisují svoji přípravu na výuku. Pomocí dotazníku mapujeme, jaké složky analýzy a priori do příprav zahrnují, jaké naopak vynechávají a jaké položky do přípravy zařazují a analýza a priori je neobsahuje.

V rámci experimentu pracujeme se skutečnými přípravami učitelů a studentů na konkrétní hodinu, ve kterých byla využita úloha, kterou jsme vybrali. Výsledky experimentu analyzujeme ve srovnání s předexperimentem a naší analýzou a priori vybrané úlohy.

Aplikační část se skládá ze dvou kapitol, ve kterých ukazujeme využití analýzy a priori při práci učitele a při práci výzkumníka.

V první kapitole se zaměřujeme na paní učitelku, která se zúčastnila předchozích výzkumů. Nejprve uvádíme informace o jejím vzdělání a zaměstnání. Popisujeme, jak vidí paní učitelku žáci, absolventi gymnázia a vedení školy, uvádíme, jak charakterizuje sama sebe. Srovnáváme, jak se připravuje na výuku nyní, coby učitel – expert, a jak se připravovala dříve, coby učitel – začátečník. Následně analyzujeme hodinu, kterou paní učitelka realizovala s využitím své přípravy z prvního experimentu. Na základě našeho pozorování a zkušeností paní učitelky v závěru provádíme úpravu naší původní analýzy a priori.

Ve druhé kapitole popisujeme význam a funkce analýzy a priori v rámci výzkumného projektu GAČR č. P407/12/1939: *Rozvíjení kultury řešení matematických problémů ve školské praxi.* Uvádíme ukázky analýz, které byly pro účely projektu vytvořeny.

Přílohy dizertační práce tvoří formuláře příprav, formulář dotazníku k předexperimentu, ukázka vyplněného dotazníku, ukázky příprav na výuku učitele a studenta učitelství, pracovní list k Diofantově úloze a ukázky prací žáků. Z hodiny paní učitelky je pořízen videozáznam.

1 ANALÝZA A PRIORI A PŘÍPRAVA UČITELE NA VÝUKU

Úvod

Připravování vyučovacích hodin[2] je nezbytnou součástí každodenní práce učitele. Někteří učitelé věnují přípravám méně času, někteří více. Každý z nich se přitom soustředí na jiný aspekt přípravy. Někdo detailně propracuje stránku obsahovou (tj. co bude učit), někdo metodickou a organizační. Existují i učitelé, kteří do třídy vstupují bez přípravy. Někteří autoři považují kvalitní přípravu za známku kvality učitele, jako např. Harmer (1992):

> Nejlepší učitelé jsou ti, kteří pečlivě promýšlejí, co budou ve svých hodinách dělat, a plánují, jak výuku zorganizují. (Harmer, 1992)[3]

Tato kapitola se skládá ze dvou hlavních částí. V první části objasníme pojem *analýzy a priori* v kontextu *teorie didaktických situací v matematice*, ve druhé se zaměříme na *přípravu učitele na vyučování*.

1.1 Analýza a priori a teorie didaktických situací v matematice

Podle Brousseau (1997) a (1998) a *teorie didaktických situací v matematice* (TDSM)[4] je *analýza a priori* jedním z nástrojů, které má učitel při tvorbě přípravy k dispozici. Na základě popisu vyučovací jednotky se snaží odhadnout její vlastní průběh:

- odhalit jednotlivé fáze hodiny,
- zamyslet se nad možnými reakcemi a postoji žáků i učitele (překážky, chyby, jejich případné nápravy a opravy),
- zamyslet se nad strategiemi řešení problému (jak správnými, tak chybnými),
- rozmyslet, jaké vědomosti a poznatky jsou pro danou strategii nezbytné.

---

[2] V textu jsou používány výrazy připravování vyučovacích hodin, příprava učitele, příprava na hodinu, příprava na vyučování, popř. příprava ve stejném významu, tj. příprava učitele na vyučovací jednotku.

[3] „The best teachers are those who think carefully about what they are going to do in their classes and who plan how they are going to organise their teaching." S. 256. Překlad autorka.

[4] Autorem teorie didaktických situací v matematice (TDSM) je GuyBrousseau, emeritní profesor na IUFM d'Aquitaine a na francouzské Université Bordeaux II, nositel medaile Felixe Kleina. Na své teorii pracoval již od sedmdesátých let 20. století. V ucelené podobě ji poprvé představil v roce 1986. Postupně se setkala s příznivým ohlasem i za hranicemi Francie. Zpočátku jejímu rozšiřování bránil fakt, že většina prací byla psána pouze ve francouzštině. Tato situace se ale v současné době mění a teorie se šíří do dalších evropských zemí (např. Velká Británie, Slovensko, Česká republika), s velkým zájmem se setkala také ve francouzské části Kanady a dalších frankofonních zemích.

Analýza a priori má tedy pro učitele velkou informační hodnotu: poukazuje na případná úskalí hodiny, na možné obtíže žáků při řešení úlohy.

Pro vysvětlení role analýzy a priori si nejprve připomeneme a objasníme některé základní principy teorie didaktických situací v matematice (TDSM). Následující odstavce jsou zpracovány na základě těchto zdrojů: Brousseau (2012), Brousseau (1998), Brousseau (1997), Brousseau (1984), Brousseau, Sarrazy (2002), Hrabáková (2005), Novotná (2003ab), Prokopová (2004), Spagnolo, Čižmár (2003).

1.1.1 Teorie didaktických situací v matematice a didaktika matematiky

Nejprve si položme otázku: Co rozumíme didaktikou matematiky? V širším významu je didaktika matematiky vědou o šíření matematických poznatků (connaissances)[5], které člověk v životě potřebuje. V užším smyslu jde o disciplínu, která studuje podmínky vzdělávacího procesu. Tedy procesu, při kterém se škola, učitel pokouší modifikovat poznatky žáka, skupiny žáků.

Teorie didaktických situací v matematice vychází z předpokladu, že ke každému matematickému poznatku je možné vymodelovat vždy alespoň jednu odpovídající matematickou situaci[6]. Studuje tedy prvky (logické, matematické, ergonomické), které jsou potřebné pro vytváření takových situací.

1.1.2 Poznatek (connaissance) nebo vědomost (savoir)?

V jazyce TDSM mají pojmy poznatek a vědomost odlišný význam. *Poznatek* je prostředkem pro rozhodování, výběr činností, formulace důkazu apod. Slouží jako nástroj k dosáhnutí vědomosti. Umožňuje volit a měnit strategie řešení problému. *Vědomosti* jsou kulturní a sociální nástroje (prostředky) sloužící k identifikaci, ověření a použití poznatku. Jsou to vlastně *institucionalizované*[7] *poznatky*.

V situacích, kde pracujeme s vědomostmi, používá žák poznatky jako prostředek, nikoli jako cíl.

Jedna formulace může být poznatkem i vědomostí podle funkce, kterou v dané situaci plní.

[5] Podrobněji v odstavci 1.1.2.
[6] Podrobněji v odstavci 1.1.3.
[7] Podrobněji v odstavci 1.1.5.

Příklad[8]**:** Vědomosti, které žáci získali při učení se odčítání, slouží jako poznatek při učení se dělení.

Příklad: Vědomosti, které žáci získali při řešení kvadratických rovnic, slouží jako poznatek při zjišťování průběhu polynomických funkcí (průsečíky s osami) a zároveň slouží jako poznatek při řešení rovnic s parametrem.

1.1.3 Typy matematických situací

Matematická situace je soubor okolností a vztahů, ve kterých se žák nachází. Vztahy situaci spojují s jejím prostředím[9]. *Situace* je tedy systém, do něhož vstupuje učitel, žák, prostředí, pravidla a omezení potřebná pro vytvoření daného matematického poznatku.

Rozlišujeme dva typy matematických situací, situaci *nedidaktickou* a *didaktickou.*

Nedidaktickou situací rozumíme takovou situaci, ve které není žádný záměr vyučovat. Jde například o situace z běžného života, kdy se žádné učení neočekává (ale může k němu neplánovaně dojít).

Příklad: Dítě jde po louce a trhá květiny. Utrhne kopřivu, ale ta pálí. Příště už se bude snažit kopřivám vyhnout.

Posláním *didaktické situace* je „někoho něco naučit“. Učitel organizuje plán činností, jejichž cílem je modifikovat nebo vytvořit žákovu znalost[10].

Příklad: Učitel přijde do třídy a řekne žákům: „Dnes se naučíme dělit písemně desetinným číslem“. Vzápětí začne vysvětlovat algoritmus dělení, společně s žáky řeší úlohy, společně hledají předchozí poznatky a vědomosti, které potřebují, souvislosti s jinými oblastmi matematiky apod. Záměrem této situace tedy bylo naučit žáky algoritmus písemného dělení desetinným číslem.

Každá didaktická situace by měla podle TDSM obsahovat alespoň jednu *adidaktickou situaci*. Adidaktická situace je speciálním případem situace didaktické. Jejím cílem je umožnit žákovi získávat poznatky samostatně (devoluce[11]). Tyto poznatky jsou následně shrnuty a rozvíjeny učitelem a stávají se z nich vědomosti (institucionalizace[12]).

[8] Pokud není uvedeno jinak, příklady sestavila autorka.
[9] Podrobněji v odstavci 1.1.9.
[10] Pojem znalost budeme používat v případě, že není důvod rozlišovat poznatek a vědomost.
[11] Viz odstavec 1.1.5.
[12] Viz odstavec 1.1.5.

Adidaktická situace se skládá ze tří etap / situací[13]:

- *Akce* – výsledkem je předpokládaný (implicitní) model, jakási strategie, počáteční taktika.
- *Formulace* – zformulování počáteční strategie a podmínek, ve kterých bude tato strategie fungovat.
- *Ověření (validace)* – ověření platnosti strategie – funguje, nefunguje.

Tyto situace mohou být různě řazeny za sebou tak, aby vytvořily proces učení se matematickému poznatku. Např. model formulace – ověření – akce je typický pro klasické hodiny matematiky, kdy situace akce spočívá v aplikaci vědomostí získaných během situace formulace. Tato posloupnost vlastně odpovídá pojetí definice – věta – důkaz. Každý matematický poznatek vyžaduje svůj vlastní proces učení se.

1.1.4 Proměnné v didaktické situaci

Didaktická situace je řízena proměnnými. Jde o soubor podmínek, omezení, která ovlivňuje sám učitel. Jsou ukryty v jeho pokynech. Změnou proměnných měníme celou situaci.

Kognitivní proměnná je proměnná, pro kterou existují alespoň dvě různé hodnoty, pro něž jsou optimální řešitelské strategie různé. Kognitivní proměnnou nazveme *didaktickou,* jestliže její hodnotu může stanovit vyučující.

Formulační proměnná se týká formulace zadání úlohy.

Příklad: Narýsujte čtverec o délce strany 4 cm.

a) smíte použít jen pravítko a kružítko.

b) máte k dispozici jen trojúhelník s ryskou a pravítko.

V zadání úlohy se vyskytují následující proměnné:
[Narýsujte] – formulační proměnná.
[délka strany] – kognitivní didaktická proměnná: učitel může zadat délku úhlopříčky čtverce, jeho obvod nebo obsah. Řešení úlohy pak budou odlišná.

[čtverec] – kognitivní didaktická proměnná: učitel může zadat jiný geometrický útvar a změní se tak konstrukce.

[13] Viz obr. 1 na s. 16.

[4 cm] – didaktická proměnná, kterou nepovažujeme za kognitivní. Domníváme se totiž, že změna její hodnoty neovlivní významně strategii řešení.

[jen pravítko a kružítko]; [jen trojúhelník s ryskou a pravítko] – kognitivní didaktické proměnné, změna rýsovacích pomůcek podstatně ovlivní řešitelskou strategii.

Kritická hodnota didaktické proměnné je taková hodnota, kde je vhodných více typů řešitelských strategií.

Příklad: Řešte soustavu rovnic pro neznámá reálná čísla x, y.

$$5x - 2y = 3 \tag{1}$$

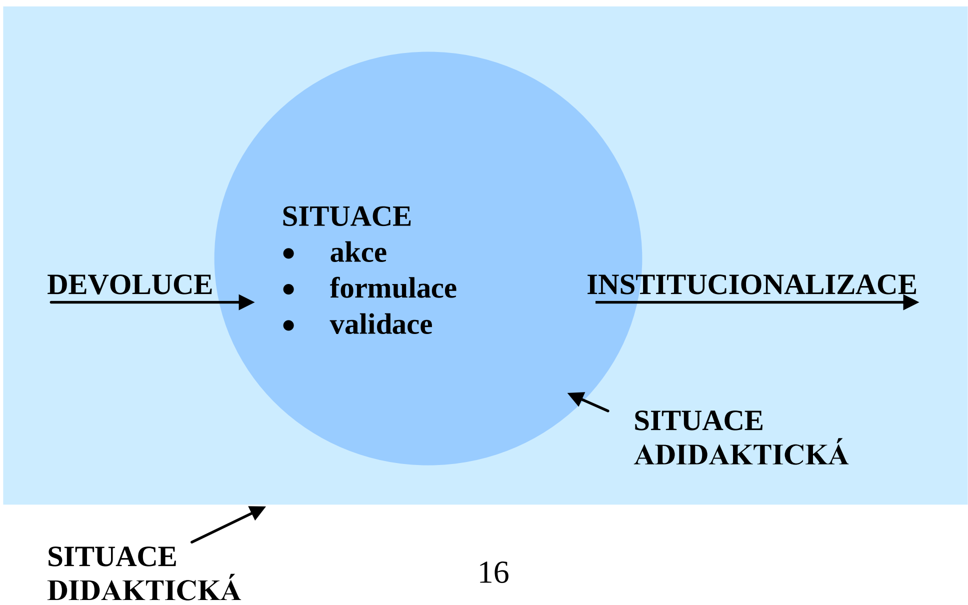
$$5x - y = 4 \tag{2}$$

[5], [2], [5], [1] – jsou kognitivní didaktické proměnné. Jejich hodnoty jsou kritické, umožňují totiž použití hned několika řešitelských strategií, např.: metody dosazovací, sčítací, grafické.

1.1.5 Úkoly učitele

Učitel má v průběhu vyučovacího procesu dva hlavní úkoly. Prvním z nich je uskutečnit proces *devoluce* (viz obr. 1). Učitel předá část svých pravomocí týkajících se vyučování žákovi. Pro žáka to naopak znamená přijetí části zodpovědnosti za vyučovací proces. Devoluce je předpokladem adidaktické situace.

Druhým úkolem učitele je *institucionalizace* vědomosti (viz obr. 1). Tím rozumíme proces, kdy učitel shromáždí poznatky zjištěné žáky a převede je ve vědomosti. Institucionalizace následuje po ukončení adidaktické situace.



Obr. 1

1.1.6 Didaktický kontrakt

> Didaktický kontrakt je výsledkem domluvy vztahů ustanovených explicitně a/nebo implicitně mezi žáky/skupinou žáků/určitým prostředím a vzdělávacím systémem s cílem naučit žáka hotové/utvářející se vědomosti. (Brousseau, Sarrazy 2002)[14]

Didaktický kontrakt není skutečnou smlouvou. Jde spíše o implicitní dohodu, vzájemný závazek. Řídí vzájemné vztahy mezi vyučujícím a vyučovaným vzhledem k úkolům, které mají obě strany plnit, aby došlo k osvojení určité vědomosti. Stanovuje tedy jejich role, odpovědnost a vzájemná očekávání.

Podmínky kontraktu se liší, závisí totiž na didaktických proměnných[15].

> Často není možné kontrakt dodržet. Staví totiž učitele do paradoxní situace. Vše, co dělá pro to, aby se žáci chovali podle jeho očekávání, žáky zároveň obírá o podmínky nutné k porozumění a k osvojení dané problematiky. Jestliže učitel řekne, co chce, nemůže to už dostat zpět. (Brousseau, 1984)[16]

Žák se tak dostává také do paradoxní situace. Přistoupí-li na kontrakt, tj. učitel ho bude učit výsledky, nebude je tedy získávat sám, nebude se pak ani učit matematice (učit se matematice = řešit úlohy). Učit se pro žáka znamená odmítnout kontrakt a zároveň převzít část odpovědnosti za vyučovací proces (devoluce).

Vyučovací proces tedy nespočívá v dobrém fungování kontraktu, ale v jeho porušování.

1.1.7 Některé jevy didaktického kontraktu

Nyní uvedeme několik jevů, které se týkají didaktického kontraktu. Vycházíme z publikace Brousseau (2012).

---

[14] „Le contrat didactique est le résultat de la négociation des rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu et un système éducatif, aux fins de faire approprier aux élèves un savoir constitué ou en voie de constitution." S. 6. Překlad autorka.

[15] Viz odstavec 1.1.4.

[16] „Le contrat didactique est en fait souvent intenable. Il met le professeur devant une véritable injonction paradoxale : tout ce qu'il fait pour faire produire par l'élève les comportements qu'il attend, tend à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : Si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir. " S. 4. Překlad autorka.

- **Kapitánův věk**

Tento jev dokazuje existenci didaktického kontraktu. Žákům je předložena úloha, která nemá řešení, je neúplná a nesmyslná.

> Např. na zadání „Na lodi je 26 ovcí a 18 koz, jak starý je kapitán?“ žáci řeknou „44 let“. (Brousseau, 2012)[17]

Výzkumníci se žáků zeptali, zda se jim úloha nezdála zvláštní. Žáci odpověděli, že ano, protože věk kapitána s ovcemi nesouvisí. Výzkumníky zajímalo, proč tedy odpovídali. Žáci řekli: „Protože to vyžadovala paní učitelka“.

- **Topazův jev**

Tento jev byl pojmenován podle divadelní hry Marcela Pagnola *Topaze*. V jedné scéně učitel diktuje slabému žákovi diktát. Je velmi rozhořčen z velkého množství chyb, kterých se žák dopouští. Z pozice učitele ale nemůže žákovi slova při diktátu hláskovat. Proto postupně upravuje výslovnost problematických slov a prozrazuje mu tak gramatické jevy.

V češtině bychom tuto situaci mohli ilustrovat například větou:

Vlci vyli na měsíc a víly vily věnce. Učitel přežene výslovnost slov tak, aby zdůraznil, kde je tvrdé y, a kde měkké i.

Tímto ale učitel vezme veškerou práci na sebe. Chce slyšet konkrétní odpověď a vybírá otázky tak, aby žák odpověděl podle jeho představ. Tím se ale změní i poznatky, které měl žák v dané situaci získat.

- **Jourdainův jev**

Jourdainův jev byl pojmenován podle hlavní postavy Molièrovy hry *Měšťák šlechticem.* Jedná se o formu Topazova jevu. Obyčejný měšťák, pan Jourdain, by se rád dostal do vyšších společenských kruhů. Zaplatí si proto učitele filozofie, který mu „vědecky“ vysvětluje obyčejné věci, jako např. co je to próza, samohlásky apod.

Tento jev můžeme ilustrovat následujícím příkladem:

Čtyřleté dítě (D) odpovídá na otázky babičky (B):

B: Kolik je mamince let?

D: 32.

---

[17] S. 49.

B: A tatínkovi?

D: 35.

B: A kdo je starší?

D: Tatínek, o tři roky.

Babička se obrátí na maminku, která rozhovor poslouchá.

B: To je úkol pro třetí třídu! Ona umí odečítat!

Skutečnost je ale taková, že si holčička věkový rozdíl pouze zapamatovala, odečítat samozřejmě ještě neumí.

> Učitel, který se chce vyhnout debatám s žáky nebo neúspěchu vyučovací činnosti, hledá v chování nebo odpovědích žáků známky přítomnosti poznatku, i když tyto odpovědi jsou ve skutečnosti motivovány jen banálními důvody a významy. (Brousseau 2012)[18]

- **„Metakognitivní“ a „metadidaktický“ posun, didaktická prostupnost**

Nastane, když se pomůcka k dosažení daného poznatku stane samotným objektem výuky. Příkladem je používání množinové matematiky v Československu na prvním stupni ZŠ od druhé poloviny 70. let. Množiny měly být pomůckou pro lepší pochopení a znázornění např. základních početních operací. Ale i systém zakreslování měl svá pravidla, která museli žáci dodržovat, a stal se tak vedle základních početních operací dalším předmětem výuky.

- **Nesprávné použití analogie**

„Včera jsme řešili podobnou úlohu…“ napovídá učitel žákům, když žádný z nich dlouho nepřichází se správnou odpovědí. Vyzývá je k uplatnění analogie. Analogie je velmi užitečnou a často úspěšně používanou řešitelskou strategií, ale musí se správně použít. V některých případech se může stát, že takovým pokynem učitel žáky nevyzve k řešení úlohy, ale k hledání řešení, které získali už dříve.

- **Zastarávání vyučovacích situací**

Někteří učitelé tvrdí, že stejnou přípravu na hodinu znovu ve stejné podobě nevyužijí.

[18] S. 50.

Mění formulace ve výkladu, upravují pokyny, vybírají nové úlohy a cvičení, někdy změní celou strukturu hodiny.

> Učitel naráží na obtíže při opakování stejné vyučovací hodiny, i když pracuje s novými žáky: přesné zopakování toho, co řekl nebo udělal v předchozím případě, nemá stejný efekt a výsledky bývají horší. (Brousseau, 2012)[19]

Zastarávání didaktických situací by měly omezit úpravy vzdělávacích programů. Problémem je ale dlouhá doba reakce na všechny změny vzdělávacího systému a nedostatečná zpětná vazba.

1.1.8 Dílčí chyba, nezdar, překážky[20]

Podstatnou složkou didaktického kontraktu je práce s chybou. Rozlišujeme několik druhů chyb: *dílčí chybu, nezdar* a *překážku.*

- **Erreur – dílčí chyba**

Tento výraz v dalším textu překládáme termínem *dílčí chyba*. Žák se jí dopustí v průběhu řešení problému.

- **Echec – nezdar**

Nezdar se vztahuje k celkovému výsledku žákova snažení.

Příklad: Žák řeší nerovnici v podílovém tvaru. Celou nerovnici vynásobí jmenovatelem (bez rozlišení intervalů, ve kterých je funkce ve jmenovateli kladná a kde je záporná), tím ztratí kořeny – tj. dílčí chyba, ta vede k nesprávnému výsledku – nezdar.

Nezdar je tedy důsledkem jedné nebo několika dílčích chyb. Dospělý člověk je díky svému nadhledu schopen nezdar často analyzovat a dílčí chyby odhalit. Pro pokrok v učení je nezbytné, aby byl i žák schopen své dílčí chyby identifikovat a tak zjistit příčiny svého nezdaru.

- **Obstacle – překážka**

Překážka je soubor žákových obtíží, které se týkají jeho pochopení určitého pojmu. Žákova představa o pojmu byla vytvořena správně, ale funguje pouze za určitých podmínek.

---

[19] S. 52.
[20] Erreur, échec, obstacles.

Projevuje se jako soubor dílčích chyb vztahujících se ke konkrétní vědomosti. Jedná se o chyby trvalé a opakované. Překážka je ale poznatkem. Existuje oblast, kde tento poznatek je pravdivý a užitečný. Zároveň ale existuje i oblast, kde neplatí a vede k nezdaru. Podle původu rozlišujeme tři typy překážek:

- Překážky ontogenetické

Tyto překážky pramení z žákových omezení v určitém stupni jeho vývoje. Žák rozvíjí své poznatky podle prostředků a cílů, které má v daném věku k dispozici.

- Překážky didaktické

Závisí pouze na výběru a plánu vzdělávacího systému.

- Překážky epistemologické

Tyto překážky úzce souvisí s poznatkem samotným. Hrály důležitou roli při jeho konstituování, není tedy možné se jim vyhnout.

1.1.9 Prostředí

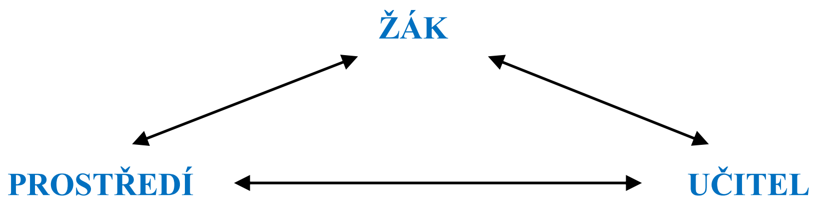
Prostředím rozumíme vše, co žáka obklopuje (viz obr. 2). Jedná se o jakýsi ekosystém. TDSM rozlišuje dva typy prostředí: *nepřátelské prostředí* a *spojenecké prostředí*. Nepřátelské prostředí nutí žáka přemýšlet a vytvářet strategie, bez kterých by neuspěl. Při kontaktu se spojeneckým prostředím může žák uspět i bez velkého přemýšlení, jeho činnost je naprogramována předem.

Příklad: Žáci řeší kvadratickou rovnici.

A) Kvadratická rovnice je zadána jako rovnice v součinovém tvaru, tj. kořeny jsou na první pohled zřejmé. (spojenecké prostředí).

B) Kvadratickou rovnici nejprve musí upravit do součinového tvaru. (nepřátelské prostředí).

Učitel prostředí organizuje, zasahuje do něj, kontroluje je. Dále pak zjišťuje, jaké poznatky jsou nezbytné pro žákovu interakci s prostředím a jaké poznatky vznikají jako výsledek této interakce.



Obr. 2

1.1.10 Význam analýzy a priori z pohledu TDSM

Podmínkou pro úspěšnou devoluci a následně pro vznik adidaktické situace je právě provedení analýzy a priori. Díky této analýze učitel získá podrobnější představu o tom, jak bude hodina probíhat, jak by mohli žáci reagovat, jaké problémy by mohly nastat apod. Na základě analýzy a priori může učitel lépe připravit adidaktickou situaci, tedy situaci, ve které žáci získávají poznatky samostatně.

Podle Charnay (2003) by měla analýza a priori učiteli napomoci při plánování průběhu hodiny a výběru aktivit. Zdůrazňuje, že základem je následné porovnání analýzy a priori s analýzou a posteriori [21], které umožní např. interpretovat neočekávané strategie a argumenty žáků, odhalit chyby, kterých se dopustili, apod.

Sollervall a Stadler (2013) tvrdí, že analýza a priori je ve srovnání s analýzou a posteriori méně svázána s konkrétní situací a vztahy ve třídě. Prohlašují, že díky analýze a priori jsou učitelé schopni odpoutat se od vlastních žáků a diskutovat s kolegy o obecnějších otázkách týkajících se výuky matematiky a učení se matematice. Domnívají se proto, že je nezbytné, aby výzkum i praxe v matematickém vzdělávání využívaly nejen analýzu a posteriori, ale také analýzu a priori.

1.2 Příprava učitele na vyučovací hodinu

Podle Harmera (1992) je klíčovou otázkou, kterou by si měl učitel při tvorbě přípravy položit:

> Co budou moji žáci pociťovat, vědět nebo schopni udělat na konci hodiny (hodin) z toho, co nepocítili nebo nevěděli nebo nebyli schopni udělat na začátku hodiny (hodin)? (Harmer, 1992)[22]

Zodpovězením těchto otázek učitel stanoví cíl hodiny.

Podobně jako Obst (2002) i Harmer zdůrazňuje, že cíl hodiny by neměl znát pouze učitel, ale měli by s ním být seznámeni i žáci, byť implicitně:

> Učitelé musí vědět, co je cílem každé aktivity, kterou ve třídě organizují, a měli by tento cíl sdělit i svým žákům. (Harmer, 1992)[23]

[21] Analýza a posteriori se provádí po odučení konkrétní hodiny. Srovnávají se předpoklady vyslovené analýzou a priori se skutečným průběhem hodiny. Jiní autoři používají termín reflexe.

[22] „What is it that my students will feel, know or be able to do at the end of the class (or classes) that they did not feel or know or were not able to do at the beginning of the class (classes)?“ s. 259 . Překlad autorka.

Řada autorů se také zabývá otázkou, jak by měla vypadat dobrá příprava.

Hofmannová (2003) zdůrazňuje, že při přípravě nestačí naplánovat, co budeme učit, ale je nutné rozmyslet, jakým způsobem hodinu zorganizujeme.

Podle Harmera (1992) existují dva hlavní principy dobré přípravy: rozmanitost a flexibilita. Rozmanitost spočívá v široké paletě nejrůznějších aktivit a materiálů tak, aby hodiny byly zajímavé a aby vznikla rovnováha, která je pro danou třídu nejvhodnější. Flexibilita se týká především učitele. Jde o schopnost přizpůsobit svůj plán měnící se situaci.

> Učitel v praxi potřebuje pružnou přípravu, kterou bude moci přizpůsobit nepředvídatelným událostem ve třídě. (Tochon, 1989)[24]

> Pečlivá příprava na vyučování ulehčuje práci učiteli i žákům a zabezpečuje dobré vyučovací výsledky. (Hruša, 1962a)[25]

1.2.1 Předpoklady práce na přípravě

Harmer (1992) uvádí, že práce na přípravě hodiny předpokládá nezanedbatelnou znalost ze tří oblastí: *profese učitele, instituce* a *žáci*.

V rámci *profese učitele* jde především o znalost jazyka pro danou úroveň žáků, potřebné znalosti a vědomosti k pochopení daného tématu, dostupné pomůcky, různé techniky učení, paletu různých aktivit, schopnost řídit třídu.

V oblasti *instituce* je nezbytné, aby byl učitel seznámen s časem, který má k dispozici, frekvencí jednotlivých hodin, dostupným technickým vybavením, sylabem předmětu, formami zkoušení a případnými omezujícími faktory.

> Učitelé musí vědět, kdo jejich žáci jsou, co si s sebou přinášejí do třídy a co potřebují. (Harmer, 1992)[26]

Měli by tedy být seznámeni s věkem svých žáků, rozložením dívky – chlapci, sociálním prostředím, ze kterého žáci pocházejí, a také se zaměřením jejich studia, příp. práce. Dále

---

[23] „Teachers must have purpose for all the activities they organise in a class and they should communicate that purpose to their students.“ S. 259. Překlad autorka.

[24] „L'enseignant, sur le terrain, a besoin d'une planification souple, permettant de s'adapter aux événements imprévus de la classe.“ S. 31. Překlad autorka.

[25] S. 54.

[26] „Teachers need to know who the students are, what the students bring to the class and what the students need. “S. 262. Překlad autorka.

by se měli informovat o jejich dosavadním vzdělání, zmapovat jejich předchozí znalosti a zájmy a zjistit, jaká je jejich motivace a postoj ke studiu.

Po seznámení s těmito třemi oblastmi je učitel připraven začít s prací na přípravě. Podle autora by ale přípravě měla předcházet tzv. *předpříprava*[27], jejímž cílem je získat obecnou představu o tom, co učitel bude v následující hodině/hodinách dělat: jaké aktivity pro žáky připraví, jakou látku budou probírat apod. Zkušení učitelé provádějí tuto činnost neuvědoměle.

1.2.2 Přístupy k přípravě

Příprava na výuku je plně záležitostí učitele. Ten si postupně utváří vlastní pojetí pedagogické práce a tím i pojetí přípravy na ni.

Divíšek (1989) uvádí dva často se objevující přístupy k přípravě, které se vyskytují hlavně u začínajících učitelů. Učitel s dobrou odbornou přípravou podcení obtížnost učiva, jeho výklad je povrchní, neodhaluje logické souvislosti a vede k formalismu. Došlo k podcenění metodické složky přípravy. Druhým extrémem je učitel, který detailně propracuje přípravu po stránce metodické, ale bez hlubšího pochopení látky, podcení tedy složku odbornou.

Podle Obsta (1992) je práce na přípravě náročnou myšlenkovou činností, při které si učitel opakovaně promítá v mysli celou vyučovací jednotku, zároveň okamžitě provádí její úpravy tak, aby odpovídala jeho záměru. Proto se podle Obsta naprostá většina učitelů připravuje písemně. Pracovní řád předpokládá jako samozřejmost důkladnou přípravu učitele na výuku, ale nepředepisuje její formu.

1.2.3 Struktura přípravy a struktura vyučovací hodiny

Struktura přípravy přímo souvisí se strukturou vyučovací hodiny. Hofmannová (2003) uvádí, že každá hodina má vlastní strukturu: začátek a konec, které jsou propojeny jednotlivými stádii[28]. Stádia můžeme dále rozdělit na kroky[29]. Hofmannová uvádí následující úrovně vyučovací hodiny:

- *„Pre" Stage,* jejímž cílem je vzbudit u žáků zájem a motivaci a nechat je vstoupit do dané problematiky.
- *„In" Stage*, kdy žáci pracují na zadaných úkolech.

[27] Pre-plan.
[28] Stages.
[29] Steps.

- *„Post" Stage*, kdy jsou zadané úkoly kontrolovány.

Podle Hofmannové je takové rozčlenění hodiny výhodné pro snazší plánování. Zdůrazňuje důležitost návaznosti při přechodu z jednotlivých stupňů na další.

Rys (1975) rozlišuje tři typy přípravy učitele na vyučovací jednotku.

- První typ nazývá „bleskovou přípravou". Je vlastně odpovědí na otázky: *Co?* a *Jak?*.

Učitel vymezí obsah, promyslí metody a prostředky. Předpokládá, že výukové cíle jsou zahrnuty v učebnici, se kterou pracuje. Podle Ryse se v praxi s takovou přípravou „podle učebnice" často setkáváme. Efektivní učitelé však podle Ryse obvykle plánují pečlivěji. Učebnice jen zřídka obsahují výukové cíle, které by byly formulovány podle stanovených požadavků a popisovaly cílové chování žáka. Vhodná formulace těchto cílů je ale podmínkou pro efektivní hodnocení jejich splnění. Pokud učitel koncipuje svoji přípravu na vyučování v duchu „co mám žákům říci", pak podle Ryse pravděpodobně založí hodnocení na tom, jak přesně mu to žáci zreprodukují.

