

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Peter Škerlík

Stochastické modelování vývoje úmrtnosti

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2012

Na tomto mieste by som rád poďakoval RNDr. Lucii Mazurovej, Ph.D., vedúcej diplomovej práce, za jej podporu a cenné rady pri jej vzniku, ako aj za čas, ktorý mi v prípade potreby ochotne venovala.

Prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďalších odborných zdrojov.

Beriem na vedomie, že sa na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platnom znení, zvlášť skutočnosť, že Univerzita Karlova v Prahe má právo na uzavretie licenčnej zmluvy o použití tejto práce ako školského diela podľa § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Prahe dňa 7.12.2012

Peter Škerlík

Názov práce: Stochastické modelovanie vývoja úmrtnosti

Autor: Peter Škerlík

Katedra: Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., KPMS MFF UK

Abstrakt: V predloženej práci sa zaoberáme možnosťami predpovedania úmrtnostných mier, vysvetlíme najčastejšie používané modely a postupy. Charakterizujeme, čo znamená riziko dlhovekosti a úmrtnosti a načrtneme možnosti ako toto riziko preniesť na iné subjekty. Popíšeme nástroj LifeMetrics, možnosti jeho využitia a pokúsime sa pomocou neho riziko dlhovekosti kvantifikovať na konkrétnych dátach. Cieľom práce je poskytnúť čitateľovi základný prehľad o používaných modeloch na predpovedanie úmrtnosti, zvlášť so zameraním na stochastické modely a pomôcť k lepšiemu pochopeniu významu rizika dlhovekosti.

Kľúčové slová: riziko dlhovekosti a úmrtnosti, Lee-Carterov model, LifeMetrics

Title: Stochastic modelling of mortality development

Author: Peter Škerlík

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., KPMS MFF UK

Abstract: In the presented diploma thesis we study possibilities of forecasting mortality rates and we explain the most used models to measure it. The longevity and mortality risk are characterized and options for transfer of risks to other subjects are suggested. Further we applied LifeMetrics tool to predict mortality and quantify longevity risk in our data set, also possibilities of its usage are described in more details. The aim of the work is to provide the reader with sufficient amount of theoretical information about the used stochastic models for mortality prediction. Also the work may be helpful to gain deeper knowledge about longevity risk.

Keywords: longevity and mortality risk, Lee-Carter model, LifeMetrics

Obsah

Úvod	3
1 Základné pojmy	5
1.1 Demografický model	5
1.2 Úmrtnostné tabuľky a ich konštrukcia	6
1.3 Anuity	8
2 Riziko a jeho zaistenie	9
2.1 Dopad rizika dlhovekosti na hodnotu portfólia	9
2.2 Typy rizika	10
2.3 Transfer rizika	11
2.3.1 Hedging	12
2.3.2 Doterajšie skúsenosti so zaistením rizika úmrtnosti a dlhovekosti	12
2.3.3 Efektívny hedging	14
2.3.4 q- forward	15
2.3.5 s- forward	16
3 Modely používané k predpovedaniu mortality	18
3.1 Základné delenie	18
3.2 Redukčné faktory	19
3.3 Deterministické modely	19
3.3.1 Exponenciálna formula	19
3.3.2 Iné projekčné formule	20
3.3.3 Zákony úmrtnosti	20
3.4 Stochastické modely	21
3.4.1 Age-period modely	21
3.4.2 Age-period-cohort modely	22
3.4.3 P-spliny	22
4 Stochastické modely a ich vzájomné porovnanie	24
4.1 Lee-Carterov model	24
4.1.1 Metóda najmenších štvorcov	25
4.1.2 Metóda maximálnej vierohodnosti	28
4.2 Cairns Blake-Dowdov model	28
4.3 Porovnanie Lee-Carterovho a Cairns-Blake-Dowdovho modelu	29
4.4 Ďalšie aspekty modelov	30
4.4.1 Modelovanie časovej zložky modelov	30
4.4.2 Predikčné intervaly	32
4.5 Rozšírenie Lee-Carterovho modelu o kohortný efekt	33
4.5.1 Kohortný efekt a jeho príčiny	33
4.5.2 Štruktúra rozšíreného Lee-Carterovho modelu	34
4.5.3 Odhad parametrov modelu	35

5	Nástroje na meranie a hodnotenie rizika	37
5.1	LLMA	37
5.2	LifeMetrics	37
5.2.1	LifeMetrics Index	37
5.2.2	LifeMetrics Framework	38
5.2.3	LifeMetrics Software	39
5.3	Xpect	39
5.3.1	Xpect dáta	40
5.3.2	Xpect indexy	40
5.3.3	Xpect forwardové krivky	40
5.4	Zhrnutie	41
6	Riziko dlhovekosti na konkrétnych dátach	42
6.1	Zdrojové údaje	42
6.2	Pohľad na vývoj úmrtnosti v minulosti	42
6.3	Kalibrácia modelov	43
6.3.1	Lee-Carterov model	43
6.3.2	Cairns-Blake-Dowdov model	46
6.3.3	Renshaw-Habermanov model	48
6.4	Predpovede a očakávaná hodnota životnej anuity	50
	Záver	58
	Zoznam použitej literatúry	59

Úvod

Následkom nedávnej finančnej krízy a pretrvávajúcej dlhovej krízy sa zvýšila citlivosť finančných subjektov k riziku a klesli výnosy na finančných trhoch. Spoločnosti si uvedomili, že nielen aktíva, ale aj záväzky spoločností musia byť podrobnejšie sledované a riadené. Aj penzijné fondy a životné poisťovne by mali sledovať nové trendy a projekcie týkajúce sa úmrtnosti, pretože tieto zmeny môžu mať podstatný vplyv na ich záväzky.

Oceňovanie produktov životného a dôchodkového poistenia prebieha na základe súčasných očakávaní o vývoji úmrtnosti. Avšak priemerná doba života za posledné desaťročia výrazne vzrástla a stále sa mení. Dôsledkom toho je dlhšia doba vyplácania penzií a ich zvýšená očakávaná súčasná hodnota. Nie vždy však úmrtnosť klesá, v niektorých sociálnych skupinách a štátoch posledné roky dokonca mierne rastie. Zmenou očakávanej úmrtnosti sa poisťovne a penzijné fondy vystavujú riziku, že ich záväzky z týchto produktov môžu výrazne prekročiť očakávanú úroveň pri poklese úmrtnosti v prípade dôchodkových produktov, alebo pri zvýšení úmrtnosti v prípade produktov zahrňujúcich aj riziko smrti.

Pri poklese úmrtnosti hovoríme o *riziku dlhovekosti* a opačne, pri zvýšení úmrtnosti o *riziku úmrtnosti*. Riziko dlhovekosti sa týka predovšetkým produktov penzijných fondov, pri ktorých už malé zvýšenie očakávaného veku dožitia znamená veľké zvýšenie očakávaných výdavkov na penzie, ktoré sa vyplácajú doživotne. Treba upozorniť, že sa to týka predovšetkých súkromných spoločností a súkromného penzijného poistenia, pretože v Českej republike a na Slovensku je zatiaľ väčšina starobných dôchodkov financovaná priebežným štátnym systémom.

Predpovedanie úmrtnosti je problém známy už pred desaťročiami, ale až v posledných rokoch sa táto oblasť výraznejšie rozvíja, okrem iného aj pod tlakom nových regulačných požiadaviek *Solvency II*, ktoré kladú zvýšený dôraz na zahrnutie tohoto rizika do riziko-managementu poisťovní.

Riziko dlhovekosti nie je diverzifikovateľné, na rozdiel od tradičného poňatia rizika úmrtnosti, keď sa úmrtnosť pohybuje okolo pevne daných úmrtnostných tabuliek. V tom prípade je možné riziko odhadnúť pomocou zákona veľkých čísel. Väčšie portfólia majú lepšie vlastnosti, tzv. *pooling*. Pri zmene úmrtnosti celého portfólia to možné nie je, pretože jednotlivé poisťky nie sú nezávislé vzhľadom na úmrtnosť. K lepšiemu pochopeniu pojmu riziko dlhovekosti a aké ďalšie riziká sú s ním spojené slúži kapitola 2.

K minimalizácii rizika dlhovekosti sú potrebné čo najpresnejšie odhady úmrtnosti do budúcnosti. Preto je dôležité venovať náležitú pozornosť výberu vhodného postupu na modelovanie úmrtnosti. Prehľad prístupov a modelov vhodných na predpovedanie úmrtnosti nájdeme v kapitole 3. Medzi tieto metódy patrí aj Lee-Carterov (LC) a Cairns-Blake-Dowdov model (CBD), na ktoré sa v tejto práci zameráme. Ich detailný popis nájdeme v kapitole 4.

Iný spôsob minimalizovania rizika je preniesť toto riziko na investorov (viď sekcia 2.3), napr. pomocou hedgingu. Avšak zatiaľ sa tento spôsob nepoužíva vo väčšej miere, pretože neexistuje rozvinutý likvidný kapitálový trh s cennými papiermi zameranými na túto formu rizika. Nezáujem investorov o túto formu investovania je spôsobený aj tým, že riziko dlhovekosti je ťažké kvantifikovať a investori nemajú dostatok informácií. Pre účely uľahčenia kvantifikácie tohoto

rizika a následného rozvoja kapitálových trhov s produktmi zameranými na dlhovekosť boli vyvinuté niektoré produkty, ktoré si podrobnejšie popíšeme v kapitole 5.

V poslednej kapitole využijeme nástroj LifeMetrics na dáta o úmrtnosti na Slovensku k výpočtu budúcich úmrtnostných mier. Tieto spočítame pomocou viacerých modelov a následne spočítame hodnotu súčasnej anuity, pre stochastické modely aj intervaly spoľahlivosti a poukážeme na dôsledky, ktoré z toho plynú.

Táto práca si nekladie za cieľ podať úplný prehľad o všetkých modeloch a prístupoch týkajúcich sa dlhovekosti. Zameráme sa len na vybrané stochastické modely, preskúmame dostupné nástroje na zvládanie rizika dlhovekosti a ukážeme na konkrétnych dátach dopad rôznych scenárov na záväzky, ktorých sa týka riziko dlhovekosti.

1. Základné pojmy

Na začiatok si uvedieme niektoré potrebné pojmy a vzťahy, ktoré používame v tejto práci. Zavedieme si model náhodnej dĺžky života, popíšeme aké veličiny nájdeme v úmrtnostných tabuľkách a na konci tejto kapitoly si vysvetlíme pojem anuita a uvedieme niektoré základné typy. Vychádzame pritom z literatúry [1] a [2].

1.1 Demografický model

Označme T_x zostávajúcu dobu života jedinca, ktorý je nažive vo veku x . Distribučná funkcia náhodnej veličiny T_x je $F_x(t) = P(T_x \leq t)$ a jej hustotu označíme ako $f_x(t)$, kde $t \geq 0$. Túto distribučnú funkciu označme:

$${}_tq_x = P(T_x \leq t),$$

kde $t \geq 0$. Pre $t = 1$ označujeme len q_x .

${}_tq_x$ vyjadruje pravdepodobnosť, že sa osoba vo veku x nedožije veku $x + t$.
Doplnková pravdepodobnosť

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = P(T_x > t)$$

vyjadruje pravdepodobnosť, že sa osoba vo veku x dožije veku $x + t$. Predpoklad používaný v životnom poistení je, že rozdelenie T_{x+s} pre $s > 0$ je zhodné s podmieneným rozdelením veličiny $T_x - s$ za podmienky $T_x > s$. Potom platí:

$$P(T_{x+s} \leq t) = P(T_x - s \leq t | T_x > s) = \frac{P(s < T_x \leq s + t)}{P(T_x > s)} = \frac{{}_{t+s}q_x - {}_sq_x}{{}_sp_x}. \quad (1.1)$$

Ďalej definujeme *strednú dobu života* osoby vo veku x :

$$\bar{e}_x = ET_x = \int_0^\infty t f_x(t) dt,$$

funkciu prežitia (survival function):

$$S(t) = P(T_0 > t)$$

a *intenzitu úmrtnosti* (force of mortality) vo veku x :

$$\mu_x = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{P(T_x \leq h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{{}_hq_x}{h}. \quad (1.2)$$

Dosadením vzťahu (1.1) do (1.2) môžeme vyjadriť intenzitu úmrtnosti pomocou rozdelenia T_x :

$$\begin{aligned} \mu_{x+t} &= \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{F_x(t+h) - F_x(t)}{h} \cdot \frac{1}{{}_tp_x} = \frac{\partial F_x(t)}{\partial t} \cdot \frac{1}{1 - F_x(t)} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \ln(1 - F_x(t)) = -\frac{\partial}{\partial t} \ln {}_tp_x. \end{aligned}$$

Z toho vyjadríme vzťah:

$${}_t p_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right) = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu_y dy\right). \quad (1.3)$$

Centrálnu mieru úmrtnosti definujeme vzťahom:

$$m_x = \frac{\int_0^1 S(x+u)\mu_{x+u} du}{\int_0^1 S(x+u) du} = \frac{S(x) - S(x+1)}{\int_0^1 S(x+u) du}. \quad (1.4)$$

Ak chceme popísať rozdelenie T_x , narazíme na problém, že k dispozícii máme úmrtnostnú tabuľku len pre celočíselné veku. K tomu je potrebné využiť jeden z troch predpokladov týkajúcich sa úmrtnosti:

1. linearita funkcie ${}_u q_x$ pre $u \in \langle 0, 1 \rangle$, teda ${}_u q_x = u \cdot q_x$,
2. konštantná intenzita úmrtnosti, t.j. $\mu_{x+u} = \mu_{(x)}$ pre $x \in N_0, u \in (0, 1)$, a $\mu_{(x)}$ označuje hodnotu odhadnutú z pozorovaní úmrtnosti.
3. linearita funkcie ${}_{1-u} q_{x+u}$ pre $u \in \langle 0, 1 \rangle$, teda ${}_{1-u} q_{x+u} = (1-u) \cdot q_x$, tzv. Balducciho predpoklad.

Uvedomme si, že za platnosti 2. predpokladu zo vzťahu (1.4) dostaneme:

$$m_x = \mu_{(x)}, \quad (1.5)$$

a z rovnosti (1.3) dostaneme pre $t \in \langle 0, 1 \rangle$ vzťah

$${}_t p_x = \exp(-t\mu_{(x)}) = (p_x)^t. \quad (1.6)$$

1.2 Úmrtnostné tabuľky a ich konštrukcia

Úmrtnostná tabuľka (ÚT) popisuje vymieranie hypotetickej generácie súčasne narodených jedincov s počiatočným rozsahom označovaným l_0 . ÚT môžeme členiť na:

- periodické (prierezové) úmrtnostné tabuľky,
- kohortné úmrtnostné tabuľky.

Periodické ÚT vychádzajú z dekrementných skúsenosti populácie za krátke časové obdobie, väčšinou jeden rok. Keď hovoríme len o "úmrtnostných tabuľkách", väčšinou máme namysli periodické ÚT. *Kohortné ÚT* predstavujú záznam vymierania generácie súčasne narodených jedincov, k ich konštrukcii je potreba mať k dispozícii údaje za dlhé časové obdobie.

Popíšme si funkcie, ktoré sa v tabuľke vyskytujú:

- q_x pravdepodobnosť úmrtia vo veku x ,
- l_x tabuľkový počet dožívajúcich sa veku x . Hodnota l_0 sa nazýva koreň úmrtnostnej tabuľky, najčastejšie má hodnotu 100 000. Je to hypotetický počet jedincov z koreňa l_0 , ktorí sa dožijú veku x ,

- d_x tabuľkový počet zomrelých vo veku x ,
- L_x tabuľkový počet žijúcich, celková doba prežitá tabuľkovou generáciou vo veku x ,
- T_x celková doba prežitá tabuľkovou generáciou vo veku vyššom ako x .

Medzi týmito veličinami platia nasledujúce vzťahy:

$$p_x = 1 - q_x, \quad (1.7)$$

$$l_{x+1} = l_x p_x,$$

kde p_x je pravdepodobnosť, že sa jedinec vo veku x dožije veku $x + 1$. Ďalej

$$d_x = l_x - l_{x+1},$$

$$L_x = l_{x+1} + a_x d_x,$$

kde a_x je priemerná časť roku, ktorú prežije jedinec, ak v tom roku zomrie. Najčastejšie sa používa hodnota $\frac{1}{2}$. Ďalej platí:

$$T_x = L_x + L_{x+1} + \dots + L_\omega,$$

kde symbol ω označuje najvyšší vek, ktorého sa dožíva jedinec podľa ÚT, t.j. vek, pre ktorý platí $l_x = 0$ pre $x > \omega$. Dôležitú úlohu má *tabuľková miera úmrtnosti*

$$m_x = \frac{d_x}{L_x}.$$

Základom pre tvorbu úmrtnostnej tabuľky je odhad pravdepodobnosti úmrtia q_x z dostupných dát. Český štatistický úrad ju odhaduje z rovnosti:

$$q_x = 1 - \exp(-m_x). \quad (1.8)$$

Túto rovnosť dostaneme dosadením 1.5 do 1.6 a využitím 1.7. Ostatné hodnoty v ÚT sa odvodzujú z tejto hodnoty použitím vyššie uvedených vzťahov.

Úmrtnostnú mieru m_x počítame pre reálnu populáciu zo vzťahu:

$$\hat{m}_x = \frac{D_x}{E_x}, \quad (1.9)$$

kde D_x označuje počet skutočne zomrelých vo veku x v danom roku a E_x je tzv. *centrálna expozícia úmrtnosti* populácie vo veku x . V tomto prípade sa m_x nazýva aj *vekovo-špecifická miera úmrtnosti*. E_x označuje veľkosť populácie exponovanej k riziku smrti, tú je možné vypočítať na základe odhadov stredného stavu populácie v danom roku.

Výsledná krivka pre q_x by intuitívne mala byť hladká, preto sa tieto hodnoty ešte vyrovnávajú pomocou rôznych metód, ich prehľad opäť nájdeme v práci [1].

1.3 Anuity

Výrazom *anuita*, po slovensky dôchodok, sa označuje postupnosť platieb v pravidelných intervaloch. V životnom poistení je potrebné zaviesť termín *životný dôchodok*:

Definícia 1 ([2]): *Životný dôchodok (životná anuita) je postupnosť splátok v pravidelných časových intervaloch, ktoré sa uskutočnia, pokiaľ je poistený nažive.*

Ak má životný dôchodok dopredu určenú dobu, dokedy najviac sa bude vyplácať, nazýva sa *dočasný*.

Uveďme si tu len najjednoduchšie príklady značenia používaných v dôchodkovom poistení a potrebných v tejto práci:

- očakávanú súčasnú hodnotu predlehotnej životnej anuity vo výške 1 vo veku x označujeme \ddot{a}_x a vypočítame:

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} {}_k p_x q_{x+k},$$

kde $\ddot{a}_{\overline{k}|}$ je súčasná hodnota predlehotnej (istej) anuity na k rokov. ${}_k p_x$ a q_{x+k} sú pravdepodobnosti prežitia, resp. úmrtia získané pomocou úmrtnostných tabuliek.

- Očakávanú súčasnú hodnotu polehotnej dočasnej životnej anuity vo výške 1 vo veku x , označujeme a_x a vyjadríme ako:

$$a_x = \ddot{a}_x - 1,$$

- očakávanú súčasnú hodnotu predlehotnej dočasnej životnej anuity na n rokov vo výške 1 vo veku x , označujeme $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ a vypočítame:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} {}_k p_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|} p_x, \quad (1.10)$$

- očakávanú súčasnú hodnotu polehotnej dočasnej životnej anuity na n rokov vo výške 1 vo veku x , označujeme $a_{x:\overline{n}|}$ a jej hodnota sa dá vyjadriť:

$$a_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - 1$$

2. Riziko a jeho zaistenie

Prvým krokom pri zvládaní akéhokoľvek rizika je pochopenie jeho podstaty a príčin jeho vzniku. Až potom je možné prijať efektívne opatrenie na jeho zmiernenie. V tejto kapitole si vysvetlíme ako rozumieť riziko dlhovekosti, a aké sú možnosti ho preniesť na iné subjekty. Vychádzame z literatúry [1] a [3].

Penzijné fondy, alebo dôchodkové produkty poisťovne budú profitovať, ak dlhovekosť klesne a budú strácať, ak dlhovekosť bude rásť. Naproti tomu pri portfóliu zloženom z poisťiek na riziko smrti poisťiteľ profituje z nárastu dlhovekosti, teda ak ľudia žijú dlhšie. Z toho môžeme povedať, že ak poisťiteľ poskytuje súčasne produkty v oblasti dôchodkového biznisu a poistenia smrti, je vlastne zaistený proti pohybu úmrtnosti svojho portfólia. Takáto forma zaistenia sa nazýva *prirodený hedging*. Otázna je efektivita tohoto zaistenia. Pri posúdení efektivity je potrebné ohodnotiť dopady na portfólio pri rôznych variantách vývoja úmrtnosti.

2.1 Dopad rizika dlhovekosti na hodnotu portfólia

Základná úloha riziko-managementu je ohodnotenie dopadov hlavných rizikových faktorov na expozíciu. Konkrétne pri portfóliu penzijného fondu to znamená ohodnotenie citlivosti cash-flow a jeho súčasnej hodnoty na zmeny v úmrtnosti. Potrebné je začať so získaním rôznych scenárov pre vývoj úmrtnosti v budúcnosti. Tieto je možné získať napr. pomocou stochastických úmrtnostných modelov, ktoré sú popísané v kapitolách 3 a 4. Tieto scenáre vývoja treba následne aplikovať na veľkosť záväzkov a tak určíme riziko pre cash-flow ako aj pre očakávanú hodnotu expozície.

