Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Milan Matějka

Sobolevovská zobrazení a Luzinova N podmínka

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Matematická analýza

Praha 2012

Na tomto místě bych rád poděkoval svému vedoucímu diplomové práce doc. RNDr. Stanislavu Henclovi, Ph.D., za motivaci a veškerou pomoc s prací. Dále bych také rád poděkoval prof. RNDr. Janu Malému, DrSc. za poskytnutí článků a vhodné literatury.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 1. 12. 2012

Název práce: Sobolevovská zobrazení a Luzinova N podmínka
Autor: Milan Matějka
Katedra: Katedra matematické analýzy
Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D.
E-mail vedoucího: Stanislav.Hencl@mff.cuni.cz

Abstrakt: Nechť f je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že f splňuje Luzinovu N podmínku, pokud zobrazuje množiny nulové míry na množiny nulové míry. Platnost Luzinovy podmínky je úzce spjatá s platností věty o substituci. Ví se, že Luzinova podmínka platí pro zobrazení ze Sobolevova prostoru $W^{1,p}$ pro $p > n$ a pro $p \leq n$ již platit nemusí. Cílem práce je shrnout známá tvrzení pro $W^{1,p}$ a zkoumat platnost této podmínky pro zobrazení ze Sobolevova prostoru $W^{2,p}$.

Klíčová slova: Luzinova podmínka, Sobolevův prostor, homeomorfismus

Title: Sobolev mappings and Luzin condition N
Author: Milan Matějka
Department: Department of Mathematical Analysis
Supervisor: doc. RNDr. Stanislav Hencl, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: Stanislav.Hencl@mff.cuni.cz

Abstract: A mapping f from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^n$ is said to satisfy the Luzin condition N if f maps sets of measure zero to sets of measure zero. It is known to be valid for mappings in the Sobolev space $W^{1,p}$ for $p > n$ and for $p \leq n$ there are counterexamples. The aim of this thesis is to summarize known results and study the validity of Luzin condition N for mappings in the Sobolev space $W^{2,p}$.

Keywords: Luzin's condition, Sobolev space, homeomorphism

Obsah

Seznam použitých zkratek

$Q(a,r)$	...	Krychle o středu a, poloměru r v $\mathbb{R}^n$
Q_0	...	Krychle $Q_0 = [0,1]^n$ v $\mathbb{R}^n$
$\lvert A\rvert$	...	Lebesgueova míra množiny A
B	...	Uzavřená koule
$B(x,r)$	...	Uzavřená koule o středu x a poloměru r
U	...	Otevřená koule
$U(x,r)$	...	Otevřená koule o středu x a poloměru r
$C(n)$	...	Konstanta závislá na dimenzi n
$\partial\Omega$	...	Hranice množiny Ω
S	...	Normalizovaná $(n-1)$ dimenzionální míra na $\partial B(x,r)$
$X \hookrightarrow Y$	...	Vnoření prostoru X do prostoru Y vzhledem k příslušným normám $\lVert\cdot\rVert_X$, $\lVert\cdot\rVert_Y$
Df	...	Jakobiho matice zobrazení f
D^2f	...	D^2f definujeme jako $D(Df)$, jedná se tedy vlastně o Hessovu matici zobrazení f
$\lvert Df\rvert$	...	Euklidova norma matice Df, tj. $\left(\sum_{i,j}(\partial_i f_j(x))^2\right)^{\frac{1}{2}}$
supp f	...	Nosič funkce f, supp $f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$

Kapitola 1

Úvod

1.1 Motivace

V této práci se budeme zabývat podmínkami, které zaručují, že spojité zobrazení zobrazuje množiny míry nula na množiny míry nula. Tato podmínka se nazývá Luzinova podmínka.

Definice 1.1 (Luzinova podmínka) *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Předpokládejme, že $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení. Řekneme, že f splňuje Luzinovu N podmínku, jestliže pro všechny množiny $A \subset \Omega$ takové, že $|A| = 0$, platí $|f(A)| = 0$.*

Fyzikálně tato podmínka znamená, že nevzniká žádná hmota během spojité deformace. Jedná se o zcela přirozenou podmínku například pro „area formula", větu o substituci nebo pro vytváření modelů v nelineární elasticitě.

Podmínky pro platnost Luzinovy N podmínky mohou být velice různorodé. Může se jednat o podmínky pro nezápornost Jakobiánu [11], lze pracovat se zobrazeními s vlastností „finite distortion" [8], funkce mohou být hölderovsky spojité, pseudomonotónní [10] nebo lze třeba i vyšetřovat vztah s Hausdorffovou mírou [4]. Naším cílem bude práce zejména se spojitými zobrazeními a homeomorfismy.

Známé výsledky jsou, že pro spojité $W^{1,p}$, $p > n$, zobrazení Luzinova podmínka platí (viz např. [6]).

Věta 1.2 *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená a* $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $p > n$, *je spojitý reprezentant. Potom* u *splňuje Luzinovu* N *podmínku.*

Nicméně pro případ $p \leq n$ již N podmínka platit nemusí, jak ukážeme v kapitole 2. Pro homeomorfismy z $W^{1,p}$ obdržíme lepší výsledek a Luzinova podmínka bude splněna pro $p \geq n$. Tyto výsledky jsou inspirovány důkazy z [10].

Věta 1.3 *Jestliže* $G \subset \mathbb{R}^n$ *je otevřená a* $f \in W^{1,n}(G, \mathbb{R}^n)$ *je homeomorfismus, potom* f *splňuje* N *podmínku.*

Pro $p < n$ však již podmínka neplatí. Pro $n = 2$ to dokázal už Cesari v [3] a v kapitole 3 uvedeme protipříklad pro obecné n jako v [7].

Dále se budeme zabývat zobrazeními z $W^{2,p}$ a obdržíme tak zcela nové výsledky. V kapitole 4 se zaměříme na obecná zobrazení. Pomocí Sobolevovy věty o vnoření ukážeme platnost Luzinovy podmínky pro obecná zobrazení z $W^{2,p}$, $p > \frac{n}{2}$. Případ $p = \frac{n}{2}$ je hraniční a ve Větě 4.4 dokážeme, že pouze spojitost již nestačí k platnosti N podmínky. V poslední kapitole 5 budeme uvažovat homeomorfismy z $W^{2,p}$ a ukážeme platnost Luzinovy podmínky i pro případ $p = \frac{n}{2}$.

1.2 Základní pojmy a definice

Definice 1.4 *Uspořádanou n-tici* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *nazýváme multiindex. Výšku multiindexu značíme* $|\alpha|$ *a definujeme ji jako*

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d.$$

Pokud se v textu vyskytne výše nedefinovaný symbol α, *bude se vždy jednat právě o multiindex.*

Značení 1.5 *Symbolem* $D^\alpha \varphi$ *značíme parciální derivaci funkce* φ

$$D^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definice 1.6 (slabá derivace) *Buď $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ multiindex, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $u, v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$. Řekneme, že v_α je slabá parciální derivace funkce u podle x^α, jestliže*

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha \varphi, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definice 1.7 (Sobolevovy prostory) *Pro $p \in [1, \infty]$, $k \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřenou, definujeme Sobolevův prostor $W^{k,p}(\Omega)$ jako*

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : |D^\alpha u| \in L^p(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq k \right\}.$$

Pro $u \in W^{k,p}(\Omega)$ zavedeme normu

$$\|u\|_{k,p} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1, \infty) \\ \max\limits_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty. \end{cases}$$

Značení 1.8 *Symbolem $W^{k,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ chápeme prostor zobrazení $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ splňující $u_i \in W^{k,p}(\Omega)$ pro každé i. Takovéto značení budeme používat pro zdůraznění cílového prostoru. Někdy se dopustíme zjednodušení a budeme psát $u \in W^{k,p}$. Z kontextu je však vždy jasné, se kterým případem pracujeme.*

Značení 1.9 *Používejme úmluvu, že C značí obecnou konstantu, jejíž hodnota může být různá při každém výskytu. Symbol $C(n)$ značí, že tato konstanta může mít různou hodnotu pro různé dimenze prostoru $\mathbb{R}^n$.*

Kapitola 2

Luzinova podmínka pro obecná zobrazení z $W^{1,p}$

2.1 Úvodní definice a věty

Definice 2.1 (hölderovsky spojité funkce) *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Buď $u \in C(\overline{\Omega})$. Označme pro $\lambda \in (0,1]$*

$$H_\lambda(u) = \sup_{x,y\in\Omega,\, x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\lambda}.$$

Potom definujeme

$$C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}) = \left\{u \in C(\overline{\Omega}) : H_\lambda(u) < \infty\right\}.$$

Na tomto prostoru zavedeme normu

$$\|u\|_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + H_\lambda(u).$$

Věta 2.2 (Besicovitch) *Existuje konstanta $c(n)$ závislá jen na dimenzi prostoru $\mathbb{R}^n$ s následující vlastností:*

Nechť $\{B_j : j \in J\}$ je libovolný soubor uzavřených nedegenerovaných koulí v $\mathbb{R}^n$ splňující

$$\sup\{\mathrm{diam}(B_j) : j \in J\} < \infty$$

a A je množina středů koulí $B_j, j \in J$. Pak existuje $J' \subset J$, kde systém

$$\{B_j, j \in J'\},$$

splňuje

$$A \subset \bigcup_{j \in J'} B_j,$$

$$\sum_{j \in J'} \chi_{B_j}(x) \leq c(n),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Důkaz. Důkaz zde nebudeme provádět a odvoláme se na literaturu [2]. □

Věta 2.3 (Morrey) *Jestliže $p > n$, pak existuje konstanta $C = C(n,p)$ taková, že*

$$\|u\|_{C^{0,\mu}(\mathbb{R}^n)} \leq C\, \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n),$$

kde $\mu = 1 - \frac{n}{p}$.

Přesněji na místo libovolné $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ bereme spojitého reprezentanta $u^* \in C^{0,\mu}(\mathbb{R}^n)$, který splňuje $u = u^*$ s. v.

Důkaz. Důkaz pro $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ lze najít například v [13]. Tvrzení poté snadno plyne z hustoty $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ve $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. □

Věta 2.4 *Pro $p > n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ existuje konstanta $C = C(n,p)$ taková, že pro $u \in W^{1,p}(B)$ spojitého reprezentanta platí*

$$\sup_{x,y \in B} |u(x) - u(y)| \leq C r^\mu \|Du\|_{L^p(B)},$$

kde $\mu = 1 - \frac{n}{p}$, r značí poloměr koule B.