- Druhý typ přípravy odpovídá na otázky: *Co již bylo?, Čeho chci dosáhnout?, Jak a čím toho dosáhnout?, Jaké bude mít tato hodina pokračování?*

Na základě této přípravy učitel pracuje s cíli popisujícími, co mají žáci zvládnout a na jaké úrovni, zařazuje vyučovací jednotku do obsahových a časových souvislostí s tím, co bylo, a tím, co bude. To se prakticky projevuje např. opakováním učiva z minulé vyučovací jednotky, zadáním úkolů na příští. Tento typ přípravy je podle Ryse nejčastější.

- Třetí typ přípravy je nejnáročnější. Rys uvádí, že pokud učitel takto uvažuje, provádí tzv. *didaktickou analýzu učiva.*

Charakterizuje ji několika otázkami, které dělí do sedmi kategorií:

1. Cíle: Co chci, čeho zamýšlím dosáhnout?

2. Obsah učiva, volba vyučovacích metod: Jakými prostředky chci těchto cílů dosáhnout?

3. Zvláštní didaktická hlediska: Jaké mají žáci o tématu předběžné znalosti, možná nesprávná pojetí? Co z učiva bude pro žáky nejobtížnější? Jak budu žáky aktivizovat? Jak zajistím časovou a obsahovou kontinuitu obsahu učiva? Jak zajistím diferencovaný a individuální přístup k žákům? Jaké učební úlohy je potřeba připravit k procvičování

a k upevňování učiva (včetně domácí práce pro žáky)? Jaká jiná hlediska je třeba respektovat?

4. Výchovné možnosti: Jak mohu učiva i průběhu vyučování výchovně využít?

5. Organizace vyučovací jednotky: Jaké pracovní podmínky si musím zabezpečit? Jaký organizační typ vyučovací jednotky bude mé metodické koncepci nejlépe odpovídat?

6. Časový projekt vyučovací jednotky: Kolik času mohu věnovat jednotlivým fázím vyučovací jednotky? Kolik času si vyžádá domácí příprava žáků na další vyučovací jednotku?

7. K realizaci přípravy: Jak budu zajišťovat pracovní součinnost žáků? Jak budu zjišťovat pracovní výsledky žáků?

Harmerova příprava (1992) je velmi podobná třetímu typu Rysovy přípravy. Harmer se navíc zabývá *popisem třídy* (popis žáků, jejich počet, věk; čas, doba trvání a frekvence hodin, podmínky a zázemí instituce) a *možnými problémy* (v organizaci hodiny, v pochopení úkolu, v porozumění nové látce). Harmer uvádí, že většina zkušených učitelů nepíše takto detailní a komplikované přípravy. Poukazuje ale na užitečnost takové přípravy pro nezkušené učitele. Dále pak v takové přípravě vidí zdroj velmi cenných informací pro analyzování hodin.

V některých případech se stejně jako u Rysovy didaktické analýzy učiva objevuje požadavek zamyslet se nad *předchozími znalostmi žáků*, jako například v Caledonian School v Praze, ve Westminster College v Londýně[30].

Hausenblas a kol. (2008) uvádí několik ukázkových lekcí, které mají sloužit jako inspirace pro učitele při práci podle ŠVP[31]. Struktura lekce vypadá takto: *vzdělávací oblast, vzdělávací obor, délka, cíle na úrovni kompetencí*, ke kterým daná vyučovací jednotka směřuje, cíle na úrovni očekávaných výstupů, *průběh lekce, hodnocení*.

Panasuk a Todd (2005) sestavují přípravu na základě *čtyřstupňové strategie*[32] (FSLP). Učitel nejprve zformuluje cíle výuky, poté rozmyslí, jaký zadá na konci hodiny domácí úkol. Třetím stupněm je příprava rozvíjejících aktivit, které korespondují s cíli a dále napomáhají učení se žáků. V poslední fázi učitel rozmýšlí úlohy, pomocí kterých u žáků

[30] Viz přílohy 1a, 1b.
[31] Školní vzdělávací program.
[32] FSLP strategy = Four Stages of Lesson Planning strategy.

zaktivizuje předchozí znalosti, které použijí při učení se nové látce. Hlavním cílem tohoto stupně je propojit u žáků předchozí znalosti s novými informacemi.

Brousseau a Brousseau (1987) podrobně popisují průběh 65 vyučovacích jednotek, které se týkají problematiky racionálních a desetinných čísel na základní škole ve třídě CM2 (9 – 10letí žáci). Hodiny jsou koncipovány v souladu s TDSM. V úvodu jsou nejprve popsány potřebné pomůcky pro realizaci aktivity, pokyny učitele a průběh aktivity. Hodiny jsou rozčleněny na fáze s časovým rozvržením, dále jsou uvedeny cíle popisovaných aktivit, výukové metody učitele, možné chování žáků a jejich strategie řešení.

Novotná a Procházková [33] v rámci výuky předmětu CLIL [34] na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy pracují se studenty s plánem, který obsahuje: téma hodiny, cíle a výstupy v matematice a v cizím jazyce, klíčovou slovní zásobu, klíčové kompetence, organizaci práce, použité materiály, fáze hodiny a časové rozvržení, možné problémy a návrh jejich řešení, nástin plánu následující hodiny a hodnocení.

1.2.4 Prvky analýzy a priori v přípravách z odstavce 1.2.3

Nyní se podrobněji podíváme na struktury příprav z předchozího odstavce a pokusíme se zjistit, zda obsahují prvky analýzy a priori. Pokud je nám známo, neexistuje přesné vymezení analýzy a priori. Budeme tedy vycházet z odstavce 1.1 na straně 12, podle kterého by měla obsahovat: *fáze hodiny, reakce a postoje žáků i učitele (překážky, chyby, jejich případné nápravy a opravy), strategie řešení problému (jak správné, tak chybné), vědomosti a poznatky nezbytné pro danou strategii.*

Ve všech přípravách najdeme rozčlenění hodiny na jednotlivé kroky (fáze). Reakcemi a postoji žáků se zabývá Brousseau, Harmer, (viz s. 26, Možné problémy), Caledonian School a Westminster College, Novotná a Procházková, a Rys v rámci didaktické analýzy učiva (viz bod 3. Zvláštní didaktická hlediska). Žákovskými strategiemi se zabývá pouze Brousseau. Panasuk a Todd zdůrazňují význam domácího úkolu. Učitel by měl úkol promyslet hned v druhé fázi tvorby přípravy, aby si uvědomil, jaké prostředky by si měli žáci v průběhu hodiny osvojit. Předchozí znalosti obsahuje více příprav: Harmer, Caledonian School, Westminster College, Novotná a Procházková, Rys, Panasuk a Todd

[33] Sylabus a materiály ke kurzu Integrovaná výuka matematiky a cizího jazyka (OKN1310N01) na Pedagogické fakultě Univerzity Karlovy.

[34] Content and Language Integrated Learning.

a nepřímo také Brousseau (jednotlivé popisy hodin na sebe navazují, takže učitel může snadno zjistit, na jaké poznatky a vědomosti navazuje).

1.2.5 Výzkumy věnované přípravám

Nyní představíme několik výzkumů zabývajících se přípravami učitelů, případně budoucích učitelů.

Taylor (1970) studoval přípravy 261 učitelů literatury, přírodních věd a zeměpisu. Ukázal, že učitelé se soustředí nejprve na obsah výuky, potom k němu vybírají a vymýšlejí situace, které by zaujaly žáky, a nakonec cíle, kterých by rádi ve výuce dosáhli.

Zahorik (1975) požádal 194 učitelů, aby napsali postup, jakým tvoří přípravu. Vytvořil následující kategorie: cíl, obsah, aktivity žáků, diagnostika, hodnocení, instrukce a organizace. Zjistil, že 81 % učitelů staví svoji přípravu na aktivitách studentů, 51 % na obsahu výuky a 28 % na cílech výuky.

Tochon (1989) zkoumá výpovědi učitelů druhého stupně ZŠ týkající se jejich způsobu přípravy na výuku. Analyzuje je pomocí *šesti „témat“*, která vycházejí z literatury věnované přípravám. Jde o témata, která se často opakují v myslích učitelů při plánování výuky: obtížnost plánování a nedostatečnost teorií o přípravách, volba výukových metod, adaptace na stále se měnící podmínky, typy a způsoby plánování výuky, tendence k rutině, improvizace. Výzkum byl prováděn formou částečně řízeného rozhovoru s pěti ženevskými učiteli 12 – 15letých žáků. Jednalo se o zkušené učitele, s různými pedagogickými přístupy. Cílem výzkumu bylo zmapovat principy a zvyky učitelů při plánování výuky i významy termínu „plánování/připravování“ výuky tak, jak je vnímají učitelé. Výzkum ukázal, že tvorba přípravy je složitý proces. Učitel neustále balancuje mezi teorií a praxí, organizovaností a kreativitou, přísností a uvolněností, intelektuální rovinou a rovinou afektivní, technickým faktorem a faktorem lidským.

Ward, Anhalta a Vinson (2003) prováděli výzkum mezi budoucími učiteli matematiky na 1. stupni, kteří právě procházeli kurzem elementární matematiky[35]. Cílem bylo zkoumat a zdokumentovat jejich myšlení při připravování výuky matematiky. V průběhu semestru budoucí učitelé třikrát odevzdávali přípravy na hodiny. Výzkumníci vybrali několik tematických celků, budoucí učitelé měli týden na sepsání přípravy na hodinu tak, aby výuka byla co nejvíce efektivní, tj. aby žáci nejlépe výuce porozuměli. Po týdnu

[35] Elementary mathematics course.

diskutovali své přípravy ve skupinách a měli za úkol společně vytvořit ideální přípravu. Na konci semestru ještě každý vytvořil závěrečnou přípravu. Výzkumníci následně plány analyzovali pomocí modelu *pěti matematických reprezentací*[36] a zjišťovali, jaké jsou trendy v jejich používání. Ukázalo se, že v přípravách převládala jazyková reprezentace. Podle Ward, Anhalta a Vinson využívání všech pěti matematických reprezentací přispívá k efektivnímu plánování výuky a žákům usnadňuje porozumění. Navrhují tedy zařadit práci s modelem pěti matematických reprezentací do vzdělávacího programu budoucích učitelů matematiky na 1. stupni.

Sztajn, Alexsaht-Snider, White a Hackenberg (2004) vytvořili projekt založený na spolupráci učitelů 1. stupně základních škol a univerzitních pedagogů, tzv. *matematické komunity*. Při pravidelných společných setkáních učitelé vytvářeli s univerzitními pedagogy přípravy na jednotlivé hodiny a diskutovali o průběhu hodin. Analýza těchto rozhovorů ukázala, že vytvoření matematické komunity ve škole má příznivý vliv na motivaci žáků. Učitelé uvedli, že díky aktivnímu působení v matematické komunitě se jejich žáci více zajímají o matematiku.

Panasuk a Todd (2005) provedli faktorovou analýzu efektivity příprav na výuku, které byly sestaveny na základě strategie FSLP[37]. Výzkumu se zúčastnilo 39 učitelů matematiky na 1. stupni ZŠ, kteří absolvovali školení FSLP. Během jednoho školního roku odevzdali 261 příprav. Tyto přípravy byly analyzovány pomocí hodnotící tabulky (LPER)[38] vytvořené na základě strategie FSLP a na základě pozorování porovnávány s reálným průběhem hodiny. Výzkum ukázal, že přípravy vytvořené strategií FSLP napomohly k vyššímu stupni koherence hodiny.

Mutton, Hagger a Burn (2011) zkoumali, co se britští studenti učitelství učí o plánování výuky a jak se jejich pohled na plánování mění v průběhu prvních tří let praxe. Data získali pozorováním 17 studentů – učitelů a následně částečně strukturovanými rozhovory s nimi. Po každé odučené hodině zjišťovali, co si učitelé myslí o své přípravě na hodinu, jak hodnotí průběh hodiny. Autoři zdůrazňují, že schopnost plánovat výuku nelze naučit na

[36] Model pěti matematických reprezentací podle Lesh, Post a Behr (1987), pomocí nichž probíhá matematická komunikace mezi učitelem a žáky. Jde o reprezentaci konkrétní (manipulativní), jazykovou, symbolickou, obrázkovou a obsahovou (týkající se reálných životních situací). Výzkum ukázal, že nejčastěji se v přípravách objevovala jazyková reprezentace.

[37] Viz s. 26.

[38] LPER = Lesson Plan Evaluation Rubric.

univerzitě. Z výzkumu vyplývá, že začínající učitelé se učí „jak plánovat“ v průběhu prvních let praxe.

> Pomocí plánování jsou učitelé schopni učit se o vyučování a díky vyučování jsou schopni se učit o plánování. (Mutton, Hagger a Burn, 2011)[39]

Jednou z výzkumných otázek autorů Pelczer, Singer, Voica (2013) bylo: Jakými způsoby se matematická očekávání a očekávání týkající se osobní výkonnosti učitele vztahují k jeho praktikám ve třídě? K jejímu zodpovězení výzkumníci provedli případovou studii středoškolského učitele. Zjistili o něm nejprve co nejvíce informací z různých zdrojů: médií, životopisu, diskuzí s personálem ve škole. Poté učiteli předložili matematickou úlohu a zeptali se ho na pět otázek týkajících se učení: Do kterého ročníku byste úlohu zařadil? Do kterého tematického celku? Jaký by mohl být cíl této úlohy? Jaké návodné otázky byste mohl žákům položit? Zkuste úlohu modifikovat a vysvětlete, proč jste ji upravil právě takto. Ze studie vyplynulo, že učitel má silná očekávání týkající se jeho vlastní osobní výkonnosti. Na matematiku nahlíží „tradičním“ pohledem. Umět matematiku pro něj znamená ovládat komplex matematických algoritmů.

[39] „It is through planning that teachers are able to learn about teaching and through teaching that they are able to learn about planning.“ S. 413. Překlad autorka.

2 PŘEDEXPERIMENT

Úvod

Většina učitelů, nezávisle na věku, délce praxe a předmětu, se připravuje na každou hodinu. Přípravy však nejsou u všech stejně podrobné, neobsahují stejné složky. Záleží na každém učiteli, co považuje pro svoji výuku za nutné zaznamenat. Přípravy se liší nejen podle zkušenosti učitele, ale i podle jeho osobnostních charakteristik a také podle toho, jakou třídu učí. Stejná příprava může být pro stejného učitele v jedné třídě vyhovující, v jiné třídě příliš stručná a ještě jinde příliš podrobná.

Nezabýváme se případem, kdy učitelé mají předepsáno vnějšími institucemi, co musí v přípravě mít. Zajímají nás přípravy, které si učitel vytváří, protože sám cítí potřebu je mít. Zjišťujeme, které části příprav považují za nutné všichni, nebo alespoň většina učitelů, a ve kterých částech se liší. Sledujeme rozdíly v těchto charakteristikách u začínajících učitelů, zkušených učitelů a studentů – budoucích učitelů.

Cílem předexperimentu bylo analyzovat rozdíly mezi tím, co je zařazeno do analýzy a priori [40] v teorii didaktických situací v matematice (TDSM), a skutečností v praxi učitelů. Dále jsou zde shrnuty pohledy učitelů na jednotlivé části tohoto pojmu tak, jak jsou v TDSM zařazeny.

2.1 Metodologie a cíl výzkumu

Hlavním cílem našeho výzkumu bylo zmapovat, co obsahuje příprava učitelů na hodinu, jak se liší a v čem se shoduje s analýzou a priori, jaké položky učitelé považují za důležité, jaké naopak za zbytečné.

K získání dat potřebných pro studii jsme sestavili dotazník[41]. V dotazníku jsou použity otázky s otevřenou i uzavřenou odpovědí. U většiny otázek byl nechán respondentům prostor pro vlastní komentář, doplnění. Dotazníky byly rozesílány v elektronické i papírově podobě.

[40] Viz odstavec 1.1.
[41] Viz příloha 2a.

Nyní se podrobněji podíváme na jednotlivé otázky dotazníku.

- *Připravujete se na hodinu písemně?*

Touto otázkou jsme mapovali, do jaké míry učitelé tvoří písemnou přípravu na hodiny a jak její vytváření závisí na délce praxe. Předpokládali jsme, že zkušení učitelé písemnou přípravu využívají méně než začínající učitelé.

- *Co vaše příprava obsahuje (ať písemná či jiná)?*

Cílem druhé otázky bylo podrobněji zjistit, jaké položky příprava učitelů obsahuje. Zde jsme použili analýzu a priori podle TDSM a předložili učitelům její jednotlivé části. Učitelé vyznačovali, které z nich jejich příprava obsahuje. Tato otázka se skládá z pěti podotázek, první čtyři jsou vlastně složky analýzy a priori: téma hodiny, cíl hodiny, fáze hodiny a časové rozvržení, rozbor jednotlivých aktivit – tato složka je dále rozčleněna do osmi podotázek: způsob práce, pomůcky, které budete potřebovat, pomůcky, které budou potřebovat žáci, předchozí znalosti, postoje a reakce žáků, překážky, chyby a možné problémy, které se mohou u žáků objevit, správné strategie řešení, které mohou žáci použít, nesprávné strategie řešení, které mohou žáci použít. Zajímalo nás, jakou důležitost učitelé jednotlivým složkám přisuzují. V páté podotázce jsme nechali učitelům prostor, aby uvedli další složky přípravy, které náš dotazník neobsahuje. Zde jsme zjišťovali, zda považují analýzu a priori za úplnou.

- *Kolik času trávíte průměrně přípravou na jednu hodinu?*

Třetí otázkou jsme mapovali, kolik času učitelé přípravě průměrně věnují. Zde jsme předpokládali výrazný rozdíl mezi začínajícími a zkušenými učiteli.

- *Srovnáváte po hodině její skutečný průběh s vaší přípravou? Pokud ano, co podle vás takové srovnání přináší vám, učitelům, a co žákům?*

Pomocí čtvrté otázky jsme zjišťovali, zda učitelé provádějí po skončení výuky analýzu a posteriori, tj. srovnání přípravy se skutečným průběhem hodiny. Také nás zajímalo, jaký přínos vidí v analýze a posteriori pro sebe, učitele, a jaký pro žáky.

- *Využíváte přípravy, které jste použili dříve? Pokud ano, jakou část můžete použít více méně bez změn a jakou většinou upravujete a proč?*

V poslední otázce jsme se učitelů ptali, zda své přípravy používají opakovaně a pokud ano, jaké části musí upravovat a jaké ne. Vycházeli jsme z hypotézy, že pokud učitelé používají přípravu v další práci, považují ji za vhodnou a kvalitní, ať ve stávající podobě, nebo po úpravách a doplnění vycházejících z jejich stále se rozšiřující zkušenosti.

2.2 Výzkumný vzorek

Abychom získali pestrý vzorek učitelů, a tím i různé pohledy na přípravu, oslovili jsme učitele prvního stupně ZŠ, druhého stupně ZŠ i budoucí učitele matematiky. Experimentu se zúčastnilo 31 učitelů a budoucích učitelů: 14 učitelů prvního stupně ZŠ (první experimentální skupina), 10 učitelů druhého stupně ZŠ (druhá experimentální skupina), 7 studentů učitelství matematiky (třetí experimentální skupina). Cílem bylo vzájemně porovnat přípravy jednotlivých skupin a srovnat je s analýzou a priori.

2.3 Výsledky předexperimentu

Nejprve se budeme zabývat celkovými výsledky našeho výzkumu, ve druhé části pak porovnáním výsledků jednotlivých experimentálních skupin.

2.3.1 Celkové vyhodnocení

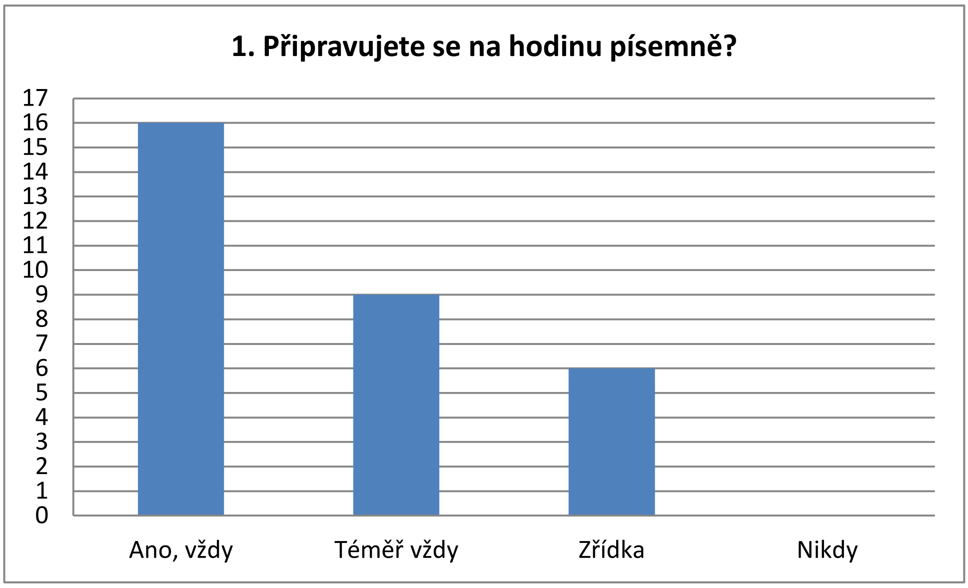
V této části postupně uvedeme podrobněji analýzy všech otázek dotazníku. K otázce $\boxed{1}$[42], $\boxed{2}$ a $\boxed{3}$ je vždy zařazen histogram četností odpovědí, u některých otázek jsme doplnili i několik zajímavých komentářů, kterými učitelé a studenti učitelství[43] své odpovědi upřesnili.

Otázka $\boxed{1}$

Připravujete se na hodinu písemně?

Většina učitelů (16) odpovědělo *ano, vždy*, 9 *téměř vždy*, 6 učitelů provádí písemnou přípravu *zřídka*.

[42] Čísla otázek dotazníku jsou v textu pro větší přehlednost umístěna do rámečku.
[43] V kapitole 2.3.1 Celkové vyhodnocení nerozlišujeme učitele a studenty učitelství, používáme tedy pro zjednodušení termín „učitel" i pro studenty učitelství.

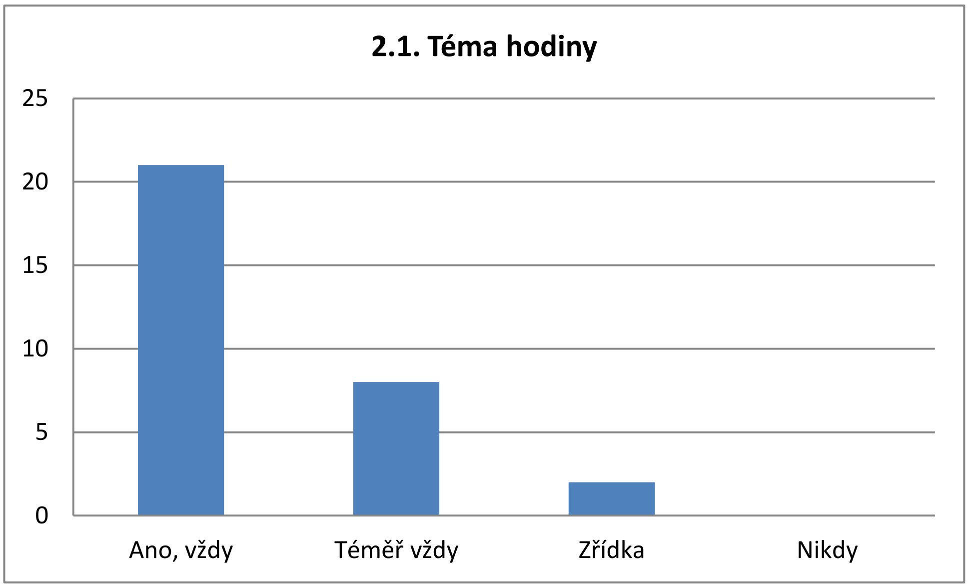


Otázka 2

Co vaše příprava obsahuje (ať písemná či jiná)?

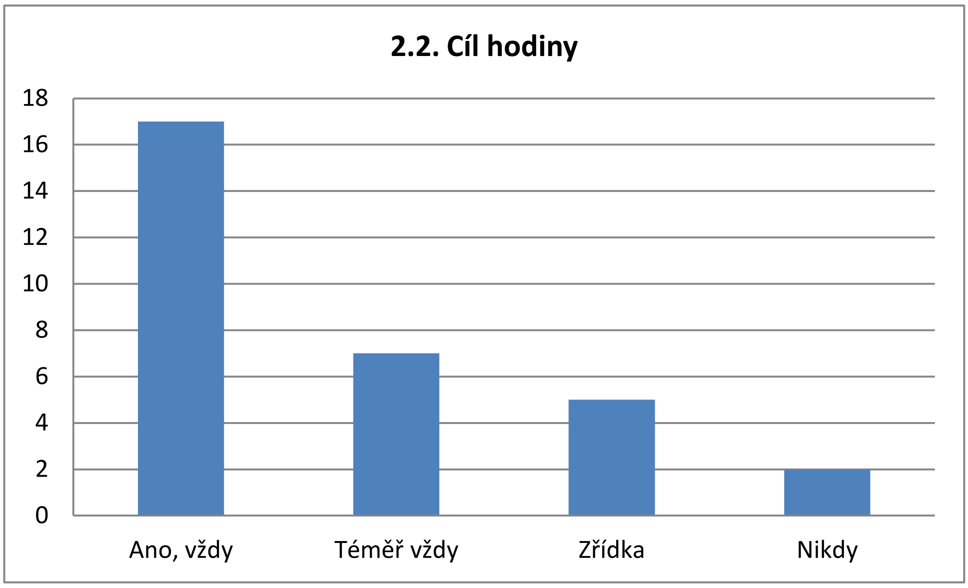
2.1. Téma hodiny

Zjišťovali jsme, zda učitelé do svých příprav zapisují téma hodiny. 21 učitelů jej uvádí *vždy*, 8 učitelů *téměř vždy*, a pouze 2 učitelé odpověděli, že téma hodiny zapisují *zřídka*.



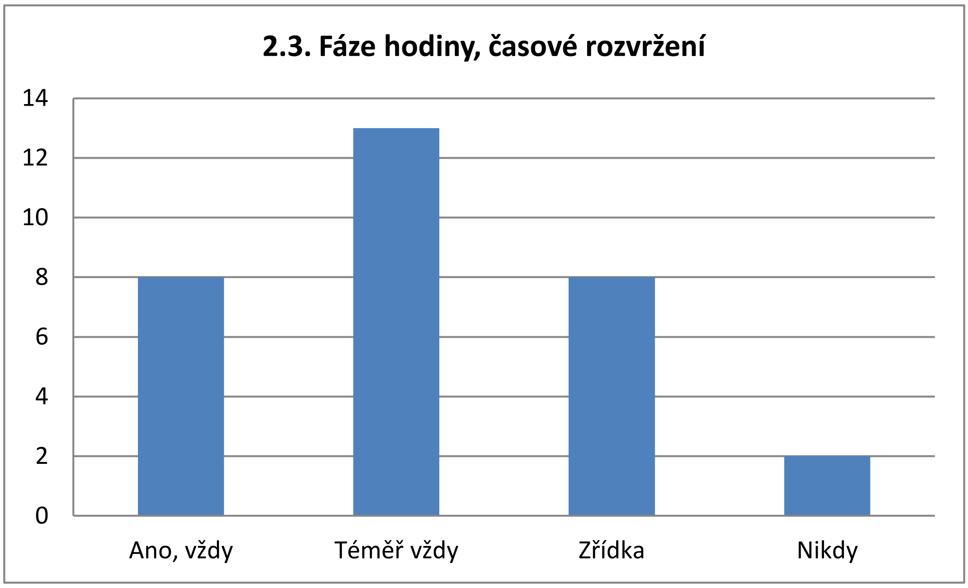
2.2. Cíl hodiny

Pomocí této otázky jsme se chtěli dozvědět, zda učitelé do příprav také zahrnují cíl hodiny. Většina učitelů (17) odpověděla, že cíl uvádí *vždy*, 7 učitelů *téměř vždy*, 5 učitelů *zřídka* a 2 učitelé cíl hodiny do svých příprav nezahrnují *nikdy*.



2.3. Fáze hodiny, časové rozvržení

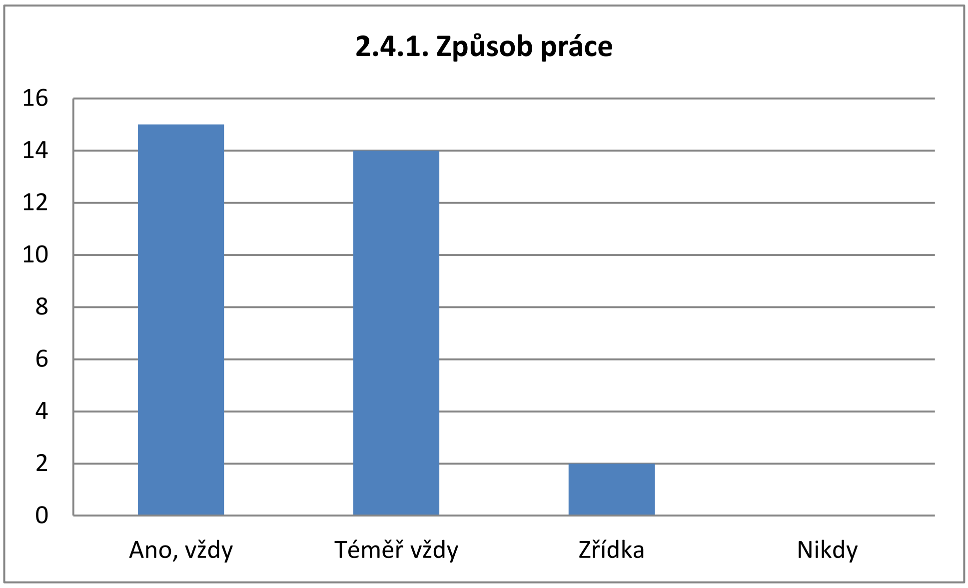
Touto otázkou jsme zjišťovali, zda učitelé ve své přípravě rozčleňují hodinu na fáze, případně zda pracují s časovým rozvržením. Většina učitelů odpověděla kladně: 8 učitelů *ano, vždy*, 13 učitelů *téměř vždy*. *Nikdy* odpověděli 2 učitelé a *zřídka* 8 učitelů.



2.4. Jednotlivé aktivity

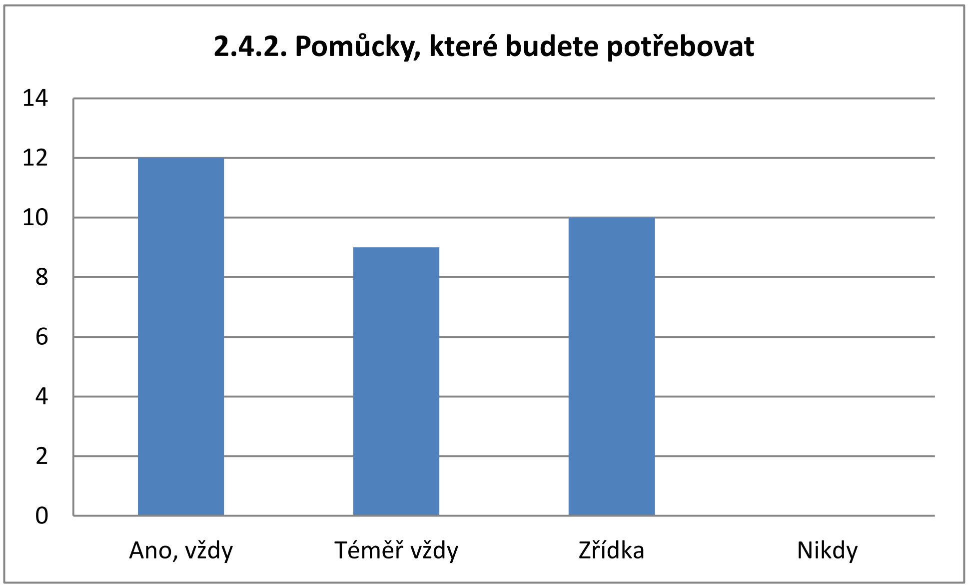
2.4.1. Způsob práce (individuální, skupinová apod.)

Zajímalo nás, zda učitelé v rámci přípravy rozmýšlejí, jakým způsobem budou žáci pracovat. Většina učitelů odpověděla kladně, 15 učitelů *ano, vždy*, 14 učitelů *téměř vždy*. Pouze 2 učitelé se nad touto problematikou zamýšlejí *zřídka*.



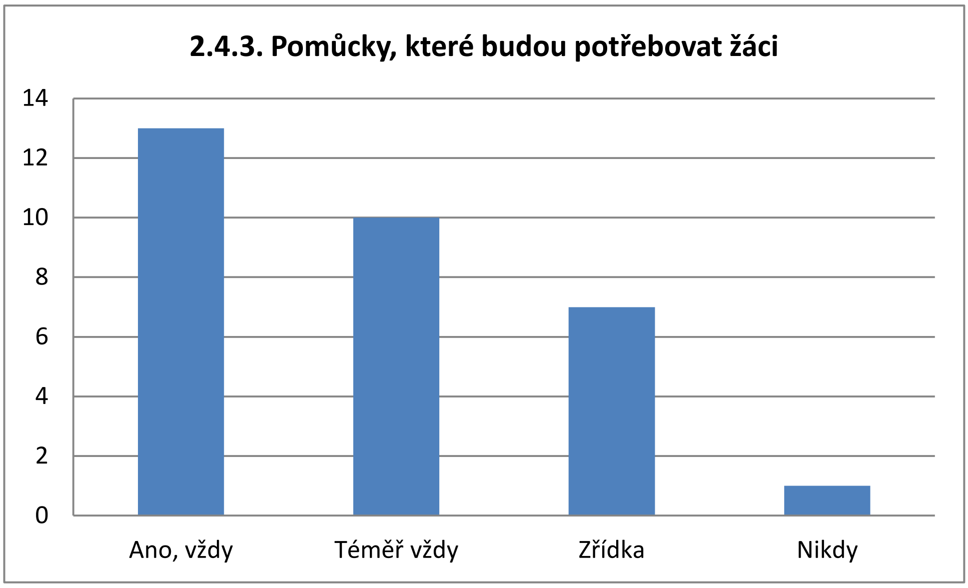
2.4.2. *Pomůcky, které budete potřebovat*

V této otázce jsme se ptali, zda učitelé přemýšlejí o pomůckách, které budou ve výuce potřebovat oni sami. 12 učitelů se pomůckami zabývá *vždy*, 9 učitelů *téměř vždy*, 10 učitelů se během přípravy zabývá touto otázkou *zřídka*.