Pri stanovení očakávanej ceny produktu alebo obchodu, ktorá závisí na budúcich pravdepodobnostiach prežitia alebo úmrtia je potrebné využiť trochu upravené vzťahy oproti vzťahom v sekcii 1.3. Napríklad očakávanú súčasnú hodnotu jednoduchej doživotnej anuity výšky 1, ktorá bude vyplácaná od najbližšieho roku vypočítame podľa vzťahu:

$$a_{x,t} = \sum_{i=1}^{\infty} \left[DF_{t,t+i} \prod_{j=0}^{i-1} (1 - q_{x+j}(t+j)) \right],$$

kde $DF_{t,t+i}$ označuje diskontný faktor z času $t+i$ naspäť do času t a $q_x(t)$ označuje pravdepodobnosť úmrtia v budúcom čase t .

Pri spomínanom prirodzenom hedgingu nárast záväzkov v tomto type anuity je kompenzovaný poklesom pri poisteniach na riziko smrti. Základný vzťah pre výpočet očakávanej súčasnej hodnoty poistenia pre prípad smrti, vyplácajúceho hodnotu 1 v prípade nastania úmrtia do n rokov je:

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = DF_{t,t+1}q_x(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \left[DF_{t,t+i+1}q_{x+i}(t+i) \prod_{j=0}^{i-1} (1 - q_{x+j}(t+j)) \right].$$

Budúce pravdepodobnosti úmrtia $q_x(t)$ dostaneme využitím niektorých postupov na modelovanie budúcich úmrtností, ktoré sú spomínané v kapitolách 3 a 4.

2.2 Typy rizika

Aby dokázal penzijný fond alebo poisťovňa pokryť budúce záväzky voči svojim poistníkom, musia si udržovať portfólio aktív, ktoré ďalej investujú, aby im generovalo výnosy. Sú teda vystavený rizikám na strane aktív rovnako ako na strane záväzkov. Na strane aktív to sú investičné riziká, ako napr. equity risk, riziko úrokových mier, kreditné riziko. Na strane záväzkov to je predovšetkým riziko dlhovekosti a úrokových mier, ale aj riziko inflácie, ak sú anuity viazané na infláciu. Pri správnom ohodnotení celkového rizika by mal model zahrňovať všetky tieto rizikové faktory. Naproti iným typom rizík týkajúcich sa záväzkov, ako riziko úrokových mier a inflácie, je riziko dlhovekosti trendové riziko.

V ďalšom texte si uvedieme viaceré typy rizika a niektoré aj popíšeme.

Finančné a demografické riziká

Je vhodné rozlišovať medzi *finančnými rizikami* a *demografickými rizikami*.

Finančné riziká spočívajú na pohyboch v cenách aktív, ktoré sú obchodované na finančných trhoch. Sem patrí napr. kreditné riziko, riziko úrokových mier, inflácie a ostatné investičné riziká. Tieto riziká sú známe už dávno a je dostupné množstvo historických dát, pomocou ktorých je možné ich ohodnotiť.

Demografické riziká sú naproti tomu spojené s podkladovou populáciou portfólia, ako už veľa krát spomínané riziko dlhovekosti a úmrtnosti. Potom sem patrí napr. riziko predčasného odchodu do dôchodku alebo tzv. *lump sum election risk*, čo znamená možnosť zvoliť si hotovosť namiesto doživotnej anuity. Riziko spočíva v tom, že túto možnosť si vyberú práve jedinci s nižšou očakávanou dobou života a anuitu budú poberať práve tí, u ktorých sa očakáva nadpriemerná doba dožitia.

Medzi demografické riziká patrí aj *populačné riziko*, čo je riziko spojené s výberom populácie do portfólia. Bežne používané úmrtnostné tabuľky sú založené väčšinou na národných populáciách. Populácia v portfóliu však môže byť dosť odlišná od národnej, čo sa týka príslušnosti k rôznym socio-ekonomickým skupinám, alebo regiónom a z toho plynú aj rozdiely v úmrtnosti.

Riziko a budúci vývoj úmrtnosti

Správne určenie budúceho vývoja úmrtnosti je spojené s nasledovnými rizikami, ktoré si však nebudeme podrobnejšie rozpisovať:

- *riziko volatility* - rôzne populácie vykazujú rôznu volatilitu úmrtnosti, mení sa tiež s vekom
- *sample risk* - štatistická neistota, malé populácie môžu mať inú úmrtnosť ako národný priemer, s veľkosťou portfólia riziko klesá
- *riziko prudkého nárastu úmrtnosti* - v prípade epidémie alebo prírodnej katastrofy nastane prudký nárast úmrtnosti
- *trendové riziko* - dlhodobé riziko, predpovedané úmrtnosti sa môžu vyvíjať značne odlišne od realizovaných úmrtností.

Modelové a parametrické riziko

Výber správneho modelu je veľmi dôležitý. Pri jeho výbere treba zohľadňovať za akým účelom potrebujeme predpovedať pravdepodobnosti úmrtia. Penzijné fondy, ktoré nás v tejto práci zaujímajú najviac, nemusia zahrňovať riziko prudkého nárastu úmrtnosti, ale trendové riziko zohráva v tomto prípade dôležitú úlohu. Riziko spojené s výberom modelu nazývame *modelové riziko*.

Aj pri výbere správneho modelu je stále riziko, že pri jeho kalibrácii použijeme nesprávnu množinu dát, čím môžeme dostať odlišné parametre, čo sa prejaví na očakávaných budúcich mierach úmrtnosti. Tento typ rizika nazývame *parametrické riziko*.

2.3 Transfer rizika

Z dôvodov spomenutých už v úvode, a to nové regulatórne požiadavky *Solvency II*, je v súčasnosti stále väčší dopyt po transferi rizika dlhovekosti. Vhodnou možnosťou pre transfer a zaistenie (hedging) rizika dlhovekosti sú kapitálové trhy. Uvedme si najvýznamnejšie subjekty na kapitálových trhoch s rizikom dlhovekosti:

- Penzijné fondy majú vysokú expozíciu voči riziku dlhovekosti. Na rozdiel od poisťovní nemajú žiadnu formu prirodzeného hedgingu vo svojich záväzkoch. Je pre nich veľmi dôležité, aby mali k dispozícii najnovšie dáta o zmenách dlhovekosti a mohli správne ohodnotiť hodnotu potrebných rezerv. Transfer rizika na kapitálové trhy je pre nich možnosť, ako si zaistiť výšku svojich záväzkov.
- Banky napomáhajú transferu rizika úmrtnosti obchodovaním s produktmi zameranými na dlhovekosť. Pri oceňovaní produktov, ako napr. swapov a forwardov na riziko dlhovekosti sa banky spoliehajú na dostupnosť úmrtnostných dát aj v budúcnosti.
- Poistovatelia poskytujúci životné anuity majú riziko dlhovekosti tiež vo svojich záväzkoch. Podľa IFRS štandardov a Solvency II, podobne ako penzijné fondy, budú musieť reportovať riziko dlhovekosti podobne ako iné riziká. K tomu opäť potrebujú spoľahlivé predpovede budúceho vývoja úmrtnosti.
- Typickí investori do dlhovekosti sú zaistovne. Avšak pri zjednodušení a jasnejších pravidlách na trhoch s rizikom úmrtnosti majú záujem o túto formu aj iní investori, ako napr. hedgové fondy, Investment-Linked-Securities fondy a ďalší. Hlavná výhoda je minimálna korelácia s inými triedami aktív a atraktívne výnosy.

Na kapitálových trhoch je možnosť investovať napr. do sekuritizovaných cenných papierov spojených s produktmi poistenia, tzv. *Insurance Linked Securities* (ILS). Tento trh je dnes už dobre rozvinutý, avšak jeho čiastočný útlm nastal po finančnej kríze, ako pri všetkých sekuritizovaných produktoch. Pre našu prácu podstatnejšou možnosťou investovania sú produkty viazané na nejaký index. V princípe existujú 2 druhy finančných produktov na transfer rizika dlhovekosti založeného na indexoch:

- index-linked swapy a forwardy,
- index-linked dlhopisy.

V ďalšom texte si v skratke povieme čo je zaistenie a spomenieme niektoré pokusy o transfer rizika, následne si povieme niečo o efektívite hedgingu a ku koncu sa budeme venovať *q*- a *s-forwardu*, ktoré sú typické príklady na produkty založené na indexoch dlhovekosti. Väčšina týchto poznatkov platí nielen pre zaistenie dlhovekosti, ale aj iných finančných aktív.

2.3.1 Hedging

Zaistenie, často sa používa aj anglický pojem *hedging*, znamená vstúpiť do opačnej expozície v riziku, ako je portfólio. Pri zmene hodnoty podkladového aktíva sa straty a výnosy na portfóliu do určitej miery vyrovnajú. Pred vstupom do takejto expozície sa vyžaduje ohodnotenie prínosov zníženia rizika a nákladov na hedging pre portfólio, ktoré chceme zaistiť. Ako výhody hedgingu môžeme spomenúť nižšie kapitálové požiadavky, nižšie riziko insolvenčie, alebo uvoľnenie kapitálu za účelom jeho investovania tam, kde prináša väčší potenciálny výnos. Náklady hedgingu sa delia na *priame a náklady príležitosti*. Priame sú napr. náklady na swap, náklady príležitostí sú dané hodnotou potenciálneho zisku, ak by sa podkladové aktívum vhodne vyvíjalo.

2.3.2 Doterajšie skúsenosti so zaistením rizika úmrtnosti a dlhovekosti

Pre investorov do týchto typov rizika je k dispozícii len málo typov produktov. Čo sa týka rizika úmrtnosti, k najrozšírenejším patria tzv. *cat-bonds*, čo sú dlhopisy na katastrofické riziko spojené s vysokou úmrtnosťou, ako napr. chrípková epidémia. Vydávali ich väčšinou poisťovne. Zoznam takýchto dlhopisov, ktoré boli obchodované na trhu od roku 2003 do 2007 je možné nájsť v tabuľke na obr. č. 2.1. Pri riziku dlhovekosti boli pokusy preniesť ho na investorov menej časté a neúspešné. Možnú štruktúru dlhopisov vzťahujúcich sa na dlhovekosť navrhli prvýkrát vo svojej práci [4] Blake a Burrows. Pokus vydať dlhopis na úmrtnosť uskutočnila v roku 2004 aj Európska investičná banka. Tento sa však stretol s nezaujmom investorov kvôli nevýhodnej štruktúre, nízkym výnosom ako aj kvôli nedostatočným schopnostiam rozoznať a ohodnotiť riziko s investíciou spojené.

Ďalšia možnosť sú trhy so životnými poisťkami (*life settlements market*). Tieto existujú v niektorých západných krajinách už dlhú dobu. Ide o transakcie, kde jednotlivец nemá záujem o daný typ poisťky, a namiesto zrušenia a prijatia odkupného ju predá investorom za sumu prevyšujúcu odkupné. V posledných rokoch pred krízou sa začali tieto poisťky pomocou sekuritizácie posúvať ďalej na ďalších investorov, ale táto štruktúra bola dosť neprehľadná. S nástupom finančnej krízy sa tento vývoj pribrazil.

Podľa vývoja na trhu so životnými poisťkami sa dá očakávať, že riziko dlhovekosti je atraktívna forma investície pre náročnejších investorov, ktorí hľadajú investičné možnosti nekorelované s inými aktívami. Je len otázkou času, kedy bude aj riziko dlhovekosti plynúce z produktov poisťovní a penzijných fondov

Issue	Issuer	Size	Issue date	Tenor	Attachment	Exhaustion	Investor cpn	Rating	Underlying Population
Vita Capital I	SwissRe	\$400mm	Dec 2003	3yr	130%	150%	L + 135bps	A+/A3	US (70%), UK (15%), France (7.5%), Italy (5%), Switzerland (2.5%)
Vita Capital II	SwissRe								
Class B		\$62mm	Apr 2005	5yr	120%	125%	L + 90bps	A/Aa3	US (62.5%), UK (17.5%), Germany (7.5%), Japan (7.5%) and Canada (5%)
Class C		\$200mm	Apr 2005	5yr	115%	120%	L + 140bps	A-/A2	
Class D		\$100mm	Apr 2005	5yr	110%	115%	L + 190bps	BBB/Baa2	
Tartan Capital	ScottishRe								
Class A		\$75mm	May 2006	3yr	115%	120%	L + 19bps	AAA/Aaa	US
Class B		\$80mm	May 2006	3yr	110%	115%	L + 300bps	BBB/Baa3	
Osiris Capital	Axa								
Class B1		€100mm	Nov 2006	4yr	114%	119%	E + 20bps	AAA/Aaa	France (60%), Japan (25%), and US (15%)
Class B2		€50mm	Nov 2006	4yr	114%	119%	E + 120bps	A-/A3	
Class C		\$150mm	Nov 2006	4yr	110%	114%	L + 285bps	BBB/Baa2	
Class D		\$100mm	Nov 2006	4yr	106%	110%	L + 500bps	BB+/Ba1	
Vita Capital III	SwissRe								
Class 1B		\$90mm	Jan 2007	4yr	120%	125%	L + 110bps	A	US (62.5%), UK (17.5%), Germany (7.5%), Japan (7.5%), Canada (5.0%)
Class 2B		\$50mm	Jan 2007	5yr	120%	125%	L + 112bps	A	
Class 3B		€30mm	Jan 2007	4yr	120%	125%	E + 110bps	A	
Class 4A		\$100mm	Jan 2007	4yr	125%	145%	L + 21bps	AAA	
Class 5A		\$100mm	Jan 2007	5yr	125%	145%	L + 20bps	AAA	
Class 5B		\$50mm	Jan 2007	5yr	120%	125%	L + 21bps	AAA	
Class 6A		€55mm	Jan 2007	4yr	125%	145%	E + 21bps	AAA	
Class 6B		€55mm	Jan 2007	4yr	120%	125%	E + 22bps	AAA	
Class 7A		€100mm	Jan 2007	5yr	125%	145%	E + 80bps	AA-	

Source: Bloomberg, Vita, Tartan and Osiris Offering Circulars, Investor Presentations. Latest Bloomberg data used for rating verification
L = Libor, E = Euribor

Obr. 2.1: Zoznam dlhopisov k riziku úmrtnosti, tzv. cat-bonds, a niektoré ich vlastnosti

dostupné investorom. Tí však najprv potrebujú spoločnú platformu, na základe ktorej budú schopní ohodnotiť riziko a výnosy takýchto investícií.

2.3.3 Efektívny hedging

Na ohodnotenie prínosov hedgingu je potrebné poznať jeho efektivitu. To zahrňuje analýzu rizikových charakteristík expozície, ktorú chceme zaistiť a podkladového aktíva, na ktoré sa hedging vzťahuje. Formálne efektivita hedgingu môže byť definovaná ako miera, do akej sa zmeny hodnoty podkladovej expozície vzhľadom k uvažovanému riziku vyrovnajú so zmenami v hodnote použitého nástroja hedgingu.

Pri hodnotení efektivity sa často odvoláva na *perfektný hedging*. To je zaistenie, ktoré dokonale eliminuje dosah rizika na zaistené portfólio počas doby zaistenia. Teda zmeny v hodnote nástroja hedgingu sa úplne vyrovnajú so zmenami v zaistenom portfóliu vzhľadom k uvažovanému riziku. V skutočnosti takmer žiadne nástroje hedgingu nespĺňajú tieto kritéria, ale môžu byť blízko tohto cieľa.

Pri zhodnotení efektivity hedgu sa musíme najprv rozhodnúť, vzhľadom k akému riziku budeme efektivitu hedgu merať a akú mieru chceme použiť na meranie rizika. Často sa ako miera rizika používa *rozptyl* alebo *volatilita*.

Označme si U hodnotu podkladového aktíva, a H nech reprezentuje hodnotu nástroja hedgingu. Potom hodnota portfólia P pozostávajúceho z ich kombinácie je daná vzťahom

$$P = U + h \cdot H, \quad (2.1)$$

kde h je tzv. *hedge ratio*, ktoré udáva množstvo, hodnotu nástroja zaistenia, ktoré je potrebné na zaistenie jednotky podkladového aktíva. Pre trhy, kde sa hedging bežne využíva existuje množstvo štúdií, ako správne spočítať optimálne hedge ratio. Cieľom pri hedgingu je, aby sa hodnota portfólia P , v našom prípade záväzkov poisťovni, menila minimálne.

Ako miera efektivity hedgingu sa používa

$$R = 1 - MR(P)/MR(U),$$

kde MR sme označili mieru rizika. Ako sme už uviedli, najčastejšie sa využíva rozptyl alebo volatilita. Ak je hedge perfektný, R dosahuje hodnotu 0.

Optimalizovanie hodnoty R je možné vhodnou voľbou hedge ratio. Ak sa použije ako miera rizika volatilita za istých doplnujúcich predpokladov je možné ukázať, že optimálne hedge ratio (ozn. h^*) je dané ako:

$$h^* = -\rho \cdot (\sigma_U/\sigma_H), \quad (2.2)$$

kde σ_H a σ_U sú volatility hedgu, respektíve podkladového aktíva a ρ je ich vzájomná korelácia.

Pri využití optimálneho hedge ratio závisí efektivita len na korelácií medzi expozíciou a hedgom

$$R^* = 1 - \sqrt{1 - \rho^2}.$$

Príčiny neefektívnosti hedgu vyplývajú z rozdielov medzi populáciou portfólia a referenčnou populáciou nástroja hedgingu. Tou môže byť napr. populácia, na ktorej je založený LifeMetrics index (pozri kapitolu 5). Túto neefektívnosť je možné zmierniť opatrnou konštrukciou hedgu a pravidelným znovu nastavením jeho

parametrov. Stále však zostane určité riziko, tzv. *basis risk*, ktoré zahrňuje štatistickú výberovú odchýlku pri menších populáciách a rôzne rizikové charakteristiky národnej verzus podkladovej populácie. Štatistická chyba nie je problémom pri väčších populáciách. Čo sa týka rozdielov medzi populáciami, to je vlastne populačné riziko, o ktorom sme písali v sekcii 2.1. Tieto rozdiely môžu aj nemusia byť podstatné, závisí to vždy od špecifických vlastností populácie ako aj od vlastností hedgu. V sprievodnom dokumente ku Lifemetrics [3] sú na konkrétnych príkladoch porovnané rozdiely medzi niektorými populáciami získanými z portfólia poisťovní a národných populácií podľa Lifemetric indexu.

Z vyššie uvedeného vidieť, že prispôbením parametrov hedgu presne na našu populáciu je možné docieľiť vyššiu efektivitu hedgingu a vyhnúť sa napr. basis riziku. Ale vzniká tu podstatná nevýhoda, a to likvidita takéhoto nástroja hedgingu. Pri nízkej likvidite rastie aj jeho cena. Naproti tomu pri štandardizovaných hedgoch sú doba splatnosti, podkladová populácia a ďalšie parametre často odlišné od našej populácie, typicky sú založené na národnej populácii. To spôsobuje neefektivitu hedgingu. Výhodou je vysoká likvidita, nízka cena, kratšia doba splatnosti (tým sa znižuje kreditné riziko druhej strany v kontrakte). Vždy je potrebné ohodnotiť veľkosť basis rizika a prínos prispôbenia hedgu na naše portfólio. Podľa toho sa hľadá vhodný konsenzus medzi likviditou a prispôbením hedgu.

2.3.4 q- forward

Tento typ forwardu, označovaný aj ako úmrtnostný forward, je finančný derivát ktorý môže byť použitý, ak chceme vstúpiť do pozície voči riziku úmrtnosti. A keďže riziko dlhovekosti je len inverzné voči riziku úmrtnosti, môže byť využitý aj na zaistenie proti tomuto riziku. Označenie *q-forward* odkazuje na pravdepodobnosť úmrtia q_x , od ktorej priamo závisí expozícia forwardu. Prvýkrát sa tento nástroj hedgingu rizika dlhovekosti a úmrtnosti spomína v práci [5].

Organizácia LLMA na svojich stránkach (pozri ďalej kapitolu 5) zverejnila template pre použitie v transakciách a aj súbor v programe Excel použiteľný ako pomoc pri ohodnocovaní tohto forwardu ([6]).

Definícia

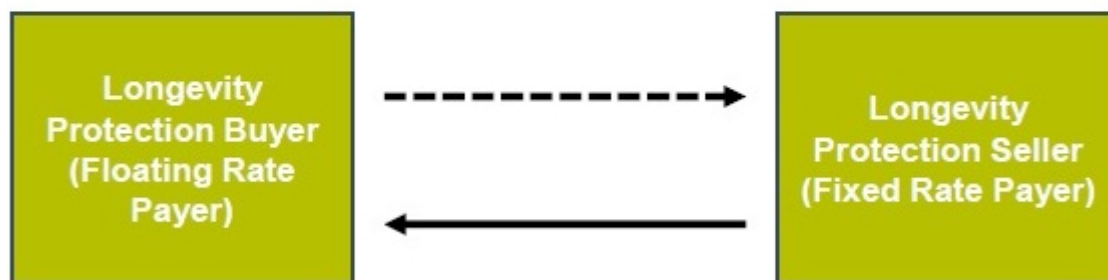
q-forward je dohoda medzi dvoma subjektmi o budúcej výmene hodnoty (istiny) prislúchajúcej realizovanej úmrtnostnej miere v daný budúci čas (floating leg) a fixnej hodnoty podľa úmrtnostnej miery dohodnutej na začiatku kontraktu (fixed leg).

Floating leg forwardu odkazuje na budúcu a teda neistú úmrtnostnú mieru danej populácie určenú nejakým indexom. Práve na tento účel je vhodný napr. Lifemetrics index alebo indexy Xpect, ktoré si popíšeme v kapitole 5, pretože je obecné akceptovaný a pravidlá jeho výpočtu sú pevne stanovené. Fixed leg je pevná miera, ktorú si jedna strana v kontrakte želá dostať výmenou za zaplatenie hodnoty podľa budúcej realizovanej miery úmrtnosti. Toky týchto platieb sú načrtnuté na obrázku č. 2.2.