Důkaz. Jedná se o důsledek Morreyovy věty a Poincarého nerovnosti, zpracovaný důkaz lze nalézt v [5]. □

Značení 2.5 *Podle Morreyovy věty, Věty 2.3, pro $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $p > n$, lze po předefinování funkce na množině nulové míry předpokládat, že u je spojitá.*

Proveďme tedy úmluvu, že pro tento případ, pokud bude potřeba, pracujme se spojitým reprezentantem. Pro N podmínku je toto důležité, neboť změna na množině nulové míry může porušit platnost N podmínky.

2.2 Luzinova podmínka pro $W^{1,p}, p > n$

Důkaz Věty 1.2. Mějme $A \subset \Omega, |A| = 0$. Chceme ukázat, že $|u(A)| = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Nejdříve najděme otevřenou množinu U takovou, že $A \subset U \subset \Omega$, $|U| < \varepsilon$. Pro indexovou množinu J si nadefinujme pokrytí U systémem koulí

$$\{B_j, j \in J\}$$

obsahující všechny koule B_j splňující

$$\operatorname{diam}(B_j) < \infty,$$

$$B_j \subset U.$$

Poloměry koulí B_j si označme r_j. Z Besicovitchovy věty pak existuje konstanta $c(n)$ a podsoubor

$$\{B_j, j \in J'\}\,,\ J' \subset J$$

takový, že

$$U \subset \bigcup_{j \in J'} B_j,$$

$$\sum_{j \in J'} \chi_{B_j}(x) \leq c(n),\ x \in U.$$

Navíc platí

$$\sum_{j \in J'} |B_j| \leq c(n)\,|U| < c(n)\varepsilon. \tag{2.1}$$

Z Věty 2.4 poté

$$|u(A)| \leq \sum_{j \in J'} |u\,(B_j)| \leq C(n,p) \sum_{j \in J'} r_j^{(1-\frac{n}{p})n} \, \|Du\|^n_{L^p(B_j)}\,.$$

Použitím Hölderovy nerovnosti pro $q = \frac{p}{n} > 1$, $q' = \frac{p}{p-n}$ a (2.1) dostaneme

$$\sum_{j\in J'} r_j^{(1-\frac{n}{p})n} \|Du\|^n_{L^p(B_j)} \leq (\sum_{j\in J'} r_j^n)^{\frac{1}{q'}} (\sum_{j\in J'} \|Du\|^p_{L^p(B_j)})^{\frac{1}{q}} \leq C(n,p)\varepsilon^{\frac{1}{q'}} \|Du\|^n_{L^p(\Omega)}.$$

Protože ε bylo libovolně malé, kombinací předchozích odhadů obdržíme

$$|u(A)| = 0.$$

$\square$

2.3 Luzinova podmínka pro $W^{1,p}, p \leq n$

Lemma 2.6 *Pro $n \geq 2$ existují $u_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, které splňují tyto vlastnosti:*

1. $u_m \in C(\mathbb{R}^n)$
2. $\|u_m\|_{1,n} \xrightarrow{m\to\infty} 0$
3. $0 \leq u_m \leq 1$
4. $0 \in \mathrm{Int}\{x : u_m(x) = 1\}$
5. $u_m = 0$ *na* $\mathbb{R}^n \backslash B(0,1)$.

Důkaz. Uveďme zde příklad funkcí, které splňují všechna potřebná kritéria. Definujme je následovně pro $m \in \mathbb{N}$

$$u_m(x) = \min\left\{1, \left(\log\log\Big(\frac{1}{|x|}\Big) - m\right)^+\right\}.$$

Vlastnosti (1), (3), (4), (5) vyplývají snadno z volby u_m. Zbývající vlastnost (2) musíme ukázat. Protože $u_m(x) = 0$ na $\mathbb{R}^n \backslash B(0, e^{-e^m})$, pak

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |u_m(x)|^n \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\min\left\{1, \left(\log\log\Big(\frac{1}{|x|}\Big) - m\right)^+\right\}\right|^n dx \\ &\leq \int_{B(0,\, e^{-e^m})} dx \xrightarrow{m\to\infty} 0\end{aligned}$$

a dále

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Du_m(x)|^n\, dx \le \int\limits_{B(0,\, e^{-e^m})} \frac{dx}{|x|^n \left|\log \frac{1}{|x|}\right|^n}$$
$$= C(n) \int_0^{e^{-e^m}} \frac{r^{n-1}}{r^n \left|\log \frac{1}{r}\right|^n} dr$$
$$= C(n) \int_0^{e^{-e^m}} \frac{dr}{r\, |\log r|^n} \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Kombinací těchto výsledků získáme $\|u_m\|_{1,n} \xrightarrow{m\to\infty} 0.$ □

Věta 2.7 *Existuje spojité zobrazení $f \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $n \ge 2$, takové, že f zobrazí $[0,1] \times \{0\}^{n-1}$ na Q_0, tedy nesplňuje N podmínku.*

Důkaz. Hledané f sestrojíme tak, že zobrazíme interval $I = \{te_1 : 0 \le t \le 1\}$ na Q_0. Abychom hustě pokryli celou krychli Q_0, použijeme metodu „Space-filling tree“. Důkaz také doplníme zjednodušeným obrázkem pro přehlednost. Zkonstruovaná f tedy nebude splňovat požadovanou N podmínku. Nejdříve si zvolme pomocné funkce u_m z Lemmatu 2.6. Označme si indexovou množinu

$$Y = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}^n.$$

Najdeme body $z_y \in I$, $y \in Y$, a poloměr r_0 tak, aby koule $B(z_y, r_0)$, $y \in Y$, byly navzájem disjunktní. Položme

$$g_m(x) = \sum_{y\in Y} y u_m\left(\frac{x - z_y}{r_0}\right).$$

Dále sestrojíme posloupnost spojitých zobrazení $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Definujme f_0 jako konstantní zobrazení

$$f_0 : \mathbb{R}^n \to (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}).$$

Pro $k \ge 1$ postupujme tak, že Q_0 rozdělíme na menší krychle

$$Q_i^k = \left[2^{-k+1}(i_1 - 1), 2^{-k+1} i_1\right] \times \ldots \times \left[2^{-k+1}(i_n - 1), 2^{-k+1} i_n\right], i \in \left\{1, \dots, 2^{k-1}\right\}^n.$$

Indukcí sestrojíme $B(x_i^k, r_k)$, $x_i^k \in I$ a f_k. Když $Q_i^k \subset Q_j^{k-1}$, pak nalezneme disjunktní

$$B(x_i^k, r_k) \subset B(x_j^{k-1}, r_{k-1})$$

se středy na I tak, že $f_{k-1}(B(x_i^k, r_k))$ je rovno středu krychle Q_i^k a to pro každé $i \in \left\{1, \dots, 2^{k-1}\right\}^n$. Nyní je potřeba nadefinovat zobrazení f_k. Nejdříve položme

$$h_{m,k}(x) = \begin{cases} 2^{-k} g_m\left(\frac{x - x_i^k}{r_k}\right), & \text{jestliže } \left|x - x_i^k\right| \leq r_k \text{ pro nějaké } i \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Protože $\|u_m\|_{1,n} \xrightarrow{m \to \infty} 0$ z volby g_m, najdeme vhodné m_k tak, aby

$$\|h_{m_k,k}\|_{1,n} \leq 2^{-k}. \tag{2.2}$$

Poté definujeme

$$f_k = f_{k-1} + h_{m_k,k}.$$

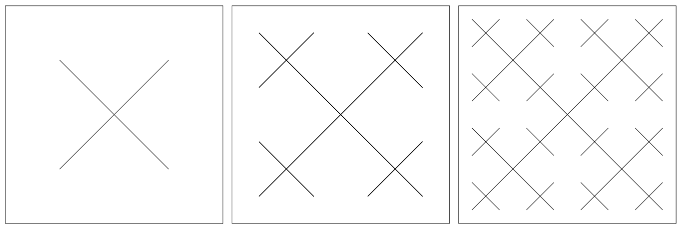
Tím jsme dokončili konstrukci k-tého kroku. Tento postup opakujeme. Nalezneme Q_i^{k+1}, $B(x_i^{k+1}, r_{k+1})$, $i \in \left\{1, \dots, 2^k\right\}^n$, stejným způsobem jako výše. Zobrazení f_k pak splňuje, že $f_k(B(x_i^{k+1}, r_{k+1}))$ je rovno středu krychle Q_i^{k+1}, $i \in \left\{1, \dots, 2^k\right\}^n$, z vlastnosti (4) funkcí u_m. Pro příslušné $h_{m_{k+1},k+1}$ zobrazení f_{k+1} definujeme jako

$$f_{k+1} = f_k + h_{m_{k+1},k+1}.$$

Požadované f položme

$$f = \lim_{k \to \infty} f_k.$$

Obrázek 2.1 nám vysvětluje, jak jsme postupovali. Víme, že zobrazení f_{k-1} nám zobrazuje $B(x_i^k, r_k)$ na střed krychle Q_i^k pro $i \in \left\{1, \dots, 2^{k-1}\right\}^n$. A tedy f_{k-1} nám posouvá zobrazení $h_{m_k,k}$ do středu krychlí Q_i^k. Pro každý takovýto střed krychle $Q_i^k, i \in \left\{1, \dots, 2^{k-1}\right\}^n$, zobrazení g_m vytvoří 2^n větví v obrázku. Takto postupujeme pro každou krychli $Q_i^k, i \in \left\{1, \dots, 2^{k-1}\right\}^n$.



(a) $k = 1$ (b) $k = 2$ (c) $k = 3$

Obrázek 2.1: Metoda „Space filling tree“ pro $\mathbb{R}^2$.