2.4.3. *Pomůcky, které budou potřebovat žáci*

Zjišťovali jsme, zda se učitelé zabývají pomůckami, které budou potřebovat žáci. Většina učitelů odpověděla, že *vždy* (13), 10 učitelů *téměř vždy*, 5 učitelů se touto problematikou zabývá *zřídka* a 1 učitel tuto otázku neřeší *nikdy*.

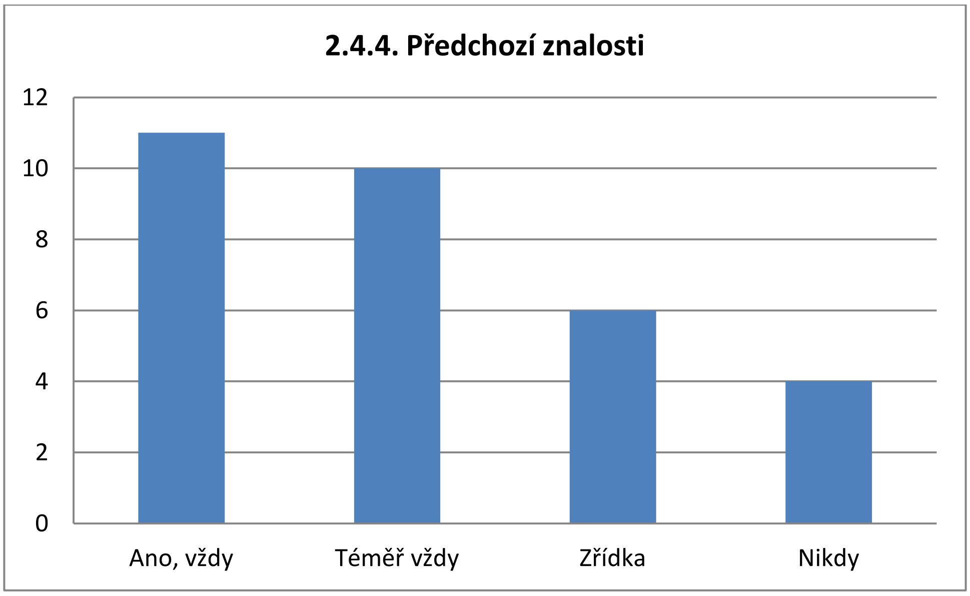


2.4.4. Předchozí znalosti (tj. znalosti, na které téma navazuje a jsou nutné pro jeho pochopení)

Cílem této otázky bylo zjistit, zda se učitelé při přípravě hodin zamýšlejí nad předchozími znalostmi, které jsou pro dané nové téma důležité. Většina učitelů odpověděla kladně (11 *ano, vždy*, 10 *téměř vždy*), 6 odpovědělo, že se předchozími znalostmi zabývají *zřídka*, 4 učitelé *nikdy*.

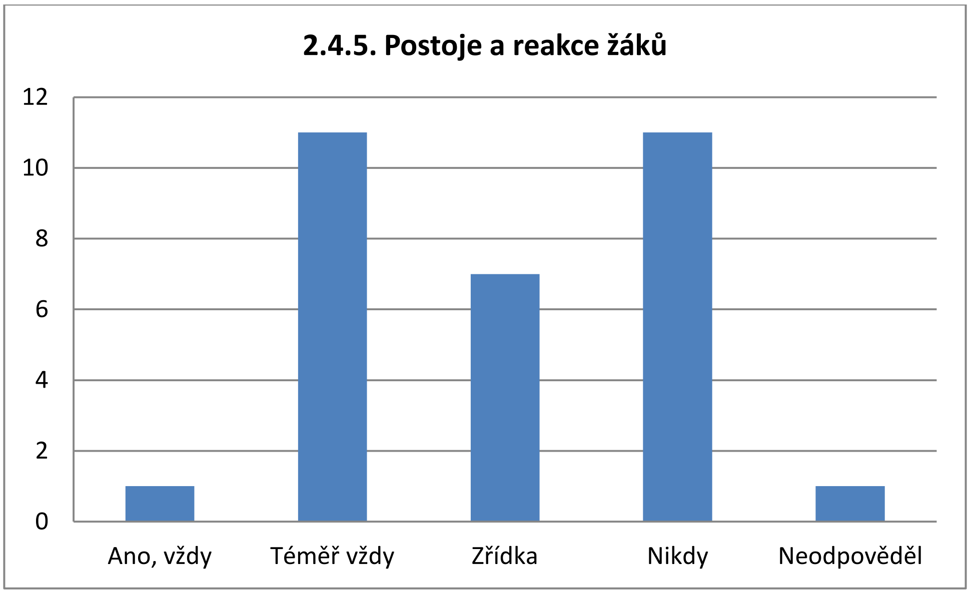
Učitel, případně student učitelství (U): Před novou látkou vždy ověřuji úroveň „vstupních" znalostí žáků – pretestem, řízeným rozhovorem, vstupní problémovou úlohou apod.

U: To si píšu do popisu průběhu hodiny a reflexe, která následuje po hodině.



2.4.5. *Postoje a reakce žáků*

Cílem této otázky bylo zjistit, zda se učitelé během přípravy zamýšlejí nad tím, jak budou žáci na jimi navrženou aktivitu reagovat. Většina učitelů odpověděla, že se touto problematikou nezabývá: 7 učitelů *zřídka*, 11 učitelů *nikdy*. Jeden učitel odpověděl, že se postoji a reakcemi žáků zabývá *vždy*, 11 učitelů *téměř vždy*.



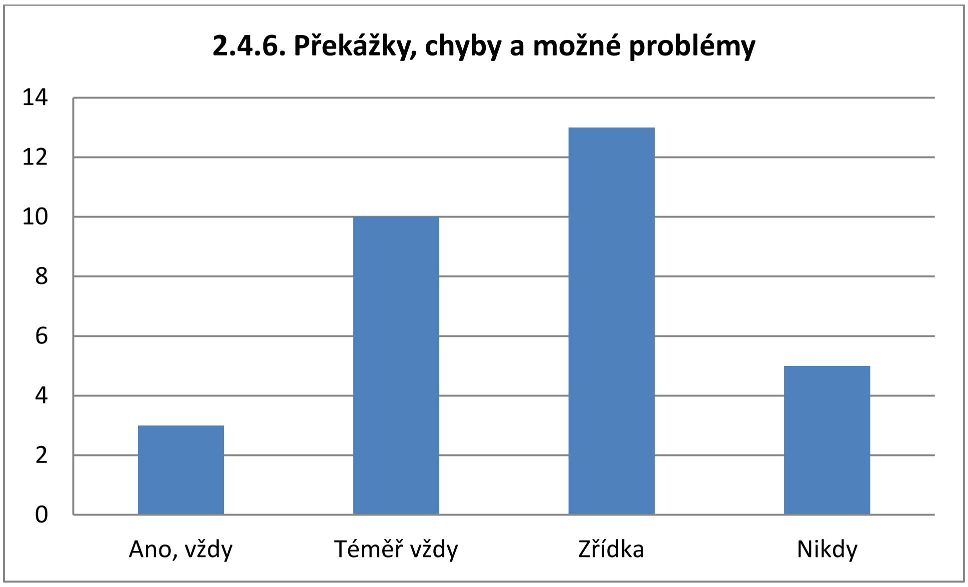
2.4.6. *Překážky, chyby a možné problémy, které se u žáků mohou objevit*

Zjišťovali jsme, zda se učitelé při připravování hodin zabývají překážkami a chybami, se kterými se žáci mohou setkat. Nejvíce učitelů (13) odpovědělo, že *zřídka*, 10 *téměř vždy*, 5 učitelů *nikdy* a pouze 3 učitelé *vždy*.

U: Zde se musím přiznat, že mi ještě chybí dostatečný cit pro předjímání problémů a vše řeším v reálném čase.

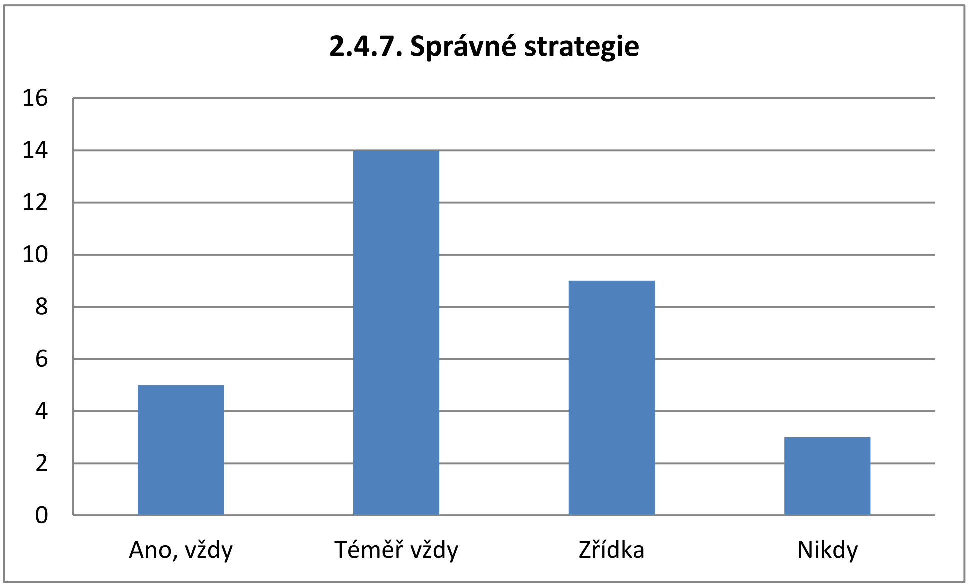
U: Snažím se sestavit hodinu tak, abych jim předcházel.

U: Doplňuji po hodině, „soupis“ chyb a komplikací mám stranou v jednom souboru v PC. Tento seznam se soustavně rozrůstá.



2.4.7. *Správné strategie řešení, které mohou žáci použít*

Zajímalo nás, zda učitelé rozmýšlejí během přípravy správné strategie řešení úloh, se kterými by mohli žáci přijít. Nejvíce učitelů (14) odpovědělo, že *téměř vždy*, 5 učitelů *vždy*. 9 učitelů se správnými strategiemi zabývá *zřídka* a 3 učitelé *nikdy*.

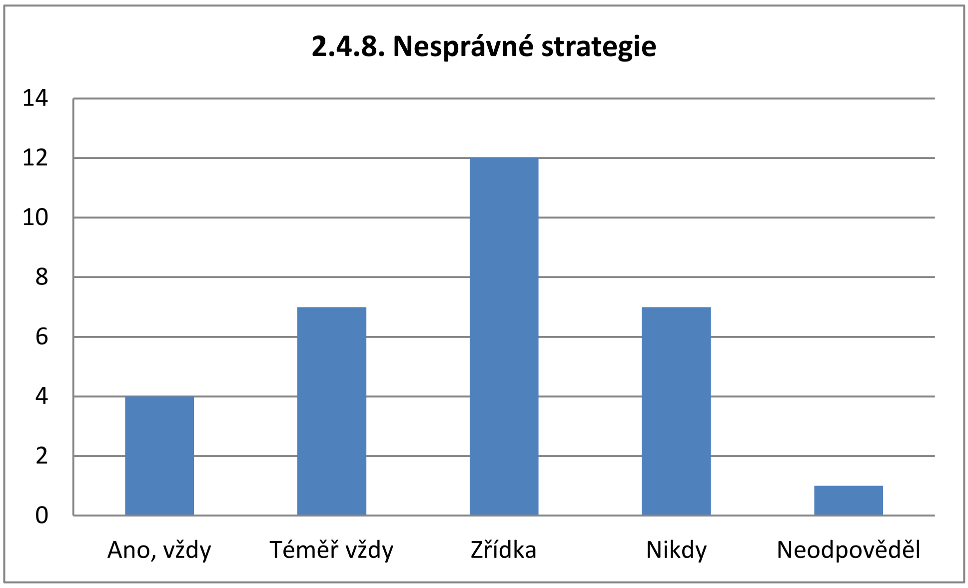


2.4.8. *Nesprávné strategie řešení, které mohou žáci použít*

Pouze 4 učitelé odpověděli, že se nad nesprávnými postupy zamýšlejí pokaždé. 7 učitelů uvedlo, že *téměř vždy*, 12 učitelů *zřídka* a 7 učitelů *nikdy*.

U: Po zkušenostech můžete žáky předem upozornit, kudy cesta nevede.

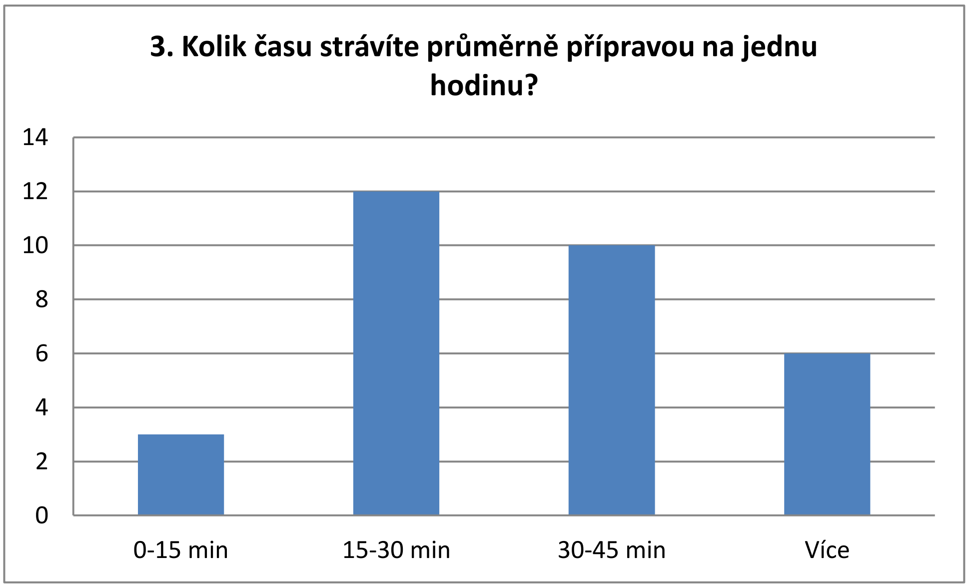
U: Ano, náměty z předchozích řešení.



Otázka 3

Kolik času trávíte průměrně přípravou na jednu hodinu?

Nejvíce učitelů (12) se připravuje 15 až 30 minut, nejméně učitelů (3) přípravu zvládne do 15 minut. 10 učitelům příprava trvá 30 až 45 minut a více než 45 minut přípravou na jednu vyučovací hodinu stráví 6 učitelů.



Otázka 4

Srovnáváte po hodině její skutečný průběh s vaší přípravou? Pokud ano, co podle vás takové srovnání přináší vám, učitelům, a co žákům?

Většina učitelů odpověděla kladně, pouze jeden učitel napsal, že „necítí potřebu“. Odpovědi jsme rozdělili do dvou skupin. V první skupině odpovědí (US1) mluví učitelé pouze o přínosu pro ně samotné, v druhé (US2) jak pro ně, tak pro žáky.

US1: Ano, rozšiřuje mi to soubor žákovských řešení, zpřesňuje moje očekávání (častěji jsou tím pádem naplněna).

US1: Někdy, dělala jsem to hodně dřív. Získala jsem tím schopnost odhadnout průběh hodiny a nemusím si to nyní psát.

US2: Snažím se vždy po hodině, pokud to čas dovolí, zjistit, kde jsem se v hodině zbytečně zdržel a kde jsem případně příliš spěchal. Žákům tato sebereflexe může usnadnit pochopení učiva a mě vede k tomu, abych se přizpůsobil jejich potřebám a tempu.

US2: Ano, abych si na základě toho rozvrhla průběh dalších hodin. Pro učitele přináší možnost sledování práce žáků a vyvarovat se napříště ne příliš efektivních příprav. Pro žáky to znamená pak více individualizovanou výuku.

Otázka 5

Využíváte přípravy, které jste použili dříve? Pokud ano, jakou část můžete použít více méně bez změn a jakou většinou upravujete a proč?

Odpovědi na tuto otázku jsme rozdělili do čtyř skupin (S). První skupinu tvoří odpovědi studentů učitelství, kteří jednomyslně odpověděli, že ještě moc příprav nemají a nemohou na tuto otázku odpovědět. Druhou skupinou jsou učitelé, kteří odpověděli, že přípravy opakovaně používají, třetí skupinou učitelé, kteří je znovu nepoužívají, a čtvrtou ti, kteří je použijí pouze výjimečně.

US2: Přípravy předešlé používám, mám tam poznámky, co vylepšit, víc se asi využije výklad, ale i ten si člověk upraví podle dětí ve třídě.

US3: Nevyužívám, protože jsem ještě nikdy první třídu neučila. Ale pokud bych ji někdy v budoucnu učila, tak po zkušenostech z jiných ročníků vím, že se to nikdy nedalo, naopak využití staré přípravy bylo vždy kontraproduktivní, žádné dvě třídy nereagovaly na stejnou přípravu stejně.

2.3.2 Porovnání odpovědí v experimentálních skupinách

Nyní se podíváme, jak vypadalo rozvržení odpovědí v jednotlivých skupinách. V grafech uvádíme pro úplnost i odpovědi třetí experimentální skupiny – studentů učitelství pro 1. stupeň ZŠ. Jejich odpovědi jsou ovlivněny velmi malou nebo žádnou zkušeností z učitelské praxe. Vyplývá to i z jejich komentářů.

Komentář k otázce 2.4.8. Nesprávné strategie – U: Nejsem zatím schopna většinou odhadnout.

V dalším textu budeme tedy porovnávat odpovědi první a druhé experimentální skupiny. Připomeňme si, že první experimentální skupinu tvořilo 14 učitelů 1. stupně ZŠ, druhou experimentální skupinu 10 učitelů 2. stupně ZŠ. Vzhledem k různému počtu respondentů ve skupinách jejich odpovědi uvádíme v procentech. Porovnávali jsme vždy součet odpovědí *ano, vždy* a *téměř vždy*. Otázky jsme rozdělili do dvou skupin, podle míry odlišnosti.

A) Rozdíly mezi experimentálními skupinami

Největší rozdíly (20 % a více) mezi první a druhou experimentální skupinou jsme zaznamenali u těchto otázek: 2.4.2. Pomůcky pro učitele, 2.4.3. Pomůcky pro žáky, 2.4.4. Předchozí znalosti, 2.4.5. Postoje a reakce žáků, 2.4.6 Překážky, chyby a možné problémy, 2.4.7. Správné strategie řešení, 2.4.8. Nesprávné strategie.

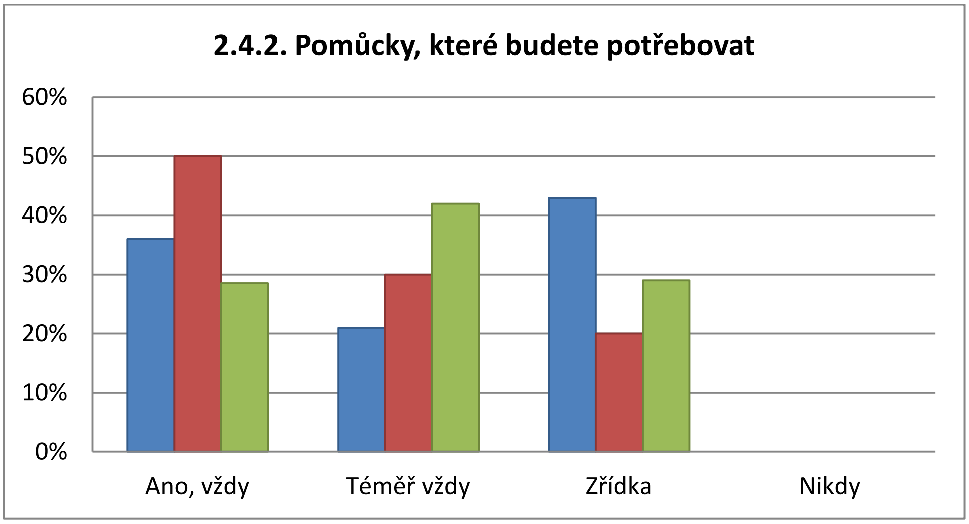
Otázky 2.4.2. a 2.4.3.

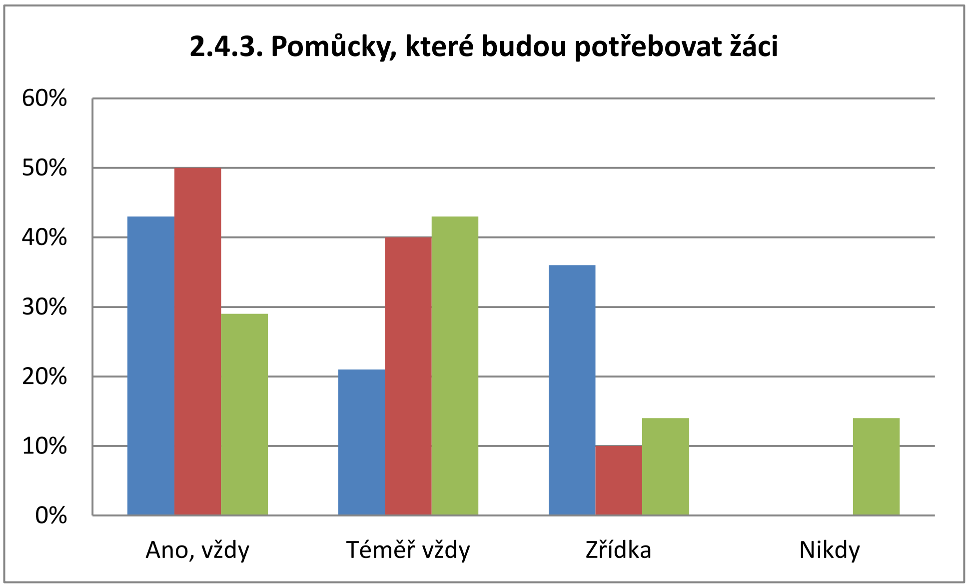
Pomůcky pro sebe i pro žáky v rámci přípravy častěji rozmýšlejí učitelé druhé experimentální skupiny, tj. druhého stupně ZŠ. Domníváme se, že učitelé 1. stupně i jejich žáci mají všechny pomůcky k dispozici ve třídě, a proto je do přípravy tak často nezahrnují.

Poznámka

V následujících grafech budeme pro snadnější orientaci používat pro experimentální skupiny zkrácené názvy.

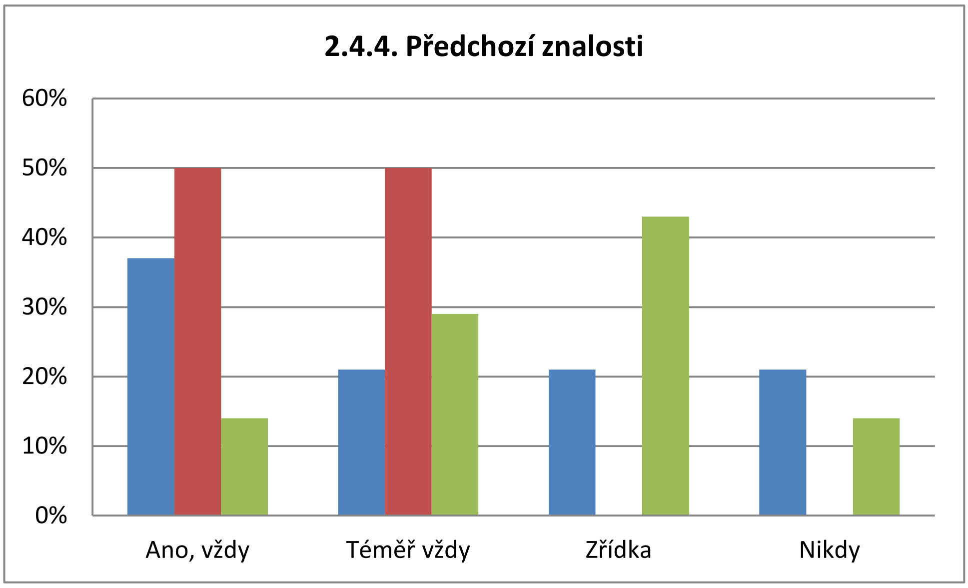
Skupina	Označení v grafu
1. experimentální skupina, tj. učitelé 1. stupně ZŠ	1. stupeň
2. experimentální skupina, tj. učitelé 2. stupně ZŠ	2. stupeň
3. experimentální skupina, tj. studenti učitelství	studenti





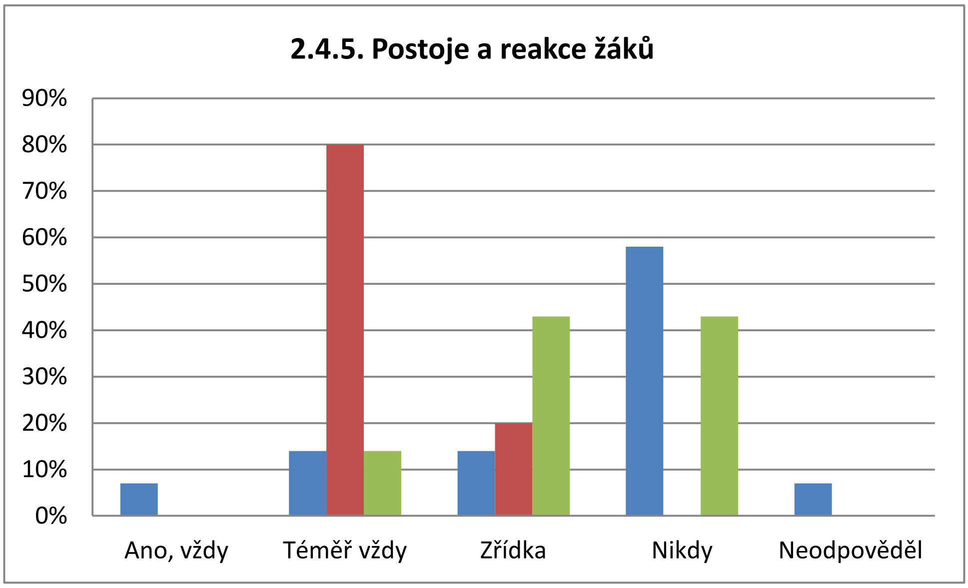
1. stupeň 2. stupeň studenti

Z odpovědi na otázku 2.4.4. vyplývá, že učitelé 2. stupně pracují při tvorbě přípravy s předchozími znalostmi častěji než učitelé prvního stupně. Stejně tak jako u otázky 2.4.6. si odpovědi učitelů prvního stupně vysvětlujeme tím, že mají tuto problematiku zřejmě tak zažitou, že ji nepovažují za součást přípravy.



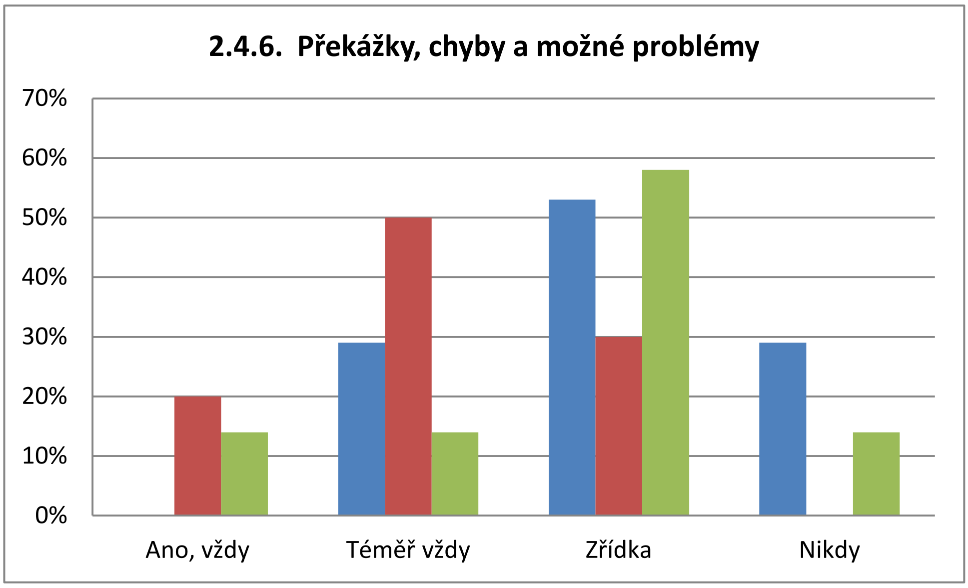
1. stupeň 2. stupeň studenti

V otázce 2.4.5. se ukázalo, že se učitelé prvního stupně při tvorbě přípravy nezamýšlejí nad reakcemi a postoji žáků tolik, jako učitelé druhého stupně. Vysvětlujeme si to různou povahou učiva, které učitelé s žáky probírají.



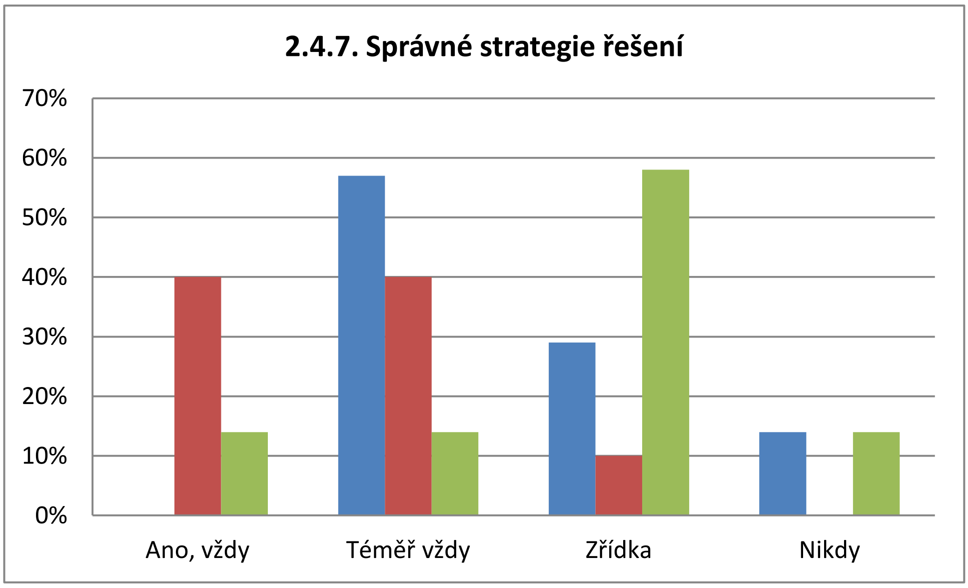
1.stupeň 2. stupeň studenti

Z odpovědí na otázku 2.4.6. vyplývá, že nad překážkami a možnými problémy se nejvíce zamýšlejí učitelé druhé experimentální skupiny, tj. druhého stupně. Odpovědi učitelů prvního stupně si vysvětlujeme tím, že mají tuto problematiku zřejmě tak zažitou, že ji nepovažují za součást přípravy.



1. stupeň 2. stupeň studenti

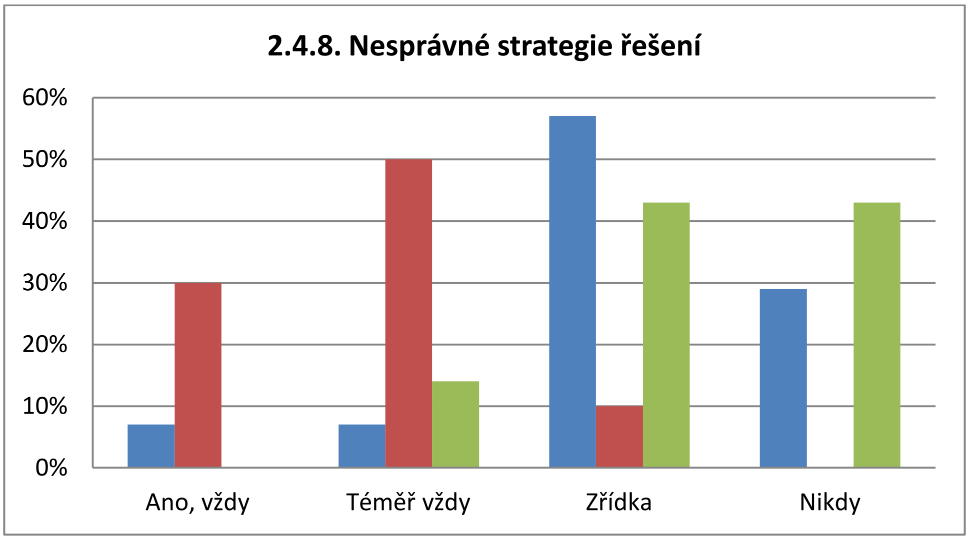
V otázce 2.4.7. se opět ukázalo, že správnými strategiemi se častěji zabývají učitelé druhého stupně ZŠ. Domníváme se, že je to způsobeno obtížností učiva, na prvním stupni učitelé zřejmě mají správné strategie řešení zautomatizované a necítí takovou potřebu se jimi při tvorbě přípravy zabývat.



1. stupeň 2. stupeň studenti

U otázky 2.4.8. se opět se objevil podobný rozdíl jako u předchozí otázky. Učitelé prvního stupně se nad nesprávnými strategiemi nezamýšlejí tak často jako učitelé druhého stupně. Učitelé prvního stupně zřejmě nepřikládají takovou důležitost nesprávným strategiím.