Inak môžeme q-forward popísať ako bezkupónový fixed-for-floating úmrtnostný swap, ktorý spočíva len v jednej výmene platby v dobe splatnosti. Predajca ochrany pred dlhovekosťou je platca fixnej čiastky, kým kupujúci ochrany pred

q-forward flows

Notional x Realised Aggregate Mortality Rate



Notional x Fixed Aggregate Mortality Rate

Obr. 2.2: Cash-flow prislúchajúci q-forwardu ([5])

dlhovekosťou je platca plávajúcej čiastky. Takýto forward sa môže uskutočniť napr. medzi penzijným fondom alebo dôchodkovou poisťovňou (kupca ochrany pred dlhovekosťou) a životnou poisťovňou (predajca ochrany pred dlhovekosťou). Ak je realizovaná úmrtnostná miera nižšia ako očakávaná, potom kupec ochrany pred dlhovekosťou dostane platbu, ktorá mu kompenzuje straty na strane jeho záväzkov.

Fixná miera pri platbe je dohodnutá na začiatku, je to vlastne odhad budúcej hodnoty indexu zvýšený alebo znížený o náklady na vstup do transakcie a upravený o rizikovú prémie pre investora preberajúceho riziko. Pri oceňovaní takéhoto kontraktu sa ocení každá vetva (floating a fix leg) zvlášť, ich rozdiel je cena forwardu. Na začiatku platnosti kontraktu je očakávaná miera úmrtnosti rovná tej čo zafixujeme a tým pádom cena kontraktu je rovná 0. Podrobnejšie popisuje princíp oceňovania publikácia vydaná LLMA ([7]).

Pretože q-forward umožňuje vzájomné vynulovanie pohľadávok, v dobe splatnosti T sa uskutočňuje len jedna platba výšky P :

$$P = istina \times [q_{realizovana}(T) - q_{fix}(T)].$$

V prípade, ak je P kladné, kupec ochrany platí túto čiastku a opačne.

2.3.5 s- forward

Tento typ forwardu je v zásade veľmi podobný v predošlej sekcii opísanému q-forwardu. Prvýkrát bol popísaný o čosi skôr ako q-forward, v práci [8]. s-forward je dohoda medzi dvoma subjektmi o budúcej výmene hodnoty (istiny) prislúchajúcej realizovanej pravdepodobnosti prežitia nazývanej aj *survival rate* a fixnej

hodnoty dohodnutej na začiatku kontraktu. Označenie s - pochádza práve zo slova *survival*.

Survival rate, teda pravdepodobnosť prežitia na n rokov spočítame ako:

$${}_n p_x = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - q_{x+i}(t+i)),$$

kde $q_{x+i}(t+i)$ je jednoročná pravdepodobnosť úmrtia vo veku $x+i$ v čase $t+i$, a podobne ako predtým sa znova určí podľa hodnôt dopredu stanoveného typu indexu, napr. už spomínaného Lifemetric a Xpect indexu. Pri odhade ceny kontraktu, je znova potrebný vlastný odhad budúcej úmrtnosti. Na základe očakávaní o vývoji úmrtnosti zaujme subjekt príslušnú pozíciu v tomto forwarde.

3. Modely používané k predpovedaniu mortality

3.1 Základné delenie

Skúsenosti z posledných desaťročí jasne ukazujú, že úmrtnosť sa v čase mení, preto je vhodné pristupovať k modelovaniu úmrtnosti *dynamicky*. To znamená, že napr. očakávaná doba života vo veku x , označovaná \bar{e}_x v nedynamickom kontexte, bude odteraz reprezentovaná $\bar{e}_x(t)$ ako funkcia kalendárneho roku t a pod.

Neexistuje jednoznačná hierarchia a delenie medzi rôznymi metódami a modelmi používanými na predpovedanie úmrtnosti. Jeden z možných pohľadov je nasledujúci:

Prvú hlavnú skupinu prístupov k predpovedaniu úmrtnosti tvoria modely založené na *extrapolácii*, čo znamená odvodenie budúcich pravdepodobností úmrtí na základe dát z minulosti. Teda sa pritom predpokladá, že trend v dátach pozorovaný v minulosti bude pokračovať aj v budúcnosti. Pri takomto predpovedaní si však treba dať pozor, pretože nemusí brať do úvahy rôzne biologické faktory, pokroky v medicíne, alebo zmeny životného štýlu. Takéto zmeny nebývajú významné v kratšom časovom horizonte, preto modely založené na extrapolácii sú vhodnejšie na krátkodobé predpovede. Napriek tomu sa používajú aj pri dlhodobých predpovediach (Lee-Carterov model). Tieto modely patria medzi najčastejšie používané.

Druhá hlavná skupina spočíva v tom, že sa úmrtnosť rozdelí podľa príčiny úmrtia a predpovedajú sa miery úmrtnosti zvlášť. Tieto modely sa nazývajú *vysvetľujúce* alebo *príčinné*. Výhodu môže znamenať lepšie porozumenie príčinám zmien v úmrtnosti. Významný problém spočíva v tom, že medzi jednotlivými príčinami úmrtia existujú vzájomné vzťahy, ktoré je ťažké presne identifikovať, napriek tomu sa bežne používa predpoklad nezávislosti. Veľká nevýhoda je aj nespoľahlivosť rozdelených dát oproti agregovaným dátam, alebo problém určiť príčinu smrti u starších ľudí. Z uvedených príčin mnohí analytici radšej používajú predpovedanie len pomocou agregovanej miery úmrtnosti, teda tieto modely sa veľmi nevyužívajú.

Existujú aj iné prístupy k modelovaniu, ich stručný popis s prípadnými odkazmi na ďalšiu literatúru je možné nájsť v [3]. V ďalšom texte sa budeme venovať len extrapolatívnym modelom. Poznatky uvedené ďalej vychádzajú z knihy [1], v ktorej je možné nájsť podrobnejšie informácie s prípadnými odkazmi na práce iných autorov.

Extrapolatívne modely sú buď *stochastické* alebo *deterministické*. Základný rozdiel je v tom, že pri stochastickom prístupe k modelovaniu sa pozeráme na pozorované hodnoty ako na realizácie náhodných premenných, kým v deterministickom prístupe považujeme pozorované hodnoty za pevne dané čísla. Výhoda stochastického prístupu je v tom, že dokážeme určiť nielen bodové odhady, ale aj intervaly spoľahlivosti pre budúcu úmrtnosť. Nevýhoda je, že často potrebujeme vhodné štatistické predpoklady.

Značenie

Ak v ďalšom texte hovoríme o pozorovaniach úmrtnosti pre danú populáciu, tak tieto pozostávajú z pozorovaní pre rôzne veku, ktoré môžeme zahrnúť do množiny $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Každá pozorovaná veličina zahŕňa aj čas pozorovania, ktorý je z množiny $\mathbf{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$.

V prípade, ak sa jedná o odhady parametrov, označujeme ich $\hat{\mu}_x, \hat{k}_t$ a pod.

3.2 Redukčné faktory

Vzťah medzi pravdepodobnosťou úmrtia v čase t voči pravdepodobnosti úmrtia v danom čase \tilde{t} vo veku x môžeme vyjadriť:

$$q_x(t) = q_x(\tilde{t})R_x(t - \tilde{t}), \quad (3.1)$$

kde $t > \tilde{t}$. Veličinu $R_x(t - \tilde{t})$ nazývame *redukčný faktor*. Pokiaľ miera úmrtnosti v čase klesá, redukčný faktor by mal byť menší ako 1. Ak chceme vzťah zjednodušiť, môžeme predpokladať nezávislosť na veku x , tzn.:

$$R_x(t - \tilde{t}) = R(t - \tilde{t}). \quad (3.2)$$

Redukčné faktory predstavujú prístup k projekcii úmrtnosti založený na matematickej formule, iný možný prístup je grafická metóda. V oboch, z matematického hľadiska základných prístupoch k modelovaniu, deterministickom aj stochastickom, sa stretne s využitím redukčných faktorov.

3.3 Deterministické modely

Uvažujeme predpoklad, že hodnoty pozorované v minulosti (v množine rokov T) môžu byť preložené nejakým trendom, najčastejšie pomocou exponenciálnej funkcie, a tento trend bude pokračovať aj v budúcnosti. Potom stačí extrapolovať tento trend do budúcnosti, aby sme dostali želané odhady. Dôležitá je predovšetkým voľba množiny T . V prípadoch, keď máme k dispozícii pozorovania hlboko do minulosti, nemusí byť vhodné ich zahrnúť všetky, ale obmedziť sa na kratší časový úsek. Efekt pozorovaní dávno v minulosti by mal mať na predpoveď len malý vplyv, avšak pri ich zahrnutí do množiny T sa môže stať, že budúce hodnoty ovplyvnia výrazne.

3.3.1 Exponenciálna formula

Veľmi často sa používa jednoduchý prístup, ktorý predpokladá budúci vývoj logaritmu pravdepodobnosti úmrtia q_x ako lineárny. To znamená, že pre $h = 1, 2, \dots, n - 1$ existuje hodnota δ_x pre ktorú platí:

$$\ln q_x(t_{h+1}) - \ln q_x(t_h) \approx -\delta_x(t_{h+1} - t_h), \quad (3.3)$$

teda

$$\frac{q_x(t_{h+1})}{q_x(t_h)} \approx \exp(-\delta_x(t_{h+1} - t_h)), \quad (3.4)$$

po označení $r_x = \exp(-\delta_x)$:

$$\frac{q_x(t_{h+1})}{q_x(t_h)} \approx r_x^{t_{h+1}-t_h}. \quad (3.5)$$

K výpočtu vyrovnaných hodnôt $\hat{q}_x(t)$ je potrebné určiť parameter r_x , napr. pomocou metódy najmenších štvorcov. Často sa pritom uplatňuje obmedzenie $\hat{q}_x(t_n) = q_x(t_n)$.

Vzťah (3.5) naznačuje použitie extrapolatívneho vzťahu. Položíme $\tilde{t} = t_n$, potom

$$q_x(t) = q_x(\tilde{t})r_x^{t-\tilde{t}}.$$

Podľa vzťahu (3.1) vidíme, že redukčný faktor sa dá vyjadriť ako

$$R_x(t - \tilde{t}) = r_x^{t-\tilde{t}} = \exp(-\delta_x(t - \tilde{t})), \quad (3.6)$$

kde $t > t_n$. Existujú a v praxi sa aj používajú rôzne zovšeobecnenia exponenciálnej formule, ktoré v niečom vylepšujú vlastnosti základného modelu. Príklady použitia je v prípade záujmu možné nájsť v [1]. Tieto prístupy zastupujú tzv. *horizontálny prístup*, lebo spočívajú na analýze úmrtnostného profilu v čase.

3.3.2 Iné projekčné formule

Niekedy je vhodné použiť exponenciálnu funkciu na iné funkcie ako pravdepodobnosť úmrtia, alebo ich transformácie, ako je napr. šanca $\phi_x(t) = \frac{q_x(t)}{p_x(t)}$. Formula

$$\ln \frac{q_x(t)}{p_x(t)} = \alpha_x + \beta_x t \quad (3.7)$$

sa používa, ak pozorované zlepšenie úmrtnosti naznačuje lineárny priebeh logaritmu šance. To môžeme vyjadriť nasledovne:

$$q_x(t) = \frac{\exp^{\alpha_x + \beta_x t}}{1 + \exp^{\alpha_x + \beta_x t}}. \quad (3.8)$$

Nasledujúca formula reprezentuje lineárnu extrapoláčnú metódu:

$$q_x(t) = \alpha_x + \beta_x t, \quad (3.9)$$

kde $\beta_x < 0$ v prípade poklesu úmrtnosti. Bežne sa však nepoužíva, kvôli zjavnej nevýhode, že pre veľké t je predpovedaná záporná úmrtnosť.

3.3.3 Zákony úmrtnosti

Ak uvažujeme niektorý zo zákonov úmrtnosti, je možné vekovo-špecifickú intenzitu úmrtnosti vyjadriť ako funkciu závislú na niekoľkých parametroch, čím sa výrazne redukuje dimenzia pri odhade.

Uvažujeme napr. pravidlo popisujúce intenzitu úmrtnosti v dynamickom kontexte:

$$\mu_x(t) = \varphi(x, \alpha(t), \beta(t), \dots) \quad (3.10)$$

Pozorované dáta tvoria množinu

$$(\mu_x(t))_{x \in \mathbf{X}, t \in \mathbf{T}} = (\mu_x(t_1), \mu_x(t_2), \dots, \mu_x(t_n))_{x \in \mathbf{X}} \quad (3.11)$$

Pre každý kalendárny rok $t_h \in \mathbf{X}$ odhadnime parametre modelu

$$\mu_x(t_h) = \varphi(x, \alpha_h, \beta_h, \dots) \quad (3.12)$$

napr. metódou najmenších štvorcov, alebo metódou maximálnej vierohodnosti. Dostaneme tak množinu odhadnutých parametrov, v ktorej pomocou vhodnej matematickej formuly určíme parametre ako funkciu času:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \Rightarrow \alpha(t)$$

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \Rightarrow \beta(t)$$

...

Projekcia týmto spôsobom predstavuje *vertikálny prístup* k predpovedi úmrtnosti, lebo parametre sú odhadované postupne pre každý rok zvlášť. V prípade *diagonálneho prístupu* parametre budú závisieť na roku narodenia kohorty τ , inak postupujeme podobne.

Ako príklad si môžeme uviesť Gompertz-Makehamov zákon úmrtnosti, ktorý pri vertikálnom prístupe definujeme ako:

$$\mu_x(t) = A(t) + B(t)c(t)^x, \quad (3.13)$$

kde t je kalendárny rok.

3.4 Stochastické modely

Stochastický prístup berie do úvahy náhodnosť úmrtnosti. To znamená predovšetkým:

- pozorované miery úmrtnosti sú výstupy náhodných premenných reprezentujúcich minulé úmrtnosť,
- predpovedané miery úmrtnosti sú odhady náhodných premenných reprezentujúcich budúcu úmrtnosť.

Výsledok projekcie úmrtnosti zahŕňa bodové a intervalové odhady budúcich mier úmrtnosti, prípadne iných demografických ukazovateľov.

3.4.1 Age-period modely

Sem patria modely, ktoré pri ukazovateľoch úmrtnosti berú do úvahy len vek a čas (age-period), na ktoré sa vzťahuje príslušná veličina úmrtnosti. Najvýznamnejší v tejto skupine je určite Lee-Carterov model, ktorý predpokladá, že intenzitu úmrtnosti je možné zapísať v tvare:

$$\ln \mu_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t. \quad (3.14)$$

Ďalší významný model je Cairns-Blake-Dowdov model v tvare:

$$\ln \frac{q_x(t)}{p_x(t)} = \kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]} x. \quad (3.15)$$

Podrobný popis týchto modelov vrátane možností odhadu parametrov uvedieme v kapitole 4.

3.4.2 Age-period-cohort modely

Tieto modely zahrňujú oproti predchádzajúcim modelom navyše kohortný efekt, teda rok kedy boli uvažovaní jedinci narodení. Modely zahrňujúce vek, periódu aj kohortný efekt označujeme v skratke *APC modely*. Ak si označíme c rok narodenia kohorty, platí vzťah:

$$c = t - x,$$

kde t je čas, ku ktorému sa vzťahuje úmrtnosť a x je vek osoby. Je dobré si uvedomiť, že periodické efekty zahrňujú súčasné faktory ovplyvňujúce úmrtnosť, ako napr. stav zdravotníctva v krajine. Naproti tomu, kohortný efekt zahrňuje historické faktory, napr. generácie ovplyvnené I. alebo II. svetovou vojnou majú vyššiu úmrtnosť.

Problém pri implementácii projekčných modelov zahrňujúcich kohortný efekt je potreba dáť hlboko do minulosti, ktoré sú len zriedka prístupné.

Medzi APC modely patrí často používaný *zovšeobecnený Lee-Carterov model*, ktorý vo svojej práci [9] navrhli Renshaw a Haberman. Model sa vyjadruje v nasledovnej forme:

$$\log \mu_x(t) = \alpha_x + \beta_x^{(0)} \iota_{t-x} + \beta_x^{(1)} \kappa_t, \quad (3.16)$$

ktorá má na rozdiel od modelu (3.14) navyše člen ι_{t-x} vyjadrujúci kohortný efekt v dynamickom zmysle, ktorý je závislý na roku narodenia. Veľkosť vplyvu tohto kohortného efektu sa odlišuje podľa veku členom $\beta_x^{(0)}$. Podrobnejší popis nájdeme opäť v kapitole 4.

Zjednodušenie tohto modelu je *Currie Age-Period-Cohort Model*, navrhnutý v [10]. Predpokladá, že vekový, periodický a kohortný efekt ovplyvňujú úmrtnosť nezávisle. Môže byť vyjadrený vo forme:

$$\log \mu_x(t) = \alpha_x + \iota_{t-x} + \kappa_t. \quad (3.17)$$

3.4.3 P-spliny

Spliny sú funkcie definované po častiach polynómami. Keď všetky tieto polynómy majú stupeň najviac r , hovoríme, že *spline je stupňa r* . Je možné ukázať, že pre daný interval a daných m uzlov splinu, množina splinov stupňa r vytvára vektorový priestor s dimenziou $d = m + r + 1$. Každý spline z tohto priestoru je možné vyjadriť ako lineárnu kombináciu prvkov bázy priestoru. Ak má takýto vektorový priestor dimenziu d , počet prvkov bázy bude tiež rovný d . Pre danú bázu sú koeficienty lineárnej kombinácie určené jednoznačne. Dôležitý je však výber takejto bázy, čo je základný krok v procese vyrovnávania pomocou splinov.

Uvedme si príklad: požadujeme, aby spline bol "čo najbližšie" k daným dátam:

$$(x_1, z_1), (x_2, z_2), \dots, (x_n, z_n),$$

kde x_i označuje veku a z_i príslušnú mieru úmrtnosti. Ako mieru kvality odhadu môžeme zvoliť súčet štvorcov reziduí:

$$\sum_{h=1}^n [s(x_h) - z_h]^2,$$

kde funkcia s označuje spline, ktorý chceme odhadnúť. Tento je možné vyjadriť ako lineárnu kombináciu prvkov bázy b_1, b_2, \dots, b_d a teda naša úloha je minimalizovať

funkciu

$$G(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_d) = \sum_{h=1}^n \left[\left(\sum_{j=1}^d \gamma_j b_j \right) - z_h \right]^2.$$

Pri minimalizácii takejto funkcie môžu v praxi nastať rôzne výpočtové problémy. Výpočtovú náročnosť je ale možné redukovať výberom vhodnej bázy, konkrétne takej zloženej z tzv. *B-splínov*.

Vráťme sa k vyrovnávaniu úmrtnosti pomocou *P-splínov*. Základom je 2-rozmerná metóda vyrovnávania založená na B-splínoch zavedených v [11]. Formálnu definíciu B-splínu a jeho presnejší popis a využitie je možné nájsť napr. v [12]. Idea použitia jednorozmerných B-splínov spočíva vo výbere bázy tak, aby každý spline v nej bol nulový mimo určitého intervalu. Dvojrozmernú verziu jednorozmerných B-splínov dostaneme vynásobením príslušných prvkov jednorozmerného prípadu. Model bude:

$$\log \mu_x(t) = \sum_{i,j} \theta_{i,j} B_{i,j}(x, t), \quad (3.18)$$

kde $B_{i,j}(x, t) = B_i(x) \cdot B_j(t)$ a kde $B_{i,j}(x, t)$ a $\theta_{i,j}$ sú parametre odhadnuteľné z dát, B_i, B_j sú príslušné jednorozmerné splíny. B-splíny môžu poskytnúť veľmi dobrý odhad, avšak na úkor hladkosti výslednej krivky.

Metóda P-splínov sa snaží prekonať práve tento problém, zavedením penalizovanej vierohodnostnej funkcie. Pre Lee-Carterov model má takáto funkcia tvar:

$$PL(\theta) = L(\theta) - \lambda_x P_x(\theta) - \lambda_t P_t(\theta), \quad (3.19)$$

kde λ_x, λ_t sú váhy odhadnuté z dát a $P_x(\theta), P_t(\theta)$ sú penalizačné funkcie. Typická voľba pre kvadratické penalizačné funkcie je

$$P_x(\theta) = \sum_{i,j} (\theta_{i,j} - 2\theta_{i-1,j} + \theta_{i-2,j})^2, \quad (3.20)$$

$$P_t(\theta) = \sum_{i,j} (\theta_{i,j} - 2\theta_{i,j-1} + \theta_{i,j-2})^2. \quad (3.21)$$

Nápad použiť P-splíny nie len na vyrovnávanie úmrtnostných dát, ale aj na predpovedanie navrhli prvý krát CMIB (Continuous Mortality Investigation Bureau) v roku 2005. Vďaka tomu sa vo Veľkej Británii P-Spline model teší veľkej obľube. CMIB ho totiž implementovali do voľne prístupného softwaru. Tento software beží na báze R, umožňuje aj odhad parametrov a predpoveď Lee-Carterovho modelu, ale s obmedzenými špecifikáciami pri predpovedaní časových radov pomocou ARIMA modelu. Detailnejší pohľad na model však ukázal, že sa skôr hodí na vyrovnávanie historických dát ako na projekcie do budúcnosti, viď [13].

4. Stochastické modely a ich vzájomné porovnanie

V tejto kapitole si spomenieme niektoré významnejšie modely, ktoré patria k stochastickým modelom. Zameráme sa hlavne na Lee-Carterov a Cairns-Blake-Dowdov model a rozšírený Lee-Carterov model (niekedy nazývaný Renshaw-Habermanov model). Načrtujeme ich výhody a nevýhody a ukážeme možnosti ako pomocou týchto modelov predpovedať budúcu úmrtnosť. Vysvetlíme aj spôsob ako je možné získať intervaly spoľahlivosti. Táto kapitola vychádza z prác [1] a [3].