Nyní je potřeba si uvědomit, že $f_k \to f$ ve $W^{1,n}$ normě

$$\begin{aligned}\|f_k - f\|_{1,n} &= \left\| f_0 + \sum_{i=1}^{k} h_{m_i,i} - f_0 - \sum_{i=1}^{\infty} h_{m_i,i} \right\|_{1,n} \\ &= \left\| \sum_{i=k+1}^{\infty} h_{m_i,i} \right\|_{1,n} \le \sum_{i=k+1}^{\infty} \|h_{m_i,i}\|_{1,n} \le \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} \\ &= 2^{-k} \xrightarrow{k\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že $f \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dále potřebujeme zaručit spojitost. Předně ukážeme, že $f_k \rightrightarrows f$

$$\begin{aligned}|f_k(x) - f(x)| &= \left| \sum_{j=k+1}^{\infty} h_{m_j,\,j}(x) \right| \le \left| \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j} g_{m_j}\left(\frac{x - x_i^j}{r_j} \right) \right| \\ &\le \left| \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j} \sum_{y \in Y} y u_{m_j} \left(\frac{\frac{x - x_i^j}{r_j} - z_y}{r_0} \right) \right| \le C(n) \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j} \\ &= C(n) 2^{-k} \xrightarrow{k\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Zobrazení f_k jsou spojitá a stejnoměrně konvergují, tedy i f je spojité. Protože spojitý obraz kompaktu je kompakt, $f(I)$ je také kompaktní. Navíc $f(I)$ je hustý v Q_0, neboť obsahuje všechny středy krychlí Q_i^k. Tedy dostáváme, že

$$f(I) = Q_0 = [0, 1]^n .$$

$\square$

Poznámka 2.8 *Předchozí příklad ukazuje, že Luzinova podmínka nemusí platit pro funkce z $W^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $p \leq n$. Stačí se pouze odkázat na vnoření pro Lebesgueovy prostory s konečnou mírou a použít definici normy pro $W^{1,n}$ prostor.*

Definice 2.9 (Luxemburgova norma, Orliczovy prostory) *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Spojitá, rostoucí funkce $\varphi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ s $\varphi(0) = 0$ a $\varphi(\infty) = \infty$ se nazývá Orliczova funkce. Orliczův prostor $L^\varphi(\Omega)$ je tvořen všemi měřitelnými funkcemi f na Ω, které*

$$\int_\Omega \varphi\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big) dx < \infty$$

pro nějaké $\lambda = \lambda(f) > 0$. Pokud je navíc Orliczova funkce φ konvexní, pak pro $f \in L^\varphi(\Omega)$ definujeme Luxemburgovu normu

$$\|f\|_{\varphi(\Omega)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \varphi\Big(\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big) dx \leq 1\right\}.$$

Definice 2.10 *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $1 < p < \infty, \beta \geq 0$. Pak $L^p \log^\beta L(\Omega)$ je množina všech měřitelných funkcí $f : \Omega \to \mathbb{R}$ takových, že*

$$\|f\|_{L^p \log^\beta L(\Omega)} = \|f\|_{\varphi(\Omega)} < \infty,$$

kde $\varphi(t) = t^p \log^\beta(e + t)$. Snadným výpočtem ověříme, že φ je konvexní. Dále definujme prostor funkcí

$$WL^p \log^\beta L(\Omega) = \left\{u \in L^p \log^\beta L(\Omega) : |D^\alpha u| \in L^p \log^\beta L(\Omega), \forall \alpha : |\alpha| \leq 1\right\}.$$

Pro $u \in WL^p \log^\beta L(\Omega)$ je tento prostor opatřen normou

$$\|u\|_{WL^p \log^\beta L(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha u\|_{L^p \log^\beta L(\Omega)}.$$

Poznámka 2.11 *V případě zobrazení $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, symbolem*

$$f \in L^p \log^\beta L(\Omega),$$

respektive

$$f \in WL^p \log^\beta L(\Omega),$$

máme samozřejmě na mysli $f_i \in L^p \log^\beta L(\Omega)$, *respektive* $f_i \in WL^p \log^\beta L(\Omega)$ *pro každé* i.

Lemma 2.12 *Pro* $0 \leq \beta < n-1$, $n \geq 2$ *funkce* u_m *z Lemmatu 2.6 splňují*

$$u_m \in WL^n \log^\beta L(\mathbb{R}^n)$$

a navíc $\|u_m\|_{WL^n \log^\beta L(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{m\to\infty} 0.$

Důkaz. Volme $\lambda > 0$ libovolné. Zřejmě z $|u_m| \leq 1$ a $\operatorname{supp} u_m \subset B(0, e^{-e^m})$ dostáváme

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{u_m(x)}{\lambda}\right|^n \log^\beta \left(e + \left|\frac{u_m(x)}{\lambda}\right|\right) dx \leq \frac{1}{\lambda^n} \int\limits_{B(0,\, e^{-e^m})} \log^\beta \left(e + \frac{1}{\lambda}\right) dx \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Nyní musíme ukázat $|Du_m| \in L^n \log^\beta L(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{Du_m(x)}{\lambda}\right|^n \log^\beta \left(e + \left|\frac{Du_m(x)}{\lambda}\right|\right) dx \\
&\quad\leq \frac{1}{\lambda^n} \int\limits_{B(0,\, e^{-e^m})} \frac{1}{|x|^n \left|\log \frac{1}{|x|}\right|^n} \log^\beta \left(e + \frac{1}{\lambda\,|x| \left|\log \frac{1}{|x|}\right|}\right) dx \\
&\quad= C(n) \frac{1}{\lambda^n} \int_0^{e^{-e^m}} \frac{r^{n-1}}{r^n \left|\log \frac{1}{r}\right|^n} \log^\beta \left(e + \frac{1}{\lambda r \left|\log \frac{1}{r}\right|}\right) dr \\
&\quad= C(n) \frac{1}{\lambda^n} \int_0^{e^{-e^m}} \frac{1}{r \log^\varepsilon \left(e + \frac{1}{\lambda r |\log r|}\right)} \left|\frac{\log\left(e + \frac{1}{\lambda r |\log r|}\right)}{\log r}\right|^n dr,
\end{aligned}$$

kde $n - \varepsilon = \beta$, a tedy $\varepsilon > 1$. Nyní je potřeba nahlédnout, že

$$\lim_{r\to 0_+} \frac{\log\left(e + \frac{1}{\lambda r |\log r|}\right)}{\log r} = -1.$$

To vyplývá dvakrát použitím L'Hospitalova pravidla

$$\lim_{r\to 0_+} \frac{\log\left(e-\frac{1}{\lambda r\log r}\right)}{\log r} = \lim_{r\to 0_+} \frac{\frac{\lambda}{e-\frac{1}{\lambda r\log r}}\frac{\log r+1}{\lambda^2 r^2\log^2 r}}{\frac{1}{r}} = \lim_{r\to 0_+} \frac{\log r+1}{\lambda e r\log^2 r-\log r}$$
$$= \lim_{r\to 0_+} \frac{\frac{1}{r}}{\lambda e\log^2 r+2\lambda e\log r-\frac{1}{r}}$$
$$= \lim_{r\to 0_+} \frac{1}{\lambda e r\log^2 r+2\lambda e r\log r-1} = -1.$$

Tedy existuje konstanta $C(\lambda)$ taková, že

$$\int_0^{e^{-e^m}} \frac{1}{r\log^{\varepsilon}\left(e+\frac{1}{\lambda r|\log r|}\right)} \left|\frac{\log\left(e+\frac{1}{\lambda r|\log r|}\right)}{\log r}\right|^n dr$$
$$\leq C(\lambda)\int_0^{e^{-e^m}} \frac{dr}{r\log^{\varepsilon}\left(e+\frac{1}{\lambda r|\log r|}\right)}.$$

Můžeme použít srovnávací kritérium pro konvergenci integrálu a pro dostatečně velké m vyšetřovat tak konvergenci následujícího integrálu

$$\int_0^{e^{-e^m}} \frac{dr}{r\log^{\varepsilon}\left(e+\frac{1}{\lambda r|\log r|}\right)} \leq \int_0^{e^{-e^m}} \frac{dr}{r\left|\log\left(\frac{1}{\lambda r|\log r|}\right)\right|^{\varepsilon}}$$
$$= \int_0^{e^{-e^m}} \frac{dr}{r\left|\log r+\log(\lambda\left|\log r\right|)\right|^{\varepsilon}} < \infty.$$

Integrál tedy konverguje, protože $\varepsilon > 1$. Při limitním přechodu $m \to \infty$ pak obdržíme

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{Du_m(x)}{\lambda}\right|^n \log^{\beta}\left(e+\left|\frac{Du_m(x)}{\lambda}\right|\right) dx \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

To znamená, že pro zvolené $\lambda > 0$ libovolné existuje m takové, že

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{Du_m(x)}{\lambda}\right|^n \log^{\beta}\left(e+\left|\frac{Du_m(x)}{\lambda}\right|\right) dx < 1.$$

Z Definice 2.9 pak vyplývá

$$\|u_m\|_{WL^n \log^\beta L(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

$\square$

Poznámka 2.13 *Pokud se podíváme na důkaz Věty 2.7 zjistíme, že nebyl závislý na konkrétním prostoru $W^{1,n}$, kromě vlastností pomocných funkcí u_m. Dostáváme tak obecnou metodu pro hledání protipříkladů Luzinovy podmínky. S využitím předchozího lemmatu jsme dokonce našli obecnější protipříklad, který ukazuje na selhání N podmínky pro $f \in WL^n \log^\beta L(\Omega), 0 \leq \beta < n-1, n \geq 2$. Nyní tuto větu pro přehlednost formulujme a naznačme důkaz.*

Věta 2.14 *Pro $0 \leq \beta < n-1, n \geq 2$ existuje spojité zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f \in WL^n \log^\beta L(\mathbb{R}^n)$, nesplňující N podmínku.*

Důkaz. Podle Lemmatu 2.12 víme, že zmíněné funkce u_m v Lemmatu 2.6 splňují

1. $u_m \in C(\mathbb{R}^n)$
2. $\|u_m\|_{WL^n \log^\beta L(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{m\to\infty} 0$
3. $0 \leq u_m \leq 1$
4. $0 \in \operatorname{Int}\{x : u_m(x) = 1\}$
5. $u_m = 0$ na $\mathbb{R}^n \backslash B(0,1)$.