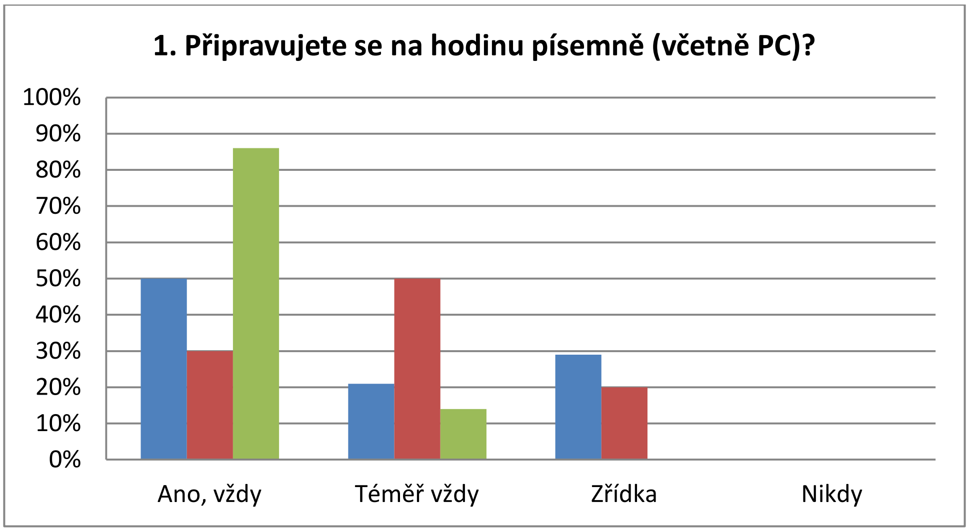
U: Mám první třídu.



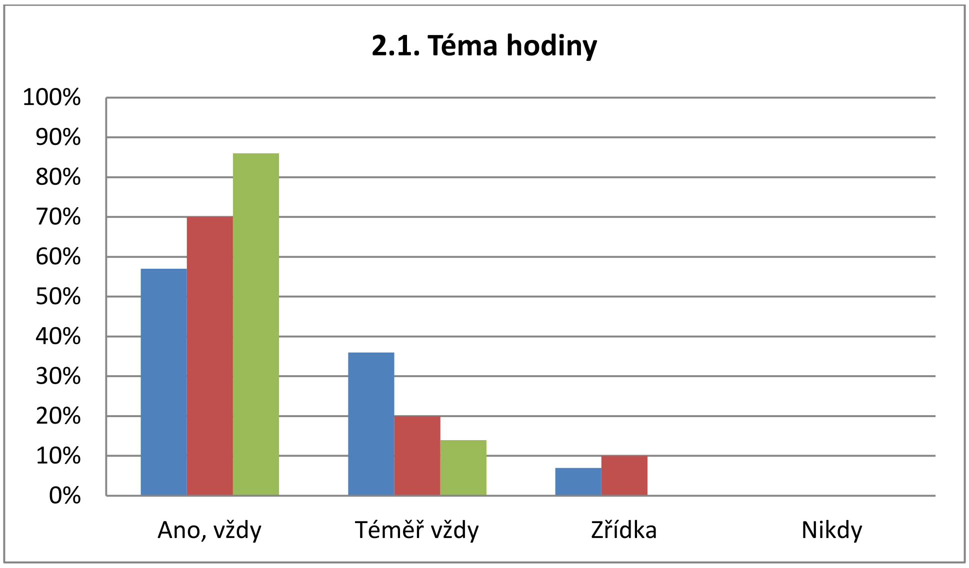
1. stupeň 2. stupeň studenti

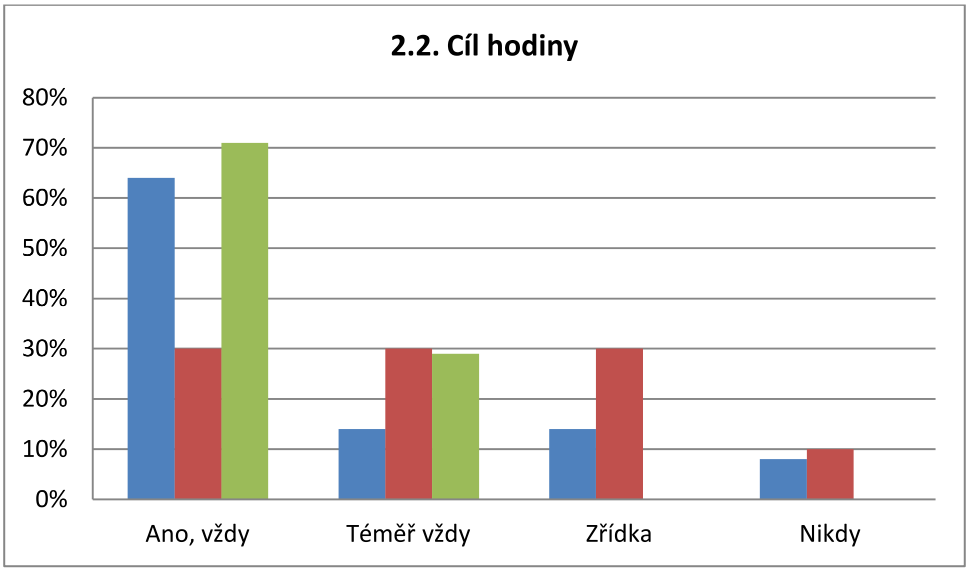
B) Srovnatelné výsledky první a druhé experimentální skupiny

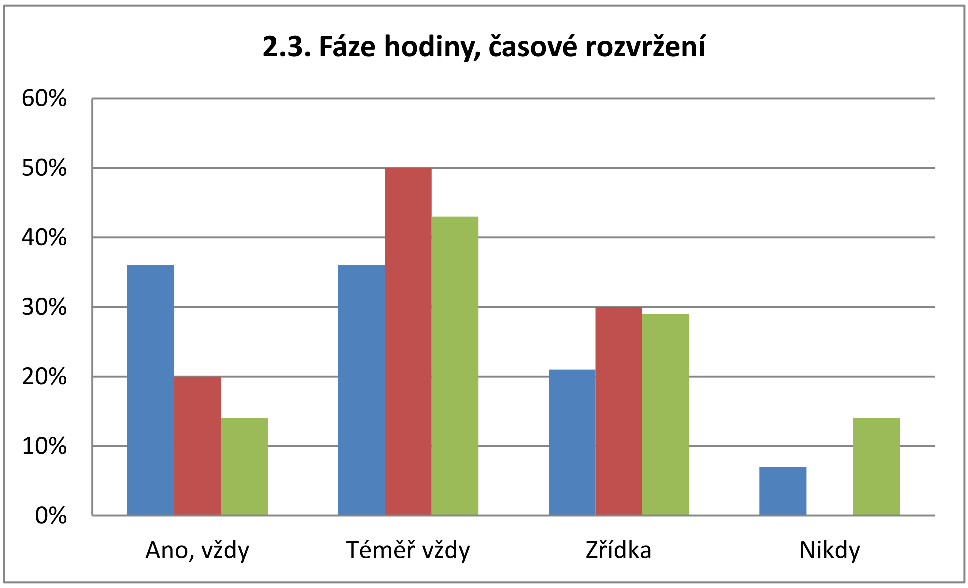
Odpovědi na následující otázky byly v obou skupinách srovnatelné, tj. rozdíl v součtu odpovědí *ano, vždy* a *téměř vždy* byl menší než 20 %: 1. Připravujete se na hodinu písemně? 2.1. Téma hodiny, 2.2. Cíl hodiny, 2.3. Fáze hodiny a časové rozvržení, 2.4.1. Způsob práce, 3. Kolik času strávíte průměrně přípravou na jednu hodinu? Srovnatelné odpovědi jsme získali i na otázky 4. a 5. Vysvětlujeme si to tím, že se jedná o obecnější / formálnější složky přípravy, které jsou na prvním i druhém stupni podobné.



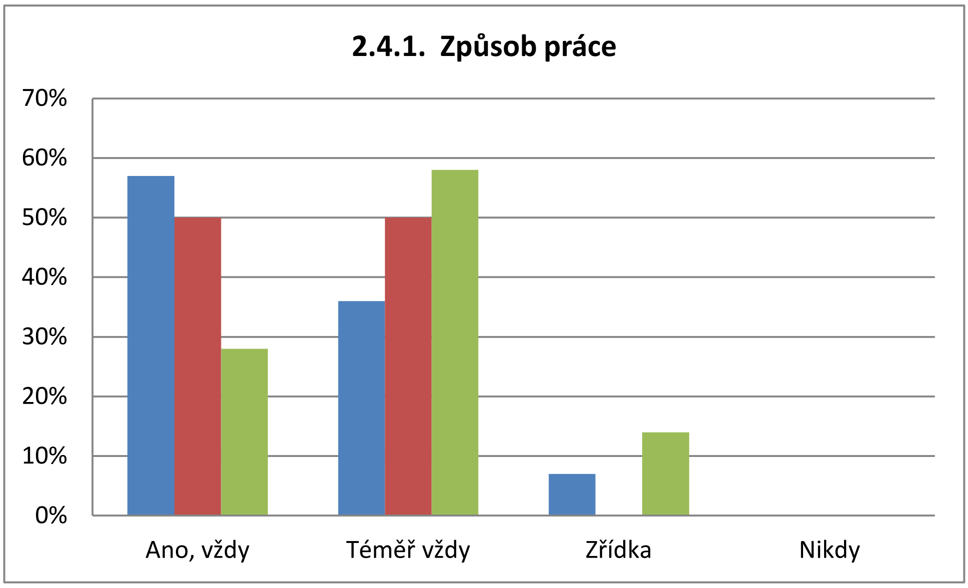
1. stupeň 2. stupeň studenti

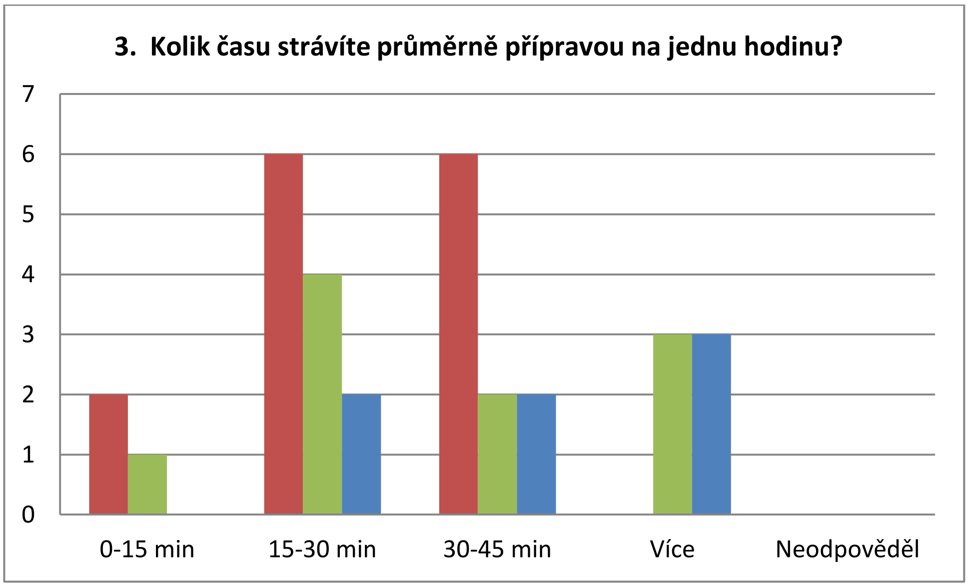






1. stupeň 2. stupeň studenti





1. stupeň 2. stupeň studenti

2.4 Porovnání s analýzou a priori podle TDSM

Nyní porovnáme přípravy učitelů a analýzu a priori podle TDSM.

Nejprve se podíváme, co je pro ně společné. Budeme přitom vycházet z otázky 2. Položky v této otázce jsou vlastně složky analýzy a priori podle TDSM. V případě, že většina učitelů odpověděla na podotázky v této otázce *ano vždy* a *téměř vždy*, považujeme položku za společnou. Z dotazníků vyplývá, že většina učitelů do svých příprav uvádí téma hodiny, cíl hodiny, fáze hodiny, časové rozvržení. Zamýšlí se nad způsobem práce v hodině, pomůckami, předchozími znalostmi a správnými strategiemi.

Nyní se zaměříme na ty složky analýzy a priori, které učitelé ve svých přípravách považují za zbytečné. V případě, že většina učitelů odpověděla *zřídka* a *nikdy*, usuzujeme, že učitelé položku považují za zbytečnou. Jedná se o položky postoje a reakce žáků, překážky, chyby a možné problémy, nesprávné strategie řešení.

V otázce 2.5. mohli učitelé napsat, jaká složka přípravy v dotazníku chybí a považují ji za důležitou.

Na otázku odpovědělo celkem 11 učitelů. Odpovědi jsme rozdělili do dvou skupin (u každé uvádíme typická vyjádření učitelů):

1. *Konkretizace námi navržené přípravy, její uvedení do praxe, jako např.:*

   - rozpracování jednotlivých aktivit: motivační rozcvičky, úvodní problémová úloha, matematické rébusy/hry, shrnutí učiva.
   - testy, písemky, aktuální problémy ze života, kde se dá použít matematika,…
   - mám různé knihy, sešity plné nápadů, na některá témata volím skládačky, kopíruju různé texty, pracujeme se skutečnými texty v novinách, nabídkách, plánech (např. letáky z bank, plánky bytu, apod.).

2. *"Nové" složky přípravy, které se v naší přípravě neobjevily:*

   - klíčové kompetence (které rozvíjím).
   - datum a číslo hodiny od začátku roku, očekávání, která si zapisuji na stránku, kam pak budu psát průběh hodiny; očekávání někdy k celé třídě, někdy k jednotlivcům.
   - formy hodnocení práce žáků, představa o tom, co je důležité písemně zaznamenat do sešitu, zápisy na tabuli.
   - informace o žácích: kdo udělal cosi navíc, kdo potřebuje co procvičit, koho s kým dát/nedat do skupiny, kdo má splnit něco, apod.

Závěr

Naše studie potvrdila, že učitelé, a to nejen začínající, ale i zkušení, přikládají většinou podrobné přípravě výuky velký význam. V našem vzorku byl prokázán rozdíl v některých položkách mezi učiteli na 1. a na 2. stupni školy. Ten je podle našich analýz způsoben hlavně rozdíly v obsahu a rozsahu probíraného učiva.

3 PŘÍPRAVA EXPERIMENTU

Úvod

Předexperiment ukázal, že učitelé považují přípravu na výuku za důležitou. Na základě dotazníku jsme získali přibližnou představu o tom, jakou strukturu má příprava učitelů, jaké složky obsahuje.

Jak ale vypadá konkrétní příprava učitele na konkrétní hodinu? Bude se shodovat nebo lišit s odpověďmi, které jsme získali z dotazníku? Objeví se něco nového?

K zodpovězení těchto otázek jsme navrhli experiment. Chtěli jsme získat skutečné přípravy od učitelů, abychom je mohli podrobněji analyzovat. V této kapitole se seznámíme s přípravou experimentu[44].

3.1 Výběr úlohy

Prvním úkolem bylo najít úlohu, kterou by učitelé mohli zařadit do výuky, a vytvořit tak přípravu na hodinu, kterou bychom mohli dále analyzovat.

Abychom z příprav získali co nejvíce informací, stanovili jsme tři kritéria výběru. Chtěli jsme, aby úloha byla neobvyklá, tj. úloha, se kterou se žáci ani učitelé nesetkají běžně v učebnicích. Dále jsme požadovali, aby práce s ní nebyla limitována věkem žáků, aby bylo možné použít ji v různých ročnících. Nakonec jsme chtěli, aby úloha poskytovala velký prostor kreativitě učitelů, tj. nabízela více správných strategií řešení, dala se zařadit do různých tematických celků, umožňovala různé formy práce.

Úlohu, která podle našeho názoru splňuje všechna výše uvedená kritéria, jsme vybrali z Diofantova spisu Aritmetika, jedná se o úlohu číslo tři z Knihy první.

V následující kapitole provedeme analýzu a priori této úlohy a seznámíme se s ní podrobněji.

3.2 Analýza a priori úlohy Diofant, Kniha první, úloha č. 3

Rozdělte dané číslo na dvě části tak, aby se větší z nich rovnala trojnásobku menší, zvětšenému o čtyři.[45]

---

[44]Podrobněji o experimentu viz s. 60.

- **Charakter zadání**

Úloha může být zadána vizuálně (napsaná na tabuli, pracovním listu) nebo slovně (učitel úlohu žákům nadiktuje). Úlohu můžeme zadat jako text, nebo ve formě rovnice. Touto formou zadání ale ztratí úloha částečně svůj potenciál, kterým je přepis mluveného/psaného slova do jazyka matematiky.

  - *Znalosti potřebné ke správnému pochopení zadání*
    - *Matematické:* trojnásobek, zvětšit o čtyři.
    - *Všeobecné:* menší a větší část, rozdělit dané číslo.
  - *Obtíže v chápání zadání:* Domníváme se, že formulace zadání je na porozumění poměrně složitá. V jednom souvětí je hned několik informací: je dáno číslo, úkolem je rozdělit je na dvě nestejné části, větší část má být rovna trojnásobku menší části zvětšenému o čtyři. Pro žáky může být obtížné všechny tyto informace zaznamenat a pochopit. Zvlášť formulace „…trojnásobku zvětšenému o čtyři.“ by mohla být problematická.

- **Tematický celek, do kterého by se úloha dala zařadit**

Úloha by se dala zařadit už do 6. ročníku jako součást tematického celku číslo a proměnná. V 7. ročníku (sekundě) by mohla být uvedena v rámci tematického celku lineární rovnice, na střední škole pak v 1. ročníku, když se probírají různé typy rovnic.

- **Cíl úlohy**

Žáci mají za úkol rozdělit dané číslo na dvě nestejné části. Podmínkou je daný vztah mezi těmito částmi: větší z nich má být rovna trojnásobku menší zvětšenému o čtyři.

- **Čas, který bude úloze věnován**

Záleží na učiteli, jakým způsobem úlohu zadá (může zadat konkrétní číslo, které mají žáci rozdělit, konkrétní číselný obor, ve kterém budou řešit), a na věku žáků. Odhadujeme polovinu vyučovací hodiny.

- **Způsob práce**

Domníváme se, že pro řešení úlohy je vhodná práce ve dvojicích nebo ve skupinách. Úloha

[45] „Diviser un nombre donné en deux parties, telles que la plus grande soit égale au triple de la plus petite, plus quatre unités.“ Překlad autorka. (Fermat, 1853), s. 47, Kniha první, úloha třetí.

je podle našeho názoru neobvyklá a někteří žáci by mohli mít při individuální práci problém s pochopením zadání. Ve skupině by se tyto obtíže mohly odstranit už na začátku.

- **Pomůcky**

Sešit, tužka, pro větší čísla kalkulačka, zajímavý by mohl být i počítač, program Excel, kam by rovnici mohli zadat a hledat různá řešení, ale to bychom navrhli až po vyřešení „na papír".

- **Proměnné**

Rozdělte dané číslo na dvě části tak, aby se větší z nich rovnala trojnásobku menší, zvětšenému o čtyři.

V úloze najdeme dva typy proměnných: kognitivní didaktické a formulační proměnné.

    - *Kognitivní didaktická proměnná*

[dané číslo] – můžeme zadat rovnou konkrétní číslo (např. číslo 12, pak úlohu mohou řešit i děti na prvním stupni).

[dvě] – můžeme dělit i na tři, čtyři a více částí, pak už je ale úloha mnohem obtížnější a hůře řešitelná systematickým experimentováním nebo metodou pokus omyl.

[trojnásobek] – když zvolíme vyšší násobek, opět bude úloha hůře řešitelná systematickým experimentováním nebo metodou pokus omyl.

[zvětšenému] – můžeme nahradit za „zmenšenému". Podle Nesher, Hershkovitz a Novotná (2003) řešitelé ale dávají přednost zvětšování před zmenšováním, úloha by se tedy žákům mohla zdát obtížnější.

[čtyři] – pokud nahradíme jiným číslem, např. desetinným, bude úloha obtížnější.

    - *Formulační proměnná*

[rozdělte], [větší], [menší], [části]

- **Předchozí znalosti**

Číselné obory N a Z, dělitelnost, pojmy násobek, menší a větší část.

- **Postoje a reakce žáků**

Předpokládáme, že se objeví na začátku žáci, kteří hned nějaké řešení uhodnou, a žáci, kteří si nebudou vědět rady. Domníváme se, že je může překvapit obtížná srozumitelnost zadání a fakt, že správné řešení nezískají snadno.

- **Postoje a reakce učitelů**

Domníváme se, že se úloha bude líbit kreativním učitelům právě kvůli možnostem použití, které nabízí. Mohou ji uvést v různé podobě, s ohledem na věk a schopnosti žáků.

- **Správné strategie řešení**

Označme dané číslo jako a. Budeme pracovat v oboru celých čísel, tedy $a \in Z$.

Máme rozdělit číslo a na dvě části, označme je b a c.

Potom $a = b + c,$ kde např. $b > c$,

podle zadání $b = 3c + 4.$ (1)

Dosadíme za b: $a = 3c + 4 + c,$

po úpravě $a = 4c + 4.$ (2)

Je patrné, že pokud budeme hledat celočíselná řešení, číslo a musí být dělitelné čtyřmi.

A) *Diofantovská rovnice*

Naším úkolem je dané číslo rozdělit. Pokusíme se tedy vyjádřit části b a c pomocí daného čísla a. Vycházíme přitom z výše uvedených vztahů (1) a (2).

$$c = \frac{a-4}{4},$$

$$c = \frac{a}{4} - 1,$$

$$b = \frac{3(a-4)}{4} + 4,$$

$$b = \frac{3a}{4} + 1.$$

Dané číslo a rozdělíme na dvě části, které můžeme zapsat jako

$$c = \frac{a}{4} - 1,$$

$$b = \frac{3a}{4} + 1.$$

Pokud chceme navíc, aby řešení bylo celočíselné, musí být a dělitelné čtyřmi.

Znalosti: neznámá, parametr, úpravy lineárních rovnic.

Možné obtíže: převedení textu zadání do matematického jazyka, vyjádření jednotlivých částí, správné dosazení.

B) *Systematické experimentování*

Vyjdeme opět ze vztahů (1) a (2) ze strany 53. Budeme hledat celočíselná řešení a postupně se pokusíme odvodit obecný předpis pro obě části, které vzniknou rozdělením čísla a.

Začneme tím, že za číslo a budeme dosazovat konkrétní hodnoty. Ze vztahu (2) na straně 53 vyplývá, že pokud chceme hledat celočíselná řešení, číslo a musí být dělitelné čtyřmi.

Sestavíme tabulku:

a	b	c
4	4	0
8	7	1
12	10	2
16	13	3
20	16	4
24	19	5
a_n	$a_n - n$	n

$$n = \frac{a}{4} - 1.$$

V posledním řádku tabulky vidíme řešení.

Znalosti: násobky 4, základní početní operace, zobecnění vztahu.

Možné obtíže: nepřehledný zápis v tabulce, dílčí chyba ve výpočtu některé z částí, správné zobecnění vztahů.

C) Metoda Pokus - Omyl

Tuto metodu lze použít pouze v případě, že za číslo a dosazujeme konkrétní hodnoty.

K obecnému vyjádření touto cestou pravděpodobně nedojdeme. Budeme hledat celočíselná řešení.

Zvolme $a = 12$.

Kdyby menší část byla rovna 1, větší by byla rovna 11, ale $3 \cdot 1 + 4 \neq 11$.

Kdyby menší část byla rovna 2, větší by byla rovna 10, $3 \cdot 2 + 4 = 10$, to je správně.

Číslo 12 rozdělíme na čísla 2 a 10.

Znalosti: základní početní operace.

Možné obtíže: aritmetická chyba ve výpočtu.

D) Graf

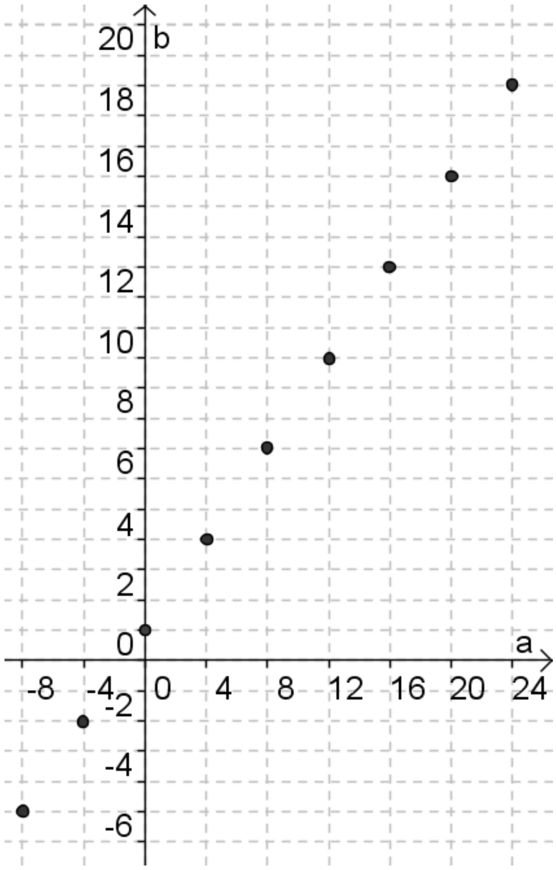
Vycházíme opět z podmínek v odstavci Správné strategie řešení na straně 53. Je-li zadáno číslo a, máme určit čísla b a c. Zapíšeme funkce, které vyjadřují závislosti hledaných hodnot $(b; c)$ na hodnotě zadané (a):

$$f_1:\ \ b = \frac{3a}{4} + 1$$

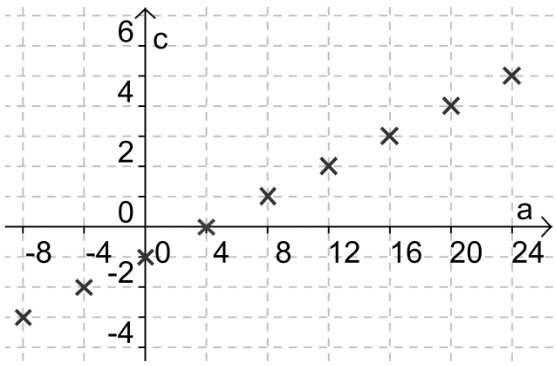
$$f_2:\ \ c = \frac{a}{4} - 1$$

Pokud chceme navíc, aby řešení bylo celočíselné, musí být a dělitelné čtyřmi. Sestrojíme grafy obou funkcí. Pro lepší názornost jsou měřítka na osách různá a graf funkce f_1 je zakreslen pomocí „teček“, graf funkce f_2 pomocí „křížků“.

Graf funkce f_1



Graf funkce f_2

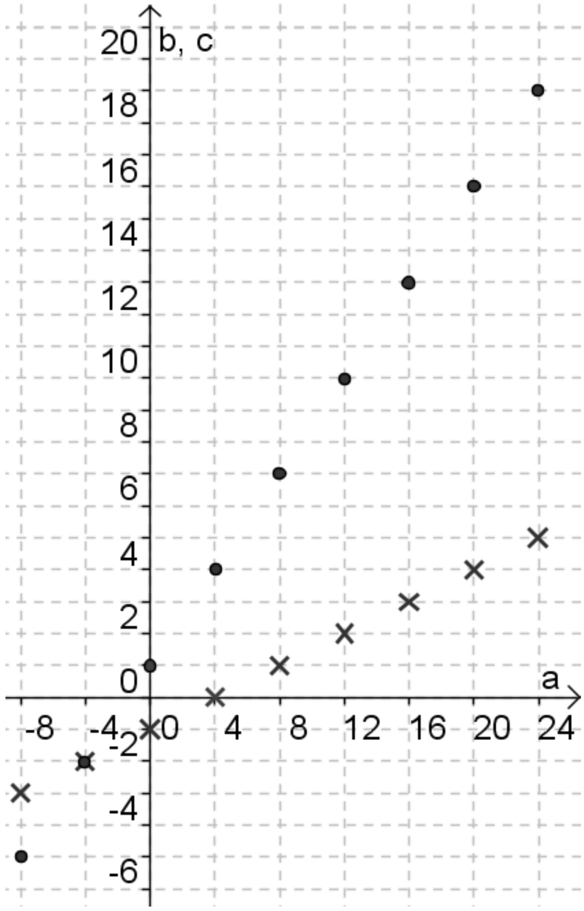


Řešením jsou pro každé zadané a příslušné hodnoty b a c.

Například pro $a = 12$ je z prvního grafu $b = 10$ a z druhého grafu $c = 2$.

Grafy obou funkcí můžeme zakreslit do jednoho obrázku a obě hledané hodnoty určit pro zadané a z tohoto grafu.

Grafy funkcí f_1 a f_2



Znalosti: lineární funkce, sestrojení jejího grafu

Možné obtíže: nesprávné sestrojení grafu, nesprávná interpretace výsledku.

E) Obrázek (úsečka)

Úsečka představuje číslo a, které chceme rozdělit. Označme menší část c. Dělení bude vypadat takto:

c	c	c	c	4

Podle obrázku vidíme, že část c získáme, odečteme-li od čísla a číslo čtyři a výsledek vydělíme čtyřmi.

Tedy

$$c = \frac{a-4}{4},$$

po úpravě

$$c = \frac{a}{4} - 1.$$

Větší část b (na obrázku vyznačena zeleně) potom:

$$b = 3c + 4,$$

$$b = 3 \cdot \frac{a-4}{4} + 4,$$

po úpravě

$$b = \frac{3a}{4} + 1.$$

Znalosti: základní početní operace, převedení textu do matematického vyjádření.

Možné obtíže: obecný zápis výsledku, vizualizace úlohy, algebraické úpravy.

- **Nesprávné strategie řešení**
  - *„Vydělit třemi, odečíst čtyři"*

Tato strategie vychází z nesprávného porozumění zadání. Úkolem žáků je rozdělit dané číslo na dvě části tak, aby se větší z nich rovnala trojnásobku té menší, zvětšenému o čtyři. Tedy:

$$a = b + c, \text{kde např.}\, b > c,$$

$$b = 3c + 4.$$

Někteří žáci by ale mohli díky nepozornému čtení dojít k jinému vztahu: větší část čísla by se rovnala trojnásobku menší části zvětšené o čtyři.

$$b = 3(c + 4).$$

- **Hodnocení**

Navrhujeme ohodnotit známkou 1 nebo příslušným bodovým ekvivalentem všechny úspěšné řešitele, ostatní ohodnotit pouze slovně.

4 EXPERIMENT

Úvod

Náš předexperiment potvrdil, že učitelé, a to nejen začínající, ale i zkušení, přikládají většinou podrobné přípravě výuky velký význam.

Forma přípravy na hodinu není závazně dána žádným předpisem MŠMT nebo zákonnou úpravou. Pracovní řád (vyhláška MŠMT) přípravu na vyučování sice předpokládá, ale blíže nespecifikuje. Pokud tedy vnitřní pravidla školy nestanoví jinak, může být příprava i ústní.

Studenti učitelství matematiky na Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze se přípravou zabývají v rámci předmětu Obecná didaktika. Jedná se většinou o obecná doporučení, co vše by měla příprava obsahovat a z čeho by měla vycházet. Zdrojem jsou publikace obecné didaktiky jako např.: Kalhoust - Obst (2002), Skalková (2007) nebo Rys (1975).

Z dotazníků vyplývá, že většina námi oslovených učitelů a budoucích učitelů do svých příprav uvádí téma hodiny, cíl hodiny, fáze hodiny, časové rozvržení. Zamýšlí se nad způsobem práce v hodině, pomůckami, předchozími znalostmi a správnými strategiemi. Položkám postoje a reakce žáků, překážky, chyby a možné problémy, nesprávné strategie řešení nepřikládají učitelé velkou důležitost. Jak ale vypadá skutečná příprava učitelů na konkrétní hodinu? Liší se od příprav budoucích učitelů?

Zformulovali jsme tři hlavní otázky experimentu:

Otázka 1: *Jak by měla příprava podle učitelů vypadat (předexperiment) a jak vypadá ve skutečnosti?*

Otázka 2: *Jaké jsou rozdíly v přípravách studentů a učitelů?*

Otázka 3: *Lze vytvořit nějakou kategorizaci příprav? (Typologie příprav podle převažujících složek analýzy a priori)*

4.1 Metodologie a cíl výzkumu

Hlavním cílem našeho výzkumu bylo analyzovat skutečnou přípravu učitele na hodinu. Zajímalo nás, jaké složky bude reálně obsahovat, jak se bude lišit a shodovat nejen s naší analýzou a priori dané aktivity, ale i s odpověďmi, které učitelé uváděli do dotazníku během předexperimentu.

Jako aktivitu, pro kterou měli učitelé, případně budoucí učitelé sestavit přípravu, jsme vybrali Diofantovu úlohu č. 3 z Knihy první[46]. Jedná se o velmi bohatou úlohu, lze ji použít pro různé věkové kategorie žáků, nabízí velké množství řešitelských strategií, není to typická „učebnicová úloha“. Chtěli jsme, aby byl učitelům ponechán co největší prostor pro vlastní nápady a myšlenky.

Nejprve jsme sestavili vlastní analýzu a priori vybrané úlohy.[47]

Respondentům byla úloha zasílána v elektronické podobě s průvodním dopisem, kde byli požádáni o sestavení velmi podrobné přípravy na hodinu, při které by využili právě námi navrhovanou úlohu. Mohli ji podle potřeby upravit, použít v jakémkoli ročníku.

4.2 Výzkumný vzorek

Chtěli jsme porovnat přípravy začátečníků a zkušených učitelů – expertů, a proto jsme oslovili nejen učitele matematiky, ale i studenty učitelství. Experimentu se zúčastnilo celkem 26 učitelů a budoucích učitelů: 16 studentů učitelství matematiky a 10 učitelů matematiky. Získali jsme tak dvě skupiny respondentů, lišící se délkou praxe: studenti s praxí v řádu několika hodin v rámci studia a učitelé s praxí od 3 do 25 let. Cílem rozdělení bylo vzájemně porovnat přípravy jednotlivých skupin a srovnat je s naší analýzou a priori.