4.1 Lee-Carterov model

V roku 1992 navrhli Ronald D. Lee a Lawrence R. Carter v práci [14] extrapolatívny model, vhodný na predpovedanie úmrtnosti. Tento model sa väčšinou používa na dlhodobé predpovede agregovaných veličín úmrtnosti, ako napr. očakávaná doba života. Vďaka tomu našiel model svoju obľubu u aktuárov zaujímavých sa o výpočty životných anuit a rezerv. Model nie je určený na spoľahlivú projekciu úmrtnostných mier pre konkrétne veky. Pre konkrétne veky, alebo aj ak nás zaujímajú zmeny v kratšom časovom úseku, je vhodné použiť iný model. Lee-Carterov model patrí dnes k najčastejšie používaným modelom, dočkal sa mnohých rozšírení a úprav ([15]), aj od samotného autora ([16]).

Lee-Carterová metodológia sa ukázala ako elegantné a efektívne riešenie na predpovedanie demografických ukazovateľov, vrátane úmrtnosti. Získala si široké uznanie, o čom svedčí aj fakt, že je používaná ako benchmarková metóda americkým štatistickým úradom (US Bureau of the Census).

V tejto kapitole uvažujeme predpoklad konštantnej intenzity úmrtnosti v rámci roku, teda

$$\mu_{x+\xi_1}(t+\xi_2) = \mu_x(t) \quad (4.1)$$

pre $0 \leq \xi_1, \xi_2 < 1$ a $t \geq 0, x \geq 0$. Za platnosti 4.1 platí (porovnaj s (1.5)):

$$\mu_x(t) = m_x(t). \quad (4.2)$$

Model Lee-Cartera používa logaritmus intenzity úmrtnosti, pre ktorý predpokladá:

$$\ln \mu_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t. \quad (4.3)$$

Parametry môžeme interpretovať nasledovne:

α_x je vekovo špecifický parameter nezávislý na čase, udáva priemernú úroveň úmrtnosti,

β_x opisuje citlivosť miery úmrtnosti $m_x(t)$ podľa veku na zmenu parametru κ_t , κ_t sa jediný mení v priebehu času, predstavuje úroveň úmrtnosti v čase t .

Pri aplikácii modelu sa najprv odhadnú parametre $\alpha_x, \beta_x, \kappa_t$ najčastejšie pomocou ďalej opísaných metód- metódy najmenších štvorcov alebo metódy maximálnej vierohodnosti. Dostaneme odhady $\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{\kappa}_t$ a ďalej pri predpovedi do budúcnosti modelujeme hodnoty parametru κ_t ako časový rad.

Pre predpovede začínajúce rokom t_n , pre $t > t_n$ platí:

$$m_x(t) = \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \kappa_t) = m_x(t_n) \exp \left[\hat{\beta}_x (\kappa_t - \hat{\kappa}_{t_n}) \right].$$

Uvedomme si, že miera úmrtnosti $m_x(t)$ je pre $t > t_n$ modelovaná ako náhodný proces spočívajúci na náhodnom procese κ_t , z ktorého môžeme spočítať intervaly spoľahlivosti aj pre predpovedané hodnoty $m_x(t)$. Celý postup si podrobne popíšeme v ďalšom texte.

Parametre modelu nie je možné určiť jednoznačne, preto je vhodné uvažovať určité obmedzenia. Voľba vhodných obmedzení je subjektívna záležitosť, najčastejšie sa v literatúre používajú obmedzenia (používané aj samotnými autormi LC modelu):

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_1}^{t_n} \kappa_t &= 0, \\ \sum_{x=x_1}^{x_m} \beta_x &= 1, \end{aligned} \quad (4.4)$$

ktoré budeme využívať aj my. Dôležité je, že voľba obmedzení nemá vplyv na kvalitu modelu.

4.1.1 Metóda najmenších štvorcov

Na odhad parametrov modelu existuje niekoľko spôsobov, často používaný je odhad *metódou najmenších štvorcov*, ktorý navrhujú Lee a Carter v [14].

Uvažujme štatistický model:

$$\ln \hat{m}_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \epsilon_x(t) \quad (4.5)$$

pre pozorované veki $x \in \mathbf{X}$ a príslušné roky pozorovaní $t \in \mathbf{T}$. Tu je $\hat{m}_x(t)$ skutočne pozorovaná miera úmrtnosti a $\epsilon_x(t)$ je náhodná veličina s nulovou strednou hodnotou a konštantným rozptylom σ_ϵ^2 , ktorá zahrňuje ostatné vplyvy nezahrnuté v modeli.

Práve predpoklad homoskedasticity, teda konštantného rozptylu pre všetky veki je sporný, pretože vo vyšších vekoch je nižší počet úmrtí a teda aj väčší rozptyl. Ak však používame dáta, kde bola miera úmrtnosti $\hat{m}_x(t)$ vo vysokých vekoch dosiahnutá extrapoláciou, predpoklad homoskedasticity môžeme považovať za splnený. Ak sa naviac pri predpovedi zameráme len na vyšší vek (napr. 60 a viac), tak rozdiely v rozptyle sú naozaj zanedbateľné. Uvedomme si, že model (4.5) nie je klasický regresný model, pretože na jeho pravej strane nie sú žiadne pozorovateľné veličiny.

Funkcia, ktorú chceme minimalizovať má tvar:

$$O_{LS}(\alpha, \beta, \kappa) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} (\ln \hat{m}_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2 \quad (4.6)$$

Najprv odhadneme parameter α_x : položíme $\frac{\partial}{\partial \alpha_x} O_{LS}$ rovné 0 a ďalej upravujeme

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} (\ln \hat{m}_x(t) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t) = 0 \quad (4.7)$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} \ln \hat{m}_x(t) - \sum_{t=t_1}^{t_n} \alpha_x = \beta_x \sum_{t=t_1}^{t_n} \kappa_t. \quad (4.8)$$

Využijeme obmedzenie (4.4)

$$\sum_{t=t_1}^{t_n} \ln \hat{m}_x(t) = (t_n - t_1 + 1)\alpha_x$$

a dostaneme odhad

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{t_n - t_1 + 1} \sum_{t=t_1}^{t_n} \ln \hat{m}_x(t). \quad (4.9)$$

Pri určení odhadu parametrov β_x a κ_t používajú Lee a Carter v práci [14] postup pomocou metódy *Singular Value Decomposition* (SVD).

Singular value decomposition

Uvedme si nasledovnú vetu vo variante, v ktorej uvažujeme len reálne čísla. V našom prípade sa o variantu s komplexnými číslami nemusíme zaujímať.

Veta 1 *Nech M je reálna $m \times n$ matica s hodnotou r . Potom existuje rozklad*

$$M = U\Sigma V^T \quad (4.10)$$

kde U je $m \times m$ ortogonálna matica, Σ je $m \times n$ diagonálna matica s nezápornými číslami na diagonále a V je ortogonálna $n \times n$ matica. Diagonálne zložky matice Σ sa nazývajú *singulárne hodnoty matice M* . Počet nenulových *singulárnych hodnôt*, r , je rovný *hodnoti matice M* . *Stĺpce matice U (resp. V) nazývame ľavé (resp. pravé) *singulárne vektory*. Platí, že*

- *ľavé *singulárne vektory M sú vlastné vektory matice MM^T ,**
- *pravé *singulárne vektory M sú vlastné vektory matice $M^T M$,**
- *nenulové *singulárne hodnoty matice M sú odmocniny z nenulových vlastných hodnôt matíc MM^T a $M^T M$.**

Dôkaz je možné nájsť napr. v práci ([17]).

Zvyčajne sa diagonálne zložky matice Σ zoradia podľa veľkosti, v takom prípade je matica určená jednoznačne. Maticu M je možné aproximovať pomocou h najväčších hodnôt

$$M = U\Sigma V^T \approx \sum_{i=1}^h \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \quad (4.11)$$

kde σ_i označujeme diagonálne zložky matice Σ . Vektory \mathbf{u}_i a \mathbf{v}_i označujú pravé, resp. ľavé *singulárne vektory matice M* .

Vráťme sa k odhadu parametrov. Aplikujme SVD rozklad na maticu centrovanej logaritmov miery úmrtnosti $\mathbf{Z} = (\ln \hat{m}_x(t) - \hat{\alpha}_x)_{x \in X, t \in T}$. Požadované odhady $\hat{\beta}_x$ a $\hat{\kappa}_t$ minimalizujú:

$$\tilde{O}_{LS}(\beta, \kappa) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} (z_x(t) - \beta_x \kappa_t)^2 \quad (4.12)$$

Riešenie získame SVD rozkladom matice \mathbf{Z} . Zavedme štvorcovú maticu $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}$ s rozmermi $(t_n - t_1 + 1) \times (t_n - t_1 + 1)$, označme \mathbf{u}_1 vlastný vektor prislúchajúci jej najväčšej vlastnej hodnote λ_1 . Ekvivalentne zavedme maticu $\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T$ a jej vlastný

vektor \mathbf{v}_1 . Najlepšia aproximácia matice \mathbf{Z} v zmysle metódy najmenších štvorcov s využitím len prvej najväčšej hodnoty je:

$$\mathbf{Z} \approx \mathbf{Z}^* = \sqrt{\lambda_1} \mathbf{v}_1 \mathbf{u}_1^T.$$

Z toho môžeme odvodiť záver:

$$\hat{\beta} = \frac{\mathbf{v}_1}{v} \quad \text{a} \quad (4.13)$$

$$\hat{\kappa} = \sqrt{\lambda_1} v \mathbf{u}_1, \quad (4.14)$$

kde sme v označili súčet po zložkách vektoru \mathbf{v}_1 , predpokladáme $v \neq 0$. $\hat{\beta}$, resp. $\hat{\kappa}$ označuje odhadnutý vektor parametrov $(\hat{\beta}_x)_{x \in \mathbf{X}}$, resp. $(\hat{\kappa}_t)_{t \in \mathbf{T}}$.

Pôvodný Lee-Carterov model zahŕňa len prvú zložku singulárneho rozkladu matice \mathbf{Z} . V princípe je možné zahrnúť aj viac zložiek SVD rozkladu. Úplný model má tvar:

$$\ln \hat{m}_x(t) = \alpha_x + \sum_{j=1}^r \beta_x^{[j]} \kappa_t^{[j]}, \quad (4.15)$$

kde r je hodnota matice \mathbf{Z} a $\beta_x^{[j]}, \kappa_t^{[j]}$ dostaneme ekvivalentne ako (4.13), (4.14) pomocou zvyšných vlastných hodnôt a vektorov matice \mathbf{Z} .

Niektorí autori skúšali použiť vyšší rád ako 1, napr. v práci [18] testujú autori zahrnutie druhého rádu do modelu, ale nepodarilo sa im ukázať, že by sa zlepšila kvalita modelu.

Alternatívou k odhadu pomocou SVD rozkladu je Newton-Raphsonová metóda, viď [1].

Ako sme už vyššie naznačili, teraz keď máme odhad všetkých parametrov, je možné odhadnúť parametre $\hat{\kappa}_t$ znova. Dôvod je v možnom vzniku veľkých nepresností pri používaní logaritmu miery úmrtnosti. Ako bolo navrhnuté v práci [16], nemal by byť žiadny rozdiel medzi skutočným počtom úmrtí v danom roku a očakávaným počtom podľa modelu. Preto novoodhadnuté hodnoty $\hat{\kappa}_t$ musia $\forall t \in T$ spĺňať rovnosť:

$$\sum_{x=x_1}^{x_m} D_{xt} = \sum_{x=x_1}^{x_m} E_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t) \quad (4.16)$$

kde E_{xt} je *centrálna expozícia úmrtnosti*, teda veľkosť populácie čeliacej riziku smrti vo veku x v čase t , D_{xt} je počet mŕtvych vo veku x a v čase t , rovnako ako v sekcii 1.2. Rovnica (4.16) nemá explicitné riešenie, je potrebné postupovať numericky, napr. pomocou Newton-Raphsonovho algoritmu.

Parametre odhadnuté jednotlivými metódami nespĺňajú obmedzenia na jednoznačnosť (4.4). Preto nahradíme:

$$\alpha_x + \beta_x \bar{\kappa} \mapsto \alpha_x, \quad (4.17)$$

$$(\kappa_t - \bar{\kappa}) \beta_{\bullet} \mapsto \kappa_t, \quad (4.18)$$

$$\beta_x / \beta_{\bullet} \mapsto \beta_x, \quad (4.19)$$

kde $\bar{\kappa}$ je priemer pôvodných κ_t a β_{\bullet} je súčet pôvodných β_x .

4.1.2 Metóda maximálnej vierohodnosti

Iná možnosť odhadu parametrov je pomocou *metódy maximálnej vierohodnosti*, čo je vlastne alternatívny model k Lee-Carterovmu modelu navrhnutý v práci [18]. Predpokladajme platnosť rovnosti (4.1). Pri takomto odhade musíme mať k dispozícii počty úmrtí D_{xt} a k tomu zodpovedajúce expozície v riziku E_{xt} . Pri tejto metóde predpokladáme, že D_{xt} má Poissonovo rozdelenie so strednou hodnotou $E_{xt}\mu_x(t) = E_{xt}\exp(\alpha_x + \beta_x\kappa_t)$, ktorá zodpovedá tomu, že platí Lee-Carterov model (4.3). To zapíšeme ako:

$$D_{xt} \sim Po(E_{xt}\exp(\alpha_x + \beta_x\kappa_t)). \quad (4.20)$$

Môžeme si zostaviť vierohodnostnú funkciu:

$$L(\alpha, \beta, \kappa | D_{xt}, E_{xt}) = \prod_{x=x_1}^{x_m} \prod_{t=t_1}^{t_n} \frac{(E_{xt}\exp(\alpha_x + \beta_x\kappa_t))^{D_{xt}}}{D_{xt}!} \exp(-E_{xt}e^{(\alpha_x + \beta_x\kappa_t)})$$

a následne logaritmicko-vierohodnostnú funkciu, ktorá je výhodnejšia z výpočtového hľadiska:

$$\ell(\alpha, \beta, \kappa | D_{xt}, E_{xt}) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} (D_{xt}(\alpha_x + \beta_x\kappa_t) - E_{xt}\exp(\alpha_x + \beta_x\kappa_t)) + c,$$

kde c označuje členy nezávislé na parametroch. Požadovaný odhad parametrov dostaneme maximalizáciou logaritmickkej funkcie podľa parametrov. V tomto prípade nie je potrebné narozdiel od predošlej metódy upravovať parametre κ_t , pretože používame priamo počty úmrtí. Odhady sa ešte upravujú podobne ako pri predošlej metóde odhadu parametrov, aby spĺňali obmedzenia (4.4).

4.2 Cairns Blake-Dowdov model

Model navrhnutý v [19] je stochastický model navrhnutý na modelovanie mortality prioritne vo vyšších vekoch. Využíva relatívnu jednoduchosť (t.j. takmer linearitu logaritmu $q_x(t)$) krivky úmrtnosti vo vyšších vekoch. Patrí medzi modely s dvoma faktormi, používa priamo pravdepodobnosti úmrtia $q_x(t)$ namiesto miery úmrtnosti $m_x(t)$. Model môžeme definovať ako:

$$\ln \frac{q_x(t)}{p_x(t)} = \kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]}x. \quad (4.21)$$

Podstatný rozdiel oproti modelu Lee-Carter popísanému v predošlej kapitole je, že CBD model má dva časové rady $\kappa_t^{[1]}, \kappa_t^{[2]}$. Tieto ovplyvňujú rôzne veky rôznym spôsobom, čo znamená nekorelovanosť úmrtnostných mier v rôznych vekoch v priebehu času. Lee-Carterov model naznačuje presný opak, teda dokonalú koreláciu. Preto výhoda CBD modelu oproti Lee-Carterovmu modelu sa zvyšuje s dĺžkou dát, ktoré používame pri kalibrácii modelu. Na odhad parametrov je možné znovu použiť metodu najmenších štvorcov. Konkrétne, majme regresný model:

$$\ln \frac{q_x(t)}{p_x(t)} = \kappa_t^{[1]} + \kappa_t^{[2]}x + \epsilon_x(t), \quad (4.22)$$

kde $\epsilon_x(t)$ sú chybové členy, ktoré sú nezávislé, identicky rozdelené rozdelené s normálnym rozdelením so strednou hodnotou 0 a s konštantným rozptylom σ_ϵ^2 . Funkcia, ktorú minimalizujeme má tvar:

$$O_t(\kappa) = \sum_{x=x_1}^{x_m} \left(\ln \frac{q_x(t)}{p_x(t)} - \kappa_t^{[1]} - \kappa_t^{[2]}x \right)^2$$

Uvedomme si, že v tomto prípade je dvojica $(\kappa_t^{[1]}, \kappa_t^{[2]})$ odhadovaná pre každé t zvlášť, na rozdiel od Lee-Carterovho modelu(4.6). Opäť existujú aj iné spôsoby odhadu parametrov, ktoré tu neuvádzame, podobne ako to bolo pri Lee-Carterovom modeli.

4.3 Porovnanie Lee-Carterovho a Cairns-Blake-Dowdovho modelu

Vymenujme si hlavné klady a zápory oboch doteraz spomenutých modelov, podobne ako je to na webovej stránke <http://cbdmmodel.com/> od autorov CBD modelu.

Klady Lee-Carterovho modelu:

- robustnosť
- jednoduchý model s jediným faktorom vyjadrujúcim dynamiku úmrtnosti v čase
- dobrý fit cez širokú škálu vekov

Zápory Lee-Carterovho modelu:

- nedostatočná hladkosť vo vekovom parametre α_x (špeciálne v malých populáciách)
- neumožňuje zahrnúť zlepšenia úmrtnosti v rôznych vekoch v rôznych časoch
- vekový parameter α_x ovplyvňuje trend aj neistotu v danom veku, a preto to vedie k možnému podceneniu neistoty v pozorovanej úmrtnosti, zvlášť vo vysokých vekoch
- úmrtnostné miery v rámci rôznych vekov sú perfektné korelované, lebo je to jednofaktorový model

Klady Cairns-Blake-Dowdovho modelu:

- zakladá sa na pozorovaní, že logaritmus úmrtnostných mier je približne lineárny pri vekoch nad 40
- používa 2 periodické parametre zachytávajúce trendové zlepšenia úmrtnosti (intercept, level term) a rôznu dynamiku pri rôznych vekoch (slope term)
- robustnosť
- jednoduché vekové parametry
- možnosť ľahko zahrnúť neistotu v parametroch

Zápory Cairns-Blake-Dowdovho modelu:

- dobrý odhad pri väčšom rozsahu vstupných dát, avšak všeobecne nie taký dobrý ako LC: LC lepšie zachytáva nelinearitu v úmrtnostných krivkách pri nižších vekoch.

4.4 Ďalšie aspekty modelov

V predošlých sekciách sme si ukázali, ako by bolo možné prísť k odhadu parametrov modelu. Skôr ako sa pokúsime určiť predpovede úmrtnosti do budúcnosti, je vhodné sa zamyslieť nad nasledujúcimi problémami:

Vyhľadovanie. Projekčné úmrtnostné tabuľky, ktoré používajú aktuari pri predpovedaní, by nemali vykazovať žiadne nepravidelnosti. Preto sa používajú rôzne prístupy, vďaka ktorým napr. výsledné hodnoty pravdepodobnosti úmrtia vždy s vyšším vekom rastú.

Napr. Lee-Carterov model (4.3) umožňuje veľkú flexibilitu v parametroch α_x . Parametre α_x sú hladké, pretože sú počítané ako priemer. Parametre κ_t sú často dosť nepravidelné, ale ich predpoveďou získame hladký časový rad. Preto zostáva len vyhladiť β_x , aby sme dostali projekčné tabuľky s úmrtnosťou, ktorá nebude vykazovať žiadne neželané výkyvy. Je to možné napríklad použitím upravenej verzie funkcie (4.6)-tzv. penalizovanou metódou najmenších štvorcov, ktorá bude určitým spôsobom penalizovať veľké výkyvy v parametroch β_x . Alebo je možné využiť jednodimenzionálne P-spliny. Podrobnejší popis aj s odkazmi na ďalšiu literatúru je možné nájsť v [1].

Optimálna kalibračná doba. Ďalší dôležitý krok je zvolenie správneho rozsahu dát, na základe ktorých budeme robiť projekcie periodických parametrov κ_t . Je už intuitívne jasné, že dáta hlboko do minulosti by nemali mať na budúcnosť žiadny vplyv. Viacero autorov sa zaoberalo touto otázkou a navrhli rôzne postupy, prehľad ktorých znovu nájdeme v práci [1].

Rezíduá. Všetky modely sú založené na regresii, preto ich kvalitu je vhodné zhodnotiť aj pomocou rezíduí. Nedostatok náhodnosti indukuje systematickú chybu, ako napr. nezahrnutie kohortného efektu. V prípade odhadu metódou najmenších štvorcov, je vhodné pozrieť sa na *Pearsonove rezíduá*, ktoré sú pre LC model tvaru:

$$r_{xt} = \frac{\hat{\epsilon}_x(t)}{\sqrt{\frac{1}{(x_m - x_1)(t_n - t_1 + 1)} \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} (\hat{\epsilon}_x(t))^2}}, \quad (4.23)$$

kde $\hat{\epsilon}_x(t) = \ln \hat{m}_x(t) - \hat{\alpha}_x - \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t$. Pre CBD model majú tvar:

$$r_{xt} = \frac{\hat{\epsilon}_x(t)}{\sqrt{\frac{1}{(x_m - x_1 - 1)(t_n - t_1 + 1)} \sum_{x=x_1}^{x_m} \sum_{t=t_1}^{t_n} (\hat{\epsilon}_x(t))^2}}, \quad (4.24)$$

kde $\hat{\epsilon}_x(t) = \ln \frac{\hat{q}_x(t)}{\hat{p}_x(t)} - \hat{\kappa}_t^{[1]} - \hat{\kappa}_t^{[2]} x$. Ak nenájdeme žiadny vzor vo funkcii rezíduí $(x, t) \mapsto r_{xt}$, znamená to, že model správne zachycuje trendy vo vývoji úmrtnosti.