Proveďme zcela identickou konstrukci zobrazení f jako ve Větě 2.7. To jest postupně definujme

$$g_m(x) = \sum_{y\in Y} y u_m\left(\frac{x - z_y}{r_0}\right),$$

$$h_{m,k}(x) = \begin{cases} 2^{-k} g_m\left(\frac{x-x_i^k}{r_k}\right), & \text{jestliže } \left|x - x_i^k\right| \leq r_k \text{ pro nějaké } i \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Protože $\|u_m\|_{WL^n \log^\beta L(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{m\to\infty} 0$ lze vybrat podposloupnost m_k, že

$$\|h_{m_k,k}\|_{WL^n \log^\beta L(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{-k}.$$

Poté definujme

$$f_0 : \mathbb{R}^n \to (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}),$$

$$f_k = f_{k-1} + h_{m_k,k}$$

a

$$f = \lim_{k\to\infty} f_k.$$

Pak platí $f \in WL^n \log^\beta L(\mathbb{R}^n)$, protože

$$\begin{aligned}
\|f_k - f\|_{WL^n \log^\beta L(\mathbb{R}^n)} &= \left\| f_0 + \sum_{i=1}^{k} h_{m_i,i} - f_0 - \sum_{i=1}^{\infty} h_{m_i,i} \right\|_{WL^n \log^\beta L(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\| \sum_{i=k+1}^{\infty} h_{m_i,i} \right\|_{WL^n \log^\beta L(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \|h_{m_i,i}\|_{WL^n \log^\beta L(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-k} \xrightarrow{k\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Stejně tak $f_k \rightrightarrows f$

$$\begin{aligned}
|f_k(x) - f(x)| &= \left| \sum_{j=k+1}^{\infty} h_{m_j,\,j}(x) \right| \leq \left| \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j} g_{m_j} \left(\frac{x - x_i^j}{r_j} \right) \right| \\
&\leq \left| \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j} \sum_{y\in Y} y u_{m_j} \left(\frac{\frac{x-x_i^j}{r_j} - z_y}{r_0} \right) \right| \leq C(n) \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j} \\
&= C(n) 2^{-k} \xrightarrow{k\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Závěr je stejný. Zobrazení f_k jsou spojitá a stejnoměrně konvergují, tedy i f je spojité. Protože spojitý obraz kompaktu je kompakt, $f(I)$ je také kompaktní. Navíc $f(I)$ je hustý v Q_0, a tedy $f(I) = Q_0 = [0,1]^n$. Luzinova podmínka není splněna, jelikož $|I| = 0$, ale $|f(I)| = |Q_0| > 0$. $\square$

Kapitola 3

Luzinova podmínka pro homeomorfismy z $W^{1,p}$

3.1 Luzinova podmínka pro $W^{1,p}, p \geq n$

Ještě před tím než se pustíme do zkoumání N podmínky pro homeomorfismy je potřeba zmínit pár potřebných lemmat a definic. Důkazy přímo nesouvisí s Luzinovou podmínkou, a tak se odvoláme na standartní literaturu.

Lemma 3.1 (Vitali) *Nechť $\{B_j : j \in J\}$ je libovolný soubor uzavřených nedegenerovaných koulí v $\mathbb{R}^n$ takových, že*

$$\sup\{\operatorname{diam}(B_j) : j \in J\} < \infty.$$

Pak existuje spočetný podsoubor $\{B_j, j \in J'\}, J' \subset J$ navzájem disjunktních koulí splňující

$$\bigcup_{j \in J} B_j \subset \bigcup_{j \in J'} 5B_j.$$

Důkaz. Přehledný důkaz i s dalšími důsledky je v knize [5] nebo v [15]. $\square$

Definice 3.2 *Řekneme, že neprázdná otevřená množina $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktně obsažena v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (píšeme $\Omega' \subset\subset \Omega$), jestliže $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ a zároveň $\overline{\Omega'}$ je kompaktní.*

Lemma 3.3 (Gehring) *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f \in W^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ je spojité zobrazení. Potom pro každé x a s.v. $r > 0$*

$$\operatorname{diam}\big(f\,(\partial U(x,r))\,\big)^n \leq C(n) r \int\limits_{\partial U(x,r)} |Df(y)|^n \, dS(y),$$

kdykoliv $U(x,r) \subset\subset \Omega$.

Důkaz. Důkaz v literatuře [12] či [6]. □

Důkaz Věty 1.3. Nechť $E \subset G$ a míra množiny $|E| = 0$. Definujme

$$E_1 = \left\{ x \in G : \operatorname{ess} \liminf_{r \to 0} \frac{r \int\limits_{\partial U(x,r)} |Df(y)|^n \, dS(y)}{\int\limits_{U(x,r)} |Df(y)|^n \, dy} \leq 2^{n+2} \right\}$$

a označme $E_0 = E \setminus E_1$. Pokud $x \in E_0$, potom existuje $\delta = \delta_x > 0$ takové, že pro s.v. $r \in (0, \delta)$ platí

$$\int\limits_{U(x,r)} |Df(y)|^n \, dy \leq 2^{-n-2} r \int\limits_{\partial U(x,r)} |Df(y)|^n \, dS(y).$$

Dále fixujme pevné $x \in E_0$ a volme $\rho \in (0, \frac{\delta}{2}]$. Integrováním předešlé nerovnosti podle r přes interval $[\rho, 2\rho]$, obdržíme následující

$$\begin{aligned}
2^{-n-1}\rho \int\limits_{U(x,2\rho)} |Df(y)|^n \, dy &\geq 2^{-n-2} \int_{\rho}^{2\rho} 2\rho \int\limits_{\partial U(x,r)} |Df(y)|^n \, dS(y) dr \\
&\geq 2^{-n-2} \int_{\rho}^{2\rho} r \int\limits_{\partial U(x,r)} |Df(y)|^n \, dS(y) dr \\
&\geq \int_{\rho}^{2\rho} \int\limits_{U(x,r)} |Df(y)|^n \, dy dr \\
&\geq \int_{\rho}^{2\rho} \int\limits_{U(x,\rho)} |Df(y)|^n \, dy dr = \rho \int\limits_{U(x,\rho)} |Df(y)|^n \, dy.
\end{aligned}$$

Tedy
$$\int\limits_{U(x,\rho)} |Df(y)|^n \, dy \leq 2^{-n-1} \int\limits_{U(x,2\rho)} |Df(y)|^n \, dy.$$
Dále označme
$$\omega(t) = \int\limits_{U(x,t)} |Df(y)|^n \, dy, \; 0 < t \leq \delta.$$
Funkce ω je neklesající a
$$\omega(t) \leq 2^{-n-1}\omega(2t), \; 0 < t \leq \frac{\delta}{2}. \tag{3.1}$$
Pro zvolené $\rho \leq \frac{\delta}{2}$ najdeme vhodné $m \in \mathbb{N}$, aby
$$\frac{\delta}{2^m} \leq \rho \leq \frac{\delta}{2^{m-1}}. \tag{3.2}$$
Z monotonie ω, $(m-1)$-krát použitím (3.1), elementární úpravou a následným použitím (3.2) obdržíme
$$\begin{aligned} \omega(\rho) &\leq \omega\left(\frac{\delta}{2^{m-1}}\right) \leq \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^{m-1} \omega(\delta) = \left(\frac{2}{\delta}\right)^{n+1} \left(\frac{\delta}{2^m}\right)^{n+1} \omega(\delta) \\ &\leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^{n+1} \omega(\delta)\rho^{n+1}. \end{aligned}$$
Jelikož konečný odhad
$$\omega(\rho) \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^{n+1} \omega(\delta)\rho^{n+1}$$
nezávisí na m, můžeme volit ρ dostatečně malé, aby
$$\left(\frac{2}{\delta}\right)^{n+1} \omega(\delta)\rho \leq 1.$$
Tedy dostaneme
$$\omega(\rho) \leq \rho^n,$$

to jest

$$\int\limits_{U(x,\rho)} |Df(y)|^n \, dy \le \rho^n.$$

Ekvivalentně

$$\int_0^\rho \int\limits_{\partial U(x,r)} |Df(y)|^n \, dS(y) dr \le \int_0^\rho n r^{n-1} dr.$$

Podle této nerovnosti musí existovat množina poloměrů

$$\left\{ r > 0, r \in \left[\frac{\rho}{2}, \rho \right] \right\}$$

kladné míry, kde pro každé r platí

$$\int\limits_{\partial U(x,r)} |Df(y)|^n \, dS(y) \le n r^{n-1}. \tag{3.3}$$

Volme otevřenou množinu Ω splňující $E \subset \Omega \subset G$. Dále pro každé $x \in E$ označme $R(x)$ množinu všech poloměrů $r > 0$ takových, že $U(x,r) \subset\subset \Omega$ a platí

$$\int\limits_{\partial U(x,r)} |Df(y)|^n \, dS(y) \le \begin{cases} \frac{2^{n+2}}{r} \int\limits_{U(x,r)} |Df(y)|^n \, dy, & x \in E_1 \\ n r^{n-1}, & x \in E_0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Poznamenejme, že pro každé $x \in E$ existuje libovolně malé $r \in R(x)$ splňující předchozí odhad. Pro homeomorfismy triviálně platí

$$\operatorname{diam}\big(f\,(U(x,r))\,\big) = \operatorname{diam}\big(f\,(\partial U(x,r))\,\big).$$

A tedy pro s.v. $r \in R(x)$, použitím Gehringova lemmatu 3.3 a odhadu (3.4), získáme

$$\operatorname{diam}\big(f\,(U(x,r))\,\big)^n = \operatorname{diam}\big(f\,(\partial U(x,r))\,\big)^n \le C(n) r \int\limits_{\partial U(x,r)} |Df(y)|^n \, dS(y)$$

$$\le C(n) \int\limits_{U(x,r)} (1 + |Df(y)|^n) \, dy.$$

Využijme Vitaliho lemma na systém

$$\left\{\overline{U}\big(f(x), \operatorname{diam}\left(f\left(U(x,r)\right)\right)\big), x \in E, r \in R(x)\right\},$$

obdržíme disjunktní koule

$$\left\{\overline{U}\big(f(x_j), \operatorname{diam}\left(f\left(U(x_j,r_j)\right)\right)\big), j \in J\right\},$$

kde $x_j \in E, r_j \in R(x)$ pro každé $j \in J$. Pro další práci si označme

$$B_j = \overline{U}\big(f(x_j), \operatorname{diam}\left(f\left(U(x_j,r_j)\right)\right)\big),\ j \in J.$$