4.3 Hypotézy

Předpokládali jsme, že přípravy studentů budou bohatší po formální a organizační stránce, budou častěji obsahovat téma hodiny, fáze hodiny, časové rozvržení, způsob práce, pomůcky, způsob hodnocení.

Domnívali jsme se, že přípravy učitelů budou více zaměřeny na žáka, budou častěji zmiňovat předchozí znalosti, reakce a postoje žáků, překážky, chyby a možné problémy, správné i nesprávné strategie řešení.

[46]Rozdělte dané číslo na dvě části tak, aby se větší z nich rovnala trojnásobku menší, zvětšenému o čtyři. Viz 3.2.
[47] Viz 3.2.

Předpokládali jsme, že se v přípravách učitelů objeví další správné strategie řešení úlohy, které jsme v naší analýze a priori neměli.

4.4 Výsledky experimentu

V této části nejprve porovnáme výsledky experimentu s výsledky předexperimentu. Poté se zaměříme na srovnání příprav studentů a učitelů, a v závěru vytvoříme kategorizaci příprav na základě složek analýzy a priori.

4.4.1 Srovnání výsledků experimentu s výsledky předexperimentu

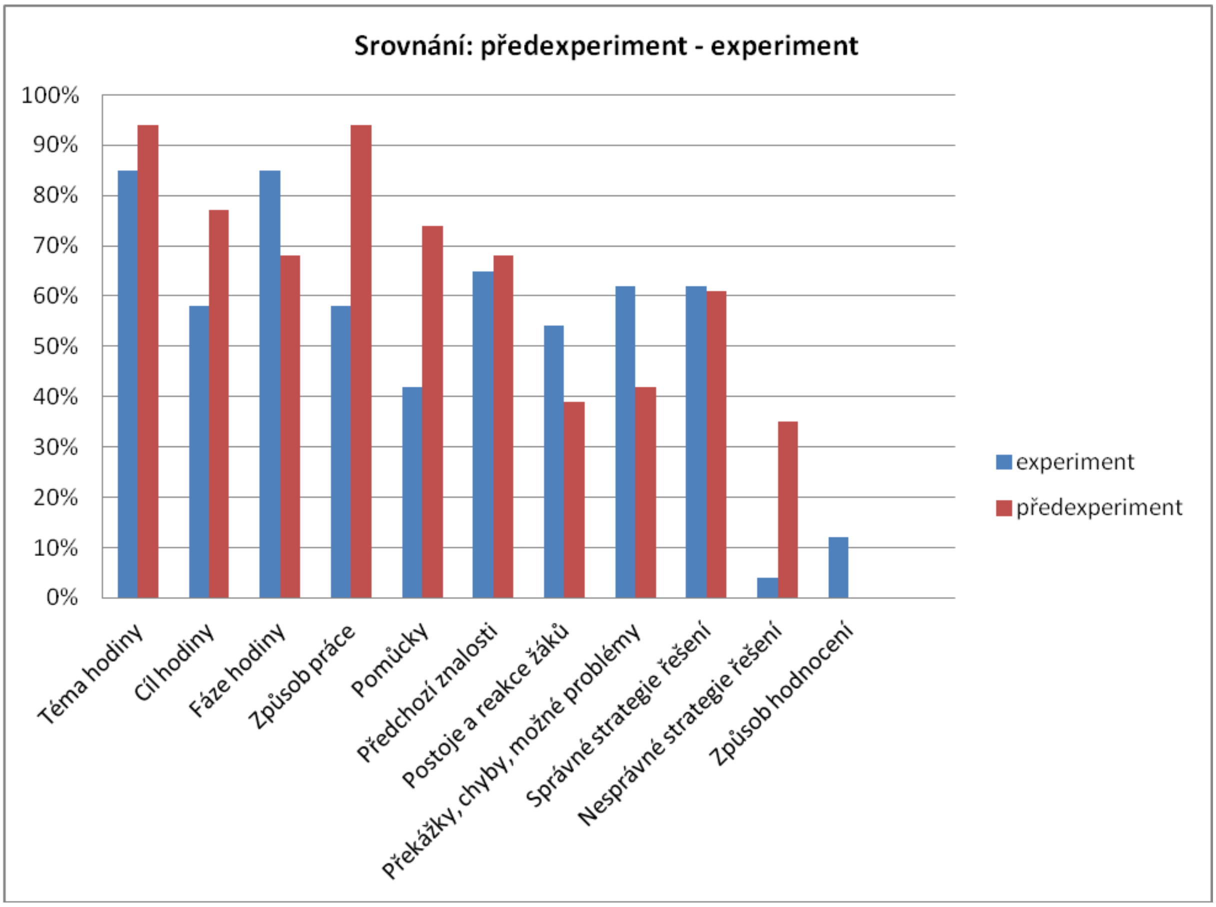
V každé přípravě, kterou jsme od respondentů obdrželi, jsme sledovali přítomnost nebo nepřítomnost následujících třinácti složek:

- téma hodiny,
- cíl hodiny,
- fáze hodiny,
- časové rozvržení,
- způsob práce,
- pomůcky,
- předchozí znalosti,
- postoje a reakce žáků,
- překážky,
- chyby a možné problémy,
- správné strategie řešení,
- nesprávné strategie řešení,
- způsob hodnocení.

Jedná se o složky analýzy a priori tak, jak byly uvedeny během předexperimentu. Poslední z nich, způsob hodnocení, jsme právě na základě předexperimentu do analýzy a priori přidali. Domníváme se, že jde o nedílnou součást plánování výuky, která ovlivňuje především výběr aktivity v hodině a způsob práce.

Na obrázku č. 3 pomocí histogramu srovnáváme výsledky experimentu s výsledky předexperimentu. Vzhledem k různému počtu respondentů ve srovnávaných skupinách uvádíme výsledky v procentech, v níže uvedených tabulkách také absolutní počty.

Srovnáváme kladné odpovědi, tj. v experimentu přítomnost dané složky, v předexperimentu součet odpovědí *ano, vždy* a *téměř vždy*.



Obr. 3

Nyní se podrobněji podíváme na jednotlivé složky a srovnáme je s výsledky dotazníku předexperimentu. Složky jsme rozdělili do tří skupin, podle míry odlišnosti.

A) Největší rozdíl (15 % a více)

Cíl hodiny

Předexperiment	Experiment
77 %	58 %
24/31	15/26

Jak uvádí např. Obst (2002) nebo Harmer (1992)[48], každá hodina by měla mít stanovený cíl. Domnívali jsme se tedy, že cíl hodiny nalezneme ve většině příprav. I v dotazníku 77 % respondentů odpovědělo, že jej do příprav zahrnují. Cíl hodiny byl ale zapsán jen v 58 % příprav. Může to být způsobeno tím, že učitelé, případně studenti, necítí potřebu cíl zapisovat, že jej mají při tvorbě přípravy „v hlavě“. Nebo se spoléhají na to, že každá úloha má nějaký cíl?

Fáze hodiny

Předexperiment	Experiment
68 %	85 %
21/31	22/26

Rozčlenění hodiny na jednotlivé úseky popisuje např. Hofmannová (2003)[49]. V dotazníku byla tato otázka spojena s otázkou časového rozvržení, v přípravách jsme sledovali tyto složky odděleně a zjistili jsme mezi nimi značné rozdíly. 68 % respondentů v dotazníku uvedlo, že do svých příprav zaznamenává fáze hodiny a časové rozvržení. V přípravách, které jsme získali během experimentu, jsme rozfázování hodiny identifikovali v 85 % případů. Rozdíl oproti předexperimentu je způsoben spojením složek fáze hodiny a časové rozvržení.

Časové rozvržení

Předexperiment	Experiment
-	35 %
-	9/26

Časové plánování výuky je velmi důležité, ale zároveň nesnadné. Zvlášť pro začínající učitele je těžké odhadnout, jak dlouho bude aktivita trvat. Pouze 35 % učitelů a studentů ve svých přípravách provedlo časové odhady pro jednotlivé fáze hodiny.

[48] Podrobněji viz 1.2

[49] Podrobněji viz 1.2.3.

Způsob práce

Předexperiment	Experiment
94 %	58 %
29/31	15/26

Budou žáci pracovat jednotlivě? Ve dvojicích? Ve skupinách? Všichni společně? Odpovědi na tyto otázky si do přípravy zaznamenalo pouze 58 % učitelů a studentů, v dotazníku to bylo 94 % respondentů. Může to být tím, že tuto otázku řeší podle typu úlohy a aktuální situace ve třídě až těsně před zadáním dané aktivity.

Postoje a reakce žáků

Předexperiment	Experiment
39 %	54 %
12/31	14/26

39 % učitelů a budoucích učitelů v dotazníku odpovědělo, že se při tvorbě přípravy zamýšlejí nad tím, jak budou žáci na danou aktivitu reagovat. Poznámku o postojích a reakcích žáků jsme v přípravách objevili dokonce v 54 %. Vysvětlujeme si to tím, že jsme zadali méně obvyklou úlohu a učitelé i studenti se nad ní víc zamýšleli. Reakce žáků na učebnicové úlohy by pravděpodobně nezapisovali, snadněji je odhadnou nebo ti zkušenější je už dopředu znají.

Překážky, chyby a možné problémy

Předexperiment	Experiment
42 %	62 %
13/31	16/26

Touto problematikou se ve skutečných přípravách opět zabývalo více učitelů a studentů (62 %) než v dotazníku (42 %). Může to být rovněž způsobeno výběrem netypické úlohy. Při vyplňování dotazníku zřejmě učitelé a studenti odpovídali na základě každodenní praxe, předpokládáme tedy, že se překážkami, chybami a možnými problémy zabývají více, pokud cítí potřebu, že je to přínosné.

Nesprávné strategie řešení

Předexperiment	Experiment
35 %	4 %
11/31	1/26

Nesprávné strategie jsme v přípravách odhalili pouze v 4 % případů (odpovídá jedné přípravě). Přitom v dotazníku to bylo 35 %. Může to být dáno typem úlohy, nebo učitelé o nesprávných strategiích ví, ale nevidí důvod je do přípravy zapisovat. Není samozřejmě možné vymyslet všechny nesprávné strategie, pouze ty nejpravděpodobnější. Jejich výskyt je ovlivněn např. úlohami, které žáci řešili dříve, tématem, kterým se aktuálně v matematice zabývají, apod.

B) Srovnatelný výsledek (rozdíl do 5 %)

Předchozí znalosti

Předexperiment	Experiment
68 %	65 %
21/31	17/26

Předchozími znalostmi se zabývá v přípravě 65 % respondentů, což je srovnatelné s 68 % v dotazníku.

Správné strategie řešení

Předexperiment	Experiment
61 %	62 %
19/31	16/26

Správné strategie řešení ve svých přípravách uvedlo 62 % respondentů, podobně jako v dotazníku 61 %.

C) Ostatní složky

Téma hodiny

Předexperiment	Experiment
94 %	85 %
29/31	22/26

Téma hodiny učitelé zapisují do třídní knihy, najdou je v učebnicích, žáci se učitelů často ptají na „nadpis hodiny“. V dotazníku 93 % odpovědělo, že téma hodiny uvádějí vždy nebo téměř vždy. Předpokládali jsme tedy, že téma hodiny v přípravě uvede většina učitelů a studentů. Identifikováno bylo u 85 % respondentů. Pouze 4 učitelé a studenti téma neuvedli. Vysvětlujeme si to tím, že neměli potřebu úlohu zařazovat do nějaké konkrétní učební látky. Jednalo se o úlohu nestandardní.

Pomůcky

Předexperiment	Experiment
ž: 74 %, u: 68 %	42 %
ž: 23/31, u: 21/31	11/26

V dotazníku byla tato otázka rozdělena na dvě: pomůcky, které budou potřebovat žáci (v tabulce označeno „ž“) do přípravy zahrnuje 74 % respondentů, a pomůcky pro učitele (v tabulce „u“) zmiňuje 68 % respondentů. V našich přípravách jsme poznámku týkající se pomůcek nalezli ve 42 % případů. Zřejmě se jedná o složku, kterou někteří učitelé a budoucí učitelé nepovažují za nutné zapisovat.

Způsob hodnocení

Předexperiment	Experiment
3 %	12 %
1/31	3/26

Způsob hodnocení byl v přípravách navržen ve 12 % případů. V dotazníku se objevil v jednom případě, jako složka přípravy, kterou analýza a priori neobsahovala, ale respondent ji považoval za důležitou.

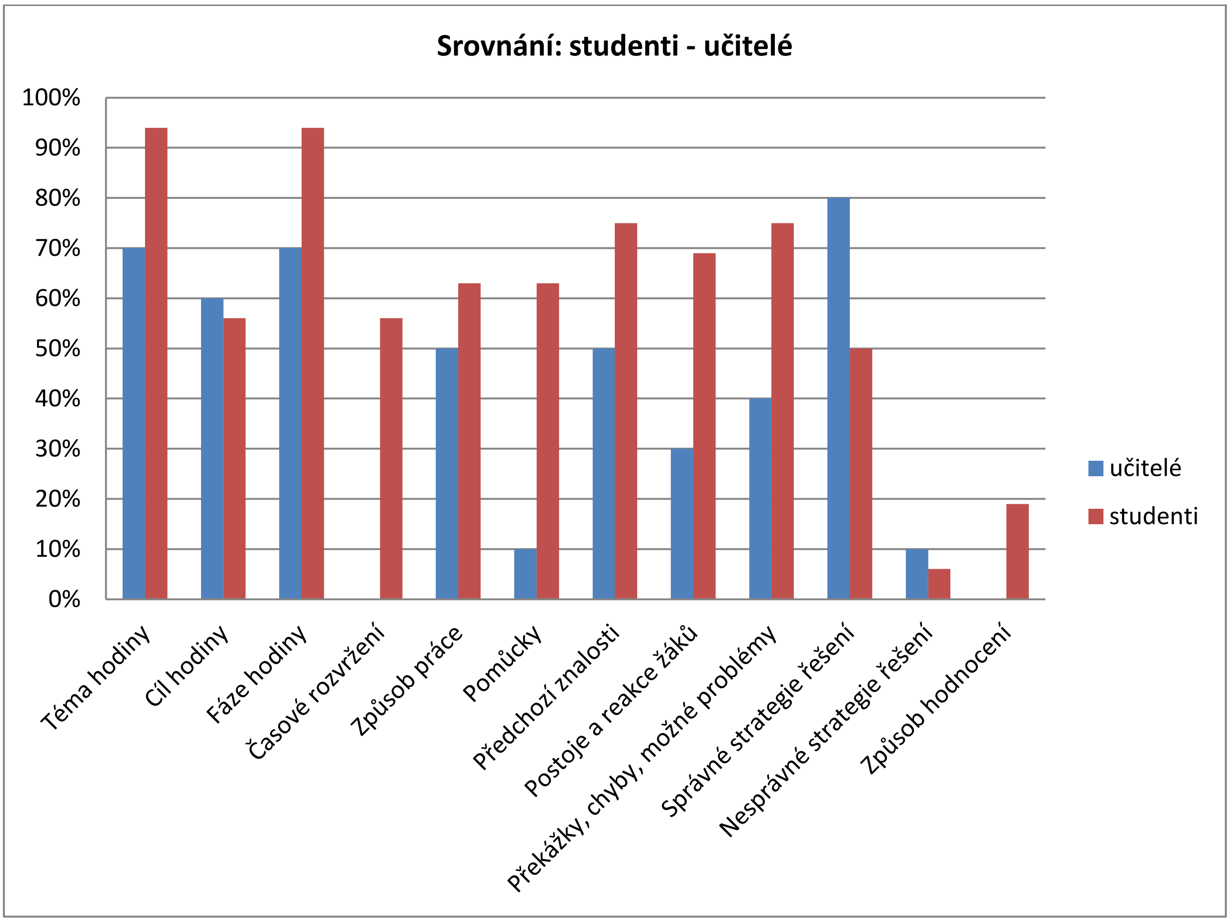
4.4.2 Srovnání výsledků skupiny expertů a skupiny začátečníků

Skupinu začátečníků, tedy studentů učitelství, tvořilo 16 studentů učitelství matematiky. Úkol jim byl zadán jako seminární práce v rámci předmětu didaktika matematiky. Studenti měli za sebou většinou pouze několik odučených hodin v rámci oborové praxe.

Skupinu expertů, tedy učitelů, tvořilo 10 učitelů s délkou praxe od 3 do 25 let.

Nyní se podíváme, jaké rozdíly se objevily v přípravách studentů učitelství matematiky a učitelů matematiky. Složky jsme opět rozdělili podle odlišnosti.

Na obrázku č. 4 pomocí histogramu srovnáváme přípravy studentů a učitelů. Vzhledem k různému počtu respondentů ve srovnávaných skupinách uvádíme výsledky v procentech, v níže uvedených tabulkách také absolutní počty. Srovnáváme přítomnost jednotlivých složek analýzy a priori v přípravách.



Obr. 4

Nyní se podrobněji podíváme na jednotlivé složky a srovnáme vzájemně přípravy studentů a učitelů. Složky jsme rozdělili do tří skupin podle míry odlišnosti.

A) Složky s největšími rozdíly (20 % a více)

Téma hodiny

Studenti	Učitelé
94 %	70 %
15/16	7/10

Téměř všichni studenti (94 %) a většina učitelů (70 %) zapsali do svých příprav téma hodiny. Překvapilo nás, že téma hodiny nezapsalo více učitelů. Je možné, že by někteří učitelé úlohu zařadili jako zpestření výuky a nepovažovali za důležité ji někam zařazovat. Pro studenty bylo zařazení do tématu zjevně důležitější, umožňuje jim např. snadnější orientaci v učivu, na které bude úloha navazovat.

Fáze hodiny

Studenti	Učitelé
94 %	70 %
15/16	7/10

Téměř všichni studenti (94 %) a většina učitelů (70 %) hodinu rozdělili na fáze. Může to být proto, že příprava je potom přehlednější, snadněji se upravuje během hodiny. Rozfázování provedlo také více studentů než učitelů. Někteří učitelé zřejmě hodinu člení až v průběhu výuky.

Časové rozvržení

Studenti	Učitelé
56 %	0 %
9/16	0

Více než polovina studentů (56 %) provedla časové rozvržení jednotlivých aktivit. U učitelů se časové rozvržení neobjevilo ani v jednom případě. Vysvětlujeme si to tím, že učitelé díky zkušenostem odhadnou lépe čas, který danou aktivitou stráví, a necítí potřebu jej poznamenávat. Studenti tuto zkušenosti nemají, snaží se tedy dobu odhadnout, aby na hodinu nepřipravili příliš málo/mnoho aktivit.

Pomůcky

Studenti	Učitelé
63 %	10 %
10/16	1/10

63 % studentů si do přípravy poznamenalo pomůcky, které budou potřebovat. U učitelů to bylo jen 10 %. Učitelé vědí, jaké pomůcky standardně u sebe mají jak oni, tak žáci, proto je zřejmě tak často nezapisují.

Předchozí znalosti

Studenti	Učitelé
75 %	50 %
12/16	5/10

75 % studentů do přípravy zařadilo předchozí znalosti, které budou žáci pro danou aktivitu potřebovat, v přípravách učitelů se předchozí znalosti objevily v 50 % případů. Domníváme se, že zmínka o předchozích znalostech vychází z nutnosti úlohu zařadit do konkrétního ročníku, tj. jako učitel musím vědět, co děti umí, aby mohly úlohu řešit. Překvapilo nás, že se touto problematikou zabývalo tolik studentů. Domnívali jsme se, že je to pro ně nesnadné, právě kvůli chybějícím zkušenostem.

Reakce a postoje žáků

Studenti	Učitelé
69 %	30 %
11/16	3/10

Reakce a postoje žáků zmínilo 69 % studentů a 30 % učitelů. Tento výsledek byl pro nás překvapivý, nepředpokládali jsme, že se studenti budou v takové míře zabývat reakcemi a postoji žáků k navrhovaným aktivitám, protože jim chybí zkušenost. Je možné, že se dokážou dobře vcítit do myšlení žáků, protože k nim mají věkově relativně blízko. Zároveň jsou k tomu vedeni v kurzu didaktiky matematiky.

Překážky, chyby a možné problémy

Studenti	Učitelé
75 %	40 %
12/16	4/10

V 75 % studentských příprav a ve 40 % příprav učitelů byly poznamenány překážky, chyby a možné problémy, které by mohly nastat. Zde jsme neočekávali, že se bude touto problematikou zabývat tolik studentů. Domnívali jsme se, že je pro ně obtížné odhadnout, jakých chyb se mohou žáci dopustit, když ještě nemají s výukou velké zkušenosti. Výskyt překážek, chyb a možných problémů v přípravách studentů si vysvětlujeme tím, že studenti ještě mají schopnost vcítit se do myšlení žáků a vzpomenout na svá školní léta. Zároveň je v kurzu didaktiky matematiky kladen na problematiku chyb velký důraz. Při probírání jednotlivých témat školské matematiky mluví vždy o problémech, které se mohou objevit, co je pro žáky náročné a jakých chyb se často dopouštějí.

Správné strategie řešení

Studenti	Učitelé
50 %	80 %
8/16	8/10

Studenti zaznamenali do svých příprav správné strategie řešení v 50 % případů, v 80 % učitelé. Zajímavé bylo, že někteří studenti v přípravách vůbec neuvedli správné řešení úlohy. Vedoucí kurzu didaktiky matematiky se domnívá, že to může být způsobeno tím, že příprava, kterou jsme od studentů vyžadovali, byla hypotetická. Studenti ji ve skutečnosti neodučili. Kdyby věděli, že ji ve výuce použijí, řešení by spíše uvedli.

B) Vyrovnané složky (rozdíl 10 % a méně)

Cíl hodiny

Studenti	Učitelé
56 %	60 %
9/16	6/10

Cíl hodiny zformulovalo 56 % studentů, což je srovnatelné s 60 % učitelů. Procento není příliš vysoké, i když jsou k formulování cílů studenti vedeni už na fakultě. Domníváme se, že učitelé i studenti cíl hodiny znají, ale zřejmě se jim zdá zbytečné jej zapisovat do přípravy.

Nesprávné strategie

Studenti	Učitelé
0%	10 %
0	1/10

Nesprávnými strategiemi se nezabýval žádný student a jeden učitel. Pro studenty může být obtížné vymyslet nesprávné strategie řešení úlohy, se kterými by mohli žáci přijít. Učitelé, díky svým zkušenostem, takové strategie většinou znají, ale opět necítí potřebu je zapisovat. Není samozřejmě možné vymyslet všechny nesprávné strategie, pouze ty nejpravděpodobnější. Jejich výskyt je ovlivněn např. úlohami, které žáci řešili dříve, tématem, kterým se aktuálně v matematice zabývají, apod.

C) Ostatní složky

Způsob práce

Studenti	Učitelé
63 %	50 %
10/16	5/10

Způsob práce do přípravy poznamenalo 63 % studentů a 50 % učitelů. Z výsledku vyplývá, že se studenti zabývají způsobem práce o něco více než učitelé. To opět vychází z toho, že učitelé mají mnohem větší zkušenosti než studenti.

Způsob hodnocení

Studenti	Učitelé
19 %	0 %
3/16	0

Způsob hodnocení popsalo 19 % studentů a žádný učitel. Domníváme se, že učitelé hodnocení nezapisují, protože mají stanovený systém, který uplatňují celý školní rok. Studenti si ho teprve tvoří, a proto se téměř u pětiny z nich objevil návrh, jak jednotlivé aktivity v hodině hodnotit. V jednom případě student učitelství (S) navrhuje i sebehodnocení žáků:

S: Na konci hodiny žáci řeknou, co se naučili.

4.4.3 Rozdělení příprav

V průběhu analyzování příprav od učitelů i studentů jsme na základě (ne)přítomnosti určitých složek analýzy a priori vytvořili dvě skupiny, do kterých by se přípravy daly rozdělit: *přípravy zaměřené na učitele* a *přípravy zaměřené na učitele a žáky zároveň*.

A) *Přípravy zaměřené na učitele*

Tyto přípravy obsahovaly vždy téma hodiny, cíl hodiny, fáze hodiny, většinou pomůcky, předchozí znalosti a správné strategie řešení. Nejednalo se často o strategie, které by mohli použít žáci, ale spíše o postup, jakým by řešil úlohu sám učitel. Jakoby žáci neexistovali, učitel vybere aktivity, vyřeší je a jde do třídy. Tento typ příprav se objevil celkem v 16 případech, u 7 (z 10) učitelů, u 9 (ze 16) studentů.

Nyní se podíváme konkrétně na jednu přípravu zaměřenou na učitele[50]. Autorem je student učitelství (S). Jednotlivé složky analýzy a priori v textu zvýrazníme barevně následujícím způsobem: téma hodiny, cíl hodiny, fáze hodiny, pomůcky, správné strategie řešení.

[50]Příklady konkrétních prací žáků nebo studentů jsou ponechány ve tvaru, jak byly vytvořeny, neopravujeme chyby, nepřesnosti ani formulace.

- Ukázka přípravy zaměřené na učitele:

Příprava na hodinu se zařazením úlohy: Diofant, Kniha první, úloha č. 3

Rozdělte dané číslo na dvě části tak, aby se větší z nich rovnala trojnásobku menší zvětšenému o čtyři.

Zadanou úlohu je možné řešit jednak pro konkrétní čísla, jednak obecně pro dané číslo a. Toto nám dává prostor při práci s úlohou, a proto bych se ji nebál zařadit jako téma na celou hodinu. Z hlediska zařazení do výuky bych ji použil při řešení lineárních rovnic, tedy přibližně v 8. třídě. Jedná se o slovní úlohu, obecně řešitelnou pomocí soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, myslím si ale, že by byla vhodná k uzavření tématu lineárních rovnic, neboť je snadno řešitelná.

Úvod

Na začátku hodiny bych zadal žákům jednoduchou, konkrétní úlohu, např. s číslem 24. Až by ji žáci vysvětlili, vyložil bych jim historický podtext úlohy. Připravil bych si jenom nejvýznamnější a (nejzajímavější) informace:

Úloha pochází od Diofanta z Alexandrie, který žil ve 3. stol př. n. l.

Většinu života strávil prací ve slavné Alexandrijské knihovně.

Neznáme přesně rok jeho narození ani úmrtí, ale známe přesně jeho věk, na svůj hrob si totiž nechal vytesat matematickou hádanku, jejímž výsledkem je jeho věk.

Dále bych se zeptal, zda existují ještě nějaká čísla, která mají stejnou vlastnost, tedy zda se dají rozdělit na dvě s výše uvedenými vlastnostmi. Nechal bych žáky takováto čísla najít alespoň dvě.

Zadání úlohy

Hlavním tématem hodiny by poté bylo, zda je možné najít obecný předpis toho, jak budou vypadat dvě výsledná čísla v závislosti na číslu zadaném. Je zde tedy přechod od konkrétního řešení k obecnému. Zadané číslo bych označil a, hledaná čísla x a y. Snažil bych se s dětmi nalézt, co musí pro hledaná čísla platit, tedy jejich součet musí být číslo a. A zároveň musí platit vztah $x = 3y + 4$.

Dalším krokem by bylo zjistit, čemu se rovná x a y v závislosti na a, tedy vyjádření jedné proměnné a dosazení do druhé rovnice. Na závěr bychom s žáky ověřili, zda náš obecný předpis platí pro čísla nalezená v úvodu.

V závislosti na tom, jak by žáci hodinu zvládali, bych zvážil, zda s nimi diskutovat, pro jaké obory čísel naše odvození platí.

Závěr

V závěru hodiny bych zadal žákům dva úkoly:

Vymyslete podobnou úlohu s rozdělením čísla na části, které mají nějaké vlastnosti.

Vyřešte hádanku na Diofantově hrobě:

„Bůh mu dopřál, aby byl hochem šestinu svého života a přidav k této době další dvanáctinu, ozdobil jeho líce vousem. Po další sedmině prozářil jeho život světlem manželství, po dalších pěti letech pak daroval mu syna. Však běda! Sotva ubohé dítě dosáhlo poloviny délky otcova života, neúprosné sudičky vzaly si jej zpět. Když Bůh utěšil jeho hoře učením o číslech, po dalších čtyřech letech ukončil dobu jeho žití.“

B) Přípravy zaměřené na učitele a žáky zároveň

Jsou to přípravy, které se zabývaly navíc také způsobem práce žáků, jejich postoji a reakcemi k dané aktivitě, překážkami, chybami a možnými problémy a správnými strategiemi řešení žáků. Tento typ příprav se objevil celkem v 10 případech, u 3 (z 10) učitelů, u 7 (ze 16) studentů.

Nyní se podíváme konkrétně na jednu přípravu zaměřenou na učitele a žáky zároveň. Autorkou je studentka učitelství (S). Jednotlivé složky analýzy a priori, které charakterizují tento typ přípravy, v textu zvýrazníme barevně následujícím způsobem: způsob práce, postoje a reakce žáků, překážky, chyby a možné problémy, správné strategie řešení.

- Ukázka přípravy zaměřené na učitele a žáky:

Cíle: Žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav, vyčte z textu potřebné informace pro sestavení zápisu a rovnice, popř. soustavy rovnic.

Vstupní požadavky na žáky: Žák umí řešit lineární rovnice o jedné neznámé. Např.:

1) $5x - 12 = -4x + 6$ $\qquad x = 2$

2) $-3x + 5 - 10x - 31 = 0$ $\qquad x = -2$

3) $\frac{1}{2}x + 3 = -\frac{2}{3}x + 4 - \frac{5}{6}x + 1$ $\qquad x = 1$

4) $25 - 3(x - 2) + 6(-1 + x) = -2x + 20$ $\qquad x = -1$

Předpokládám tedy, že žáci v minulých hodinách řešili lineární rovnice s jednou neznámou. Tuto hodinu bych chtěla začít slovní úlohy, které vedou právě na lineární rovnice.

Žákům řeknu, že v dnešní hodině se na probírané učivo podíváme z trochu jiného pohledu. Dosud jsme vždycky měli konkrétně zadanou rovnici a měli jsme ji vyřešit (používali jsme ekvivalentní úpravy). Nyní budeme rovnice sestavovat sami ze zadání úloh.

Příklad: Trojúhelník má obvod 42 cm. Strana *a* je 2krát kratší než strana *b*, strana *c* je o 2 cm delší než strana *a*. Určete velikosti stran trojúhelníku.

Zadaná úloha by mohla být žákům blízká – situaci si dovedou představit, trojúhelník a výpočet jeho obvodu dobře znají.

Společně s žáky přečteme příklad, poté jim nechám chvíli čas, aby se sami zamysleli nad zadáním a pokusili se přijít na to, jak bychom mohli příklad vyřešit.

Předpokládám, že někdo ze třídy přijde na to, že jednu stranu bychom mohli označit jako neznámou *x* (popř. ponechat původní označení – *a*, *b*, *c* – podle toho, kterou si vyberou za neznámou) a pak s její pomocí vyjádřit i zbývající strany. Pokud by na to nikdo nepřišel, snažila bych se žákům pomoci (Co kdybychom jednu stranu znali konkrétně? Dokázali bychom vypočítat ty zbývající?).

Jako neznámou bych zvolila stranu *a* (pokud by žáci chtěli jinou stranu, respektovala bych je) a na tabuli psala podrobný zápis příkladu, na kterém by se podíleli i sami žáci:

strana *a*…………… *x* cm

strana *b*…………… 2*x* cm

strana *c*…………….(*x* + 2) cm

obvod ………………*o* = 42 cm

Po napsání zápisu se společně pokusíme sestavit rovnici z toho, co žáci znají. Ví, jak se vypočítá obvod trojúhelníku: *o* = *a* + *b* + *c* – nyní už jen stačí dosadit (na to žáci přijdou sami).

$42 = x + 2x + x + 2$ strana $a = 10$ cm

$42 = 4x + 2$ strana $b = 2 \cdot 10 = 20$ cm

$40 = 4x$ strana $c = 10 + 2 = 12$ cm

$x = 10$ cm Zkouška: $o = 10 + 20 + 12 = 42$ cm

Odpověď: Strana a měří 10 cm, strana b měří 20 cm a strana c měří 12 cm.

Po vyřešení příkladu se učitel zeptá na dotazy, zrekapituluje postup. Poté následuje další příklad, který je velmi podobný prvnímu, jen sestavení rovnice vyžaduje práci se zlomky.

Příklad: Do pekárny přivezli mouku. První den upekli rohlíky z jedné třetiny mouky, druhý den použili tři čtvrtiny ze zbytku. Na třetí den zbylo 120 kg mouky. Kolik mouky měli na začátku?

Postup bude obdobný jako u prvního příkladu. Učitel nechá žáky, aby se na chvíli sami zamysleli nad postupem, a společně pak příklad vyřeší na tabuli.

Pokud možno, žáci učiteli diktují, co má na tabuli psát.

mouky celkem………. x kg

1. den……………….. $\frac{x}{3}$ kg

2. den…………$\frac{3}{4} \cdot \left(x - \frac{x}{3}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2x}{3}$ kg

3. den…………………………. 120 kg

$\frac{x}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2x}{3} + 120 = x$

$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} + 120 = x$

$2x + 3x + 720 = 6x$

$x = 720$ kg

Zkouška:

1. den……$720 : 3 = 240$ kg

2. den……$\frac{3}{4} \cdot (720 - 240) = \frac{3}{4} \cdot 480 = 3 \cdot 120 = 360$ kg

3. den…...120 kg

celkem…..$240 + 360 + 120 = 720$ kg

Odpověď: Na začátku měli 720 kg mouky.

Po vyřešení tohoto příkladu bych zařadila příklad, který se liší tím, že nebudeme znát dvě veličiny. Pak bych čekala, jaké reakce žáků se dostaví.

Příklad: Rozdělte dané číslo na dvě části tak, aby se větší z nich rovnala trojnásobku menší zvětšenému o čtyři.