4.4.1 Modelovanie časovej zložky modelov

Dôležitým aspektom v oboch modeloch je modelovanie časovej zložky κ_t , resp. $\kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)}$, ktorú považujeme za náhodný proces. Na predpovedanie sa využíva Box-Jenkinsonova metodológia v rámci modelov ARIMA.

Časový rad $\{\kappa_t\}$ je možné popísať ARIMA(p,d,q) modelom, ak:

$$\nabla^d \kappa_t = \phi_1 \nabla^d \kappa_{t-1} + \dots + \phi_p \nabla^d \kappa_{t-p} + \xi_t + \varphi_1 \xi_{t-1} + \dots + \varphi_q \xi_{t-q}, \quad (4.25)$$

kde $\phi_p \neq 0$, $\varphi_q \neq 0$ a ξ_t je Gausovský biely šum s rozptylom $\sigma_\xi^2 > 0$. Parameter d určuje diferenciu radu. V prípade, že je časový rad stacionárny, tak $d = 0$. Dôležité je správne zvoliť parametre p, d, q modelu. K tomu sa používajú štandardné techniky popísané napr. v [20].

Modelovanie časovej zložky Lee-Carterovho modelu

Lee a Carter vo svojej pôvodnej práci [14] navrhujú použitie modelu ARIMA(0,1,0). Lee a Carter nepredpisujú tento model pre všetky situácie, napriek tomu je výhodný v mnohých situáciách. Takýto model je náhodná prechádzka s driftom, v nasledujúcom tvare:

$$\kappa_t = \kappa_{t-1} + d + \xi_t, \quad (4.26)$$

kde ξ_t sú nezávislé a normálne rozdelené so strednou hodnotou 0 a rozptylom σ^2 , d je drift. Platí:

$$\kappa_{t_n+k} = \kappa_{t_n} + kd + \sum_{j=1}^k \xi_{t_n+j}. \quad (4.27)$$

Bodová predpoveď časového indexu teda je

$$\hat{\kappa}_{t_n+k} = \mathbf{E}[\kappa_{t_n+k} | \kappa_{t_1}, \dots, \kappa_{t_n}] = \kappa_{t_n} + kd, \quad (4.28)$$

čo znamená, že budúce hodnoty ležia na priamke so smernicou d . Podmienený rozptyl je:

$$\mathbf{Var}[\kappa_{t_n+k} | \kappa_{t_1}, \dots, \kappa_{t_n}] = k\sigma^2, \quad (4.29)$$

z čoho zase vidieť ako rastie chyba s dĺžkou predpovede.

Hoci sa teraz snažíme o vyrovnanie hodnôt parametrov, budúci vekový profil úmrtnosti sa časom stáva menej vyrovnaný, "kostrbatý". Poukázal na to Girosi v práci [21]. To je dôvod k tomu, že Lee-Carterov model sa používa častejšie na predpovedanie agregovaných ukazovateľov, čo sme si už spomínali pri zavedení LC modelu.

Vďaka použitému modelu sú $\kappa_t - \kappa_{t-1}$ nezávislé s rozdelením $N(d, \sigma^2)$. Odhady parametrov d a σ^2 pomocou metódy maximálnej vierohodnosti sú:

$$\hat{d} = \frac{\hat{\kappa}_{t_n} - \hat{\kappa}_{t_1}}{t_n - t_1}, \quad (4.30)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{t_n - t_1} \sum_{t=t_2}^{t_n} (\hat{\kappa}_t - \hat{\kappa}_{t-1} - \hat{d})^2. \quad (4.31)$$

Modelovanie časovej zložky CBD modelu

V tomto prípade môžeme zopakovať to isté ako v predošlom prípade, zvlášť pre obe časové zložky $\kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)}$. To však nestačí, tieto výsledky by sme mali doplniť aj o analýzu dvojrozmerného časového radu $\kappa_t = (\kappa_t^{(1)}, \kappa_t^{(2)})$. Viac o analýze viacrozmerných časových radov je možné nájsť v učebnici [20]. V tejto práci si

uvedme odhady len pre jednoduchý prípad dvojrozmernej náhodnej prechádzky. V takom prípade dynamiku radu κ_t môžeme popísať:

$$\kappa_t = \begin{cases} \kappa_t^{(1)} &= \kappa_{t-1}^{(1)} + d_1 + \xi_t^{(1)} \\ \kappa_t^{(2)} &= \kappa_{t-1}^{(2)} + d_2 + \xi_t^{(2)}, \end{cases}$$

kde d_1, d_2 sú driftы, $\xi_t = (\xi_t^{(1)}, \xi_t^{(2)})$ sú nezávislé dvojice s dvojrozmerným normálnym rozdelením $\forall t \in T$ so strednou hodnotou 0 a rozptylovou maticou

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Odhad parametrov driftu dostaneme ako

$$\hat{d}_i = \frac{\hat{\kappa}_{t_n}^{(i)} - \hat{\kappa}_{t_1}^{(i)}}{t_n - t_1}, \quad i = 1, 2. \quad (4.32)$$

Marginálny rozptyl κ_t odhadneme ako:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{t_n - t_1} \sum_{t=t_2}^{t_n} (\hat{\kappa}_t^{(i)} - \hat{\kappa}_{t-1}^{(i)} - \hat{d}_i)^2, \quad i = 1, 2 \quad (4.33)$$

a kovarianciu odhadneme ako:

$$\hat{\sigma}_{12} = \frac{1}{t_n - t_1} \sum_{s=t_1}^{t_n-1} \sum_{t=t_1}^{t_n-1} (\hat{\kappa}_{s+1}^{(1)} - \hat{\kappa}_s^{(1)} - \hat{d}_1)(\hat{\kappa}_{t+1}^{(2)} - \hat{\kappa}_t^{(2)} - \hat{d}_2). \quad (4.34)$$

4.4.2 Predikčné intervaly

Doterajšie projekcie úmrtnosti nám toho nepovedali veľa o neistote spojenej s predpoveďou. K tomu je vhodné využiť intervaly spoľahlivosti pre budúce úmrtnostné miery. V tejto kapitole prejdeme určenie týchto intervalov v rámci Lee-Carterovho modelu, v princípe je možné rozšíriť postup aj na CBD model.

Určiť predikčné intervaly analyticky je zložité, až nemožné. Je to spôsobené rôznymi zdrojmi neistoty pri predpovedi. Konkrétne:

- nepresnosť v odhade parametrov $\alpha_x, \beta_x, \kappa_t$ pri fitovaní modelu
- neistota v ARIMA projekcii budúcich hodnôt κ_t .

Ak chceme určiť intervaly spoľahlivosti pre niektoré funkcie ako očakávaná doba života $\bar{e}_x(t)$, pridáva to ďalšie komplikácie spojené s určením intervalu spoľahlivosti.

Ak by sme uvažovali dlhší časový horizont predpovede, viac ako 10-25 rokov, potom podľa práce [14] chyba spojená s predpoveďou κ_t výrazne dominuje iným typom chyby, ktoré môžeme zanedbať. Predikčné intervaly založené len na κ_t však výrazne podceňujú chybu predpovede v kratšom časovom úseku. Aby sme získali lepší odhad chyby predpovede, je potrebné zahrnúť oba zdroje neistoty.

V podobných prípadoch sa využívajú *metódy bootstrap*. Ich podstata spočíva v opakovanom výbere z pôvodných dát, čím dostaneme množinu dát, na základe ktorej dokážeme určiť variabilitu pôvodných.

Odhad pomocou bootstrapu

Procedúra bootstrap nám poskytne B výberov našich parametrov, označme ich $\alpha_x^b, \beta_x^b, \kappa_t^b$, kde $b = 1, \dots, B$. Môžeme ich dostať viacerými spôsobmi, napr. metódami Monte Carlo, Poissonovým bootstapom alebo reziduálnym bootstapom. Podrobnejší popis s odkazmi na ďalšiu literatúru nájdeme opäť v práci [1].

Na základe pôvodných parametrov κ_t určíme parametre p, d, q modelu ARIMA. S použitím bootstrapových výberov κ_t^b určíme pre konkrétne b projekciu časového radu κ_t^b pre $t > t_n$, ale s použitím pôvodných parametrov p, d, q . Tým sme dostali B realizácií $\alpha_x^b, \beta_x^b, \kappa_t^b$ a projektované κ_t^b . Na základe nich môžeme spočítať B rôznych scenárov pre vývoj úmrtnosti. Pomocou týchto scenárov je možné spočítať ďalšie úmrtnostné funkcie podľa nášho záujmu, ako napr. kohortnú očakávanú dobu života $\bar{e}_x^\wedge(t)$.

Ak poznáme $\bar{e}_x^b(t)$ pre $b = 1, \dots, B$ a konkrétny vek x a čas t , udáva nám to empirické rozdelenie $\bar{e}_x^\wedge(t)$, na základe ktorého určíme interval spoľahlivosti pre túto veličinu. Takýto interval spoľahlivosti už zahŕňa všetky druhy chýb, ktoré uvažujeme.

Intervaly spoľahlivosti môžeme vykresliť do tzv. "fan charts", kde sú jednotlivé úrovne spoľahlivosti vyznačené farebne s rôznymi škálami, po ktorých sa menia farby. V praktickej časti tejto práce sa nachádzajú aj tieto grafy.

4.5 Rozšírenie Lee-Carterovho modelu o kohortný efekt

V tejto kapitole si zavedieme model zahŕňajúci aj kohortný efekt. Najprv je ale vhodné vysvetliť, čo kohortný efekt vlastne znamená.

4.5.1 Kohortný efekt a jeho príčiny

Stručne sme si o kohortnom efekte povedali už v kapitole 3 pri stochastických modeloch. Venujme sa teraz tomuto pojmu podrobnejšie.

Kohortou označujeme skupinu osôb určenú nejakými konkrétnymi demografickými udalosťami v rovnakom časovom intervale, napr. kohorta detí narodených v roku 1997, kohorta žien, ktoré uzavreli manželstvo v roku 2004 a pod.

Kohortným efektom rozumieme konkrétny ráz skupiny osôb ohraničenej časom a danou demografickou vlastnosťou, ktorou je pre účely tejto práce rok narodenia.

Pozorovanie úmrtností v národných populáciách prinieslo zaujímavé výsledky. Nielenže sa úmrtnosť časom znižuje, ale existujú generácie ľudí, u ktorých je to výraznejšie ako v iných generáciách. V ďalšom texte budeme pod pojmom *kohortný efekt* rozumieť práve takéto zníženie.

Príčiny vzniku kohortného efektu je vhodné ilustrovať na prípade Veľkej Británie. V tejto krajine je kohortný efekt veľmi výrazný, čo potvrdzujú reporty Government Actuary's Department [22, 23, 24]. Týka sa to hlavne generácii narodených medzi rokmi 1925 až 1945, ktoré vykazujú výrazne lepšie zlepšenia úmrtností ako predošlé, ale aj ako nasledujúce generácie.

Významným faktorom v živote týchto generácií je vypuknutie druhej svetovej vojny. Staršie generácie zažili vojnu v aktívnom veku, kým jedinci narodení po roku 1925 sa vojny už priamo nezúčastnili.

Strava v povojnovej Británii mohla mať na zdravie a vývoj jedincov zo skúmananej kohorty tiež pozitívny prínos. Potraviny boli síce zväčša na prídel, ale podľa práce [25] bola spotreba zeleniny a rýb vyššia ako počas 90-tych rokov. Naopak spotreba mäsa a syrov bola nižšia. Podľa rôznych výskumov bola strava oveľa zdravšia.

Sociálne zmeny v spoločnosti majú tiež podiel na vzniku kohortného efektu, napr. bolo zavedené bezplatné stredoškolské vzdelanie a verejne financovaný systém zdravotnej starostlivosti.

Návyk fajčenia má na zlepšení úmrtnosti určite nespochybniteľnú úlohu. Podľa práce [26] priemerná spotreba cigariet mužov rástla od roku 1900 až do roku 1940, nasledujúcich 20 rokov zostala konštantná, v 60-tych a 80-tych rokoch klesala a odvtedy má skôr stabilný trend. Pri ženách sú tieto trendy podobné, akurát menej výrazné. Počas vojny boli cigarety zadarmo distribuované medzi vojakmi a až po vojne začali výskumy zaoberajúce sa dopadom fajčenia na zdravie. Teda generácie narodené v 20-tych rokoch fajčili počas vojny a ešte dlho po nej, kým sa dostali do pozornosti zdravotné dopady fajčenia. Naproti tomu generácie narodené v 40-tych rokoch dosiahli dospelosť v čase, keď už boli zdravotné dôsledky všeobecne známe a diskutované.

Iné vedné odbory, ako napr. epidemiológia, sociológia a ekonómia môžu mať pre kohortný efekt aj iné vysvetlenia. Tomu sa ale nebudeme ďalej venovať.

4.5.2 Štruktúra rozšíreného Lee-Carterovho modelu

V kapitole 1.5.2 sme tento model už spomenuli a uviedli jeho možné vyjadrenie (3.14). Podľa autorov je v odbornej literatúre nazývaný aj *Renshaw-Habermanov model*. Nasledujúce časti popisujúce tento model sú spracované podľa práce [9].

Podobne ako pri Lee-Carterovom modeli (4.3) označíme D_{xt} náhodnú veličinu vyjadrujúcu počet úmrtí v populácii vo veku x a čase t . K dispozícii máme dvojrozmerné pole (D_{xt}, E_{xt}) , kde D_{xt} je aktuálny počet úmrtí a E_{xt} príslušná expozícia, teda počet jedincov. Údaje máme k dispozícii pre roky z množiny \mathbf{T} a pre veky $x \in \mathbf{X}$. Definujeme ešte rok kohorty $z = t - x$.

Štruktúra Lee-Carterovho modelu (4.3) je navrhnutá tak, aby zachytávala vekovo-periodické efekty. Pomocou člena α_x zahŕňa hlavný vekový efekt, priemernom úmrtností cez čas (viď (4.9)) a bilineárnym členom $\beta_x \kappa_t$ zachytáva vekovo-špecifický periodický trend.

Tento model môžeme pomocou redukčných faktorov, ktoré boli uvedené v kapitole 3.2, prepísať do nasledovnej formy:

$$\mu_x(t) = \exp(\alpha_x + \ln R_x(t)), \quad (4.35)$$

kde špeciálne úmrtnostný redukčný faktor (RF) je definovaný podľa Lee-Carterovho modelu:

$$LC : \ln R_x(t) = \beta_x \kappa_t. \quad (4.36)$$

Následne prispôbíme obmedzenia (4.4) tak, že:

$$\ln R_x(t_n) = 0, \quad \forall x. \quad (4.37)$$

Zovšeobecníme teraz túto štruktúru modelu, aby zahŕňala navyiac aj kohortný efekt. V tomto prípade má RF tvar:

$$M : \ln R_x(t) = \beta_x^{(0)} \iota_{t-x} + \beta_x^{(1)} \kappa_t. \quad (4.38)$$

Extra člen $\beta_x^{(0)}\iota_{t-x}$ reprezentuje kohortný efekt.

Takáto štruktúra modelu v sebe zahrňuje aj iné modely:

$$\begin{aligned} \text{Lee-Carter age-period model} \quad \beta_x^{(0)} &= 0, \\ \text{Age-Cohort(AC) model} \quad \beta_x^{(1)} &= 0, \end{aligned}$$

alebo verzie kde jeden alebo oba parametre $\beta_x^{(j)} = 1$, $j = 1, 2$ v prípadoch, ak veková špecifikácia členov pre periodický a kohortný efekt nie je považovaná za dôležitú.

Takouto formuláciou sme rozčlenili intenzitu úmrtnosti

$$\mu_x(t) = \exp(\alpha_x)R_x(t) \quad (4.39)$$

na súčin statickej zložky $\exp(\alpha_x)$ zahrňujúcej len vekový efekt a dynamického redukčného faktoru $R_x(t)$ zahrňujúceho vekovo-špecifický periodický a kohortný efekt.

4.5.3 Odhad parametrov modelu

Pri odhade parametrov L-C modelu sme používali metódu najmenších štvorcov a singulárny rozklad. Sústreďme sa teraz na metódu maximálnej vierohodnosti, podobne ako v kapitole 4.1.2.

Modelujeme teda počet úmrtí D_{xt} ako náhodnú veličinu s Poissonovým rozdelením. Priame modelovanie počtu úmrtí je užitočné v praktických aplikáciách, napr. keď potrebujeme simulovať budúci tok platieb životnej anuity alebo penzijného portfólia. Toto môžeme formalizovať pomocou *zobecnených lineárnych modelov* a špecifikovaním prvých dvoch momentov odozvy Y_{xt} , kde:

$$Y_{xt} = D_{xt} \quad (4.40)$$

$$E(Y_{xt}) = E_{xt}\mu_x(t) = E_{xt}\exp(\alpha_x)R_x(t) \quad (4.41)$$

$$Var(Y_{xt}) = \phi E(Y_{xt}) \quad (4.42)$$

so škálovacím parametrom ϕ , rozptylovou funkciou $V(E(Y_{xt})) = E(Y_{xt})$ a apriornými váhami $w_{xt} = 1$ (alebo 0 ak hodnota nie je k dispozícii). Potom nelineárny prediktor ν_{xt} je definovaný nasledovne:

$$(\ln E(Y_{xt}))\nu_{xt} = \ln E_{xt} + \alpha_x + \ln R_x(t) \quad (4.43)$$

Na samotné fitovanie takéhoto modelu navrhli Renshaw a Haberman použitie dvoch alternatívnych iteračných procedúr. Pre ich obsiahlosť tu podrobnejší popis nebudeme uvádzať, ten je možné nájsť v práci [9].

Podobne ako pri originálnom LC modeli (4.3) je potrebné doplniť obmedzenia, aby bol model určený jednoznačne:

$$\sum_x \beta_x^{(0)} = 1 \quad \sum_x \beta_x^{(1)} = 1 \quad \text{a buď } \iota_{t_1-x_m} = 0 \text{ alebo } \kappa_{t_1} = 0.$$

Tento model má $\nu = m(n-3) - 2(n-2)$ stupňov volnosti.

Projekcia úmrtnostných mier

Projektované úmrtnostné miery

$$\dot{m}_x(t_n + s) = \hat{m}_x(t_n) \dot{R}_x(t_n + s), s > 0 \quad (4.44)$$

sú spočítané so zhodou podľa poslednej dostupnej úmrtnostnej miery $\hat{m}_x(t_n)$. V tomto prípade označujeme

$$\dot{R}_x(t_n + s) = \exp \left\{ \hat{\beta}_x^{(0)}(\tilde{l}_{t_n-x+s} - \hat{l}_{t_n-x}) + \hat{\beta}_x^{(1)}(\dot{\hat{k}}_{t_n+s} - \hat{k}_{t_n}) \right\}, s > 0, \quad (4.45)$$

redukčný faktor, pre ktorý platí

$$\lim_{s \rightarrow 0} \dot{R}_x(t_n + s) = 1. \quad (4.46)$$

Tento redukčný faktor RF je založený na odhadoch parametrov $\hat{\beta}_x^{(i)}, \hat{l}_z, \hat{k}_t^{(i)}$ a predpovedi časových radov

$$\left\{ \hat{l}_z : z \in [t_1 - x_m, t_n - x_1] \right\} \mapsto \left\{ \dot{l}_{t_n-x_1+s} : s > 0 \right\} \quad (4.47)$$

$$\left\{ \hat{k}_t : t \in [t_1, t_n] \right\} \mapsto \left\{ \dot{\hat{k}}_{t_n+s} : s > 0 \right\}, \quad (4.48)$$

kde v RF je

$$\tilde{l}_{t_n-x+s} = \begin{cases} \hat{l}_{t_n-x+s}, & \text{ak } 0 < s \leq x - x_1 \\ \dot{l}_{t_n-x+s}, & \text{ak } s > x - x_1 \end{cases}.$$

Predpovede časových radov sú väčšinou generované pomocou ARIMA projekcií. V prípade publikovaných aplikácií k LC modelu to bola väčšinou náhodná prechádzka (ARIMA (0,1,0) proces). Pomocou tejto projekcie dostaneme aj intervaly spoľahlivosti, avšak tieto nezahŕňajú parametrické riziko. Pre ten prípad je potrebné ich konštruovať pomocou *metód bootstrap*, podobne ako v kapitole 4.4.2.

Pri posudzovaní kvality odhadu je vhodné pozrieť sa na štandardizované rezíduá

$$r_{xt} = \text{sign}(y_{xt} - \hat{y}_{xt}) \sqrt{\frac{w_{xt}(y_{xt} - \hat{y}_{xt})}{\hat{\phi}}}, \quad (4.49)$$

kde

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{x,t} \{w_{xt}(y_{xt} - \hat{y}_{xt})\}}{\nu},$$

ktoré by samozrejme mali mať nepravidelnú štruktúru.

5. Nástroje na meranie a hodnotenie rizika

5.1 LLMA

Vo februári 2010 vznikla nezisková organizácia *Life and Longevity Markets Association* (LLMA), ktorej cieľom je podporiť likviditu na trhoch v oblasti rizika dlhovekosti a úmrtnosti. LLMA svojou prácou uľahčuje porozumenie povahy rizika dlhovekosti, podporuje vývoj štandardov, metód a benchmarkov, ktoré by napomohli vybudovať likviditný trh podobný tomu, aký existuje pre *Insurance Linked Securities* a iné veľké trendové riziká ako napr. úrokové miery a inflácia. Plánuje sa aj vytvorenie štandardizovaného oceňovacieho modelu pre dlhovekosť. Členom tejto asociácie je okrem iných aj J.P. Morgan. Podrobnejšie informácie o asociácii je možné nájsť na ich webovej stránke www.llma.org.