Tento systém splňuje

$$\bigcup_{x\in E,\, r\in R(x)} \overline{U}\big(f(x), \operatorname{diam}\left(f\left(U(x,r)\right)\right)\big) \subset \bigcup_{j\in J} 5B_j.$$

Konečný odhad $|f(E)|$ poté je

$$\begin{aligned}
|f\left(E\right)| &\leq \left|\bigcup_{x\in E,\, r\in R(x)} \overline{U}\big(f(x), \operatorname{diam}\left(f\left(U(x,r)\right)\right)\big)\right| \leq \left|\bigcup_{j\in J} 5B_j\right| \leq \sum_{j\in J} |5B_j| \\
&\leq 5^n \sum_{j\in J} |B_j| \leq 5^n \sum_{j\in J} \operatorname{diam}\big(f\left(U\left(x_j,r_j\right)\right)\big)^n \\
&\leq C(n) \sum_{j\in J} \int\limits_{U(x_j,r_j)} \left(1 + |Df(y)|^n\right) dy \leq C(n) \int_\Omega \left(1 + |Df(y)|^n\right) dy.
\end{aligned}$$

Když necháme $|\Omega| \to 0$, tak z absolutní spojitosti integrálu dostaneme

$$|f(E)| \to 0.$$

Tedy f splňuje N podmínku. $\square$

3.2 Luzinova podmínka pro $W^{1,p}, p < n$

Lemma 3.4 *Nechť $\rho : (0,\infty) \to (0,\infty)$ je ryze monotónní a diferencovatelné zobrazení. Pak pro*

$$f(x) = \frac{x}{|x|}\rho(|x|),\ x \neq 0$$

platí pro s. v. x

$$|Df(x)| \leq C(n) \max\left\{\frac{\rho(|x|)}{|x|}, |\rho'(|x|)|\right\}.$$

Důkaz. Ze symetrie stačí ukázat tento fakt pouze pro jeden bod na sféře. Zafixujme si tedy bod $x = [x_1, 0, \dots, 0]$ a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x_1 > 0$. Nyní si spočtěme všechny potřebné parciální derivace.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x_1+h}{|x_1+h|}\rho(|x_1+h|) - \frac{x_1}{|x_1|}\rho(|x_1|)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\rho(|x_1+h|)-\rho(|x_1|)}{h}\\ &= \rho'(|x_1|) = \rho'(|x|).\end{aligned}$$

Pro každé $i \in \{2, \dots, n\}$ spočtěme

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{|x_1e_1+he_i|}\rho(|x_1e_1+he_i|) - \frac{0}{|x_1|}\rho(|x_1|)}{h} = \frac{\rho(|x_1|)}{|x_1|} = \frac{\rho(|x|)}{|x|},$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{|x_1+h|}\rho(|x_1+h|) - \frac{0}{|x_1|}\rho(|x_1|)}{h} = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x_1}{|x_1e_1+he_i|}\rho(|x_1e_1+he_i|) - \frac{x_1}{|x_1|}\rho(|x_1|)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x_1}{|x_1e_1+he_i|}-1}{h}\rho(|x_1e_1+he_i|) + \lim_{h\to 0}\frac{\rho(|x_1e_1+he_i|)-\rho(|x_1|)}{h}\\ &= 0+0=0.\end{aligned}$$

Poslední rovnost je důsledkem následujících úvah

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(\frac{x_1}{|x_1e_1+he_i|}-1\right) &= \frac{1}{h}\frac{x_1-\sqrt{x_1^2+h^2}}{\sqrt{x_1^2+h^2}}\\ &= \frac{1}{h}\frac{-h^2}{\sqrt{x_1^2+h^2}\left(x_1+\sqrt{x_1^2+h^2}\right)} \xrightarrow{h\to 0} 0,\end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\rho(|x_1e_1+he_i|)-\rho(|x_1|)}{h} = \frac{\partial\rho}{\partial x_i}(|x_1|) = \rho'(|x_1|)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x) = 0,$$

kde $\psi(x) = x_1$. Snadnou kombinací všech těchto výsledků obdržíme žádaný výsledek. □

Věta 3.5 *Existuje homeomorfismus $f : Q_0 \to Q_0$ nesplňující Luzinovu podmínku, přitom $f \in W^{1,p}(Q_0, \mathbb{R}^n)$ pro všechna $p < n$.*

Důkaz. Nejdříve sestrojíme dvě Cantorovské množiny v Q_0. Výsledné zobrazení $f : Q_0 \to Q_0$ zadefinujeme jako limitu homeomorfismů $f_k : Q_0 \to Q_0$, kde f_k zobrazuje k-tý krok konstrukce první Cantorovy množiny na k-tý krok konstrukce druhé Cantorovy množiny. První Cantorovu množinu sestrojíme s nulovou Lebesgueovou mírou a druhou s kladnou Lebesgueovou mírou. Tím zaručíme neplatnost Luzinovy N podmínky.

Nechť $V \subset \mathbb{R}^n$ je množina vrcholů krychle $Q(0, 1)$. Zadefinujme si indexovou množinu

$$V^k = \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k\text{ - krát}},\ k = 1, 2, \ldots$$

Pokud $w \in V^{k-1}$ označme

$$V^k[w] = \left\{ v \in V^k : v_j = w_j,\ j = 1, \ldots, k-1 \right\}.$$

Nechť $z_0 = (\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$, $r_0 = a_0 2^0 = \frac{1}{2}, r_1 = a_1 2^{-1} = \frac{1}{8}$, kde

$$a_k = \frac{1}{2} \frac{1}{k+1},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{3.5}$$

Pro $v \in V^1 = V$ označme

$$z_v = z_0 + \frac{1}{2} r_0 v,$$

$$P_v = Q\Big(z_v, \frac{1}{2} r_0\Big) = Q\Big(z_v, \frac{1}{4}\Big),$$

$$Q_v = Q(z_v, r_1) = Q\Big(z_v, \frac{1}{8}\Big).$$

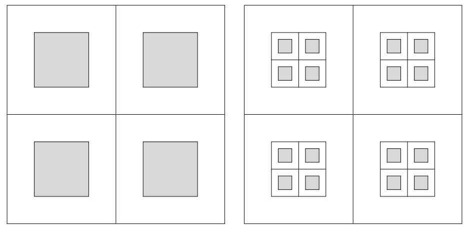
Postupujme dále indukcí, jestliže $k = 2, 3, \ldots$, a Q_w je krychle z předešlého kroku konstrukce,

$$Q_w = Q(z_w, r_{k-1}),\ w \in V^{k-1},$$

potom Q_w rozdělíme ve 2^n podkrychlí $P_v, v \in V^k[w]$. Tyto krychle P_v budou mít středy v bodech z_v a poloměry $\frac{1}{2} r_{k-1}$. Uvnitř $P_v, v \in V^k[w]$, zkonstruujeme soustředné krychle $Q_v, v \in V^k[w]$, o poloměru

$$r_k = a_k 2^{-k}.$$

Pro přehlednost viz obrázek 3.1.



Obrázek 3.1: Krychle $Q_v, v \in V^k$ pro $k = 1$ a $k = 2$.

Nyní tento fakt zapišme. Pro $v = (v_1, \ldots, v_k) \in V^k[w], w \in V^{k-1}$, označme

$$z_v = z_w + \frac{1}{2} r_{k-1} v_k = z_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} r_{j-1} v_j,$$

$$P_v = Q\Big(z_v, \frac{1}{2} r_{k-1}\Big),$$
$$Q_v = Q(z_v, r_k).$$

Tímto postupem obdržíme systém $\{Q_v : v \in V^k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, s příslušnou délkou hrany $2r_k$. Tento systém obsahuje $\sharp V^k = 2^{nk}$ krychliček. Lebesgueova míra Cantorovy množiny

$$C_1 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{v \in V^k} Q_v$$

je 0, protože

$$\left| \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{v \in V^k} Q_v \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \bigcup_{v \in V^k} Q_v \right| = \lim_{k \to \infty} 2^{nk} (2r_k)^n = \lim_{k \to \infty} 2^{nk} 2^n a_k^n 2^{-nk}$$
$$= \lim_{k \to \infty} 2^n a_k^n = 0.$$

Tím jsme provedli první konstrukci Cantorovy množiny. Velice podobně sestrojíme i druhou množinu. Pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nadefinujme délky hrany r'_k jako

$$b_k = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{k+1}\right), \tag{3.6}$$

$$r'_k = b_k 2^{-k}. \tag{3.7}$$

Označení pro jednotlivé středy krychliček bude z'_v a krychle označme jako $P'_v, Q'_v, v \in V^k$. Tedy pro $v \in V^k[w], w \in V^{k-1}$, položme

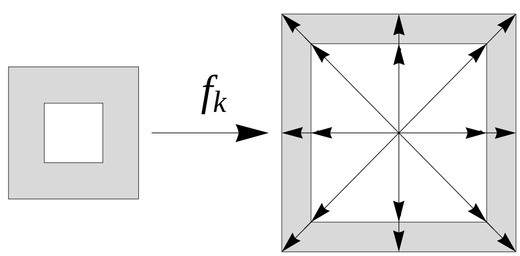
$$z'_v = z'_w + \frac{1}{2} r'_{k-1} v_k = z_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} r'_{j-1} v_j,$$

$$P'_v = Q\Big(z'_v, \frac{1}{2} r'_{k-1}\Big),$$
$$Q'_v = Q(z'_v, r'_k).$$

Poznamenejme, že jak $r_k < \frac{1}{2} r_{k-1}$, tak i $r'_k < \frac{1}{2} r'_{k-1}$ pro každé k. Dále platí

$$\left| \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{v \in V^k} Q'_v \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \bigcup_{v \in V^k} Q'_v \right| = \lim_{k \to \infty} 2^{nk} (2r'_k)^n = \lim_{k \to \infty} 2^{nk} 2^n b_k^n 2^{-nk}$$
$$= \lim_{k \to \infty} 2^n b_k^n = 2^{-n} > 0.$$

Druhá konstrukce Cantorovy množiny je také hotová. Zbývá pouze vhodně zadefinovat zobrazení f_k. Definujme $f_0 = \mathrm{id}$. Zobrazení f_1 vezme $Q_v, v \in V^1$ a homogenně „roztáhne" tuto krychli na $f_1(Q_v) = Q'_v$. Pro bod $x \in P_v \setminus Q_v$ najdeme úsečku v P_v procházející body z_v a x. Úsečku se stejným směrem procházející z'_v najdeme i v $P'_v \setminus Q'_v$ a bod x přesuneme na tuto úsečku tak, že f_1 zůstane homeomorfismem. Pro ilustraci viz obrázek 3.2.



