

Posudek oponenta na diplomovou práci

MILAN MATĚJKA: Sobolevovská zobrazení a Luzinova N podmínka

Diplomová práce Milana Matějky se zabývá N podmínkou pro sobolevovská zobrazení. Připomeňme, že f splňuje N podmínku, platí-li implikace $|E| = 0 \implies |f(E)| = 0$ ($|\cdot|$ značí Lebesgueovu míru). Tato podmínka má značný význam v reálné analýze sobolevovských zobrazení, neboť zaručuje použitelnost zobrazení pro záměnu proměnných v integrálu.

První kapitola je úvodní. Druhá kapitola se zabývá Luzinovou podmínkou pro obecná sobolevovská zobrazení, za podmínek závisících jen na integrovatelnosti gradientu. Je zde dokázán pozitivní výsledek i protipříklad, nic z toho v nejlepší známé obecnosti. Na protipříkladu je patrné samostatné zpracování, avšak výpočtu jsou těžkopádné. Třetí kapitola studuje sobolevovské homeomorfismy, opět výsledky jsou slabší než výsledky z literatury. Čtvrtá kapitola se zabývá sobolevovskými prostory vyššího řádu, kde pozitivní výsledky jsou snadným důsledkem vnoření a výsledků pro první řád. Co se týče negativních výsledků, je zapotřebí větší opatrnosti při konstrukci pomocných funkcí, autor však zvolil velmi nepohodlnou metodu jak zaručit hladkost a tudíž výpočty působí složitě. Konstrukce protipříkladu ve třídě homeomorfismů není zvládnuta, ačkoli původně byla zřejmě zamýšlena a problémy, které jsou zmíněné v kapitole 5 nepůsobí nepřekonatelným dojmem.

Konkrétní poznámky k práci jsou následující:

1. str. 3, 4: historické poznámky jsou hodně nepřesné a nevyvážené. Např. Cesari zkonstruoval jiný protipříklad, než je zmíněno v úvodu.
2. str. 7, věta 2.3. Po slově "přesněji" bych očekával výstižnější vyjádření. Použitá formulace nevyvětluje, kde se bere onen lepší reprezentant, daleko vhodnější by bylo říci, že existuje u^* s danými vlastnostmi. Důkaz navozuje představu, že tato věta se dá najít v literatuře jen pro hladké funkce, což není pravda.
3. str. 9, důkaz lemmatu 2.6, definice funkce u_m má smysl jen pro $|x| < 1$.
4. str. 13, definice Lexemburgovy normy: symbol je zavádějící, lepší by bylo $\|f\|_{L^p(\Omega)}$
5. str. 13, "Snadným výpočtem ověříme": kompilační diplomová práce by se neměla takto vyhýbat nepohodlným výpočtům.
6. str. 16, poznámka 2.13: kdyby se použila funkce $\log \log \log$, dotáhl by se protipříklad až na $\beta = n - 1$.
7. str. 16, věta 2.14: mělo by být uvedeno, že věta vyplývá z protipříkladu v článku [9].
8. str. 18, místo "standartní" má být "standardní".
9. str. 23, derivaci hladké funkce není třeba počítat z definice.
10. str. 19-22: stejný důkaz projde i pro monotónní zobrazení
11. str. 27: podstatná část důkazu spočívá v ověření, že úseček, které neprotnou C_1 je málo. To však v práci není vůbec zmíněno.
12. str. 28: formule $\rho(\|x\|_\infty) = \alpha_k \|x - z_v\|_\infty + \beta_k$ postrádá smyslu. Má být $\rho(t) = \alpha_k t + \beta_k$ a v odhadu níže $\rho(\|x - z_v\|_\infty) / \|x - z_v\|_\infty$.
13. str. 28: argument s bilipschitzovskou ekvivalencí by se slušelo rozvést. Též by mělo být zmíněno, že odhady derivace platí až na množinu míry nula.
14. str. 31: Důkaz věty 4.2 nebere v úvahu hranici.
15. str. 31: V důkazu lemmatu 4.3 nestačí hlídat spojitou diferencovatelnost, je zapotřebí "absolutně spojitá" diferencovatelnost.
16. str. 32: "Pro normu matice stačí spočítat její první řádek": Jak by se to poctivě zdůvodnilo?
17. str. 38, důkaz věty 4.7 není důkaz, ale poznámka.

Při obhajobě by měl uchazeč reagovat na připomínky 5, 11, 14, 15 a 16.

Práce má partie kompilační, na nichž není nic inovativního, a části zpracovávají samostatně, které jsou počítány neelegantně. Přesto lze na práci najít pozitivní stránky. Pro čtenáře, který není zasvěcen do problematiky, může posloužit jako první úvod. Výpočty jsou zpracovány pečlivě a je-li někde chyba, jejím důvodem je, že autor upadl do některé z pastí, které na začátečníky v tomto oboru číhají. Hrubé chyby

se nevyskytují. Zvláště bych chtěl vyzdvihnout samostatnost, je třeba přihlídnout k tomu, že vedoucí práce volil cestu minimálního ovlivňování a napovídání. Výsledek je slušným produktem studenta, který neplánuje vědeckou kariéru. Presentace je jasná a srozumitelná.

Práce splňuje požadavky kladené na diplomovou práci.

V Praze 7. ledna 2012

Prof. RNDr. Jan Malý, DrSc.