5.2 LifeMetrics

Investičná banka *J.P. Morgan* vyvinula a v roku 2007 prvýkrát zverejnila nástroj *LifeMetrics* určený pre penzijné fondy, poisťovne, zaistovne a investorov. Stručne povedané, LM je sada nástrojov na zvládanie a meranie rizika úmrtnosti a dlhovekosti. Pozostáva z 3 hlavných komponentov:

- LifeMetrics Index: dáta na zhodnotenie súčasnej a historickej úrovne úmrtnosti a dlhovekosti
- LifeMetrics Framework: sada podkladových nástrojov, metód a algoritmov na meranie a zvládanie rizika dlhovekosti a úmrtnosti
- LifeMetrics Software: software na predpovedanie budúcich mier úmrtnosti

Spolu umožňujú štandardizované meranie rizika, ktoré je možné využiť v reportoch spoločnosti, napr. investor dokáže kvantifikovať potenciálny dopad rizika dlhovekosti na jeho rizikový profil. LM poskytuje aj "priemernú" hodnotu, tzv. *benchmark*, podľa ktorej hodnotiť efektivitu hedgingu, alebo poisťovne môžu LM použiť pri meraní, do akej miery sa v ich portfóliu životného poistenia vyrovná riziko úmrtnosti s rizikom dlhovekosti.

5.2.1 LifeMetrics Index

V apríli 2011 preniesol J.P. Morgan všetky práva a duševné vlastníctvo spojené s LifeMetrics Index na LLMA, ktorá bude pokračovať vo vývoji a v publikovaní nových dát. V marci 2012 oznámila LLMA zavedenie svojho vlastného indexu (*Longevity index*). Tento sa však prakticky neodlišuje od indexu dovtedy vydávaného J.P.Morgan. Index bude používaný ako globálna referencia pri transferi rizika dlhovekosti od subjektov, ktoré sa chcú tohto rizika zbaviť, na investorov. Index je niečo ako robustná hodnota, benchmark, podľa ktorej je možné nezávisle odhadnúť cenu kontraktu medzi subjektmi. Výsledné hodnoty indexu sú

publikované ročne a sú kalkulované nezávislým agentom podľa hrubých dát vydaných príslušnými národnými úradmi. Na správnosť postupu, ktorý musí byť v súlade s dokumentáciou, dohliada poradenská komisia zložená z významných konzultantov, akademikov a ľudí z praxe.

Index je publikovaný v súčasnosti pre 4 krajiny:

- Anglicko a Wales,
- Nemecko,
- Holandsko,
- Spojené štáty americké.

Zahrňuje v sebe:

- hrubú (crude) centrálnu mieru úmrtnosti m_x ,
- vyrovnané pravdepodobnosti úmrtia q_x ,
- očakávanú dobu života vo veku x e_x .

Pre daný rok sú všetky zložky indexu rozdelené podľa veku a pohlavia. Uvedme si len, že očakávaná doba života e_x je počítaná na základe úmrtností pre príslušný rok, neuvažujú sa predpovedané miery úmrtnosti. Ďalšie podrobnosti k indexu, odkiaľ presne pochádzajú dáta a ako sa vypočítali výsledné hodnoty je možné nájsť v dokumente [27]. Súčasnú a historickú hodnotu indexu nájdeme na webovej stránke LLMA.

5.2.2 LifeMetrics Framework

Účelom tejto súčasti LifeMetrics je zabezpečiť pomoc pri hodnotení a aplikácií úmrtnostných dát a pri vývoji vhodného risk managementu. Dôležité je upozorniť, že LM Framework nie je obmedzený na aplikáciu dát z LM Index, ale rovnako sa môžu využiť dáta pochádzajúce z iných zdrojov, napr. priamo od poisťovní. Pozostáva z nástrojov a metód na meranie rizika dlhovekosti/úmrtnosti spôsobom, ktorý by mohol byť aplikovaný konzistentne v množstve situácií a produktov, a na rôzne populácie. Vďaka tomu sa investori môžu zamerať na konkrétne investičné stratégie, založené na špeciálnych populačných alebo socio-ekonomických skupinách. Použitie LM Framework napomôže subjektu, ktorý sa ním riadi, aby lepšie ohodnotil a optimalizoval rozhodnutia týkajúce sa risk managementu, konkrétne

- hedging
- prenos rizika
- zvýšenie expozície v riziku.

Pre poisťovne a zaistovne môže doplniť ich existujúce nástroje a tak podporiť rozhodnutie spojené s rastom nového biznisu, risk managementom alebo prerozdelením kapitálu. Investorom zase asistuje pri ich investičných rozhodnutiach.

5.2.3 LifeMetrics Software

Posledná časť LM je software. Uľahčuje tvorbu, kalibráciu a implementáciu modelov pre analýzu a predpovedanie úmrtnostných mier. Software je zadarmo prístupný na stránke J.P. Morgan.

Software zahŕňa nasledovné stochastické modely:

1. Lee-Carter model (1992)
2. Renshaw-Haberman model (2006)
3. Currie Age-Period-Cohort model (2006)
4. Cairns, Blake and Dowd model (2006)
5. Rozšírenia k modelu Cairns, Blake a Dowd [13]

Čitateľa môžeme odkázať na prácu [13] pre detailnú diskusiu všetkých vyššie uvedených modelov a ich kvantitatívne porovnanie. Pri výbere modelu sa nestačí riadiť len kvalitou samotného odhadu, ale treba zväziť aj účel predpovede a dynamiku v úmrtnostných mierach. Rovnako treba porovnávať aj robustnosť, transparentnosť a súčasne jednoduchosť.

Všetky funkcie softwaru sú naprogramované v štatistickom programe R. V rámci LM je poskytovaný aj stručný návod ako pracovať s týmto softwarom [28].

Software umožňuje predpovedať vývoj úmrtnosti len pre Lee-Carterov a CBD model. Nevýhoda je, že pri predpovedi pri oboch modeloch nezahŕňa parametrické riziko, ale počítá len s rizikom pri predpovedi časovej zložky modelu. Tú predpovedá v oboch prípadoch ako náhodnú prechádzku, teda najjednoduchší prípad. Pre ostatné modely umožňuje len ich kalibráciu. Ako vstupné údaje je potrebné mať k dispozícii počty úmrtí a centrálnu expozíciu v riziku členené podľa jednotlivých rokov a vekov. Pre výpočet pravdepodobnosti úmrtia sa používa vzťah (1.8).

V zdrojovom kóde R sú základom dve funkcie, funkcia určená na kalibráciu podľa dostupných dát: *fit70x* kde $x = 1 \dots 8$ udáva číslo modelu a druhá funkcia pre simuláciu budúcich hodnôt *sim2001* pre LC model, resp. *sim2005* pre CBD model. Do funkcií je potrebné doplniť vhodné parametre. Výstupom sú jednotlivé pravdepodobnosti úmrtia, vektor s použitými rokmi a vekmi, pole štandardizovaných rezíduí a iné. Pravdepodobnosti úmrtia a prežitia sa spočítajú z dát podľa vzťahu (1.8). Detailnejšie informácie je možné nájsť v návode [28], ale pre úplné porozumenie je potrebné naštudovať si príslušný R kód.

5.3 Xpect

Tento produkt vyvinula Nemecká burza (Deutsche Börse AG) za podobným účelom ako už spomínaný LifeMetrics, aby podporila trhy pri oceňovaní a následnom obchodovaní s produktmi zameranými na dlhovekosť. Podpora spočíva v poskytovaní podkladových dát, na základe ktorých je možné lepšie ohodnotiť cenu transakcií. Cieľ sady Xpect je poskytnúť neutrálny, transparentný a aktuálny tržný štandard pre úmrtnostné dáta. Xpect sa snaží vymazať bariéry medzi všetkými účastníkmi trhu, týkajúce sa asynchrónnej informácie o úmrtnosti a dlhovekosti.

Sada Xpect zahŕňa 3 rôzne produkty:

- Xpect dáta,
- Xpect indexy,
- Xpect forwardové krivky.

Všetky dáta sú dostupné pre Nemecko, Holandsko a Anglicko a Wales.

V súčasnosti je Xpect jediný index dlhovekosti, s ktorým je možné priamo obchodovať. Deutsche Börse a TullettPrebon odštartovali v júni 2010 obchodovanie so SWAP-mi zameranými na dlhovekosť na platformách Bloomberg a Thomson-Reuters.

Podrobnosti o sade Xpect, ako sa počítajú hodnoty a odkiaľ pochádzajú zdrojové údaje a pod., je možné nájsť na webovej stránke projektu www.xpect-index.com.

5.3.1 Xpect dáta

Táto súčasť produktov Xpect poskytuje mesačne aktualizované generačné úmrtnostné tabuľky. Tieto v sebe obsahujú kompletné údaje o očakávanej strednej dĺžke života \bar{e}_x a pravdepodobnostiach úmrtia q_x pre každý vek a rok narodenia príslušnej kohorty členené podľa pohlavia.

Tieto tabuľky sú rozšírené do vysokých vekov, až po vek 110 pomocou Gompertzovej funkcie. Aby zachytili aj vývoj úmrtnosti pre mladšie kohorty, berú do úvahy aj zmeny v úmrtnosti v priebehu času. Tieto zmeny sú modelované pomocou *Lee-Carterovho modelu* (viď sekcia 4.1) na základe údajov za posledných 30 rokov pre jednotlivé národné populácie. To je ďalší dôkaz vysokého uznania tohoto modelu.

5.3.2 Xpect indexy

Xpect cohort index reprezentuje normalizovaný počet jedincov dožívajúcich sa veku x (l_x) pre príslušnú kohortnú skupinu. Rovnako ako pri úmrtnostných tabuľkách, aj tu je l_x definované ako aktuálny vekovo-špecifický počet prežívajúcich z koreňa tabuľky 100 000. Index je členený podľa jednotlivých krajín, pohlavia a kohortnej skupiny, čo sú väčšinou 5-ročné časové intervaly.

Poznamenajme, že l_x zahŕňa kumulované pravdepodobnosti úmrtia v každom časovom okamihu a teda reprezentuje celkové riziko úmrtnosti na základe úmrtnostnej skúsenosti populácie. Znamená to, že Xpect Cohort indexy nepredstavujú budúce modelované pravdepodobnosti úmrtia, a tým je eliminované modelové riziko.

Xpect Customized Indices zahŕňajú navyše individuálne parametre populácie portfólia a redukujú tým basis risk. Nevýhodou je nižšia likvidita, a tým aj vyššia cena takéhoto hedgingu.

Xpect indexy umožňujú kvotáciu štandardizovaných finančných derivátov, ako napr. swapy alebo forwardy podobné úrokovým swapom.

5.3.3 Xpect forwardové krivky

Xpect krivky predstavujú modelovaný priebeh Xpect indexu až pokiaľ definovaná podkladová kohorta dosiahne nulu. Vychádzajú z Xpect úmrtnostných tabuliek,

z čoho plynie, že budúce hodnoty sú počítané pomocou Lee-Carterovho modelu. Ako aj predošlé produkty aj krivky sú preratúvané mesačne na základe aktuálnych dát a poskytované pre všetky skupiny ako Xpect indexy.

Ak by sa budúca úmrtnosť vyvíjala presne podľa modelovaných očakávaní, vývoj Xpect indexu by kopíroval forwardovú krivku.

Každá neočakávaná zmena úmrtnosti zmení forwardovú krivku. Táto zmena predstavuje zmenu v záväzkoch týkajúcich sa úmrtnosti. Investori budú simulovať takéto posuny na základe ich vlastných očakávaní vývoja budúcich úmrtnostných mier. Analýzou forwardových kriviek za posledné roky sa získa cit pre vývoj trendu v zmenách úmrtnosti. Simulované Xpect forwardové krivky podporujú trh pri oceňovaní swapov a iných produktov založených na Xpect indexe.

5.4 Zhrnutie

Keby sme mali ohodnotiť prínos spomínaných nástrojov, musíme uviesť nasledujúce: LifeMetrics Framework síce popisuje rôzne modely, záujemca sa dozvie veľa aj o povahe rizika dlhovekosti, ale pre hlbšie pochopenie modelov ich popis nestačí, a už vôbec nie pre samostatný odhad parametrov a následných predpovedí. Čo sa týka LM Indexu v podstate sa ničím nelíši od bežne dostupných úmrtnostných tabuliek. Nijak neodlišuje jednotlivé kohorty a demografické skupiny. Z tohto pohľadu je výhodnejší Xpect index, pretože udáva hodnoty pre rôzne kohorty, a to je pre penzijné fondy a investorov dôležité, lebo tak dokážu lepšie odhadnúť úmrtnosť podľa skladby ich portfólia.

Ak by sme chceli pomocou Xpect forwardových kriviek alebo LM softwaru oceniť niektoré deriváty, je dobré vedieť aj približný interval spoľahlivosti pre ich cenu. Xpect forwardové krivky ale neposkytujú odhady intervalu spoľahlivosti, napriek tomu, že sú rátané podľa stochastického LC modelu. Tiež sa mi nepodarilo nájsť, z akého časového radu vychádza predpoveď pre tieto indexy. To síce priamo nepotrebujeme, ale vždy je to dobré vedieť pre porovnanie s inými modelmi.

Čo sa týka LM softwaru, ako sme si už uviedli, zahŕňa len neistotu v odhade časového radu modelu, a to môže riziko výrazne podceniť. Ale získame aspoň nejaké intervaly spoľahlivosti (hoci bez uvažovania parametrického rizika) pre budúce pravdepodobnosti úmrtia. Nepresnosti môžu plynúť aj z obmedzujúceho predpokladu použitia ARIMA(0,1,0) modelu, bez možnosti voľby. Ďalšia nevýhoda je, že umožňuje pri kalibrácii zahrnúť len veky do 89. roku života a pri Lee-Carterovom modeli to je zároveň aj horná hranica predpovede. Teda ak potrebujeme predpoveď pre vyššie veky, musíme využiť ďalšie metódy a postupy na odhad pravdepodobnosti úmrtia vo vysokých vekoch. LM Software obsahuje užívateľské prostredie v Exceli, ktoré je graficky prijateľné pre bežných používateľov a nepredpokladá znalosti štatistického programu *R*. Toto grafické prostredie sa mi však nepodarilo spustiť ani na novej, ani na staršej verzii MS Excelu a bolo potrebné využiť zdrojový kód v *R*-ku. K nemu je však potrebné napísať vlastný kód, ktorým spočítame hodnoty a vykreslíme grafy podľa nášho záujmu. Tento je možné nájsť v elektronickej prílohe tejto práce.

6. Riziko dlhovekosti na konkrétnych dátach

V tejto kapitole ohodnotíme dopad rizika úmrtnosti na hodnotu životných anuit pre rôzne veku. Konkrétne to znamená výpočet očakávanej súčasnej hodnoty životnej anuity na základe kohortných úmrtnostných tabuliek, získaných projekciou úmrtností pomocou modelov *Lee-Cartera* a *Cairns-Blake-Dowda*. Projekcie vypočítame využitím softwaru LifeMetrics, opísaného v predchádzajúcej kapitole. Hodnoty takto spočítanej životnej anuity porovnáme s jej hodnotou získanou na základe súčasných úmrtnostných tabuliek.

Aby sme sa vyhli komplikovaným výpočtom a sústredili sa len na dopad dlhovekosti samotnej na hodnotu záväzkov, neuvažujeme iné typy rizika a predpokladáme konštantnú úrokovú mieru 3 %. V ďalšom texte sa budeme zaoberať len mužskou populáciou, výpočty pre ženskú populáciu sú ekvivalentné, hodnoty a grafy pre ženy je možné nájsť v prílohe k elektronickej verzii tejto práce. V tejto prílohe nájdeme aj všetky zdrojové údaje z ktorých vychádzame, všetky súčasti LifeMetrics vrátane zdrojového kódu v R-ku, náš zdrojový kód, úmrtnostné tabuľky pre Slovensko a v tabuľkách v Exceli prehľad vypočítaných hodnôt.

6.1 Zdrojové údaje

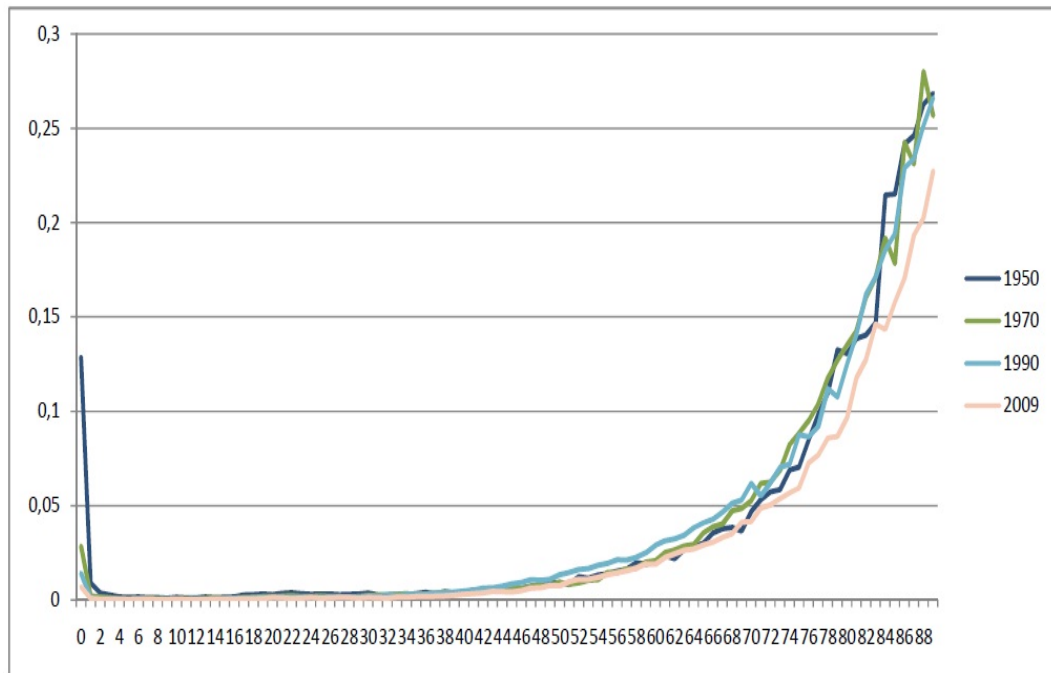
Dáta, ktoré používame pri zhodnotení rizika úmrtnosti, čerpáme z internetových stránok projektu Human Mortality Database ([29]). Databáza projektu obsahuje detailné informácie o populácii, počte narodení a úmrtí pre 37 krajín sveta.

Údaje sú k dispozícii v pôvodnej verzii, tzv. "raw data", a v upravenej verzii, kde sú doplnené prípadné chýbajúce údaje, a dopyčované ďalšie údaje, ako napr. úmrtnostné miery, kohortné úmrtnostné tabuľky a pod.

My budeme používať už upravené dáta. Všetky sú členené podľa jednotlivých krajín, pohlavia, veku a roku, z ktorého údaje pochádzajú. V tejto práci budeme využívať dáta pre Slovenskú republiku. Tieto dáta sú k dispozícii od roku 1950 až po rok 2009 a veku 0 až 110. Konkrétne využívame počty úmrtí a veľkosť populácie exponovanej k riziku smrti (viď popis úmrtnostných tabuliek v kapitole 1). Podrobnejšie informácie o dátach a metodike ich úpravy je možné nájsť na stránkach tohto projektu.

6.2 Pohľad na vývoj úmrtnosti v minulosti

Pozrime sa najprv na to, ako naše dáta vyzerajú. To nám môže napomôcť pri rozhodovaní, údaje z ktorých rokov zahrnúť do analýzy a vedie to k lepšiemu pochopeniu výsledkov predpovedí. Na obrázku č. 6.1 je zreteľný samozrejmy fakt, že s vyšším vekom úmrtnosti výrazne stúpajú. Za povšimnutie ale stojí aj to, že vo vyšších vekoch je rozdiel v úmrtnosti medzi rokmi, z ktorých údaje pochádzajú, výrazne väčší ako pri nižších vekoch. Znamená to, že najväčšie zníženie úmrtnosti je u starších osôb, kým u mladších sa úmrtnosť znížila len minimálne. Najväčší rozdiel je pri posledných dostupných údajoch z roku 2009. Novšie dáta poukazujú



Obr. 6.1: Úmrtnosti mužskej populácie pre dáta SR, všetky veky

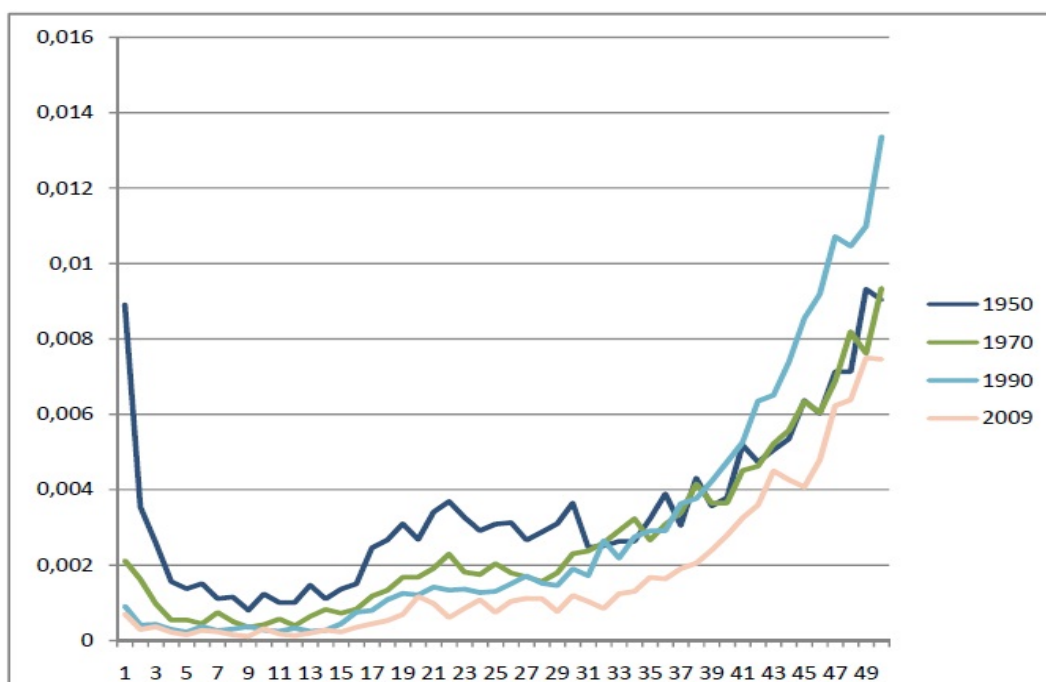
na nižšiu úmrtnosť. Ak sa pozrieme len na veky 1- 50 (obr. č. 6.2), môžeme aj tu pozorovať túto skutočnosť. Neočakávaný graf dostaneme, ak si vykreslíme údaje len pre vybrané veky v závislosti od rokov (obr. č. 6.3). Na tomto grafe nevidieť výrazný pokles úmrtnosti, čo je v kontraste s našimi očakávaniami. Určitý pokles je ale možné vysledovať pri vyšších vekoch, ak sa pozrieme hlavne na údaje od roku 1990, ktorý sa v našich zemepisných šírkach spája s významnými spoločenskými zmenami.