Obrázek 3.2: Zobrazení f_k na $P_v, v \in V^k$.

Pro $k > 1$ budeme postupovat stejně. Mimo množinu

$$\bigcup_{v \in V^k} P_v$$

je f_k definováno jako f_{k-1}. Navíc $f_k = f_{k-1}$ na středech $Q_v, v \in V^k$. Analogicky f_k „roztáhne“ krychli Q_v na Q'_v. Na $P_v \backslash Q_v$ budeme hledat vhodné úsečky jako v předešlém případě. Pokusme se tento fakt zapsat. Nechť $f_0 = \mathrm{id}$, pro $k \geq 1$ definujme

$$f_k(x) = \begin{cases} f_{k-1}(x), & x \notin \bigcup\limits_{v \in V^k} P_v \\ f_{k-1}(z_v) + \alpha_k(x - z_v) + \beta_k \dfrac{x - z_v}{\|x - z_v\|_\infty}, & x \in P_v \backslash Q_v, v \in V^k \\ f_{k-1}(z_v) + \gamma_k(x - z_v), & x \in Q_v, v \in V^k. \end{cases}$$

Koeficienty $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ vybíráme tak, aby f_k spojitě zobrazilo Q_v na Q'_v a zobrazovalo hranici ∂Q_v na hranici $\partial Q'_v$, tj.

$$\begin{aligned} \alpha_k r_k + \beta_k &= r'_k, \\ \frac{1}{2}\alpha_k r_{k-1} + \beta_k &= \frac{1}{2} r'_{k-1}, \\ \gamma_k r_k &= r'_k. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Zobrazení f poté definujeme

$$f = \lim_{k \to \infty} f_k.$$

Protože f_k je spojité pro každé k a z odhadu

$$|f_k(x) - f(x)| \leq C(n) r'_k \xrightarrow{k \to \infty} 0, \ x \in Q_0$$

dostaneme $f_k \rightrightarrows f$. Pak i limitní zobrazení f je spojité. Protože f je spojité a prosté zobrazení z Q_0 na Q_0, kde Q_0 je kompakt, pak f je homeomorfismus. Navíc nesplňující N podmínku. Nyní je potřeba ukázat, že

$$f \in W^{1,p}(Q_0, \mathbb{R}^n), \ p < n.$$

Zjevně $f \in L^p(Q_0)$ a f je lipschitzovské, a tedy absolutně spojité na každé úsečce, která neprotne C_1. Pak pro $f \in W^{1,p}(Q_0, \mathbb{R}^n)$ stačí dokázat

$$|Df(x)| \in L^p(Q_0).$$

K tomu potřebujeme spočítat $|Df(x)|$ na vnitřku $P_v \backslash Q_v$. Aplikujeme Lemma 3.4 na

$$f(x) = f_{k-1}(z_v) + \alpha_k(x - z_v) + \beta_k \frac{x - z_v}{\|x - z_v\|_\infty},$$

kde

$$\rho(\|x\|_\infty) = \alpha_k \|x - z_v\|_\infty + \beta_k.$$

Ovšem namísto kritického bodu 0 použijeme z_v a místo Euklidovy normy použijeme supremovou normu. Nicméně to určitě můžeme, protože tyto normy jsou bilipschitzovsky ekvivalentní a odhad nám tak nezkazí až na multiplikativní konstantu. Tedy

$$\begin{aligned}|Df(x)| &\le C(n) \max\left\{\frac{\rho(\|x\|_\infty)}{\|x\|_\infty}, |\rho'(\|x\|_\infty)|\right\} \le C(n) \max\left\{\frac{r'_k}{r_k}, \alpha_k\right\} \\ &\le C(n) \max\left\{\frac{b_k}{a_k}, \frac{b_{k-1} - b_k}{a_{k-1} - a_k}\right\},\end{aligned}$$

kde poslední nerovnost vyplývá sečtením koeficientů α_k z (3.8) a použitím definic pro r_k, r'_k

$$\alpha_k r_k - \alpha_k \frac{r_{k-1}}{2} = r'_k - \frac{r'_{k-1}}{2},$$

$$\alpha_k = \frac{2r'_k - r'_{k-1}}{2r_k - r_{k-1}} = \frac{b_k - b_{k-1}}{a_k - a_{k-1}}.$$

Z volby koeficientů a_k, b_k podle (3.5) a (3.6) snadno obdržíme

$$\max\left\{\frac{b_k}{a_k}, \frac{b_{k-1} - b_k}{a_{k-1} - a_k}\right\} \le C(n) \max\{k, 1\} = C(n)k.$$

Konečný odhad tedy je

$$|Df(x)| \le C(n)k. \tag{3.9}$$

Pro další výpočet si spočtěme míru

$$\begin{aligned}|P_v \backslash Q_v| &= r^n_{k-1} - (2r_k)^n = (a_{k-1}2^{-k+1})^n - (a_k 2^{-k+1})^n \\ &= \frac{1}{2^n}\frac{1}{k^n}2^{n(-k+1)} - \frac{1}{2^n}\frac{1}{(k+1)^n}2^{n(-k+1)} \\ &= 2^{-nk}\left[\frac{1}{k^n} - \frac{1}{(k+1)^n}\right] \le C(n)2^{-nk}\frac{1}{k^{n+1}}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Použitím nerovností (3.9) a (3.10)

$$\int_{Q_0} |Df(x)|^p\,dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v \in V^k} \int_{P_v \setminus Q_v} |Df(x)|^p\,dx \leq C(n,p) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{nk} 2^{-nk} \frac{1}{k^{n+1}} k^p$$
$$= C(n,p) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n+1-p}} < \infty.$$

Z tohoto odhadu již plyne, že $f \in W^{1,p}(Q_0, \mathbb{R}^n)$ pro všechna $p < n$. $\square$

Kapitola 4

Luzinova podmínka pro obecná zobrazení z $W^{2,p}$

4.1 Luzinova podmínka pro $W^{2,p}, p > \frac{n}{2}$

Věta 4.1 (Sobolev) *Nechť $k, l \in \mathbb{N}, k > l, 1 \le p < q \le \infty, (k-l)p < n,$*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k-l}{n}.$$

Potom

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \subset W^{l,q}(\mathbb{R}^n).$$

Důkaz. Jedná se o základní větu teorie Sobolevových prostorů. Důkaz tak lze najít v řadě knih zabývající se touto tématikou, například v [1]. □

Věta 4.2 *Mějme spojité zobrazení $f \in W^{2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $p > \frac{n}{2}$. Potom f splňuje Luzinovu N podmínku.*

Důkaz. Důkaz rozdělme do dvou částí. První část $\frac{n}{2} < p < n$ je důsledkem předešlé věty. Platí

$$W^{2,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{1,q}(\mathbb{R}^n), \ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

Podle předpokladu $p > \frac{n}{2}$ dostaneme

$$q = \frac{np}{n-p} > n.$$

A tedy $f \in W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^n), q > n$. Podle Věty 1.2 f splňuje N podmínku.

Druhý případ $p \geq n$. Mějme libovolnou množinu $A \subset \Omega$ splňující $|A| = 0$. Najdeme otevřenou množinu $\Omega' \subset \Omega$ obsahující A. Určitě není problém, aby navíc platilo $|\Omega'| < \infty$. Z konečnosti míry této množiny platí, že

$$f \in W^{2,q}(\Omega', \mathbb{R}^n),$$

kde $\frac{n}{2} < q < n$. Podle první části $|f(A)| = 0$. □

4.2 Luzinova podmínka pro $W^{2,p}, p \leq \frac{n}{2}$

Pro případ $p \leq \frac{n}{2}$ se budeme snažit zkonstruovat protipříklad podobně jako ve Větě 2.7. Pokud se ovšem pokusíme použít funkce $u_m(x)$ stejné jako v Lemmatu 2.6 zjistíme, že $u_m \notin W^{2,\frac{n}{2}}$. To je proto, že neohlídáme spojitost derivace ve zlomových bodech, kde $|x| = e^{-e^{1+m}}$ a $|x| = e^{-e^m}$. Je potřeba tak najít jiné funkce s lepšími vlastnostmi.

Lemma 4.3 *Definujme si následující funkce*

$$u_m(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq r_m \\ a_m(|x| - r_m)^3 + b_m(|x| - r_m)^2 + 1, & r_m \leq |x| \leq 2r_m \\ \log\log\left(\frac{1}{|x|}\right) - m, & 2r_m \leq |x| \leq \frac{R_m}{2} \\ c_m(|x| - R_m)^3 + d_m(|x| - R_m)^2, & \frac{R_m}{2} \leq |x| \leq R_m \\ 0, & jinak \end{cases}$$

kde

$$r_m = e^{-e^{1+m}},$$
$$R_m = e^{-e^m}.$$

Koeficienty a_m, b_m, c_m, d_m jsou zvoleny tak, aby $u_m \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Potom pro $n > 2$ a dostatečně velké $m \to \infty$ je splněno

1. $u_m \in C^1(\mathbb{R}^n)$

2. $\|u_m\|_{2,\frac{n}{2}} \xrightarrow{m\to\infty} 0$

3. $0 \leq u_m \leq 1$

4. $0 \in \operatorname{Int}\{x : u_m(x) = 1\}$

5. $u_m = 0$ *na* $\mathbb{R}^n \backslash B(0,1)$.