I zde bych chtěla, aby se žáci sami pokusili přijít na to, že nyní již budeme potřebovat dvě neznámé, protože nemáme dostatek informací o daném čísle.

menší část……………..…..*x* $y = 3x + 4$

větší část……………....*y*

myšlené číslo……….. $x + y$

Předpokládám, že žáci budou tvrdit, že zapsanou rovnici neumí vyřešit, neboť se jim v rovnici objevují dvě neznámé. Spíše si myslím, že nikdo nepřijde na to, že za jednu neznámou může dosadit nějaké číslo a druhu pak vypočítat ze zapsané rovnosti. Žákům bych tedy řekla, ať si sami (každý za sebe) zkusí zvolit tu menší část (x), dopočítat větší část (y) a ověřit podle zadání, jaké jim vyjde číslo.

Např. $x = 1 \rightarrow y = 7$ myšlené číslo: 8 $x = 6 \rightarrow y = 22$ myšlené číslo: 28

$x = 3 \rightarrow y = 13$ myšlené číslo: 16 $x = 10 \rightarrow y = 34$ myšlené číslo: 44

$x = 4 \rightarrow y = 16$ myšlené číslo: 20 $x = 13 \rightarrow y = 43$ myšlené číslo: 56

Otázkou je, zda by někoho napadlo dosadit záporné číslo. Záleží na tom, zda žáci již znají číselné obory a operace se zápornými čísly. A i kdyby je znali, stejně si myslím, že je málo pravděpodobné, že by se ve třídě někdo takový objevil. Většina žáků bude dosazovat spíše kladná čísla. Pokud by se ale opravdu někdo takový našel, bylo by dobré na to poukázat, aby i ostatní věděli, že se nemusíme omezovat jen na kladná čísla. Pokud by nikdo takový nebyl, učitel by měl žáky navést, aby zkusili dosadit i jiná čísla – nulu a čísla záporná.

Pak by následovala diskuse. Žáci by říkali, jaká čísla zkoušeli a jaká jim vyšla. V závěru by mělo vyplynout, že nezáleží na tom, jaké číslo si zvolí, že všechna řešení jsou správná a že jich je nekonečně mnoho. Učitel by se měl i zmínit o tom, že takovéhle rovnice se nazývají diofantovské a jejich řešení je pouze v oboru celých čísel.

Tento příklad by měl sloužit jako přípravný pro následující učivo, a to soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, které bych vykládala v další hodině. Začala bych tím samým příkladem, jen bych trochu pozměnila zadání. Dané číslo bychom znali konkrétně, např. by jím bylo číslo 88.

Příklad: Číslo 88 rozdělte na dvě části tak, aby se větší z nich rovnala trojnásobku menší zvětšenému o čtyři. Z jakých částí se číslo 88 skládá?

Po přečtení příkladu bych počkala, jaké budou reakce žáků – zda budou vykřikovat, že stejný příklad jsme již řešili, nebo jestli si všimnou malé změny v zadání. Předpokládám, že někdo by určitě upozornil na to, že v tomto příkladě známe číslo konkrétně. Poté bych žáky vyzvala, že příklad vyřešíme znovu. Nejprve provedeme zápis, který sestavíme společně se žáky, kteří se budou aktivně zapojovat a říkat své návrhy.

dané číslo…………88	$x + y = 88$
menší část…………*x*	$y = 3x + 4$
větší část…………..*y*	

Po provedení zápisu sestavíme dvě rovnice. Zde bude muset učitel žákům říci, že se jedná o soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, tedy o nový typ příkladů, které ještě neřešili. Na tomto příkladě (podle sestavených rovnic) lze dobře ukázat dosazovací metodu. V našem případě dosadíme do první rovnice za *y*.

$x + 3x + 4 = 88$	Nyní, když známe menší část čísla (*x*), můžeme z druhé rovnice vypočítat
$4x = 84$	i větší část čísla.
$x = 21$	$y = 3 \cdot 21 + 4 = 63 + 4 = 67$

Známe tedy větší i menší část čísla a zbývá nám ověřit, zda jsme obě části určili správně. Obě části tedy sečteme.

Zkouška: $21 + 67 = 88$

Odpověď: Číslo 88 se skládá z čísel 21 a 67 (dle zadání).

Nyní záleží na učiteli, jak postupovat dál. Jedna možnost je, že na dalším příkladě jen procvičí dosazovací metodu, nebo žákům rovnou ukáže druhý způsob – sčítací metodu. Sama bych se přikláněla ke druhému způsobu, aby si pak žáci sami mohli vybrat variantu, která jim bude vyhovovat, nebo která se bude lépe hodit podle zadání.

4.5 Přípravy studentů a učitelů a naše analýza a priori

V této části porovnáme naši analýzu a priori Diofantovy úlohy[51] s přípravami získanými od učitelů a studentů.

Budeme postupně sledovat a analyzovat následující složky analýzy a priori: téma, cíl úlohy, čas, který bude úloze věnován, způsob práce, pomůcky, proměnné, předchozí znalosti, postoje a reakce žáků, správné strategie řešení, nesprávné strategie řešení a způsob hodnocení.

Složky charakter zadání a postoje a reakce učitelů srovnávat nebudeme. V přípravě na hodinu je nelze identifikovat, jsou spíše její implicitní součástí. V naší analýze a priori byly ale velmi přínosné právě pro přípravu výzkumu.

Zajímalo nás, jak se přípravy učitelů a studentů liší od naší analýzy a priori v obsahové stránce: co se objeví v přípravách nového, co naopak naše analýza obsahuje a přípravy nikoliv. V závěru každého odstavce se vždy pokusíme odhadnout, jaký vliv na skutečný průběh hodiny by mohlo mít vynechání dané položky v přípravě učitelů.

4.5.1 Srovnání příprav s naší analýzou a priori

- **Téma hodiny**

V naší analýze a priori jsme navrhovali zařazení úlohy do 7. ročníku ZŠ v rámci tematického celku lineární rovnice nebo na gymnáziu do 1. ročníku, když se probírají různé typy rovnic.

Studenti a učitelé tuto možnost samozřejmě také uvedli (ve třech případech). Ale objevila se i další témata.

Nejčastěji (v sedmi případech) studenti a učitelé navrhovali téma slovní úlohy řešitelné soustavou dvou rovnic o dvou neznámých (9. ročník ZŠ). Ve dvou případech byla úloha zařazena do tématu lineární funkce a jejich grafy (8. ročník ZŠ). Dvakrát se objevilo téma posloupností (4. ročník SŠ). V jednom případě byla úloha zařazena do celohodinového tématu týkajícího se diofantovských rovnic (2. ročník SŠ). Dále se jednou vyskytlo téma dělení celku na nestejné části (6. ročník ZŠ), číslo a proměnná (5. ročník ZŠ).

[51] Viz 3.2.

Nyní se zamyslíme nad tím, jaký vliv na výuku by mohlo mít vynechání položky téma v přípravě učitele.

Pokud učitel nezařadí úlohu do konkrétního tématu, může ji použít kdykoliv během roku. Musí si jen ujasnit, jaké znalosti žáci k řešení úlohy potřebují. Žákům tak naznačuje, že úlohu mohou řešit různým způsobem. Tím, že žáci nevědí, „kam úloha patří“, nemuseli by být limitování volbou řešitelské strategie.

- **Cíl úlohy**

V naší analýze a priori jsme zformulovali cíl úlohy velmi konkrétně, z pohledu žáka: Žáci mají za úkol rozdělit dané číslo na dvě nestejné části. Podmínkou je daný vztah mezi těmito částmi: větší z nich má být rovna trojnásobku menší zvětšenému o čtyři.

V přípravách jsme identifikovali většinou obecné cíle, týkající se celého tematického celku, ne konkrétní úlohy. Rozdělili jsme je do dvou skupin, cíle formulované z pozice učitele a cíle formulované z pozice žáka (v našem případě se jedná vlastně o výstupy, tak jak jsou popsány v RVP[52], případně ŠVP[53]).

  - *Cíle formulované z pozice učitele*

Např.: Uzavření tématu lineárních rovnic, uvedení přechodu k rekurentnímu zápisu posloupnosti, procvičování násobilky, procvičování počítání zpaměti.

  - *Cíle formulované z pozice žáka*

Např.: Žák dokáže sestavit soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých a dopočítá její kořeny; užívá sčítací i dosazovací metodu řešení, dokáže řešení dané soustavy znázornit graficky, žáci použijí algoritmus řešení diofantovské rovnice, žáci si doplňují a upevňují učivo o lineárních funkcích, že písmenko může nabývat právě jednu hodnotu, aby byli schopni vyřešit jednoduché lineární rovnice.

Pokud se učitel nezamyslí nad cílem úlohy, může se stát, že si zcela neuvědomí potenciál úlohy. V našem případě se jedná o množství řešitelských strategií. S žáky pak bude pravděpodobně úlohu řešit pouze jedním způsobem (pokud sami žáci nepřijdou s jiným). Učitel by měl být schopen smysluplně žákům odpovědět na častou otázku „Proč tu úlohu řešíme?“.

[52] Rámcový vzdělávací program.
[53] Školní vzdělávací program.

Konkrétní cíl úlohy tak, jak jsme jej formulovali v naší analýze a priori, by měl být žák schopen zformulovat sám. Je vlastně podmínkou pro řešení úlohy. Pokud se tak nestane, pravděpodobně nebude schopen úlohu správně vyřešit. Pak je na učiteli, aby např. v rámci společné kontroly cíl úlohy objasnil.

- **Čas**

V naší analýze a priori jsme odhadovali, že práci s úlohou může učitel věnovat až polovinu vyučovací hodiny.

Učitelé a studenti úlohu využili dvojím způsobem. Jako součást opakování a rozšíření probíraného tématu (např. soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých), v tom případě úloze věnovali většinu hodiny. V druhém případě byla úloha součástí podobných úloh, které učitelé a studenti vymysleli a jejichž řešením se zabývali celou hodinu, v jednom případě i dvě vyučovací hodiny. (např. posloupnosti, číslo a proměnná).

V případě, že učitel v rámci přípravy neprovede časový odhad, může dojít k překvapivé situaci pro něj i pro žáky. Úloha bude vyřešena během chvilky a učitel bude rychle vymýšlet další náplň hodiny, nebo naopak úlohu nestihne vyřešit a bude muset pokračovat příště nebo ji zadat jako domácí úkol.

- **Způsob práce**

V naší analýze a priori jsme zvolili práci ve dvojicích nebo ve skupinách, úloha je podle našeho názoru neobvyklá a někteří žáci by mohli mít problém už jen s pochopením zadání.

Tento způsob práce navrhovali často i učitelé. Studenti většinou dali přednost společné práci (diskuze učitele s žáky, společné řešení na tabuli) a samostatné práci s následnou diskuzí.

- **Pomůcky**

V naší analýze jsme navrhli tyto pomůcky: sešit, tužka, pro větší čísla kalkulačka, program Excel.

Kromě výše uvedených pomůcek studenti a učitelé ještě zapsali: projektor a plátno (grafy), kuličky, pracovní listy, čtverečkový papír, krokovací pás, program funkce, internetové zdroje, učebnice.

V případě, že učitel předem nepromyslí, jaké pomůcky bude s žáky k řešení úlohy potřebovat, se může stát, že nebudou moci realizovat některé řešitelské strategie. Žáci tak mohou být ochuzeni o některé postupy řešení a úloha zůstane nevyužita.

- **Proměnné**

V naší analýze a priori jsme popsali proměnné, které zadání úlohy obsahuje. Zajímalo nás, jakým způsobem a zda učitelé původní zadání úlohy modifikovali.

Ukázalo se, že většina učitelů a studentů úlohu upravila v závislosti na tematickém celku, do kterého úlohu zařadili.

Příklady:

S: Alena a Adam mají dohromady 135 let. Přitom Adam je o 3 roky starší. Alena má _____ let. Adam má _____ let.

S: Členy posloupnosti jsou tvořeny trojnásobkem čísla označující jeho pozici zvětšený o čtyři.

S: Série gradovaných úloh

Úloha 2: Adam s Bárou se domluvili, že budou hrát kuličky. Celkem doma našli 12 kuliček a spravedlivě si je rozdělili. Po první hře Adam nad Bárou vyhrál. Nyní má Adam o 2 (1, 3, 4, 5, 6, 7, 8) kuličky více než Bára. Kolik má Bára kuliček?

Úloha 6: Po poslední hře měl Adam třikrát více a ještě o čtyři kuličky více než Bára. Kolik měla Bára kuliček? Kolik měl Adam kuliček?

S: Pokud sečteme věk otce a syna, získáme 96 let. Věk otce se rovná trojnásobku věku syna zvětšenému o 4. Určete věk otce i syna.

Pokud učitel není schopen nebo ochoten úlohy upravovat s ohledem na věk a schopnosti svých žáků, může se stát, že s žáky některé úlohy (jako např. Diofantovu úlohu) nebude zkoušet řešit.

- **Předchozí znalosti**

V naší analýze a priori jsme stanovili následující znalosti nezbytné pro řešení úlohy: číselné obory N a Z, dělitelnost, pojmy násobek, menší a větší část.

Učitelé a studenti ve svých přípravách opět vycházeli z tématu, do kterého úlohu zasadili: zadání posloupnosti vzorcem pro *n*-tý člen, lineární rovnice o jedné neznámé, soustava dvou rovnic o dvou neznámých, práce s proměnnou.

Pokud učitel nepromyslí, jaké znalosti budou žáci k řešení úlohy potřebovat, může se stát, že si s úlohou nebudou vědět rady, protože ještě nezískali potřebné znalosti.

- **Postoje a reakce žáků**

V naší analýze a priori jsme se pokusili odhadnout celkový postoj žáků k úloze. Předpokládali jsme, že se objeví na začátku žáci, kteří hned nějaké řešení uhodnou, a žáci, kteří si nebudou vědět rady. Domnívali jsme se, že je může překvapit obtížná srozumitelnost zadání a fakt, že cesta ke správnému řešení vyžaduje více kroků v uvažování.

Podobná reakce se objevila i v jedné přípravě studenta:

S: Předpokládám, že žáci budou tvrdit, že zapsanou rovnici neumí vyřešit, neboť se jim v rovnici objevují dvě neznámé. Spíše si myslím, že nikdo nepřijde na to, že za jednu neznámou může dosadit nějaké číslo a druhou pak vypočítat ze zapsané rovnosti.

Učitelé a studenti jinak uváděli častěji reakce na konkrétní situaci, např.:

S: Stále si myslím, že někdo na to půjde odhadem, protože se jedná o malé číslo, nicméně si myslím, že někoho napadne, že číslo 12 musí rozdělit na 4 díly.[54]

Postoje a reakce žáků lze obtížně odhadnout, výhodou je pro učitele zkušenost a schopnosti vcítit se do myšlení žáků.

- **Správné strategie řešení**

V naší analýze a priori jsme navrhli celkem pět správných řešitelských strategií[55], se kterými by mohli žáci přijít: diofantovská rovnice, systematické experimentování, metoda pokus – omyl, graf a obrázek.

Studenti a učitelé navrhovali kromě výše uvedených strategií také: soustava dvou rovnic o dvou neznámých, lineární rovnice, modelování (pomocí kuliček).

Zajímavé je, že řešení pomocí soustavy rovnic, lineární rovnicí a diofantovskou rovnicí navrhovali pouze studenti. Jedná se o poměrně náročné strategie, vzhledem k věku žáků.

[54] Tato strategie řešení je ale nesprávná.
[55] Podrobněji viz Správné strategie řešení, s. 53.

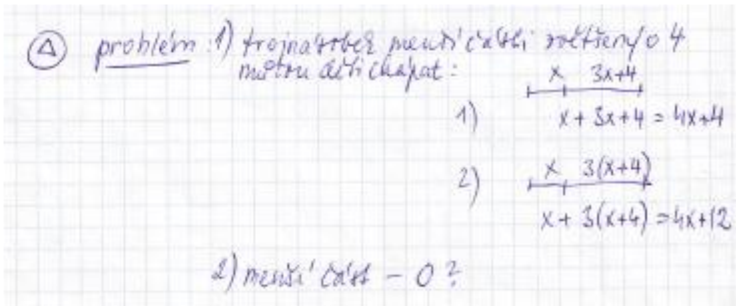
Učitelé navrhovali grafické řešení, řešení pomocí obrázku (ve třech případech úsečka, v jednom koláč) a systematické experimentování. Tedy strategie, které od žáků nevyžadují tak náročný matematický aparát, ale spíš tvořivost a úvahu.

Pokud učitel nepromyslí správné strategie řešení, může se stát, že žáci přijdou s překvapivým postupem řešení, který vede ke správnému výsledku, ale např. není správný, nebo využívá znalosti, které ještě ostatní žáci nemají. Pokud učitel v rámci přípravy způsoby řešení promyslí, bude schopen pohotově reagovat a takové situace budou pro něj snadnější.

- **Nesprávné strategie řešení**

Možnost volby nesprávné strategie řešení uvedl pouze jeden učitel (U). Příčinou je špatné porozumění zadání. Jedná se o nesprávnou strategii, kterou jsme popsali v naší analýze a priori.

U:



Je velmi obtížné vymýšlet nesprávné strategie, se kterými by mohli žáci přijít. Není možné vymyslet všechny, pouze ty nejpravděpodobnější. Jejich výskyt a povaha záleží například na způsobu řešení úlohy, na tématu, kterým se žáci zrovna zabývají, na zažitých stereotypech žáků při řešení úloh. Velkou roli hraje také zkušenost učitele.

- **Způsob hodnocení**

V naší analýze a priori vycházel způsob hodnocení ze způsobu práce. Navrhovali jsme práci ve skupinách. Členové skupiny, kteří úlohu správně vyřeší, získají jedničku. Ostatní skupiny navrhujeme ohodnotit pouze slovně.

Způsob hodnocení byl zmíněn ve dvou přípravách studentů.

První z nich navrhoval samostatnou práci na tři malé jedničky, druhý vysvětlil svůj celkový systém hodnocení:

S: Během první hodiny hodnotím pouze slovně. Povzbuzuji studenty, aby se nebáli ptát a sdělili ostatním, co jim dělá problém, co je napadlo, čeho si všimli. Výsledky kontroluji průběžně, snažím se nevynechat nikoho ve svých kontrolních otázkách prověřujících pochopení tématu. Po celkovém probrání a procvičení látky píšeme větší opakovací test, ve kterém shrneme dané téma.

Pokud učitel nerozmyslí, jakým způsobem bude jednotlivé aktivity v hodině hodnotit, může se stát, že ohodnotí snadný úkol i ten obtížný stejným způsobem (např. známkou, která bude mít stejnou váhu v celkovém hodnocení).

4.5.2 Nové složky v přípravách studentů a učitelů

V přípravách studentů i učitelů se objevily složky, které jsme do naší analýzy zařazeny neměli. Bylo jich méně než v předexperimentu: *motivační úloha* na úvod, *návodné otázky*, *klíčové kompetence* a *domácí úkol*. Stejně jako v předexperimentu[56] jsme tyto složky rozdělili do dvou skupin:

1. *Konkretizace námi navržené přípravy, její uvedení do praxe, jako např.:*

- motivační rozcvičky, úvodní problémová úloha (ve čtyřech přípravách),

- návodné otázky (ve dvou případech).

2. *"Nové" složky přípravy, které se v naší přípravě neobjevily:*

- klíčové kompetence (v jednom případě),

- domácí úkol (v šesti přípravách).

Domácí úkol a návodné otázky se během předexperimentu nevyskytly.

A) *Domácí úkol*

Důležitost promyšlení domácího úkolu v rámci přípravy zdůrazňují Panasuk a Todd (2005)[57]. Při experimentu se objevil na závěr v pěti přípravách studentů a v jedné přípravě učitele. Identifikovali jsme dva typy úkolů, u každého typu uvádíme typický příklad:

---

[56] Viz s. 49.

[57] Viz s. 26.

- Vytvořte podobnou úlohu (bez bližší specifikace)

Příklady:

S: Vymyslete podobnou úlohu s rozdělením čísla na části, které mají nějaké vlastnosti.

S: Hodinu bych zakončila tím, že bych zadala domácí úkol, aby žáci vymysleli podobnou úlohu na rozdělení čísla a vyřešili ji.

- Vyřešte slovní úlohu (řešitelnou lineární rovnicí, soustavou rovnic, experimentováním)

S: Podíl dvou čísel je 4, jejich součet je 75. Urči obě čísla.

S:

Př. Součet tří čísel je 39. Druhé číslo je 2,5 násobek prvního čísla. Třetí číslo je 2,5 násobkem druhého čísla. Určete tato tři čísla.

Př. Rozdíl dvou čísel je -85. Jejich součet je 89. Urči tato čísla.

B) Návodné otázky

Ve dvou přípravách studentů a jednoho učitele se objevily návodné otázky, které by měly žákům pomoci s řešením úlohy. Domníváme se, že žlutě zvýrazněné otázky mohou ale vést k efektu Topaze.[58]

Příklady:

U:

Je možné, že jednotlivým skupinám vyšla různá řešení? Zkus ověřit, zda řešení sousední skupiny je v pořádku.

Kolik takových řešení bude? Může být dané číslo záporné, desetinné, nulové? Pokus se najít nějaká zmiňovaná řešení.

Pokus se navrhnout, jak taková čísla a jejich části přehledně zapsat (tabulka).

S:

Bude zde jen jedno řešení?

Chybí mi některý údaj? Který?

[58] Viz s. 18.

Co se stane, když si tento údaj vymyslím?

Pomohla by tabulka, graf?

Šlo by řešení nějak zobecnit?

S:

Rozdělované číslo sice neznáme, ale můžeme se pokusit nějaké konkrétní číslo zvolit.

Jak jsme našli konkrétní hodnoty částí čísel?

Závisí nám velikost částí na zvolení čísla?

Nemají všechny postupy něco společného?

Nedá se postup, kterým jsme získali „hodnoty částí čísla“, zobecnit?

C) Motivační úloha

V pěti přípravách učitelů byla v úvodu zapracována motivační úloha na úvod do problematiky.

U: Motivace:

1. Leona zjistila, že má ušetřeno třikrát víc korun než Adéla. Dohromady mají 520 Kč. Kolik korun má každá?

U:

1, Která čísla lze takto rozdělit, aby obě části byly vyjádřeny přir. čísly? (výklad)

n... menší část

V... větší část

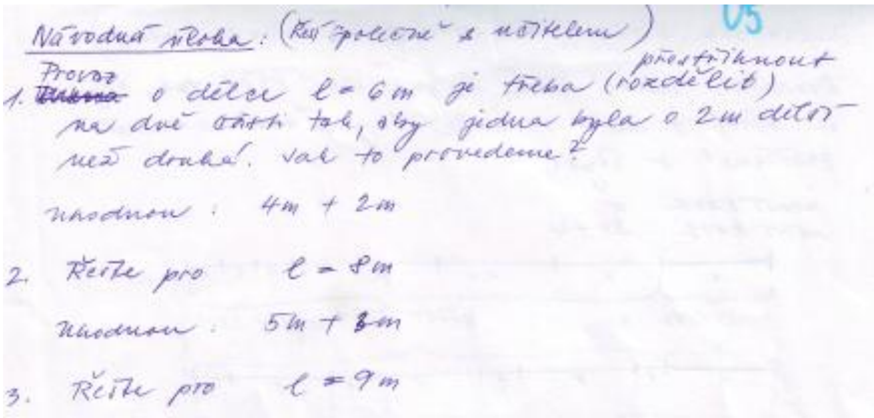
n	V	A
0	4	4
1	7	8
2	10	12
3	13	16
4	16	20
⋮	⋮	⋮
(n	3n+4	4n+4)

→ násobky 4

Náročný úvod – nedat takto rozdělit při čísle: 5, 16, 23, ... ?

↳ nedat řešit zápory

U:



05

Návodná úloha: (řeš společně s učitelem)

přestřihnout
1. ~~[illegible]~~ Provaz o délce $l = 6$ m je třeba (rozdělit) na dvě části tak, aby jedna byla o 2 m delší než druhá. Jak to provedeme?

uhodnou: 4m + 2m

2. Řešte pro $l = 8$ m

uhodnou: 5m + ~~3~~m

3. Řešte pro $l = 9$ m

Závěr

Předpokládali jsme, že skutečné přípravy nebudou obsahovat všechny položky, které učitelé a budoucí učitelé uváděli v dotazníku. Tato hypotéza se potvrdila pouze částečně. Ve srovnání s předexperimentem se ve skutečných přípravách méně vyskytovaly složky cíl hodiny, fáze hodiny a časové rozvržení, způsob práce a nesprávné strategie řešení. Naopak složky postoje a reakce žáků, překážky, chyby a možné problémy se častěji objevily v přípravách než v dotazníku.

Předpokládali jsme, že přípravy studentů budou bohatší po formální a organizační stránce, budou častěji obsahovat téma hodiny, fáze hodiny, časové rozvržení, způsob práce, pomůcky, způsob hodnocení. Domnívali jsme se, že přípravy učitelů budou více zaměřeny na žáka, budou častěji zmiňovat předchozí znalosti, reakce a postoje žáků, překážky, chyby a možné problémy, správné i nesprávné strategie řešení. Tato hypotéza se nepotvrdila. Studenti do svých příprav skutečně častěji zařazovali téma hodiny, fáze a časové rozvržení, pomůcky, ale také se ve větší míře než učitelé zabývali předchozími znalostmi, reakcemi a postoji žáků a překážkami, chybami a možnými problémy. Učitelé své přípravy zpracovali více po formální a organizační stránce.

Domnívali jsme se, že bude možné na základě přítomnosti/nepřítomnosti určitých složek analýzy a priori rozdělit přípravy učitelů a studentů do skupin. Vytvořili jsme dvě kategorie příprav: přípravy zaměřené na učitele a přípravy zaměřené na učitele a žáka zároveň.

5 DIOFANTOVA ÚLOHA V PRAXI

Úvod

Při předexperimentu jsme získali představu o tom, jak vypadá příprava učitelů a začínajících učitelů ve srovnání s analýzou a priori podle TDSM. Zjistili jsme, jaké složky analýzy a priori učitelé do svých příprav zahrnují, jaké naopak vynechávají, jaké složky považují za důležité a analýza a priori je neobsahuje.

Během experimentu jsme analyzovali konkrétní přípravy učitelů a studentů učitelství. Porovnali jsme je s výsledky předexperimentu a vzájemně jsme porovnali přípravy učitelů – začátečníků a učitelů – expertů. U každé složky přípravy jsme odhadovali, co by mohlo nastat v případě, že by byla učitelem během přípravy opomenuta.

V následující části se budeme zabývat tím, jak vypadá skutečná vyučovací hodina realizovaná na základě přípravy vytvořené během experimentu. Nejprve představíme paní učitelku, která hodinu odučila. Poté se seznámíme s průběhem hodiny, následně provedeme analýzu a posteriori (reflexi): průběh hodiny srovnáme nejen s přípravou paní učitelky, ale i s naší analýzou a priori. V závěru navrhneme právě na základě analýzy a posteriori případné úpravy analýzy a priori.

5.1 Případová studie paní učitelky M.

V této části se blíže seznámíme s paní učitelkou M., která se zúčastnila všech našich experimentů. Informace vycházejí z několika semistrukturovaných rozhovorů, které jsme průběžně prováděli.

Kromě obecných informací (dosažené vzdělání, délka praxe) nás zajímalo, jak paní učitelku vidí její žáci, absolventi gymnázia, vedení školy, ale také jak charakterizuje sama sebe. Zjišťovali jsme, jak se připravuje na výuku nyní, coby učitel – expert, jak se připravovala dříve, coby učitel – začátečník. Zajímalo nás také, jak hodnotí přípravy studentů učitelství, kteří k ní přicházejí na praxi.

Naším cílem bylo získat podrobný profil učitele, který se aktivně zúčastnil všech etap našeho experimentu, a doplnit tak výzkumnou část naší práce o konkrétní portrét jednoho z jejích účastníků.

- **Vzdělání a zaměstnání**

Paní učitelka M. vystudovala obor učitelství matematiky a fyziky pro střední školy na MFF UK. Absolvovala v roce 1978, o čtyři roky později úspěšně složila rigorózní zkoušku z didaktiky matematiky a získala titul RNDr.

Během studia učila fyziku na jednom pražském gymnáziu. V posledním ročníku vyučovala i matematiku na gymnáziu v Hořovicích, kde pracuje od roku 1977 dodnes. V posledních letech působí ve škole také jako výchovná poradkyně, tento obor vystudovala v rámci rozšiřujícího studia na PedF UK.

Paní učitelka M. považuje za velmi přínosné další vzdělávání učitelů. Účastní se pravidelně seminářů organizovaných katedrou didaktiky matematiky na MFF UK, konferencí Setkání učitelů matematiky v Pardubicích a Ani jeden matematický talent nazmar v Hradci Králové. V posledním roce se zapojila do projektu GAČR č. P407/12/1939 *Rozvíjení kultury řešení matematických problémů ve školské praxi.*

- **Jak ji vidí okolí**

V očích žáků[59] je přísná, rychlá a náročná, ale „dokáže nás něco naučit". Žáci si cení jejího nadšení pro matematiku i fyziku a odborných znalostí v těchto oborech. „Je skvělé poslouchat profesora, na kterém je vidět, že ho ten předmět opravdu baví."

Absolventi gymnázia[60] většinou uvádějí, že je paní učitelka M. výborně připravila ke studiu na vysoké škole (obory s matematikou a fyzikou, technické a ekonomické obory).

Vedení školy[61] hodnotí paní učitelku M. výborně, ale vytýká velkou náročnost na žáky. Hodiny paní učitelky M. jsou podle vedení školy perfektně připravené, mají spád, žáci matematiku umí lépe než v jiných třídách. Slovy pana ředitele: „I horší známka z matematiky od paní učitelky M. vypovídá o velmi dobrých matematických znalostech studenta."

- **Jak se charakterizuje ona sama**

Podle svých vlastních slov[62] je paní učitelka M. náročná, ale velmi laskavá. Má hezký vztah k dětem, má ráda svou práci a dává to najevo. Domnívá se, že je důležité dokázat

[59] Informace vychází z dotazníku týkajícího se hodnocení školy, který proběhl v květnu 2013.
[60] Informace od vedení školy.
[61] Informace z hospitačních zpráv a z rozhovoru s vedením školy.
[62] Na základě několika semistrukturovaných rozhovorů s paní učitelkou M.

žáky zaujmout a motivovat, například způsobem výkladu, historickými zajímavostmi, současnými poznatky v oboru. Snaží se být spravedlivá, na začátku vždy stanoví jasná pravidla a požadavky a dbá na jejich dodržování. Její hodiny mají jasný cíl a náplň, protože

„každá promarněná minuta chybí (nemyslím minuta promarněná diskusemi se žáky), myslím minuta, kdy někteří jsou hotovi a nudí se.“

Paní učitelka M. zdůrazňuje, že je nezbytné mít v daném předmětu velký nadhled, být schopen rychle reagovat na dotazy žáků, ale zároveň přiznat neznalost a neustále se vzdělávat a přemýšlet o své práci.

Paní učitelka M. používá v hodinách různé metody práce, často využívá i moderní pomůcky (interaktivní tabuli, grafické kalkulačky, matematický software).

- **Jak vypadala její příprava na výuku v minulosti**

Paní učitelka M. nejprve popsala, jak se připravovala na výuku dříve, jako začínající učitel. Písemnou přípravu tehdy vyžadovalo od začínajících učitelů vedení školy a provádělo namátkovou kontrolu. Příprava musela obsahovat: cíl vzdělávací, cíl výchovný, pomůcky, opakování z minulé hodiny, obsah učiva, zadání domácího úkolu, zopakování učiva na konci hodiny. Paní učitelka velmi kladně hodnotí systém uvádějících učitelů, který na gymnáziu, kde učí, dnes už nefunguje.

„Tento systém byl vynikající – během prvního roku jsme museli absolvovat několik náslechů, uvádějící učitel k nám chodil na hospitace, v rámci kraje byly organizovány různé akce pro začínající učitele – přednášky, exkurze, náslechy v hodinách vynikajících kolegů. Setkávali jsme se se stejně starými kolegy, diskutovali o problémech, o různých přístupech. Uvádějícím učitelům jsme ukazovali přípravy, diskutovali možné problémy, ale vždy jsme to brali (nebo alespoň já to tak brala) jako velmi užitečnou pomoc.“

Podle paní učitelky M. je dnes na jejich gymnáziu spíše nepatřičné zajímat se o to, jak kolegové učí.

- **Jak se připravuje na hodiny dnes**

Paní učitelka M. si připravuje jen kartičku s poznámkami, kam poznamená téma hodiny a úlohy, které bude s žáky řešit. Během let si v počítači vytvořila databázi pracovních listů, v rámci přípravy je doplňuje a tiskne. Průběh hodiny a postup výkladu promýšlí „v hlavě“.

„Často o postupu výkladu přemýšlím cestou do školy, cestou do třídy, často reaguji na danou situaci okamžitě ve třídě a nejlepší vysvětlení mě napadne až při hodině. Ale to je vše dáno obrovskou zkušeností a spoustou odučených hodin.“

Paní učitelka M. považuje za velmi důležité, aby každá hodina měla cíl.

„Ačkoliv dávno nepíšu cíle hodiny – mám je v hlavě a jsem přesvědčená, že z každé hodiny musí být žákům jasno, co se naučili.“

- **Jak hodnotí přípravy studentů přicházejících na praxi**

Podle paní učitelky M. jsou přípravy studentů často nesystematické. Studenti se podle jejího názoru příliš drží učebnice a při hodině nedokáží reagovat na podněty žáků. To ale podle jejích slov souvisí se zkušeností.