6.3 Kalibrácia modelov

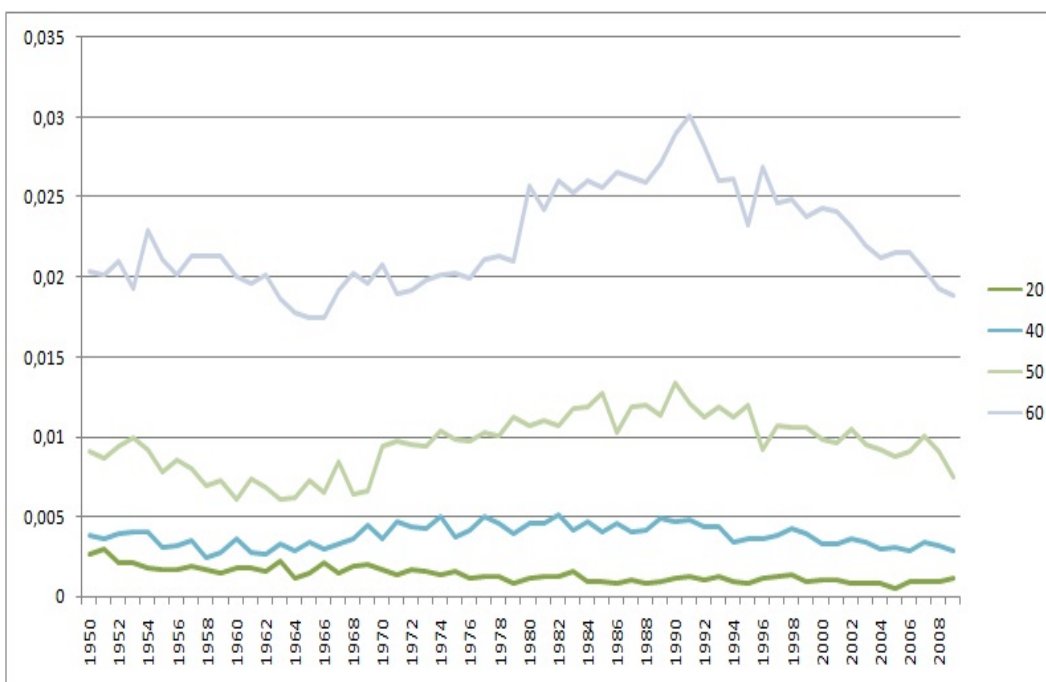
Záleží len na nás, aké roky a veky si vyberieme pre ďalšiu analýzu a kalibráciu modelov. Existujú aj rôzne postupy ako určiť vstupné dáta, ale tieto postupy nie sú celkom zaručené a prinášajú pochybné výsledky. My sme sa rozhodli použiť na kalibráciu modelov len údaje za posledných 30 dostupných rokov, teda od roku 1980 vrátane. Rozhodli sme sa tak, pretože staršie údaje nepovažujeme za dostatočne vypovedajúce o budúcich hodnotách úmrtnosti. Aby sme získali lepší prehľad o vývoji parametrov, budeme pri kalibrácii využívať veky 1 až 89. Nultý rok sme vynechali, pretože vysokým počtom úmrtí spôsoboval pri niektorých modeloch väčšie nepravidelnosti v parametroch a po vek 89, lebo LM Software neumožňuje zahrnutie vyšších vekov.

6.3.1 Lee-Carterov model

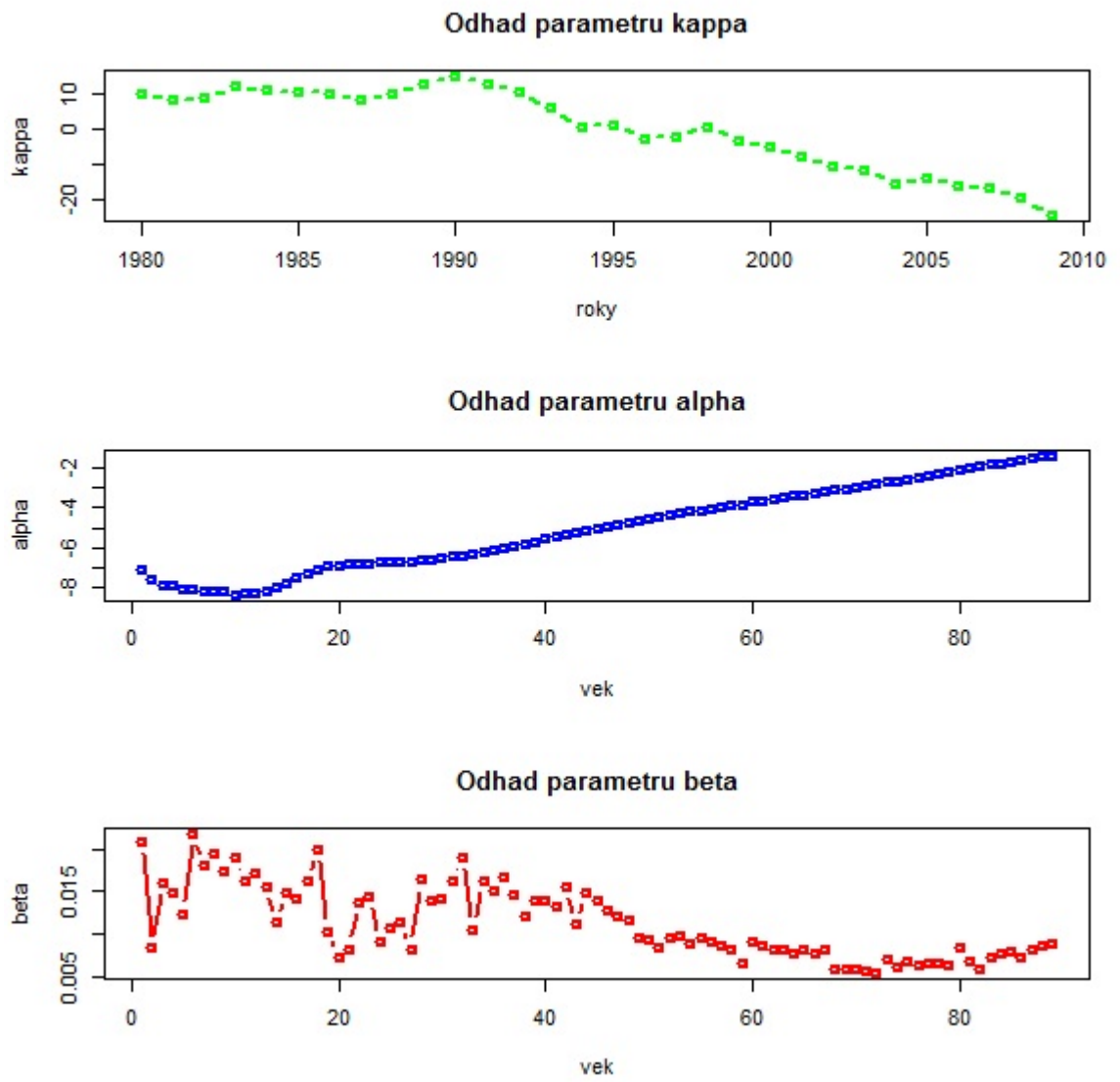
Použitím softwaru LifeMetrics v programe *R* na naše údaje dostaneme odhady pre parametre modelov. Pozrime sa najprv na model Lee-Carter, obr. č. 6.4 a č. 6.5.



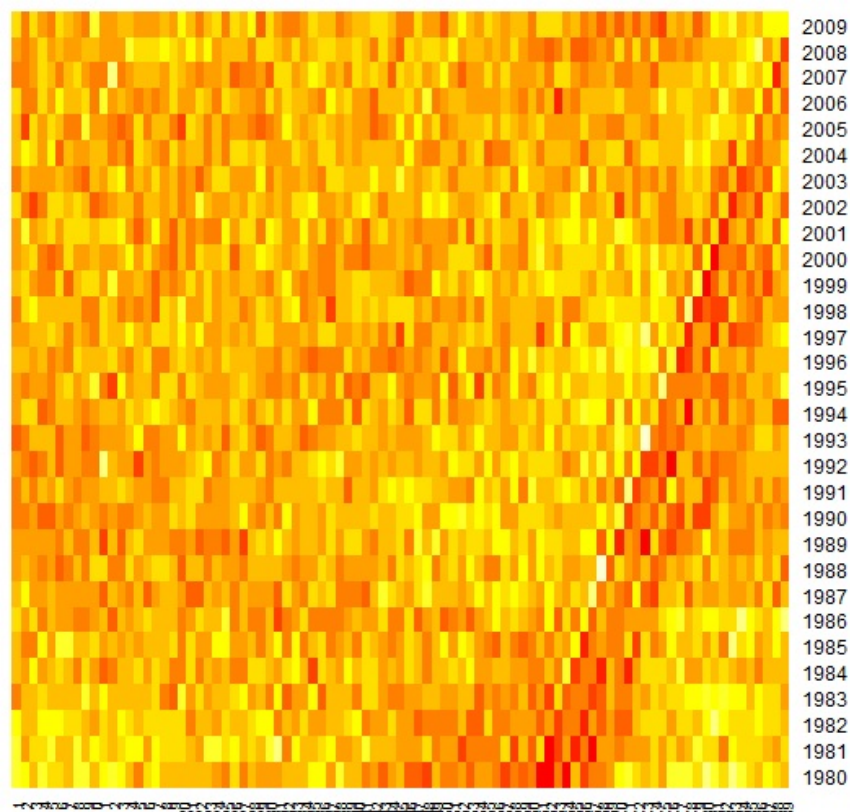
Obr. 6.2: Úmrtnosti mužskej populácie pre dáta SR, od 1. do 50. roku života



Obr. 6.3: Úmrtnosti mužskej populácie pre dáta SR, pre vybrané veku



Obr. 6.4: Odhadnuté parametre Lee-Carterovho modelu pre dáta SR

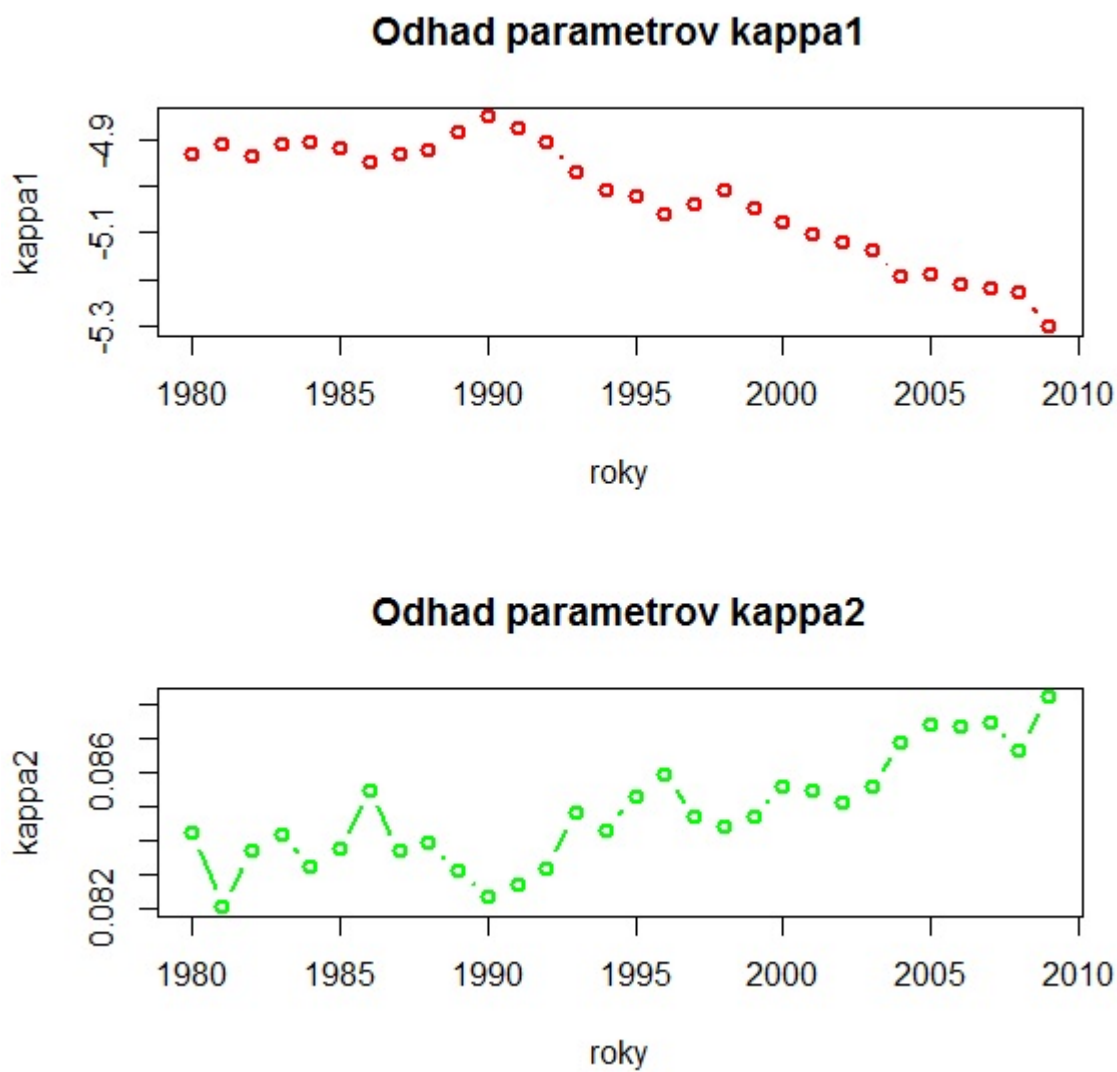


Obr. 6.5: Rezíduá Lee-Carterovho modelu

Odhadnuté parametre spĺňajú naše očakávania, uvedené aj v kapitole 4. Konkrétne parameter α charakterizuje priemernú úroveň úmrtnosti a s vekom rastie, zachytáva aj náhly nárast úmrtnosti okolo 20-teho roku života, ktorý je známy aj z iných krajín. Parameter κ je do roku 1990 na približne rovnakej úrovni a po tomto roku klesá takmer lineárne. Pri parametroch β sú hodnoty pre nižšie veku značne nepravidelné, viac hladké sú až vo vyšších vekoch. To naznačuje, že vhodnejšie by bolo kalibrovať modely len pre vyššie veku a nezaujímajú nás budúce hodnoty úmrtnosti v nižších vekoch. V rezíduách je však možné pozorovať výrazný kohortný efekt, približne pre generácie narodené medzi rokmi 1916-1920. To je vcelku zaujímavé zistenie, pretože ako sme uviedli v sekcii o kohortnom efekte (4.5.1), ten je v západných krajinách typický skôr pre neskoršie generácie. Pre prítomnosť kohortného efektu sa môže zdať tento model nevhodný, ale keď sa na vec pozrieme z pohľadu, že pre mladšie generácie nič nenaznačuje prítomnosti kohortného efektu, a predpoveď do budúcnosti chceme len pre mladšie kohorty, tak je tento model úplne v poriadku.

6.3.2 Cairns-Blake-Dowdov model

Odhadnuté parametre tohto modelu je možné vidieť na obr.č. 6.6 a graf rezíduí nájdeme v elektronickej prílohe práce. Parameter $\kappa^{[1]}$ zahrňuje periodický efekt a klesá od roku 1990, rovnako ako pri LC modeli. Parameter $\kappa^{[2]}$ zahŕňa rôznu dynamiku zmeny úmrtnosti. Rastie od roku 1990, čo je v súlade s tým, že úmrtnosť

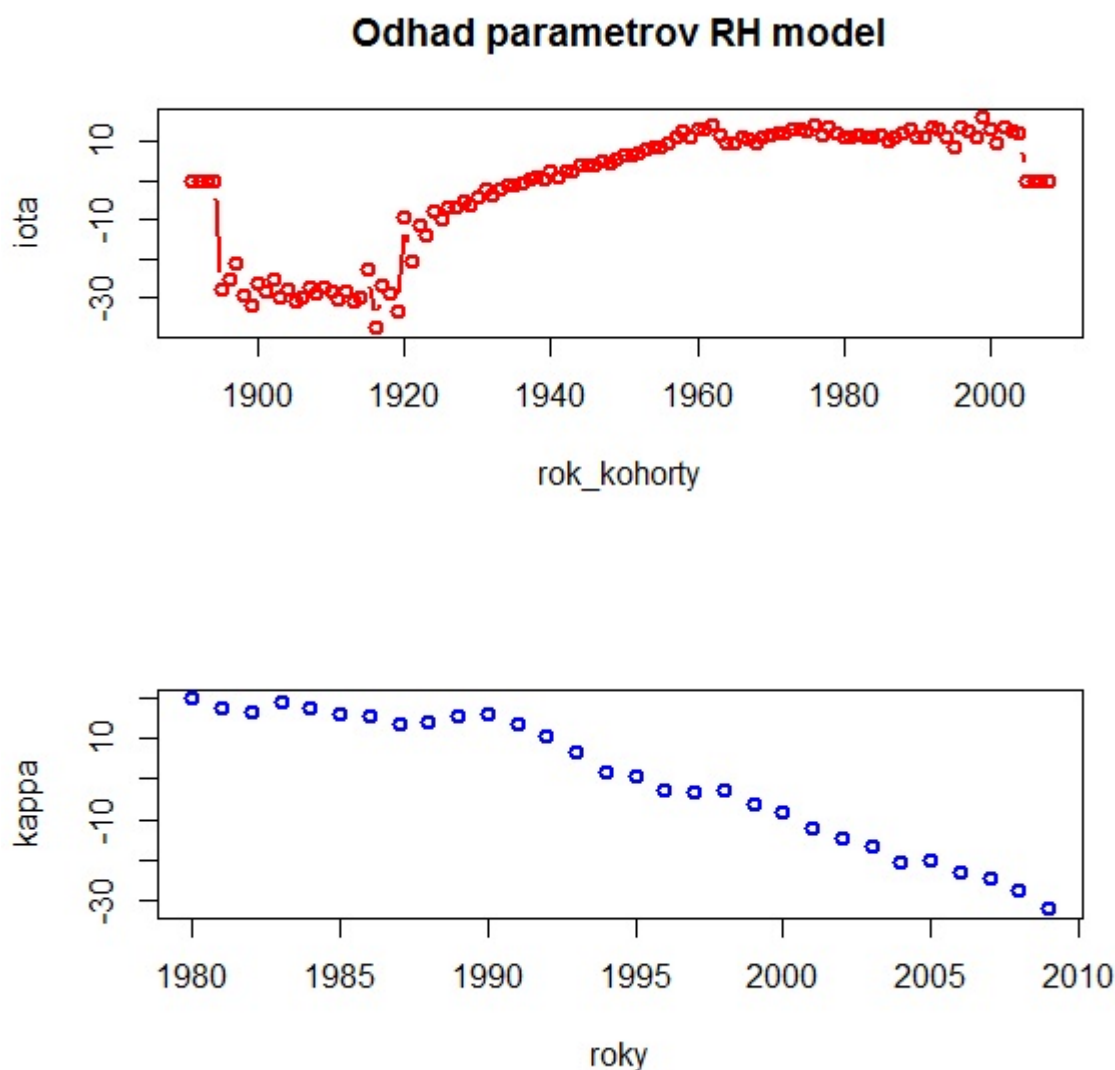


Obr. 6.6: Odhadnuté parametre Cairns-Blake-Dowdovho modelu

sa od tohto roku znižuje. Čo sa týka rezíduí, graf znovu naznačuje prítomnosť kohortného efektu pre generácie narodené medzi 1916-1920. Podobne ako sme zdôvodnili v predošlom prípade, tento model je možné použiť na modelovanie budúcich hodnôt.