Důkaz. Pro následující výpočty potřebujeme nahlédnout, že

$$\begin{aligned} D(|x|) &= \frac{x}{|x|}, \\ |D(|x|)| &= 1, \\ \left|D^2(|x|)\right| &= \left|D\Big(\frac{x}{|x|}\Big)\right| \leq \frac{C(n)}{|x|}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

První dvě rovnosti jsou zřejmé z definice Euklidovy normy a derivování po složkách. Pro poslední případ je potřeba spočítat Hessovu matici zobrazení $x \longmapsto |x|$. Pro normu matice stačí spočítat její první řádek. Ten je tvaru

$$\Big(\frac{1}{|x|} - \frac{x_1^2}{|x|^3}, -\frac{x_1x_2}{|x|^3}, \ldots, -\frac{x_1x_n}{|x|^3}\Big).$$

Opravdu tedy platí odhad

$$\left|D^2(|x|)\right| \leq \frac{C(n)}{|x|}.$$

Derivace u_m je tvaru

$$u_m'(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq r_m \\ 3a_m(|x|-r_m)^2 D(|x|) + 2b_m(|x|-r_m)D(|x|), & r_m \leq |x| \leq 2r_m \\ \frac{D(|x|)}{|x|\log|x|}, & 2r_m \leq |x| \leq \frac{R_m}{2} \\ 3c_m(|x|-R_m)^2 D(|x|) + 2d_m(|x|-R_m)D(|x|), & \frac{R_m}{2} \leq |x| \leq R_m \\ 0, & jinak. \end{cases}$$

Soustavou čtyř rovnic o čtyřech neznámých

$$a_m r_m^3 + b_m r_m^2 + 1 = \log\log\Big(\frac{1}{2r_m}\Big) - m,$$

$$-c_m \frac{R_m^3}{8} + d_m \frac{R_m^2}{4} = \log\log\Big(\frac{2}{R_m}\Big) - m,$$

$$3a_m r_m^2 \; D(|x|)\big|_{|x|=2r_m} + 2b_m r_m \; D(|x|)\big|_{|x|=2r_m} = \frac{1}{2r_m \log(2r_m)} \; D(|x|)\big|_{|x|=2r_m} \,,$$

$$\frac{3}{4} c_m R_m^2 \; D(|x|)\big|_{|x|=\frac{R_m}{2}} - d_m R_m \; D(|x|)\big|_{|x|=\frac{R_m}{2}} = \frac{2}{R_m \log(\frac{R_m}{2})} \; D(|x|)\big|_{|x|=\frac{R_m}{2}} \,,$$

snadno spočteme požadované koeficienty

$$a_m = \frac{1}{r_m^3}\left[\frac{1}{2\log(2r_m)} - 2\log\log\Big(\frac{1}{2r_m}\Big) + 2m + 2\right],$$

$$b_m = -\frac{1}{r_m^2}\left[\frac{1}{2\log(2r_m)} - 3\log\log\Big(\frac{1}{2r_m}\Big) + 3m + 3\right],$$

$$c_m = \frac{8}{R_m^3}\left[\frac{1}{\log(\frac{R_m}{2})} + 2\log\log\Big(\frac{2}{R_m}\Big) - 2m\right],$$

$$d_m = \frac{4}{R_m^2}\left[\frac{1}{\log(\frac{R_m}{2})} + 3\log\log\Big(\frac{2}{R_m}\Big) - 3m\right].$$

Vlastnosti (1), (3), (4), (5) vyplývají přímo z definice. Vlastnost (2) není zřejmá a tu dokážeme. Protože u_m jsou shora omezené konstantou 1 a supp $u_m \subset R_m$ platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_m(x)|^{\frac{n}{2}}\, dx \le \int_{B(0,\,R_m)} dx \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

První derivace splňuje

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Du_m(x)|^{\frac{n}{2}}\, dx = \int\limits_{r_m\le|x|\le 2r_m} \big|3a_m(|x|-r_m)^2 D(|x|) + 2b_m(|x|-r_m)D(|x|)\big|^{\frac{n}{2}}\, dx$$
$$+ \int\limits_{2r_m\le|x|\le\frac{R_m}{2}} \left|\frac{1}{x\log|x|}\right|^{\frac{n}{2}} dx$$
$$+ \int\limits_{\frac{R_m}{2}\le|x|\le R_m} \big|3c_m(|x|-R_m)^2 D(|x|) + 2d_m(|x|-R_m)D(|x|)\big|^{\frac{n}{2}}\, dx$$
$$\le \big(3\,|a_m|\, r_m^2 + 2\,|b_m|\, r_m\big)^{\frac{n}{2}} (4r_m)^n + C(n)\int_0^{\frac{R_m}{2}} \frac{r^{n-1}}{r^{\frac{n}{2}}\,|\log r|^{\frac{n}{2}}} dr$$
$$+ \big(\frac{3}{4}\,|c_m|\, R_m^2 + |d_m|\, R_m\big)^{\frac{n}{2}} (2R_m)^n$$
$$\le C(n)\Big[\big(|a_m|\, r_m^4 + |b_m|\, r_m^3\big)^{\frac{n}{2}} + \int_0^{\frac{R_m}{2}} \frac{r^{\frac{n}{2}-1}}{|\log r|^{\frac{n}{2}}} dr$$
$$+ \big(|c_m|\, R_m^4 + |d_m|\, R_m^3\big)^{\frac{n}{2}}\Big] \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Druhou derivaci počítejme postupně s použitím (4.1)

$$\int\limits_{r_m\le|x|\le 2r_m} \big|D^2\big(a_m(|x|-r_m)^3 + b_m(|x|-r_m)^2\big)\big|^{\frac{n}{2}}\, dx$$
$$= \int\limits_{r_m\le|x|\le 2r_m} \Big|6a_m(|x|-r_m)(D(|x|))^2 + 3a_m(|x|-r_m)^2 D^2(|x|)$$
$$+ 2b_m(D(|x|))^2 + 2b_m(|x|-r_m)D^2(|x|)\Big|^{\frac{n}{2}} dx$$
$$\le C(n)\Big(6\,|a_m|\, r_m + 3\,|a_m|\, r_m^2 \frac{1}{r_m} + 2\,|b_m| + 2\,|b_m|\, r_m \frac{1}{r_m}\Big)^{\frac{n}{2}} (4r_m)^n$$
$$\le C(n)\big(|a_m|\, r_m + |b_m|\,\big)^{\frac{n}{2}} r_m^n = C(n)\big(|a_m|\, r_m^3 + |b_m|\, r_m^2\big)^{\frac{n}{2}} \xrightarrow{m\to\infty} 0,$$

kde konvergence k 0 vyplývá z

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} a_m r_m^3 &= \lim_{m\to\infty}\Big(\frac{1}{2\log(2r_m)} - 2\log\log\big(\frac{1}{2r_m}\big) + 2m + 2\Big)\\
&= 2\lim_{m\to\infty}\Big(-\log\log\big(\frac{1}{2r_m}\big) + m + 1\Big)\\
&= 2\lim_{m\to\infty}\Big(-\log(e^{1+m} - \log 2) + m + 1\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Zcela analogicky dostaneme

$$\lim_{m\to\infty} b_m r_m^2 = 0.$$

Dále

$$\begin{aligned}
\int\limits_{2r_m\le|x|\le\frac{R_m}{2}} \left|D^2\left(\log\log\Big(\frac{1}{|x|}\Big) - m\right)\right|^{\frac{n}{2}} dx &= \int\limits_{2r_m\le|x|\le\frac{R_m}{2}} \left|D\Big(\frac{x}{|x|^2\log|x|}\Big)\right|^{\frac{n}{2}} dx\\
&= \int\limits_{2r_m\le|x|\le\frac{R_m}{2}} \left|D\Big(\frac{x}{|x|}\Big)\frac{1}{|x|\log|x|} + \frac{x}{|x|}D\Big(\frac{1}{|x|\log|x|}\Big)\right|^{\frac{n}{2}} dx\\
&\le \int\limits_{2r_m\le|x|\le\frac{R_m}{2}} \left(\frac{C(n)}{|x|^2|\log|x||} + \left|\frac{\log|x|+1}{|x|^2\log^2|x|}\right|\right)^{\frac{n}{2}} dx\\
&\le C(n) \int\limits_{0\le|x|\le\frac{R_m}{2}} \left(\frac{|\log|x||+1}{|x|^2|\log|x||^2}\right)^{\frac{n}{2}} dx.
\end{aligned}$$

Protože platí

$$\lim_{x\to 0}\frac{|\log|x||+1}{|x|^2|\log|x||^2}\cdot\frac{|x|^2|\log|x||^2}{|\log|x||} = 1,$$

existuje konstanta C, že

$$\int\limits_{0\le|x|\le\frac{R_m}{2}} \left(\frac{|\log|x||+1}{|x|^2|\log|x||^2}\right)^{\frac{n}{2}} dx \le C \int\limits_{0\le|x|\le\frac{R_m}{2}} \left(\frac{|\log|x||}{|x|^2|\log|x||^2}\right)^{\frac{n}{2}} dx.$$

Protože $n > 2$, takovýto integrál splňuje

$$\int\limits_{0\le|x|\le\frac{R_m}{2}} \left(\frac{|\log|x||}{|x|^2\,|\log|x||^2}\right)^{\frac{n}{2}} dx = \int\limits_{0\le|x|\le\frac{R_m}{2}} \frac{dx}{|x|^n\,|\log|x||^{\frac{n}{2}}}$$

$$= C(n)\int_0^{\frac{R_m}{2}} \frac{r^{n-1}}{r^n\,|\log r|^{\frac{n}{2}}}dr \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Konečně pro $\frac{R_m}{2} \le |x| \le R_m$ platí

$$\int\limits_{\frac{R_m}{2}\le|x|\le R_m} \left|D^2\Big(c_m(|x|-R_m)^3 + d_m(|x|-R_m)^2\Big)\right|^{\frac{n}{2}} dx$$

$$= \int\limits_{\frac{R_m}{2}\le|x|\le R_m} \Big|6c_m(|x|-R_m)(D(|x|))^2 + 3c_m(|x|-R_m)^2 D^2(|x|)$$

$$+ 2d_m(D(|x|))^2 + 2d_m(|x|-R_m)D^2(|x|)\Big|^{\frac{n}{2}} dx$$

$$\le C(n)\Big(3\,|c_m|\,R_m + \frac{3}{4}\,|c_m|\,R_m^2\frac{2}{R_m} + 2\,|d_m| + |d_m|\,R_m\frac{2}{R_m}\Big)^{\frac{n}{2}}(2R_m)^n$$

$$\le C(n)\big(|c_m|\,R_m + |d_m|\,\big)^{\frac{n}{2}} R_m^n = C(n)\big(|c_m|\,R_m^3 + |d_m|\,R_m^2\big)^{\frac{n}{2}} \xrightarrow{m\to\infty} 0,$$

kde konvergence vyplývá z

$$\lim_{m\to\infty} c_m R_m^3 = 8\lim_{m\to\infty}\Big(\frac{1}{\log(\frac{R_m}{2})} + 2\log\log\big(\frac{2}{R_m}\big) - 2m\Big)$$

$$= 16\lim_{m\to\infty}\Big(\log\log\big(\frac{2}{R_m}\big) - m\Big)$$

$$= 16\lim_{m\to\infty}\Big(\log(\log 2 + e^m) - m\Big) = 0.$$

A opět zcela analogicky dostaneme

$$\lim_{m\to\infty} d_m R_m^2 = 0.$$

Použitím napočítaných výsledků poté $\|D^2 u_m\|_{\frac{n}{2}} \xrightarrow{m\to\infty} 0$. Tedy

$$\|u_m\|_{2,\frac{n}{2}} \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

□

Věta 4.4 *Existuje spojité zobrazení $f \in W^{2,\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $n > 2$, takové, že f nesplňuje N podmínku.*

Důkaz. Důkaz je podobný jako ve Větě 2.7. Jak jsme zmínili již dříve v Poznámce 2.13 jedná se o metodu hledání protipříkladů N podmínky. Naznačme konstrukci tedy jen velice stručně.