„Zažila jsem hodinu studentky, která sama učivu nerozuměla, ač jsme ho předtím spolu prošly, vykládala podle učebnice, dělala chyby, žáci to odhalili, úplně ji rozložili, až utekla ze třídy. (Myslím, že neučí, určitě ne na střední škole.)“

5.2 Průběh experimentu

V této části se seznámíme s průběhem experimentu, při kterém byla Diofantova úloha[63] využita v rámci výuky. Paní učitelka M. experiment provedla 17. 6. 2013 na Gymnáziu V. Hraběte v Hořovicích v sekundě osmiletého gymnázia během běžné hodiny matematiky. Experimentu se zúčastnilo 26 žáků, průběh byl natáčen kamerou, zajímavé postřehy si paní učitelka zaznamenávala na papír. Paní učitelka žáky předem o experimentu neinformovala. Spolupracuje v grantu GAČR č. P407/12/1939 *Rozvíjení kultury řešení matematických problémů ve školské praxi,*[64] její žáci jsou tedy zvyklí řešit nestandardní úlohy a Diofantovu úlohu považovali za jeho součást.

5.2.1 Situace

Na začátku hodiny paní učitelka žákům oznámila, že je dnes čeká řešení další „zajímavé“ úlohy[65]. Upřesnila, že se jedná o Diofantovu úlohu a stručně Diofanta představila. Paní

[63]Rozdělte dané číslo na dvě části tak, aby se větší z nich rovnala trojnásobku menší zvětšenému o čtyři. Viz 3.2.
[64] Podrobněji viz 6.1.
[65] Tímto způsobem paní učitelka společně s žáky nazývají úlohy v rámci projektu GAČR.

učitelka předem připravila pro každého žáka pracovní list[66]. Situaci uvedla následujícími pokyny:

„Každý z vás dostane pracovní list se čtyřmi úlohami, které spolu nějakým způsobem souvisí. Vaším úkolem je tyto úlohy vyřešit a zamyslet se, co mají společného. Nebudete potřebovat ani kalkulačky ani rýsovací potřeby. Přemýšlejte, tvořte a zapisujte postup, potom si řekneme, jak jste řešili. Můžete řešit jakýmkoli způsobem, který vám bude vyhovovat. Na základě zadání si sami můžete udělat zkoušku a ověřit správnost vašeho řešení.“

Poté paní učitelka rozdala každému jeden pracovní list se čtyřmi úlohami. Žáci pracovali samostatně. Přibližně po deseti minutách vyzvala paní učitelka postupně několik žáků, aby vysvětlili své postupy řešení u interaktivní tabule.

5.2.2 Žákovské strategie řešení

Žáci úlohy řešili následujícími způsoby:

- **Strategie S 1 :** *„odečíst čtyři a vydělit čtyřmi"*

Tuto strategii správně použili čtyři žáci a tímto způsobem úspěšně vyřešili všechny čtyři úlohy. Další dva žáci jejím využitím vyřešili pouze čtvrtou úlohu, ostatní úlohy nevyřešili vůbec, nebo nesprávně.

- **Strategie S 2:** *pokus – omyl*

Tato strategie spočívala ve zkoušení čísel, bez systematického postupu a zápisu. Objevila se v osmi případech.

- **Strategie S 3:** *systematické experimentování*

Jeden žák vyřešil všechny čtyři úlohy správně pečlivým vypisováním rozkladů zadaných čísel na součet dvou sčítanců. Začínal vždy rozložením zadaného čísla na poloviny.

- **Strategie S 4:** *naznačena rovnice nebo soustava rovnic*

Tuto strategii se pokusili použít tři žáci. Ani v jednom případě ale nevedla k výsledku. Žáci ještě rovnice řešit neumí, pouze zapsali úlohu v algebraické podobě. V jednom případě žák naznačil soustavu rovnic a úlohy vyřešil metodou pokus – omyl.

[66] Viz příloha 4.

- **Strategie S 5:** *„vydělit třemi odečíst čtyři"*

Jedná se o chybnou strategii, která vychází z nesprávného pochopení zadání. Žáci nesprávně interpretovali zadání ve dvou etapách – jednak při řešení (nepřipočetli menší číslo a špatně chápali, které číslo je zvětšené o čtyři), jednak při zkoušce (opět použili špatně zvětšení o čtyři). U první úlohy volbou výchozího čísla 12 jim pak zkouška vyšla. Proto neodhalili svůj chybný postup a byli přesvědčeni, že počítali správně. Tato strategie se objevila u sedmi žáků.

5.2.3 Výsledky

Všechny čtyři úlohy vyřešilo správně deset žáků. Čtyři žáci nevyřešili ani jednu úlohu, ostatní měli vždy aspoň jednu správně. Šest žáků vyřešilo správně pouze čtvrtou úlohu, předchozí tři nevyřešili správně nebo vůbec. Dva žáci vyřešili pouze první a druhou úlohu, dva žáci vyřešili jen první a čtvrtou úlohu. První, druhou a třetí úlohu vyřešil jeden žák. V tabulce č. 1 uvádíme kompletní výsledky pro jednotlivé úlohy.

	Správně	Nesprávně (strategie S 5)	Nesprávně	Nevěděli
Úloha č. 1	15	6 (výsledek 0 + 12)	3	2
Úloha č. 2	12	4 (výsledek 10+42)	4	6
Úloha č. 3	11	4 (výsledek 28+96)	2	9
Úloha č. 4	18	0	1	7

Tab. č. 1

5.3 Analýza a posteriori

V této části srovnáme skutečný průběh hodiny s naší analýzou a priori[67] a s přípravou paní učitelky M. Budeme postupovat podle jednotlivých složek analýzy a priori (viz s. 51).

- **Charakter zadání**

V analýze a priori jsme navrhovali vizuální i slovní podobu zadání úlohy, případně jejich kombinaci. Upozornili jsme zároveň na možné obtíže v porozumění zadání.

Paní učitelka M. zvolila vizuální podobu zadání, vytvořila pracovní listy. Při zadávání se nevyskytly žádné problémy, všichni žáci začali hned pracovat.

[67] Viz 3.2.

- **Tematický celek, do kterého by se úloha dala zařadit**

V závislosti na ročníku, ve kterém bychom s úlohou pracovali, jsme navrhovali následující tematické celky: číslo a proměnná v 6. (7.) ročníku ZŠ, lineární rovnice v 7. (8.) ročníku ZŠ[68], různé typy rovnic v 1. ročníku SŠ.

Paní učitelka M. úlohu použila v sekundě sedmiletého gymnázia jako úvod do tématu proměnná a lineární rovnice. Po skončení experimentu ještě navrhovala úlohu zařadit jako motivační v rámci tematického celku slovní úlohy řešené pomocí lineární rovnice. Úloha je řešitelná rovnicí, ale i úvahou.

- **Cíl úlohy**

V analýze a priori jsme popsali konkrétní cíl úlohy: rozdělit dané číslo na dvě nestejné části, přitom dodržet daný vztah mezi těmito částmi: větší z nich má být rovna trojnásobku menší zvětšenému o čtyři.

Paní učitelka M. stanovila dva cíle aktivity, které spolu úzce souvisí: zjistit, zda žáci pochopí obecný algoritmus řešení a zda odhalí mezi jednotlivými úlohami souvislost. Ukázalo se, že díky vhodně zvoleným úlohám se cíle podařilo splnit.

- **Čas, který bude úloze věnován**

Odhadovali jsme polovinu vyučovací hodiny.

Paní učitelka M. předpokládala dvacet minut, nakonec úlohou společně se žáky strávili třicet minut, vysvětlování postupů zabralo více času, než předpokládala.

- **Způsob práce**

V analýze a priori jsme navrhovali práci ve dvojicích nebo ve skupinách.

Žáci paní profesorky M. pracovali individuálně. Paní učitelka chtěla, aby přemýšlel každý sám za sebe, a domnívala se, že při skupinové práci by se objevilo méně různých řešitelských strategií. Žáci byli na individuální práci zvyklí, řešili samostatně, nedožadovali se pomoci souseda ani paní učitelky.

- **Pomůcky**

Předpokládali jsme, že žáci budou mít k dispozici papír, tužku, případně kalkulačku nebo program Excel.

[68] Záleží na ŠVP konkrétní školy.

Žáci paní učitelky M. měli k dispozici papír a tužku, v závěru interaktivní tabuli, tak, jak paní učitelka plánovala.

- **Proměnné**

Analýzou proměnných jsme ukázali, jakými způsoby je možné úlohu modifikovat.

Paní učitelka M. na základě námi zadané úlohy vytvořila sérii čtyř úloh[69].

První úlohu vytvořila tak, aby byla pro žáky snadno řešitelná (např. metodou pokus omyl) a aby měli všichni žáci šanci rychle určit výsledek. Tuto úlohu vyřešilo správně patnáct žáků, paní učitelka M. se domnívala, že jich bude víc. Nepředpokládala, že se objeví nesprávná strategie S 5[70]. Také ji překvapilo, že dva žáci úlohu nevyřešili vůbec (neporozuměli zadání).

Další dvě úlohy měly ukázat, zda žáci vidí mezi úlohami souvislost a postup řešení pochopili obecně. Proto paní učitelka zvolila dané číslo větší.

Poslední úlohu zasadila paní učitelka do reálného kontextu. Domnívala se, že se objeví rozdíl v úspěšnosti řešení ve srovnání s předchozími, jejichž zadání bylo matematické. Předpokládala, že úlohy o věku budou žákům bližší než úlohy o číslech. Její předpoklad se potvrdil. Tato úloha měla nejvyšší úspěšnost, vyřešilo ji správně osmnáct žáků. Pět z nich vyřešilo správně pouze tuto úlohu, ostatní tři úlohy nevyřešili vůbec nebo vyřešili nesprávně.

- **Předchozí znalosti**

Předpokládali jsme, že úloha vyžaduje znalost číselných oborů N a Z, dělitelnosti, pojmů násobek, menší a větší část.

Paní učitelka M. znalosti potřebné k řešení úlohy v rámci přípravy nespecifikovala.

- **Postoje a reakce žáků**

Předpokládali jsme, že se objeví na začátku žáci, kteří hned nějaké řešení uhodnou, a žáci, kteří si nebudou vědět rady. Domnívali jsme se, že je může překvapit obtížná srozumitelnost zadání a fakt, že na správné řešení nepřijdou pouze jedním krokem.

Paní učitelka M. nepředpokládala, že žáci neporozumí zadání. Domnívala se, že pro ně úlohy nebudou tak obtížné, že většina dětí vyřeší alespoň první úlohu.

[69] Viz pracovní list, příloha 4.
[70] Viz 3.2 Nesprávné strategie řešení s. 58.

- **Postoje a reakce učitelů**

Domnívali jsme se, že se úloha bude líbit tvořivým učitelům, protože je možné ji použít v různých úpravách ve více ročnících.

Paní učitelku M. úloha zaujala, protože „vyžaduje tři kroky v přemýšlení: žáci mají rozdělit číslo na dvě části, ale ještě toto rozdělení musí dodržet dvě podmínky."

- **Správné strategie řešení**

Odhadovali jsme, že se objeví celkem pět strategií řešení: diofantovská rovnice, systematické experimentování, metoda pokus – omyl, graf a obrázek.

Paní učitelka M. předpokládala, že žáci budou nejčastěji úlohu řešit „odzadu", tedy nejprve odečtou čtyři a výsledek vydělí čtyřmi (strategie S 1[71]). Dále odhadovala, že se v menší míře objeví metoda pokus – omyl (S 2[72]) a systematické experimentování (S 3[73]).

Žáci úlohy řešili čtyřmi správnými strategiemi. Jedná se o strategie, s jejichž výskytem jsme v analýze a priori počítali, nebo je odhadovala paní učitelka. Neobjevilo se grafické řešení a řešení pomocí obrázku.

- **Strategie S 1***: „odečíst čtyři a vydělit čtyřmi"*

V analýze a priori jsme tuto strategii neuvedli, řešili jsme úlohu obecně. Je ale velmi podobná algoritmu pro řešení diofantovské rovnice (jedná se o jeden krok z řešení). Paní učitelka M. předpokládala, že tuto strategii žáci použijí nejčastěji, protože podle svých slov klade důraz na řešení úloh úvahou. Objevila se v šesti případech a byla to druhá nejpoužívanější strategie.

- **Strategie S 2:** *pokus – omyl*

Tuto strategii jsme uvedli v analýze a priori. Paní učitelka M. předpokládala, že ji použijí téměř všichni žáci k vyřešení první úlohy. Použilo ji osm žáků.

- **Strategie S 3:** *systematické experimentování*

V analýze a priori jsme tento způsob řešení popsali. Paní učitelka M. se domnívala, že se v menší míře objeví i mezi jejími žáky. Tento způsob řešení zvolil nakonec jeden žák.

[71] Viz 3.2 Správné strategie řešení s. 53.
[72] Viz 3.2 Správné strategie řešení s. 53.
[73] Viz 3.2 Správné strategie řešení s. 53.

- **Strategie S 4**: *naznačena rovnice nebo soustava rovnic*

Jedná se vlastně o sestavení diofantovské rovnice. Tuto strategii jsme v analýze a priori uvedli. Paní učitelka M. její použití nepředpokládala, žáci se ještě v hodinách matematiky s rovnicemi nesetkali. O tento způsob řešení se pokusili tři žáci, sestavili správně rovnice, ale s jejich řešením už si nevěděli rady.

- **Nesprávné strategie řešení a překážky**

Objevila se jedna nesprávná strategie, částečně jsme ji popsali v analýze a priori. Paní učitelku tento způsob řešení překvapil. Jedná se o strategii S 5[74]: „vydělit třemi a odečíst čtyři".

Předpokládali jsme, že žáci můžou nesprávně porozumět zadání a rozdělit dané číslo tak, aby se větší část rovnala trojnásobku menší zvětšen<u>é</u> o čtyři.

Někteří žáci tedy např. u první úlohy postupovali takto:

$$12 : 3 = 4,$$

$$4 - 4 = 0.$$

Ve své úvaze udělali dva nesprávné kroky. Chápali zadání úlohy tak, že zadané číslo se rovná trojnásobku menší části zvětšené o čtyři. Číslo tedy nejprve vydělili třemi a od výsledku odečetli čtyři. Při řešení první úlohy tedy rozdělili číslo 12 na 0 a 12. Pak prováděli zkoušku – opět na základě svého chápání (menší část má být zvětšená) – tedy

$$0 + 4 = 4,$$

$$4 \cdot 3 = 12,$$

Zkouška vychází.

Stejný postup pak použili i u dalších úloh, ale tam už zkoušku nedělali, zřejmě věřili svému postupu.

U této nesprávné strategie jsme identifikovali dvě překážky, které jsme nazvali *pořadí operací* a *trojnásobek.*

- **Přívlastek shodný**

V zadání úlohy je „…trojnásobku menší **zvětšenému** o čtyři". Tedy zvětšený o čtyři je

[74] Viz 3.2 Nesprávné strategie řešení s. 58.

trojnásobek, $3 \cdot x + 4$. Někteří žáci chápali text jako: „…trojnásobek menší části **zvětšené** o čtyři.“ Tedy zvětšená o čtyři je menší část, $3 \cdot (x + 4)$. Důsledkem bylo pak nesprávné pořadí operací a použití nesprávné strategie S 5[75]: „vydělit třemi a odečíst čtyři“.

Překážkou správnému porozumění zadání je chybná interpretace závislosti přívlastku shodného na předmětu. Domníváme se, že se jedná o překážku didaktickou. V sedmém ročníku žáci ještě nemají dostatečně zažitou problematiku větných členů a zadání úlohy je pro ně obtížné. Obsahuje informace ve velmi koncentrované formě s nevyjádřenými větnými členy a složitě popsanými vztahy bez vedlejší věty. Při rychlém čtení lze některé informace snadno přehlédnout.

- **Trojnásobek**

Nepředpokládali jsme, že se objeví problém s pojmem trojnásobek. Žáci nechápali, proč mají číslo vydělit čtyřmi, když zadání úlohy mluví o trojnásobku. Ukázalo se, že někteří žáci chápali, že od daného čísla mají odečíst čtyři, ale nevěděli, jak dál. Výsledek chtěli vydělit třemi, ale zarazilo je, že nevyšel celočíselný. Neuvědomili si, že jestliže větší část má být rovna trojnásobku menší, musí pro získání menší části vydělit číslem čtyři, nikoliv tři.

Jedná se o překážku didaktickou, protože je dána uspořádáním učiva. Žáci se nejprve setkávají se sčítáním a odečítáním, tyto základní operace je provázejí od prvního ročníku ZŠ. V našem případě žáci zacházejí s operací násobení stejně jako se sčítáním. Situace je navíc zkomplikována chybným používáním formulace „x-násobek“ v běžném hovoru: „Tento USB disk je jednou tolik (jeden-krát) dražší než USB disk značky XY.“ Takto je ale vytvářena představa, že k ceně disku přičtu cenu disku XY, dochází k záměně formulací „o kolik“ a „kolikrát“.

- **Hodnocení**

V analýze a priori jsme navrhovali hodnocení známkou 1 nebo bodovým ekvivalentem pro všechny úspěšné řešitele, slovní hodnocení pro ty neúspěšné. Paní učitelka M. ocenila jedničkou všechny žáky, kteří správně vyřešili všechny čtyři úlohy. Podle slov paní učitelky je toto hodnocení pro její žáky velmi motivující.

[75] Viz 3.2 Nesprávné strategie řešení s. 58.

5.4 Postřehy z průběhu hodiny

Zpočátku žáci vůbec nevěděli, jak úlohy řešit. Byly pro ně zřejmě velmi obtížné.

Jako první byla hotová dívka, která podle slov paní učitelky v matematice nevyniká, ale je rozumově vyspělejší než ostatní, má na svůj věk bohatou slovní zásobu. Při rozboru ostatním vysvětlila postup, odhalila souvislost všech čtyř úloh, pochopila obecný algoritmus řešení. Žáci často nechápali, proč po odečtení čtyř mají dělit čtyřmi, tato dívka to bez problémů vysvětlila a nechápala, jak to, že ostatní neví.

Přepis z videozáznamu:

Z1: Máte dvanáct, odečtete si od toho čtyři, to vám vyjde osm. Tu osmičku vydělíte čtyřmi, protože to má bejt trojnásobek a ještě musíte mít nějakej ten základ, z čeho ten trojnásobek bude, takže to bude děleno čtyřma, což se rovná dva a to je to první číslo. A potom dvanáct mínus dva rovná se deset a to je to druhé číslo.

U: Pochopili všichni?

Více Z: Ne.

U: Zkus ještě jednou vysvětlit, proč jsi odečítala tu čtyřku na začátku.

Z1: Protože je to menší o čtyři.

Více Z: A proč děleno čtyřmi?

Z1: Protože je tam trojnásobek a musíš z něčeho mít ten trojnásobek, takže tam jsou čtyři čísla.

Více Z: Aha.

Chlapec, který je velmi dobrý v matematice, naopak vůbec úloze nerozuměl. Nerozuměl spojení „ rozdělit číslo na dvě části“. Zaměnil pojmy „číslo“ a „číslice“. Domníval se, že úkolem je rozdělit číslici a nevěděl, jak si má situaci představit.

5.5 Úprava analýzy a priori

V této části na základě analýzy a posteriori navrhneme několik úprav naší původní analýzy a priori. S ohledem na průběh hodiny, výsledky žáků a podněty paní učitelky M. jsme se rozhodli upřesnit a upravit následující složky analýzy a priori: charakteristika zadání, cíl úlohy, způsob práce, pomůcky, proměnné, nesprávné strategie řešení.

- **Charakter zadání**

Domníváme se, že by žákům lépe vyhovovala kombinace slovního a vizuálního zadání úlohy. Žáci by měli před sebou text a zároveň by jeho znění vyslechli od paní učitelky nebo vybraného žáka. Je možné, že při čtení zadání někteří žáci koncovku u slova „zvětšenému"přehlédli (nikoliv nerozuměli větě), a proto úlohu nevyřešili správně.

- **Cíl úlohy**

V původní analýze a priori jsme vyslovili konkrétní cíl úlohy pro žáky: Žáci mají za úkol rozdělit dané číslo na dvě nestejné části. Podmínkou je daný vztah mezi těmito částmi: větší z nich má být rovna trojnásobku menší zvětšenému o čtyři.

Domníváme se, že pro učitele by bylo užitečné stanovit i cíl úlohy z jejich pohledu, například tak, jak jej vyslovila paní učitelka M.: zjistit, zda žáci pochopí obecný algoritmus řešení a zda odhalí mezi jednotlivými úlohami souvislost. Taková formulace učiteli naznačí, jaké klíčové kompetence úloha rozvíjí, jaké téma obsahuje.

- **Způsob práce**

Paní učitelka M. zvolila individuální práci. Stejně jako v původní analýze a priori navrhujeme práci ve dvojicích. Domníváme se, že by byla pro žáky výhodnější. Někteří žáci řešili všechny úlohy špatně jen kvůli nesprávné interpretaci zadání. Ve dvojicích by tato situace v takové míře nastat nemusela.

- **Pomůcky**

Navrhujeme dát žákům kromě psacích potřeb a papíru k dispozici ještě rýsovací potřeby a čtverečkovaný papír. Je možné, že by někteří úlohu zkoušeli řešit pomocí obrázku. Paní učitelka M. navrhla dát u menších dětí (např. prima) k dispozici kuličky, aby si žáci mohli situaci názorně vymodelovat.

- **Proměnné**

V původní analýze a priori jsme v zadání identifikovali proměnné a analyzovali, jak je možné úlohu jejich změnou upravovat. Na základě podnětu paní učitelky M. ještě doplňujeme, že úloha vyžaduje tři kroky v uvažování: 1. rozdělit číslo na dvě části, 2. větší z nich je rovna trojnásobku té menší, 3. …trojnásobku zvětšenému o čtyři. Změnou v počtu těchto kroků je možné úlohy gradovat podle obtížnosti.

„Kdybych v úloze vynechala „větší číslo je o čtyři větší než trojnásobek“, a zadala „větší číslo je o 4 větší než první číslo, velká část by bez problémů vyřešila (takové typy úloh se často vyskytují v přijímačkách od SCIA). Tím, že tam byly 3 kroky – součet, násobek, součet, bylo to náročné – pochopit proces.“

- **Nesprávné strategie řešení**

Doplňujeme nesprávnou strategii, která vznikla na základě nepochopení pojmu trojnásobek. Žáci pochopili, že mají dané číslo rozdělit na dvě části. Větší část se má rovnat trojnásobku té menší.

Objevily se dva případy:

A) Dané číslo tedy vydělili třemi (trojnásobek) a následně odečetli čtyřku. Jedná se o kombinaci s nesprávnou strategií S 5[76]: „vydělit třemi a odečíst čtyři“.

B) Od daného čísla odečetli číslo čtyři a výsledek chtěli dělit třemi, ale nebyl celočíselný, proto úlohu nedořešili.

Závěrem uvádíme komentář paní učitelky M.:

„Problémem obecně bylo neporozumění textu. Velká část chápala, že od výchozího čísla musí odečíst čtyři. Pak ale nevěděli, jak dál. V úloze nejde ani tak o matematiku, jako o čtenářskou gramotnost, o správnou představu zadané situace, o pochopení zadání. To je kamenem úrazu u velké části slovních úloh a u většiny žáků. Záleží na jejich obecném rozhledu, slovní zásobě, načtených knihách, zkušenostech, vyjadřovacích schopnostech. Na tom, zda si situaci dokážou nakreslit, vymodelovat, představit, lépe přiblížit.“

5.6 Doplňující poznámky

Paní učitelka M. úlohu nejprve použila v sekundě a potom i v dalších ročnících. Na základě zkušeností ze sekundy upravovala svoji přípravu.

„Na základě zkušenosti ze sekundy jsem do primy vytvořila jinou sérii úloh, všechny úlohy zasazené do reálného kontextu, s menšími čísly. V tercii naopak pouze matematické zadání, i větší čísla, už umí rovnice, měli by to zvládnout rovnicemi.“

Potom, co paní učitelka M. použila sérii úloh v primě tak, jak plánovala, rozhodla se pro další úpravu:

[76] Viz 3.2 Nesprávné strategie řešení s. 58.

„V primě by bylo lepší vzít do hodiny pomůcky (korálky), zadat jako skupinovou práci, každá skupina má jiný počet. Nebo zadat úlohu geometricky: narýsujte úsečku dlouhou 12 cm, rozdělte ji na dvě části tak, aby větší z nich byla rovna trojnásobku menší zvětšenému o čtyři. Úloha by měla být v primě víc názorná, spojená s konkrétní situací.“

6 UKÁZKY ANALÝZY A PRIORI

Úvod

V této kapitole ukážeme, jaké funkce plní analýza a priori v právě probíhajícím výzkumném projektu GAČR č. P407/12/1939 *Rozvíjení kultury řešení matematických problémů ve školské praxi*. V první části se stručně seznámíme s výzkumným záměrem projektu, ve druhé části uvádíme ukázky analýzy a priori tří úloh, které byly vytvořeny pro potřeby experimentů v rámci projektu. Následující text je zpracován na základě interních materiálů projektu.

6.1 O projektu

Aktuálním cílem projektu je rozvíjet tzv. *žákovskou kulturu řešení matematických problémů* (KRP). KRP je chápán jako struktura vnitřních faktorů ovlivňujících úspěch žáka při řešení problému. Byly stanoveny čtyři složky, které tvoří KRP: inteligence, tvořivost, schopnost využít stávající znalosti a schopnost číst text s porozuměním.

U všech žáků, kteří se experimentu účastní, byla KRP testována na začátku projektu a po jeho skončení absolvují testování znovu. Část testování je zajišťována psycholožkou. Testy se skládají ze tří částí[77]: A) Psychologické testování (Váňův test inteligence, Christen-Guilfordův test tvořivosti, test schopnosti číst text s porozuměním), B) Testování schopnosti využití stávajících znalostí (matematický test vytvořený výzkumníky projektu), C) Hodnocení učitelem matematiky (na základě rozhovorů). Výzkumníci se domnívají, že na konci experimentu budou mít žáci lepší výsledky v následujících položkách KRP: tvořivost, schopnost využít stávající znalosti a schopnost číst text s porozuměním.

Výzkum probíhá v několika třídách na základních školách a gymnáziích v Praze a Ústí nad Labem a v Hořovicích. Cílem výzkumu je seznámit žáky s vybranými heuristickými strategiemi řešení problémů, naučit žáky tyto postupy používat, a tím rozvinout jejich KRP. Jedná se o ty heuristické strategie[78], se kterými se žáci ve škole příliš či vůbec nesetkávají a přitom jsou velice užitečné. Byly rozčleněny a strukturovány do dvojrozměrné klasifikace na následující strategie:

[77] Podrobněji v Eisenmann, Novotná, Přibyl (2013).
[78] Podrobněji v Břehovský, Eisenmann, Ondrušová, Přibyl, Novotná (2013).

- Cesta zpět
- Pokus – ověření – korekce
- Systematické experimentování
- Zavedení pomocného prvku
- Zobecnění a konkretizace
- Analogie
- Přeformulování problému
- Rozklad na jednodušší případy
- Vypuštění podmínky
- Nepřímá úvaha

a následující tři cesty:

- Aritmetická cesta
- Algebraická cesta
- Grafická cesta.

Výzkumníci předpokládají, že na konci experimentu budou žáci ve větší míře než na začátku schopni aktivně používat některé heuristické strategie řešení problémů.

Pro tyto účely jsou průběžně vyvíjeny úlohy, které jsou nejefektivněji řešitelné právě pomocí výše uvedených strategií. Všechny úlohy jsou podrobně zpracovávány a opatřeny více způsoby řešení. K vybraným úlohám jsou vytvářeny analýzy a priori.

6.2 Funkce analýzy a priori v projektu

Analýza a priori má v projektu velký význam pro výzkumníky i pro učitele, kteří se experimentu účastní.

Při výběru a tvorbě úloh pro experiment pomáhá výzkumníkům sledovat, zda zvolené úlohy splňují požadavky, které předem stanovili. V našem případě se jedná hlavně o možnost řešit úlohu více strategiemi, přitom nejvýhodněji jednou z výše uvedených heuristických strategií.

Pro učitele je analýza a priori pomůckou při plánování hodiny, v nichž úlohu využijí. Usnadní jim přípravu pomůcek, navrhuje, jakým způsobem mohou úlohu žákům zadat, naznačuje, jak by mohli reagovat, ukazuje, jaké správné a případně i nesprávné strategie řešení by mohli žáci použít.

Nakonec slouží analýza a priori opět výzkumníkům jako jeden z nástrojů při vyhodnocování experimentu.

6.3 Tři ukázky analýzy a priori

Tyto texty jsou určeny výzkumníkům a učitelům zapojeným do projektu. Jedná se o „živý“ dokument, který je průběžně upravován na základě podnětů a zkušeností učitelů i výzkumníků. Analýzy tedy obsahují i otázky k zamyšlení a diskuzi.

6.3.1 Analýza a priori úlohy *Plat*

Měsíční plat zaměstnance byl 15 755 Kč. Během roku mu byl zvýšen o 2 100 Kč. Od kterého měsíce bral vyšší plat, jestliže jeho roční příjem byl 195 360 Kč?

- **Charakter zadání**

Úloha může být zadána slovně (učitel ji žákům nadiktuje), vizuálně (úloha je napsaná na tabuli, pracovním listu) nebo kombinací slovní a vizuální – domníváme se, že tento způsob je nejvhodnější, kvůli správnému zapsání číselných údajů.

  - *Znalosti potřebné ke správnému pochopení zadání*
    - Znalosti všeobecné: žák by měl rozumět pojmům „měsíční plat“, „roční příjem“, výrazu „během roku“.
    - Znalosti matematické: „zvýšen o“.
  - *Obtíže v chápání zadání*

    Žáci by si mohli nesprávně zapsat číselné údaje (proto by byl vhodný zápis na tabuli). Také by se měl učitel ujistit, zda chápou pojmy měsíční a roční příjem. Také by měl vysvětlit, že „během roku“, neznamená např. od druhého dne v měsíci, ale od „určitého měsíce“ (tj. že se počítají celé měsíce).

- **Tematický celek**

Slovní úlohy (řešené pomocí lineární rovnice s jednou neznámou i bez lineární rovnice).

- **Cíl úlohy**

Pro žáky: žáci mají za úkol zjistit, od kterého měsíce byl zaměstnanci plat zvýšen. Musí přitom respektovat dané údaje: měsíční plat zaměstnance před zvýšením, sumu, o kterou mu byl plat navýšen, a celkový roční příjem.

Pro učitele: např. zjistit, jakou ze strategií budou žáci volit nejčastěji.

- **Čas, který bude úloze věnován**

Bylo by vhodné nejprve žákům předložit podobnou úlohu, ale jednodušší (viz strategie analogie), a na té ověřit, zda žáci rozumí všem pojmům. Nebo úlohu uvést debatou o výše uvedených pojmech. I s tímto odhadujeme přibližně 25 minut.

- **Způsob práce**

Individuálně, ve dvojicích, ve skupinách. Jako domácí úkol nebo při hodině.

- **Pomůcky**

Tužka, papír, kalkulačka, program Excel.

- **Předchozí znalosti**

Lineární rovnice a jejich úpravy, úpravy číselných výrazů.

- **Proměnné**

Měsíční plat zaměstnance byl 15 755 Kč. Během roku mu byl zvýšen o 2 100 Kč. Od kterého měsíce bral vyšší plat, jestliže jeho roční příjem byl 195 360 Kč?

V úloze najdeme dva typy proměnných: kognitivní didaktické a formulační proměnné.

   - *Kognitivní didaktická proměnná*

[15 755 Kč], *[195 360 Kč]*, *[2 100 Kč]* – volba těchto číselných údajů je klíčová pro volbu řešitelské strategie. Kdybychom zvolili „jednodušší“ čísla, dala by se úloha použít zřejmě i v 6. ročníku ZŠ, ale je pravda, že by tím ztratila „reálnost“ (spojení s každodenním životem).

[zvýšen] – možno vytvořit podobnou úlohu, záměnou za „snížen“.

[o] – plat by mohl být zvýšen „několikrát“, ale zde bychom byli opět „v jiném světě“.

[Od kterého měsíce bral vyšší plat] – možno nahradit „Do kterého měsíce bral nižší plat, Kolik měsíců bral vyšší/nižší plat“. Tato otázka by možná byla srozumitelnější, ale zároveň i jednodušší. Je možné, že ne všichni žáci vědí, že mají počítat od ledna jako od začátku roku.

   - *Formulační proměnná*

[Měsíční plat], [Během roku], [roční příjem].

- **Postoje a reakce žáků**

Domníváme se, že by úloha mohla být pro žáky zajímavá, jedná se o úlohu z reálného života. Žáci by se mohli zajímat, kdo tak vysoký plat může mít, jaká je průměrná mzda u nás. Je zde jasné spojení s předmětem Svět práce nebo Občanskou výchovou.

- **Postoje a reakce učitelů**

Učitelům by se mohla úloha líbit, je spojená se skutečným životem, je možné ji bohatě rozšiřovat a obměňovat.

- **Správné strategie řešení**

1. Algebraická cesta

x počet měsíců, po které bral zaměstnanec nižší plat

a) Sestavíme rovnici:

$$\begin{aligned} 12 \cdot (15\ 755 + 2\ 100) &= 195\ 360 + 2\ 100 \cdot x, \\ 12 \cdot 17\ 855 &= 195\ 360 + 2\ 100 \cdot x, \\ 214\ 260 - 195\ 360 &= 2\ 100 \cdot x, \\ \frac{18\ 900}{2\ 100} &= x, \\ 9 &= x. \end{aligned}$$

<u>Odpověď:</u> Zaměstnanec bral vyšší plat od října.

b) Sestavíme rovnici jiným způsobem, po úpravách je ekvivalentní s a), ale domníváme se, že je pro žáky srozumitelnější.

$$195\ 360 = 15755 \cdot x + (12 - x) \cdot (15755 + 2\ 100).$$

Znalosti: sestavení lineární rovnice s jednou neznámou, úpravy lineární rovnice, řešení a vyřešení.

Možná úskalí: vhodně zvolená neznámá, sestavení rovnice, správná interpretace výsledku.

Otázky: Je možné použít kalkulačku?

2. Aritmetická cesta

$\frac{(195\,360-12\cdot 15\,755)}{2\,100}=3\ldots$ počet měsíců, po které bral zaměstnanec vyšší plat.

Odpověď: Zaměstnanec bral vyšší plat od října.

Znalosti: převedení zadání do matematického jazyka, úprava číselného výrazu.

Možná úskalí: interpretace výsledku do odpovědi.

Otázky: Napadne žáky taková cesta? Domníváme se, že žáky mladší, kteří ještě neřeší slovní úlohy pomocí rovnic.

3. Systematické experimentování:

Přidáme hned v prvním měsíci a celkový součet je $214\,260$. To je moc. Co kdybychom přidali v polovině roku (používáme tedy bisekci): $6\cdot 15\,755+6\cdot 17\,855=201\,660$. To je moc. Co kdybychom přidali ve třech čtvrtinách roku: $9\cdot 15\,755+3\cdot 17\,855=195\,360$. To je ono.

Odpověď: Zaměstnanec bral vyšší plat od října.

Znalosti: odhad, základní početní operace, schopnost systematicky postupovat.

Možná úskalí: numerická chyba ve výpočtu, dodržování systematického postupu.

Otázky: bez použití kalkulačky velmi pracná strategie.

4. Řešení cestou zpět

a) pomocí programu Excel

K řešení je použit tabulkový procesor, kam stačilo zadat vstupní podmínky a potom „roztáhnout“.

2100	žádný měsíc	Od 12. měsíce	Od 11. měsíce	Od 10. měsíce
1	15 755	15 755	15 755	15 755
2	31 510	31 510	31 510	31 510
3	47 265	47 265	47 265	47 265
4	63 020	63 020	63 020	63 020

5	78 775	78 775	78 775	78 775
6	94 530	94 530	94 530	94 530
7	110 285	110 285	110 285	110 285
8	126040	126040	126040	126 040
9	141 795	141 795	141 795	141 795
10	157 550	157 550	157 550	159 650
11	173 305	173 305	175 405	177 505
12	189 060	191 160	193 260	195 360

Odpověď: Zaměstnanec bral vyšší plat od října.

Podnět, který vyšel z této techniky, byl ještě zpracován pomocí klasických prostředků.

Znalosti: práce s tabulkovým procesorem.

Možná úskalí: spojená s prací s tabulkovým procesorem.

Otázky: Neměli by žáci nejprve úlohu vyřešit bez použití počítače?

b) papír a tužka

Vycházíme z celkové částky a pokoušíme se stanovit, kdy mohlo nastat zvýšení platu.

$$195\ 360 - 17\ 855 = 177\ 505,$$

$$\frac{177\ 505}{11} \doteq 16\ 136{,}81\ldots$$

Protože poslední výsledek je různý od 15755, v prosinci přidání nenastalo.

$$177\ \ 505 - 17\ 855 = 159\ 650,$$

$$\frac{159\ 650}{11} = 15\ 965.$$

Protože poslední výsledek je různý od 15755, v listopadu přidání nenastalo.

$$159\ 650 - 17\ 855 = 141\ 795,$$

$$\frac{141\ 795}{11} = 15\ 755.$$

Odpověď: Zaměstnanec bral vyšší plat od října.

Znalosti: odhad, selský rozum.

Možná úskalí: numerická chyba ve výpočtu.

Otázky: bez kalkulaček velmi obtížná strategie.

5. Řešení pomocí strategie analogie

Úlohu je možné řešit i pomocí analogie. Zformulujeme úlohu s „jednoduššími" parametry, která bude řešitelná strategií Pokus – omyl či Pokus – ověření – korekce, bude evokovat aritmetickou cestu popsanou na straně 110.

Taková úloha by mohla znít například takto:

Měsíční plat zaměstnance byl $10\,000\,\text{Kč}$. Během roku mu byl zvýšen o $5000\,\text{Kč}$. Od kterého měsíce bral vyšší plat, jestliže jeho roční příjem byl $150\,000\,\text{Kč}$?

Pozn.: Zde bude pravděpodobně tento způsob řešení (míní se použití strategie analogie) zvnějšku dodán učitelem – on vyzve žáky k vyřešení jednodušší úlohy s cílem pomoci jim při řešení úlohy původní.

- **Nesprávné strategie řešení**

Pravděpodobné nesprávné strategie se nám pro tuto úlohu zatím nepodařilo vymyslet. Možné obtíže a dílčí chyby jsou zapsány u jednotlivých správných řešitelských strategií.

- **Hodnocení**

Podle zkušeností učitelů a s ohledem na záměr projektu navrhujeme ohodnotit úspěšné řešitele známkou jedna, ostatní hodnotit slovně.

6.3.2 Analýza a priori úlohy *Který zlomek je větší?*

Rozhodněte, který zlomek je větší: $\frac{125}{126}$ nebo $\frac{124}{125}$.

- **Charakter zadání**

Učitel může zadat úlohu slovně (žákům ji nadiktuje), vizuálně (úloha je napsaná na tabuli, pracovním listu), nebo kombinací slovní a vizuální. Domníváme se, že poslední možnost je pro správné zapsání zlomků nejvhodnější.

  - *Znalosti potřebné ke správnému pochopení zadání*
    - Znalosti matematické: „zlomek", výraz „větší".

- *Obtíže v chápání zadání*

  Žáci by mohli nesprávně zapsat číselné údaje (proto by byl vhodný zápis na tabuli).

- **Tematický celek, do kterého by se úloha dala zařadit.**

Zlomky a racionální čísla.

- **Cíl úlohy**

Pro žáky: žáci mají za úkol zjistit, který ze zlomků je větší.

Pro učitele: ověřit, jak žáci chápou problematiku zlomků, zda je dokážou nějakým způsobem znázornit, zda s nimi správně počítají.

- **Čas, který bude úloze věnován**

Odhadujeme 10 minut pro žáky. Dalších 10 – 20 minut na vysvětlování a předvedení různých způsobů řešení.

- **Způsob práce**

Individuálně, ve dvojicích, nebo ve skupinách. Jako domácí úkol nebo při hodině.

- **Pomůcky**

Tužka, papír, kalkulačka.

- **Předchozí znalosti**

Zlomek a úpravy zlomků, porovnávání zlomků.

- **Proměnné**

Rozhodněte, který zlomek je větší: $\frac{125}{126}$ *nebo* $\frac{124}{125}$.

V úloze najdeme dva typy proměnných: kognitivní didaktické a formulační proměnné.

- *Kognitivní didaktická proměnná*

$[\frac{125}{126}]$, $[\frac{124}{125}]$ – volba těchto číselných údajů je klíčová pro volbu řešitelské strategie. Kdybychom zvolili např. zlomky $\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{2}$, byla by úloha o mnoho jednodušší.

[větší] – možno vytvořit podobnou úlohu, záměnou za „menší“.

- *Formulační proměnná*

[Rozhodněte], [zlomek].

- **Postoje a reakce žáků**

Záleží na vztahu žáků ke zlomkům. Pokud zlomky nepatří mezi jejich oblíbenou problematiku, asi se jim úloha bude zdát obtížná. Na druhou stranu, dáme-li jim k dispozici kalkulačku, budou spokojeni, že úlohu určitě vyřeší její pomocí, a možná se pak pokusí i o jiný způsob řešení.

- **Postoje a reakce učitelů**

Úloha je určitě zajímavá, protože ukáže, jak žáci zlomky chápou. Navrhujeme do zadání přidat větu: Svoji odpověď zdůvodněte. Vyhneme se tak stručné odpovědi, která by se u některých žáků určitě objevila.

- **Správné strategie řešení**

1. **Přímý způsob**

a) aritmetická cesta, prostředek – kalkulačka

$$\frac{125}{126} \doteq 0{,}99206,$$
$$\frac{124}{125} \doteq 0{,}992.$$

Znalosti: práce s kalkulačkou, porovnávání racionálních čísel, zaokrouhlování.

Možná úskalí: interpretace výsledku do odpovědi.

Otázky: Je pro nás a pro učitele tento způsob dostatečným řešením? Nechceme, aby žáci byli schopni úlohu vyřešit bez kalkulačky?

b) aritmetická cesta, převod na společného jmenovatele

$$\frac{125}{126} = \frac{15\,625}{15\,750}$$
$$\frac{124}{125} = \frac{15\,624}{15\,750}$$

Znalosti: práce se zlomky: převedení na společného jmenovatele, písemné násobení.

Možná úskalí: hledání společného jmenovatele, správné vynásobení.

Otázky: Napadne žáky tento společný jmenovatel? Pokud ne, určitě je napadne jmenovatel $125 \cdot 126$.

*c) aritmetická cesta, „*křížové pravidlo“

Všechna čísla jsou kladná, můžeme tedy použít křížové pravidlo a nerovnost

$$\frac{125}{126} ? \frac{124}{125}$$

převést na ekvivalentní nerovnost

$$125 \cdot 125 \; ? \; 124 \cdot 126.$$

Tedy

$$15\,625 > 15\,624,$$

a

$$\frac{125}{126} > \frac{124}{125}.$$

Znalosti: podmínky pro použití „křížového pravidla“, princip „křížového pravidla“, písemné násobení.

Možná úskalí: správné vynásobení, správná interpretace výsledku.

d) algebraická cesta

Pro každé přirozené n platí

$$0 < 1,$$
$$n^2 + 2n + 0 < n^2 + 2n + 1,$$
$$n(n+2) < (n+1)^2,$$
$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2}.$$

Při volbě $n = 124$ dostáváme řešení naší úlohy.

Znalosti: důkaz přímý, nerovnosti a nerovnice, úpravy nerovnice, zobecnění úlohy.

Otázky: domníváme se, že tato strategie je na úrovni velmi šikovného gymnazisty, spíše vysokoškoláka.

2. Strategie analogie

Situace mezi čísly $\frac{124}{125}$ a $\frac{125}{126}$ je analogická jako mezi čísly $\frac{2}{3}$ a $\frac{3}{4}$, kde je výsledek zřejmý.

Znalosti: vlastnosti zlomků.

Možná úskalí: interpretace výsledku do odpovědi.

3. Strategie přeformulování

Přeformulujeme úlohu. Mějme dvě stejné pizzy (shodné kruhy). První z nich rozdělíme na 125 shodných dílů, druhou rozdělíme na 126 shodných dílů. Vzhledem k tomu, že dělíme stejný objekt, díly ve druhém jsou menší (stejnou plochu rozdělím na více shodných částí). Odebráním jednoho dílu z každé pizzy zůstane v první pizze 124 dílů a ve druhé 125 dílů. Protože jsme z druhé pizzy odebrali menší díl, musí v ní zbýt víc.

Výsledek: $\frac{125}{126} > \frac{124}{125}$.

Znalosti: zlomky, jejich znázornění, selský rozum.

- **Nesprávné strategie**

a) Nesprávná úvaha, správný výsledek

Žáci zlomky porovnají tak, že si řeknou: 125 je větší než 124, jmenovatele zanedbáme, stačí porovnat čitatele, tedy $\frac{125}{126} > \frac{124}{125}$.

b) Nesprávné krácení, správný výsledek

$$\frac{124}{125} = \frac{\cancel{12}4}{\cancel{12}5} = \frac{4}{5},$$

$$\frac{125}{126} = \frac{\cancel{12}5}{\cancel{12}6} = \frac{5}{6},$$

$$\frac{5}{6} > \frac{4}{5},$$

tedy

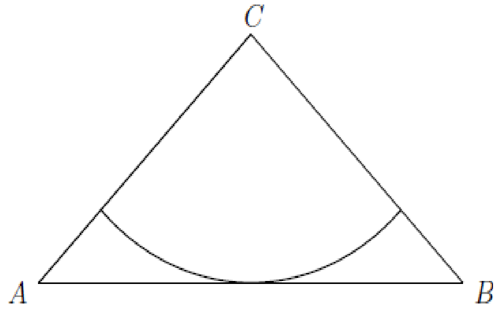
$$\frac{125}{126} > \frac{124}{125}.$$

- **Hodnocení**

Podle zkušeností učitelů a s ohledem na záměr projektu navrhujeme ohodnotit úspěšné řešitele známkou jedna, ostatní hodnotit slovně.

6.3.3 Analýza a priori úlohy *Čtvrtkruh*

Do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku je vepsána část kružnice následujícím způsobem:



Určete obsah vepsané části kruhu, jestliže velikost přepony trojúhelníka je $|AB| = 8$ cm.[79]

- **Charakter zadání**

Vizuální (úloha je napsaná na tabuli, pracovním listu), kombinace slovního a vizuálního.

  - *Znalosti potřebné ke správnému pochopení zadání*
    - Znalosti z oblasti geometrie: žák byl měl rozumět pojmům „pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník“, „kružnice“, „kruh“, „čtvrtkruh“, „přepona“ a spojení „vepsat kružnici“.
    - Znalosti matematické: obsah kruhu.
  - *Obtíže v chápání zadání*

    Pokud je v zadání i náčrt, domníváme se, že by neměl být v pochopení problém. Snad jen správné identifikování pravého úhlu a přepony.

- **Tematický celek, do kterého by se úloha dala zařadit**

Kruh, kružnice, případně Thaletova věta.

- **Cíl úlohy**

Pro žáky: Žáci mají za úkol zjistit obsah výše zobrazené části kruhu. Musí přitom vycházet z těchto údajů: trojúhelník je pravoúhlý, délka přepony.

[79] Převzato z Novoveský, Križalkovič a Lečko (1968).

Pro učitele: zjistit, jakou ze strategií budou žáci používat nejčastěji, rozvíjet prostorovou představivost.

- **Čas, který bude úloze věnován**

Odhadujeme 20 minut v závislosti na strategiích, se kterými žáci přijdou.

- **Způsob práce**

Individuálně, ve dvojicích, ve skupinách. Jako domácí úkol nebo při hodině.

- **Pomůcky**

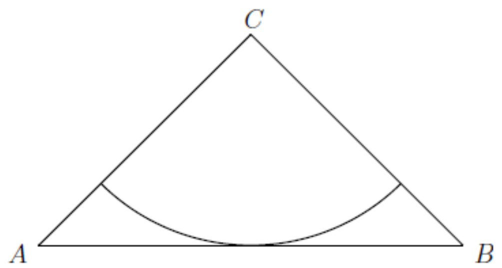
Tužka, papír, rýsovací potřeby, GeoGebra, Cabri.

- **Předchozí znalosti**

Kruh, kružnice, obsah kruhu, trojúhelník, obsah trojúhelníka.

- **Proměnné**

Do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku je vepsána část kružnic] následujícím způsobem:



Určete obsah vepsané části kruhu, jestliže velikost přepony trojúhelníka je $|AB| = 8$ cm.

V úloze najdeme dva typy proměnných: kognitivní didaktické a formulační proměnné.

- *Kognitivní didaktická proměnná*

[8 cm] – volba tohoto číselného údaje je klíčová pro volbu řešitelské strategie. Kdybychom zvolili větší délku, případně délku vyjádřenou jiným než celým číslem, řešení rýsováním a překládáním papíru by zřejmě nebylo možné.

[pravoúhlý] – pokud by trojúhelník nebyl pravoúhlý, nejednalo by se o čtvrtkruh a strategie řešení by bylo nutné upravit.

[rovnoramenný] – pokud by trojúhelník nebyl rovnoramenný, úloha by byla výrazně obtížnější.

[vepsána] – kružnice by mohla být i opsána, řešení by bylo snazší (poloměrem je délka odvěsny).

[obsah] – můžeme zjišťovat i obvod, ale i tak bychom nejprve zjišťovali poloměr kružnice.

[přepony] – mohli bychom zadat odvěsnu, přeponu by bylo nutno dopočítat.

- *Formulační proměnná*

[trojúhelníku], *[část kružnice], [kruhu], [velikost].*

- **Postoje a reakce žáků**

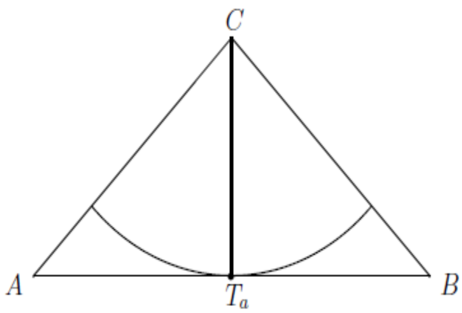
Žákům by se úloha mohla zdát obtížná, mohli by se domnívat, že zadané údaje nejsou k vyřešení dostatečné.

- **Postoje a reakce učitelů**

Úloha je zajímavá, opět nabízí více strategií řešení, lze vyřešit velmi rychle s minimální námahou (doplněním na čtverec). Bude žákům úloha předložena i s názvem „Čtvrtkruh“? Domníváme se, že napovídá, jak úlohu řešit. Je to úmysl?

- **Správné strategie řešení**

Pro správné vyřešení úlohy je třeba zjistit poloměr kružnice vepsané. Na následujícím obrázku je tento poloměr vyznačen jako úsečka CT_a.



Poté použijeme vzorec pro obsah kruhu

$$S = \pi r^2, \text{ kde } r = |CT_a|.$$

Vyznačená část kruhu je jeho čtvrtinou. Tedy pro určení požadovaného obsahu vypadá náš vztah následovně:

$$S = \frac{1}{4}\pi|CT_a|^2.$$

Znalosti: vlastnosti rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka, kružnice vepsaná, poloměr kružnice, vzorec pro obsah kruhu.

Možné obtíže: opomenutí některé z vlastností trojúhelníka (rovnoramennost, pravý úhel), uvědomění si, že se jedná o čtvrtkruh, vzorec pro obsah kruhu.

1. Přímý způsob

a) pomocí Pythagorovy věty

Na základě Pythagorovy věty spočítáme velikost strany AC. Protože trojúhelník je rovnoramenný, platí

$$|AC| = |BC|,$$

tedy

$$|AC|^2 + |BC|^2 = 8^2,$$
$$2|AC|^2 = 8^2,$$
$$|AC|^2 = \frac{64}{2} = 32,$$
$$|AC| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

Podruhé aplikujeme Pythagorovu větu, tentokrát pro trojúhelník ACT_a, který je také rovnoramenný.

Tedy

$$|AT_a| = |CT_a|.$$

$$2|CT_a|^2 = |AC|^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 32,$$
$$|CT_a|^2 = 16,$$
$$|CT_a| = 4 \text{ cm}.$$

Po dosazení do námi určeného vzorce získáme:

$$S = \frac{1}{4}\pi|CT_a|^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot 16 = 4\pi.$$

Odpověď: Obsah plochy ohraničené kružnicí a rameny rovnostranného trojúhelníku je 4π cm^2.

*Znalosti:*Pythagorova věta, vzorec pro obsah kruhu.

*Možné obtíže:*správná aplikace Pythagorovy věty, dosazení a interpretace výsledku.

b) pomocí Euklidovy věty o výšce

Předpokládejme, že jsou splněny předpoklady Euklidovy věty o výšce. Potom platí:

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b.$$

Protože trojúhelník je rovnoramenný, výška CT_a půlí stranu AB bodem T_a. Aplikujme Euklidovu větu na náš trojúhelník:

$$|CT_a| = v_c, c_a = c_b = |AT_a|.$$

$$|CT_a|^2 = |AT_a|^2,$$

$$|CT_a| = |AT_a|$$

a protože

$$|AT_a| = \tfrac{1}{2}|AB| \text{ a } |CT_a| = |AT_a|,$$

potom

$$|CT_a| = 4 \text{ cm}.$$

Opět použijeme vztah z řešení 1 a).

Znalosti: Euklidova věta o výšce.

Možné obtíže: správná aplikace Euklidovy věty, úprava vzorce, výpočet.

Otázky: tato strategie je využitelná jen pro žáky SŠ.

c) překládáním papíru

Ze čtverce o straně 8 cm snadno vyrobíme požadovaný trojúhelník. Dále se budeme odkazovat na obrázek ze zadání. Přeložením papíru tak, aby se bod A zobrazil na bod B, získáme výšku CT_a trojúhelníku ABC a navíc dva nové trojúhelníky T_aBC a T_aCA, které jsou shodné. Přeložením trojúhelníku T_aBC tak, aby bod B se zobrazil na bod C, dojde ke splynutí strany T_aB s výškou CT_a, a tedy výška je stejně dlouhá, jako polovina strany AB, o které víme, že měří 4 cm. Tedy $|CT_a| = 4$ cm. Opět použijeme vztah z řešení 1 a).

Znalosti: shodná zobrazení.

Možné obtíže: spojené s překládáním papíru – představivost, přesnost.

Otázky: tuto strategii žáci asi použijí pouze v případě, že mají s řešením úloh pomocí překládání papíru zkušenosti.

d) rýsováním

Sestrojíme trojúhelník ABC pomocí kolmice, která prochází středem úsečky AB, a Thaletovy kružnice nad úsečkou AB. Sestrojíme úsečku CT_a a změříme ji. Dále opět použijeme vztah z řešení 1 a).

Znalosti: konstrukce trojúhelníku, Thaletova kružnice.

Možné obtíže: přesnost rýsování.

Otázky: Považujeme tuto strategii jako dostatečnou?

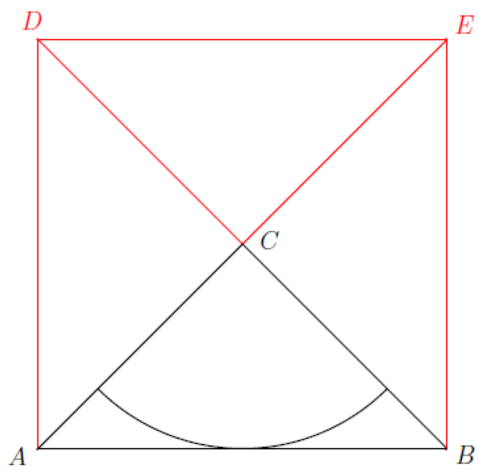
e) další

Po nakreslení obrázku si uvědomíme, že trojúhelník T_aCA je také rovnoramenný, tedy velikost úsečky CT_a je rovna polovině strany AB. Dále opět použijeme vztah z řešení 1 a).

2. Zavedení pomocného prvku

a) čtverec

Do zadaného obrázku si přikreslíme pomocný prvek. Na našem obrázku je vyznačen červeně.

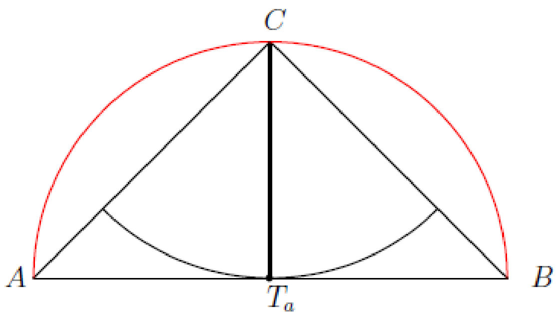


Získali jsme čtverec $ABED$, strany AD, BE, DE jsou stejně dlouhé jako strana AB a protože se úhlopříčky ve čtverci půlí, je bod C středem čtverce a tedy velikost CT_a je rovná polovině strany AB. Dále opět použijeme vztah z řešení 1 a).

Znalosti: čtverec, střed čtverce.

b) Thaletova kružnice

Do zadaného obrázku si přikreslíme pomocný prvek. Na našem obrázku je vyznačen červeně.



Je to Thaletova (půl)kružnice se středem v bodě T_a a poloměrem $|CT_a|$. Protože $|CT_a|$ je námi hledaný poloměr kružnice vepsané a z Thaletovy kružnice je patrno, že $|CT_a| = |AT_a|$ je velikost CT_a je rovná polovině strany AB. Dále opět použijeme vztah z řešení 1 a).

Znalosti: Thaletova kružnice

- **Nesprávné strategie**

Nesprávné strategie se nám pro tuto úlohu zatím nepodařilo vymyslet. Možné obtíže a dílčí chyby jsou zapsány u jednotlivých správných řešitelských strategií.

- **Hodnocení**

Podle zkušeností učitelů a s ohledem na záměr projektu navrhujeme ohodnotit úspěšné řešitele známkou jedna, ostatní hodnotit slovně.

ZÁVĚR

Hlavním cílem předkládané dizertační práce bylo ukázat možnosti využití analýzy a priori v přípravě učitele na výuku.

Během předexperimentu se postupně podařilo zpřesnit složky analýzy a priori. Ke složkám popsaným v kapitole 1.1 jsme na základě dotazníků a zkušeností z průběhu předexperimentu přidali složky *charakter zadání* a *hodnocení*. Podle vytvořené struktury jsme sestavili analýzu a priori diofantovské úlohy, kterou jsme dále využili pro experiment.

Při experimentu jsme ověřovali následující hypotézy: Předpokládali jsme, že skutečné přípravy nebudou obsahovat všechny položky, které učitelé a budoucí učitelé uváděli v dotazníku. Tato hypotéza se potvrdila pouze částečně. Několik složek se opravdu ve skutečných přípravách objevilo v menší míře než v dotazníku, ale vyskytly se také dvě složky, které častěji než v dotazníku figurovaly právě v přípravách.

Předpokládali jsme, že přípravy studentů budou bohatší po formální a organizační stránce, budou častěji obsahovat téma hodiny, fáze hodiny, časové rozvržení, způsob práce, pomůcky, způsob hodnocení. Domnívali jsme se, že přípravy učitelů budou více zaměřeny na žáka, budou častěji zmiňovat předchozí znalosti, reakce a postoje žáků, překážky, chyby a možné problémy, správné i nesprávné strategie řešení. Tato hypotéza se nepotvrdila. Ukázalo se, že studenti své přípravy zpracovali nejen po formální a organizační stránce, ale zaměřili je také na žáky. Učitelé své přípravy zpracovali více po formální a organizační stránce.

Domnívali jsme se, že bude možné na základě přítomnosti/nepřítomnosti určitých složek analýzy a priori rozdělit přípravy učitelů a studentů do skupin. Vytvořili jsme dvě skupiny příprav, přípravy zaměřené na učitele a přípravy zaměřené na učitele i žáky zároveň.

V aplikační části jsme na konkrétních příkladech ukázali funkci analýzy a priori v učitelské praxi a ve výzkumném projektu. Při rozboru vyučovací jednotky jsme využili spojení analýzy a priori s analýzou a posteriori. Na základě těchto výsledků jsme provedli úpravu původní analýzy a priori.

Hlavní přínos této práce vidíme v podrobném a uceleném seznámení s analýzou a priori. Sestavili jsme strukturu, na jejímž základě je možné vytvářet další analýzy a priori v budoucnu. Podařilo se nám porovnat konkrétní přípravy učitelů – expertů s přípravami studentů – začátečníků a následně zjistit, v čem se shodují a liší od analýzy a priori. Na konkrétním příkladu jsme ukázali využití analýzy a priori při rozboru vyučovací hodiny a posteriori. Nakonec jsme popsali, jaké funkce zastává analýza a priori v konkrétním výzkumném projektu.

Téma zpracovávané v dizertační práci je velmi důležité nejen pro učitelskou praxi a výzkum v oblasti vzdělávání, ale také v přípravě budoucích učitelů. To otevírá další možnosti, kam výzkum analýzy a priori směřovat v budoucnu. Velmi důležitým pokračováním je např. zkoumání způsobu využití této analýzy v přípravě budoucích učitelů, které nebylo předmětem této dizertační práce.

LITERATURA

BROUSSEAU, G. (1984). Le rôle du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. In *Actes de la III[e] école d'été de didactiques des mathématiques.* Grenoble: IMAG, s. 99-108.

BROUSSEAU, N. et BROUSSEAU, G. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire.* IREM Bordeaux.

BROUSSEAU, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield, Eds. & Trans). Dordrecht: Kluwer.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. [Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield]. Grenoble: La pensée sauvage.

BROUSSEAU, G., SARRAZY, B. (2002). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*. DAEST, Université Bordeaux 2.

BROUSSEAU, G. (2012). *Úvod do Teorie didaktických situací v matematice*. Praha: Univerzita Karlova-Pedagogická fakulta.

CHARNAY, R. (2003). L'analyse a priori, un outil pour l'enseignant. In *Actes des journées d'étude sur le Rally mathématique transalpin, RMT: potentialités pour la classe et la formation.* GRUGNETTI, JAQUET, MEDICI, POLO, RINALDI, Eds. ARMT, Dip. di Mat. Università di Parma, Dip. Mat. Università di Cagliari, Vol. 3, s. 199-213.

COTTON, K. (1995). *Effective schooling practices: A research synthesis 1995 update.* Portland, OR: Northwest Regional Educational Laboratory.

DIVÍŠEK, J. (1989). *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. Praha: SPN.

EICHOLZ, R. E., O´DAFFER, P. G. (1964). *Elementary School Mathematics, Book 6*. Addison-Wesley Publishing Company, INC.

FERMAT, P. (1853). *Précis des Œuvres mathématiques et de l'Arithmétique de Diophante,* par Émile BRASSINNE. Toulouse: Imprimerie de Jean-Mathieu Douladoure. Reprint 2005.

HARMER, J. (1992). *The Practice of English Language Teaching*. Longman Handbooks for LanguageTeachers.

HAUSENBLAS, O. a kol. (2008). *Klíčové kompetence na gymnáziu*. Výzkumný ústav pedagogický v Praze.

HOFMANNOVÁ, M. (2003). *Lesson Planning*. Interní materiál pro projekt 112212-CP-1-2003-1-CY-COMENIUS-C21:MATHEU: Identification, Motivation and Support of Mathematical Talents in European Schools.

HRABÁKOVÁ, H. (2005). *Využití Teorie didaktických situací v prostředí české školy*. [Diplomová práce]. Praha: Univerzita Karlova-Pedagogická fakulta.

HRUŠA, K. a kol. (1962a). *Metodika počtů pro pedagogické instituty 1*. Praha: SPN.

HRUŠA, K. a kol. (1962b). *Metodika počtů pro pedagogické instituty 2*. Praha: SPN.

HRUŠA, K., VYŠÍN, J. (1964). *Vybrané kapitoly metodiky vyučování matematice na základní devítileté škole.* Praha: SPN.

HUNTEROVÁ, M. (1999). *Účinné vyučování v kostce.* Praha: Portál.

KALHOUS, Z., OBST. O., a kol. (2002) *Školní didaktika.* 1. vydání. Praha: Portál.

MUTTON, T., HAGGER, H., BURN, K. (2011): Learning to plan, planning to learn: the developing expertise of beginning teachers. *Teachers and Teaching*. Vol. 17, No. 4, August 2011, s. 399-416.

NOVOTNÁ, J. (2003a). Ukázky analýzy a priori pro slovní úlohy. In: DVOŘÁK, P., HERMAN, J., eds. In *Sborník z JŠDS Vrabcov, jaro 2003.* Praha: Univerzita Karlova-Pedagogická fakulta, OR Didaktika matematiky, s. 31-54.

NOVOTNÁ, J. (2003b). *Didaktické situace ve vyučování matematice*. [Přednáška]. Vzdělávání učitelů. Seminář učitelů matematiky okresu Mladá Boleslav. Pořadatel SPI Mladá Boleslav.

NOVOVESKÝ, Š., KRIŽALKOVIČ, K., LEČKO, I. (1968). *777 matematických zábaviek a hračiek*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladatelstvo.

NESHER, P., HERSHKOVITZ, S., NOVOTNÁ, J. (2003). Situation Model, Text Base and What Else? Factors Affecting Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 52, No. 4, s. 151-176. Springer Netherlands.

OBST, O. (2002). Projektování výuky. In: Z. KALHOUS, O. OBST, a kol., eds. : *Školní didaktika*. Praha: Portál, s. 354-365.

PANASUK, R. M., TODD, J. (2005). Effectiveness of Lesson Planning: Factor Analysis. *Journal of Instructional Psychology*. Vol. 32, No. 3, s. 215-232. ProQuest Education Journals.

PELCZER, I., SINGER, F. M., VOICA, C., (2013). Teaching highly able students in a common class: challenge and limits. In print. [cit. 2013-08-04]. Dostupné z: http://www.cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG7/WG7_Mihaela_Singer.pdf

PROKOPOVÁ, M. (2004). *Epistemological obstacles*. [PhD Report]. Roehampton, Autumn Semester 2003/2004.

RYS, S. (1975). *Hospitace v pedagogické praxi*. Praha: SPN.

SARRAZY, B. (1996). Le contrat didactique: un contrat impossible ? et pourtant... *Journal des Instituteurs*, No. 3, nov. 1996, s. 66-69.

SKALKOVÁ, J. (2007). *Obecná didaktika 2*. Praha: Grada.

SPAGNOLO, F., ČIŽMÁR, J. (2003). *Komunikácia v matematike na strednej škole*. Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta.

SOLLERVALL, H., STADLER, E. (2013). Affordances and objects of activity as matching instruments for task design and analysis of mathematical problem solving. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. In print.

SZTAJN, P., ALEXSAHT-SNIDER, M. A., WHITE, D. Y., HACKENBERG, A. (2004). School-based community of teachers and outcomes for students. In HOINES, M. J., FUGLESTAD, A. B., eds. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Bergen: Bergen University College, Vol. 4, s. 273-280.

TAYLOR, P. H. (1970). *How teachers plan their courses*. Slough, Berkshire: National Foundation for Educational Research in England and Wales.

TOCHON, F. V. (1989). A quoi pensent les enseignants quand ils planifient leurs cours ? *Revue Française de pédagogie*, No. 86, s. 23-33.

WARD, R. A., ANHALT, C. O., VONSON, K. D. (2003). Mathematical Representations and Pedagogical Content Knowledge: An Investigation of Prospective Teachers´ Development. *Focus on Learning Problems in Mathematics*.

ZAHORIK, J. A. (1975). Teachers´ planning models. *Educational Leadership*, Vol. 33, No. 2, s. 134-139.

PŘÍLOHY

Příloha 1a	Formulář přípravy Caledonian School v Praze
Příloha 1b	Formulář přípravy Westminster College v Londýně
Příloha 2a	Formulář dotazníku
Příloha 2b	Ukázka vyplněného dotazníku
Příloha 3a	Ukázka přípravy učitele
Příloha 3b	Ukázka přípravy studenta učitelství
Příloha 4	Pracovní list pro žáky
Příloha 5a, 5b	Ukázky práce žáků