Jako funkce u_m nyní použijeme funkce z předešlého lemmatu. Definice pro $g_m(x)$, $h_{m,k}(x)$, $f_k(x)$ zůstávají stejné s rozdílem, že použijeme vhodnou normu v (2.2), tedy

$$\|h_{m_k,k}\|_{2,\frac{n}{2}} \leq 2^{-k}.$$

Zřejmě platí

$$\|f_k - f\|_{2,\frac{n}{2}} \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-k} \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

$$|f_k(x) - f(x)| \leq C(n)2^{-k} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Ze stejnoměrné konvergence f_k plyne spojitost f. Z kompaktnosti a hustoty $f(I)$ v Q_0 vyplývá závěr věty. □

Poznámka 4.5 *V předešlé větě jsme se omezili na případ $n > 2$ i přes to, že v případě $W^{1,p}, p \leq n$, jsme uvažovali $n \geq 2$. Je velice překvapivé, že pro $W^{2,\frac{n}{2}}$ prostory je N podmínka splněna pro $n = 2$. K tomu, abychom toto tvrzení dokázali, si nejdříve musíme připravit potřebnou teorii.*

Definice 4.6 (Lorentzovy prostory) *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast, u je měřitelná a konečná v Ω s.v. Pak*

$$m_u(t) = |\{x \in \Omega : |u(x)| > t\}|\,,\ t \geq 0$$

značí distribuční funkci. Definujme nerostoucí přerovnání funkce u jako

$$u^*(s) = \inf\{t : m_u(t) \leq s\}\,.$$

Dále ať

$$u^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t u^*(s)ds$$

značí průměrnou hodnotu u^* na intervalu $[0,t]$. Konečně pro $1 \leq p \leq \infty$ definujme

$$\|u\|_{L^{p,q}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} u^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leq q < \infty \\ \sup\limits_{t>0} \left(t^{\frac{1}{p}} u^{**}(t)\right), & q = \infty. \end{cases}$$

Lorentzův prostor $L^{p,q}(\Omega)$ pak obsahuje všechny měřitelné funkce u na Ω takové, které splňují $\|u\|_{L^{p,q}(\Omega)} < \infty$.

Věta 4.7 *Předpokládejme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast a je splněno $1 \leq p < \frac{n}{j}$ pro $j \in \mathbb{N}$. Dále nechť $u \in W^{j,p}(\Omega)$, pak*

$$u \in L^{p^*,p}(\Omega),\ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{j}{n}.$$

Důkaz. Lorentzovy prostory jsou zobecněním Lebesgueových prostorů. Tato věta je zajímavá v tom, že zobecňuje Sobolevovu větu o vnoření. Pro $k - l = j$, $k > l$, ve Větě 4.1 získáme

$$u \in L^{p^*}(\Omega) = L^{p^*,p^*}(\Omega),$$

což obsahuje $L^{p^*,p}(\Omega)$ jakožto podmnožinu. Důkaz a zbylá vnoření Lorentzových prostorů je v [14]. □

Věta 4.8 *Mějme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ oblast. Předpokládejme, že $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ je spojité zobrazení, jehož slabé parciální derivace jsou v prostoru $L^{n,1}(\Omega)$. Pak u splňuje N podmínku.*

Důkaz. Důkaz s dalšími podrobnějšími důsledky se vyskytuje v literatuře [9]. □

Věta 4.9 *Pro $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ oblast a $u \in W^{2,1}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ spojité zobrazení je splněna Luzinova N podmínka.*

Důkaz. Zřejmě platí

$$W^{2,1}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1}(\Omega)$$

a tak $u \in W^{1,1}_{loc}$. Protože $u \in W^{2,1}(\Omega, \mathbb{R}^2)$, slabé parciální derivace u jsou prvky $W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Použitím Věty 4.7 pro $p = 1, j = 1, n = 2$, slabé parciální derivace splňují

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u \in L^{2,1}(\Omega),\ i = 1, \ldots, n.$$

Z Věty 4.8 poté dostaneme platnost N podmínky. $\square$

Kapitola 5

Luzinova podmínka pro homeomorfismy z $W^{2,p}$

5.1 Luzinova podmínka pro $W^{2,p}, p \geq \frac{n}{2}$

Věta 5.1 *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f \in W^{2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n), p \geq \frac{n}{2}$, je homeomorfismus. Potom f splňuje Luzinovu N podmínku.*

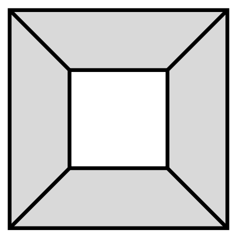
Důkaz. Z Věty 4.2 víme, že Luzinova podmínka je splněna pro $p > \frac{n}{2}$. Zbývá tak ukázat případ $p = \frac{n}{2}$. Použijme Sobolevovu větu 4.1, získáme

$$W^{2,p}(\mathbb{R}^n) = W^{2,\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{1,q}(\mathbb{R}^n), \text{ pro } \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

Z předpokladu $p = \frac{n}{2}$, pak $q = n$. Dříve dokázaná Věta 1.3 nám ukazuje, že N podmínka platí pro homeomorfismy z $W^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, a tedy i pro $W^{2,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $p = \frac{n}{2}$. □

5.2 Luzinova podmínka pro $W^{2,p}, p < \frac{n}{2}$

Platnost či neplatnost Luzinovy podmínky pro případ $W^{2,p}$, $p < \frac{n}{2}$, je obtížnější dokázat a přesahuje rámec této práce. Zkusme alespoň nastínit problémy, se kterými se zde potýkáme. V kapitole 3 jsme zkonstruovali pěkný a dobře vypracovaný model ukazující neplatnost Luzinovy N podmínky pro homeomorfismy z $W^{1,p}(Q_0, Q_0)$, $p < n$. Přirozený postup by byl tento model použít i pro $W^{2,p}(Q_0, Q_0)$, $p < \frac{n}{2}$, homeomorfismy. Nicméně definované zobrazení $f_k(x)$ ve Větě 3.5 je pouze lokálně lipschitzovské a nenáleží prostoru $W^{2,p}$. Důvodem je neexistence druhé derivace v hraničních bodech ∂Q_v a v bodech úhlopříček spojující vrcholy krychlí Q_v a P_v. Tyto body jsou tučně znázorněny na obrázku 5.1.



Obrázek 5.1: Neexistence druhé slabé derivace.

Zobrazení f_k lze zhladit na okolí hranice ∂Q_v. To by se provedlo podobně Lemmatu 4.3, ale bylo by to obtížnější. Také bychom museli zobrazení zhladit na úhlopříčkách. Veškeré výpočty by byly velice zdlouhavé a dopředu není zcela jasné, že by vedly k cíli. Platnost či neplatnost Luzinovy podmínky pro tento případ zůstává námětem pro další výzkum.

Literatura

[1] R. A. Adams, J. J. F. Fournier: *Sobolev Spaces*, Academic Press, Boston, Second Edition (2003).

[2] A. S. Besicovitch: *A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 41 (1945), 103–110.

[3] L. Cesari: *Sulle trasformazioni continue*, Ann. Mat. Pura Appl. 21 (1942), 157-188.

[4] M. Csörnyei, S. Hencl, J. Malý: *Homeomorphisms in the Sobolev space $W^{1,n-1}$*, J. Reine Angew. Math. 644 (2010), 221-235.

[5] L. C. Evans, R. F. Gariepy: *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, London (1992).

[6] S. Hencl, P. Koskela: *Lecture notes on Mappings of finite distortion*, in preparation.

[7] J. Kauhanen: *Failure of the condition N below $W^{1,n}$*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 27, No. 1 (2002), 141-150.

[8] J. Kauhanen, P. Koskela, J. Malý: *Mapping of Finite Distortion: Condition N*, Michigan Math J. 49 (2001), 169-181.

[9] J. Kauhanen, P. Koskela, J. Malý: *On functions with derivatives in a Lorentz space*, Manuscripta Mathematica, Volume 100, Number 1 (1999), 87-101.

[10] J. Malý, O. Martio: *Lusin's condition (N) and mappings of the class $W^{1,n}$*, J. Reine Angew. Math. 458 (1995), 19-36.

[11] O. Martio, W. P. Ziemer: *Lusin's Condition (N) and Mappings with Nonnegative Jacobians*, Michigan Math. J. 39 (1992), 495-508.

[12] Yu. G. Reshetnyak: *Property N for the space of class $W^1_{n,loc}$*, Siberian Mathematical Journal, Volume 28, Number 5 (1987), 810-813.

[13] M. Rokyta, O. John, J. Málek, M. Pokorný, J. Stará: *Úvod do teorie parciálních diferenciálních rovnic*, http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/skripta-pdr/part2.ps.

[14] B. Ruf: *Lorentz Spaces and Nonlinear Elliptic Systems*, Progr. Nonlin. Diff. Equ. Appl., Volume 66 (2006), 471-489.

[15] W. P. Ziemer: *Weakly Differentiable Functions: Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation*, Springer-Verlag, New York (1989).