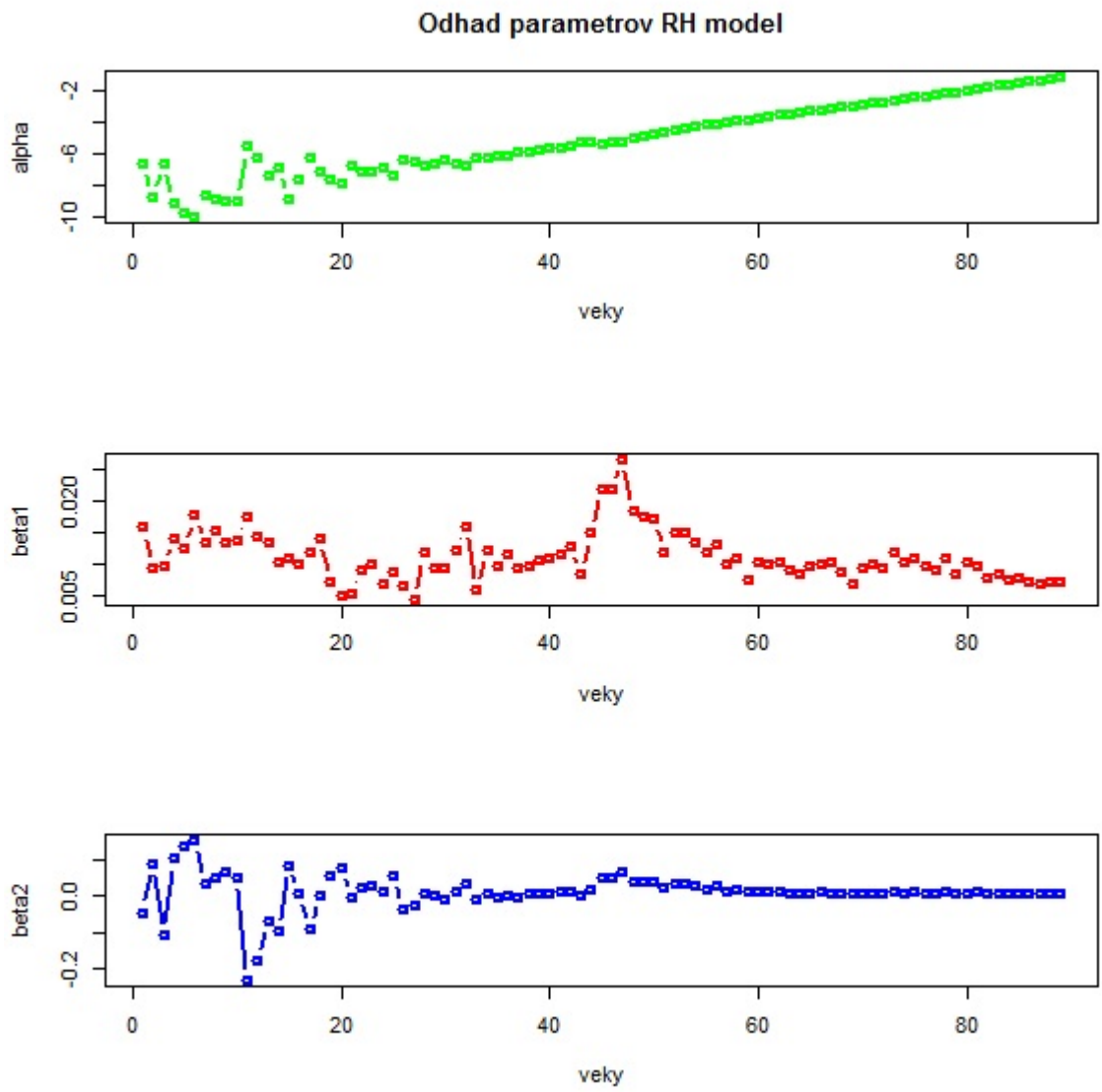
6.3.3 Renshaw-Habermanov model

Odhadnuté parametre a rezíduá tohto modelu si môžeme prezrieť na obrázkoch č. 6.7, 6.8 a 6.9.

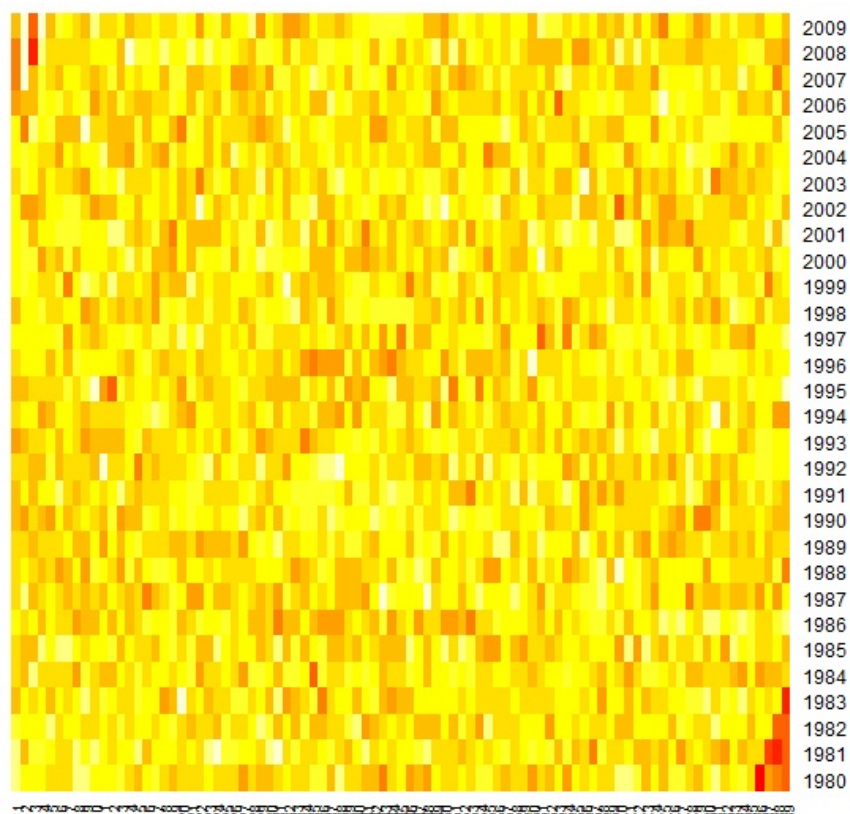


Obr. 6.7: Odhadnuté parametre Renshaw-Habermanovho modelu

Pri pohľade na rezíduá tohto modelu nevidieť žiadne náznaky kohortného efektu, rezíduá sú dostatočne rovnomerne rozdelené. Presne to by mal tento model spĺňať, za tým účelom má aj o kohortný parameter γ navyše. Z tohto pohľadu sa aj tento model zdá vhodný na predpovedanie budúcich hodnôt. O parametroch



Obr. 6.8: Odhadnuté parametre Renshaw-Habermanovho modelu



Obr. 6.9: Odhadnuté rezíduá Renshaw-Habermanovho modelu

κ môžeme konštatovať to isté ako pri predošlých modeloch, a to že klesá až od roku 1990.

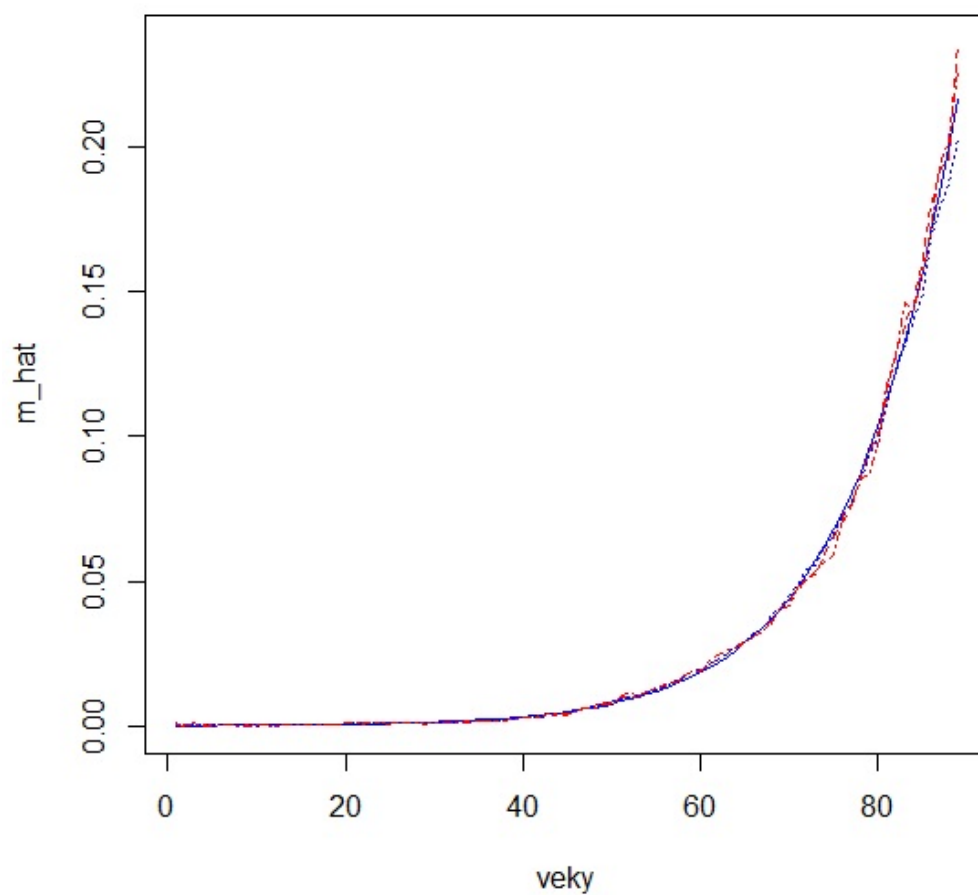
Pozrime sa ešte na obr. č. 6.10, kde sú vykreslené vyrovnané hodnoty pre všetky 3 modely a pôvodné dáta pre rok 2009. Všetky modely odhadujú pôvodné dáta veľmi dobre, malé rozdiely sú pozorovateľné len pri vyšších vekoch.

6.4 Predpovede a očakávaná hodnota životnej anuity

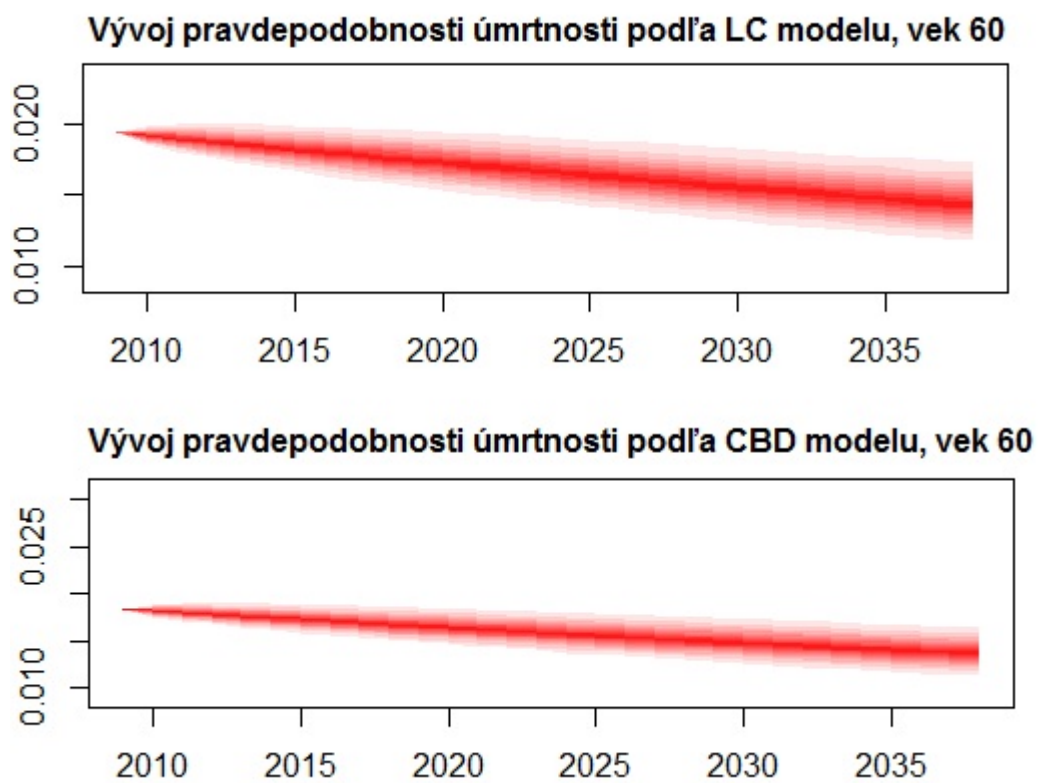
Pri predpovedi LM Software spočíta simulácie pre časovú radu κ do budúcnosti na základe odhadnutých hodnôt tohto parametru pomocou modelu ARIMA(0,1,0). Z týchto hodnôt pomocou ostatných odhadnutých parametrov určí budúce pravdepodobnosti úmrtia. Výsledkom predpovedi je n scenárov, ktoré určujú empirické rozdelenie pravdepodobnosti úmrtia.

Na obr. č. 6.11 sú vykreslené tzv. *fan charts* (viď sekcia 4.4.2) pre pravdepodobnosti prežitia 60-ročných mužov. Na prvý pohľad je zrejmé, že LC model má väčší rozptyl budúcich hodnôt pravdepodobnosti úmrtia ako CBD model. Ale očakávané hodnoty sú takmer identické, čo je možné vidieť na obr. č. 6.12, kde sú modrou vyznačené predpovede podľa CBD modelu, zelenou podľa LC modelu. Graf zobrazuje očakávanú hodnotu pravdepodobnosti úmrtia pre veky 50, 60, 70, 80. Na tomto grafe môžeme vidieť, že najväčší pokles úmrtnosti je pri veku 80, kým pri nižších vekoch klesá úmrtnosť len pozvoľna. To je v zhode s pozorovania-

Vyrovnané miery úmrtnosti pre všetky modely

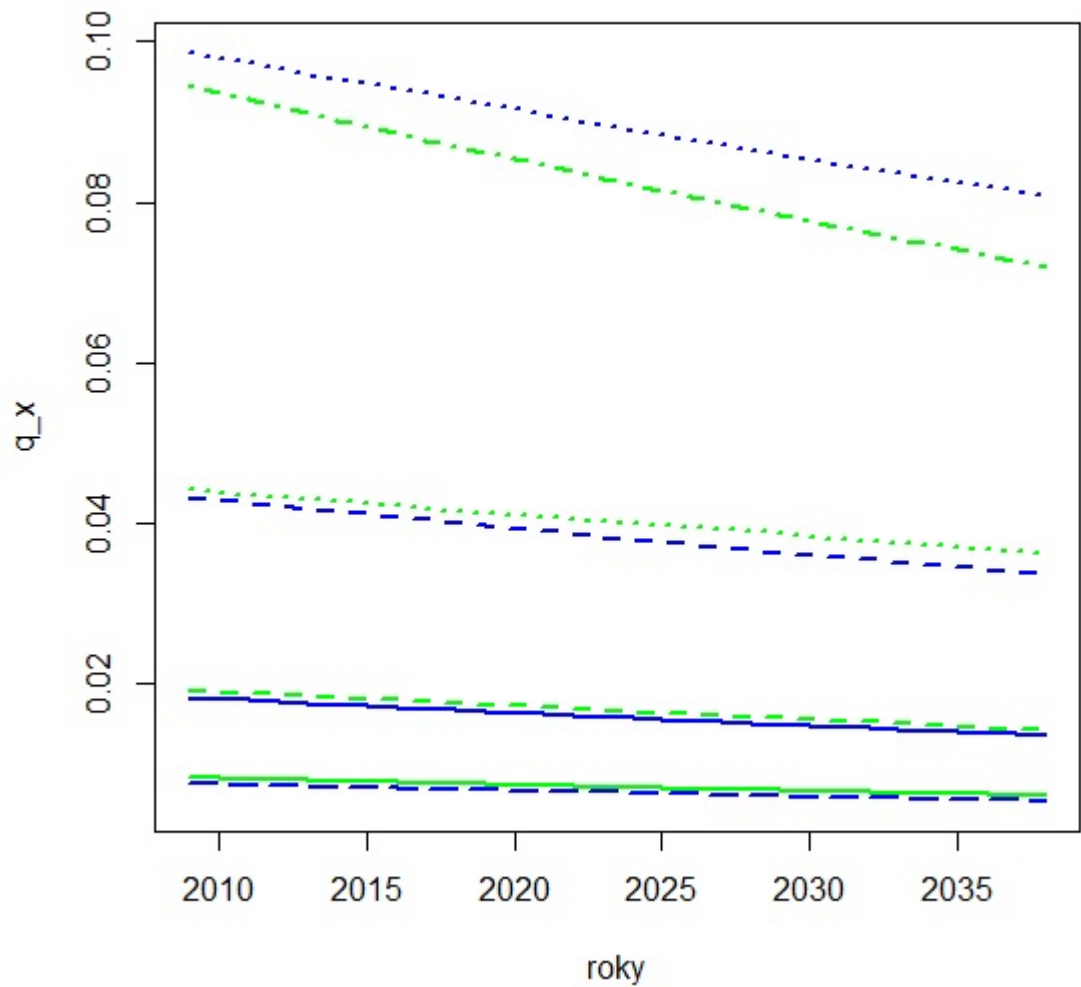


Obr. 6.10: Vyrovnané miery úmrtnosti z roku 2009 v porovnaní s pôvodnými dátami



Obr. 6.11: Porovnanie fan charts pre budúce pravdepodobnosti úmrtnosti pre LC a CBD model

Vývoj očakávanej pravdepodobnosti úmrtia, LC a CBD

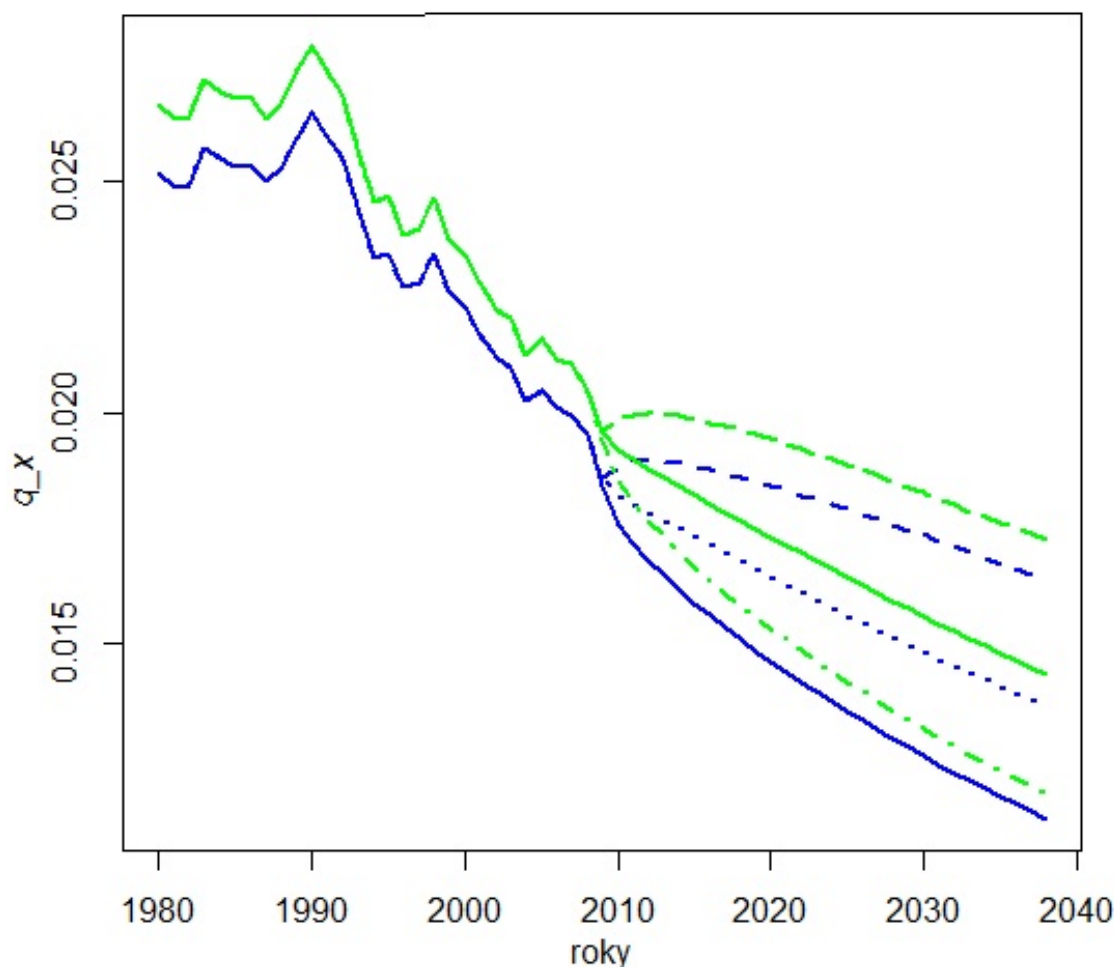


Obr. 6.12: Očakávané pravdepodobnosti úmrtia pre veku 50, 60, 70, 80 pomocou LC (zelená) a CBD modelu (modrá)

mi minulých dát. Pri veku 80 dokonca LC model očakáva výraznejší pokles ako CBD, pri ostatných vekoch je pokles takmer rovnaký pre oba modely.

Ak chceme určiť a vykresliť intervaly spoľahlivosti na danej hladine spoľahlivosti, nevystačíme si s funkciami ponúkanými v LM softwari a je potrebné vytvoriť vlastný zdrojový kód v programe *R* založený na týchto funkciách. To je ďalší dôvod na kritický pohľad na tento software, ako sme už uviedli v predošlej kapitole. Na obr. č. 6.13 sú vykreslené vyrovnané pravdepodobnosti úmrtia spolu s očakávanou hodnotou v budúcnosti a 90%-ným intervalom spoľahlivosti pre LC a CBD model vo veku 60 rokov.

Očakávané hodnoty a int. spoľahlivosti vo veku 60



Obr. 6.13: Vyrovnané a očakávané pravdepodobnosti úmrtia a 90 %-ný IS pre LC model(zelená) a pre CBD model (modrá) pre mužov vo veku 60

Keďže pre LC model je možné zo softwaru LM získať predpovede len po 89. rok života, pozrime sa na očakávanú súčasnú hodnotu polehotnej anuity vo výške 1 vyplácanú najbližších 30 rokov od 20-teho, 40-teho, 50-teho a 60-teho roku života muža (vzorec (1.10)).

Diskontovaním n jednotlivých simulovaných scenárov úrokovou mierou 3% dostaneme pre každú simuláciu súčasnú hodnotu. Dostaneme tak n hodnôt, ktoré

určujú empirické pravdepodobnostné rozdelenie súčasnej hodnoty anuity. Počet simulácií n bol pri našich výpočtoch 10 000. V tabuľke 6.1 je možné nájsť očakávané súčasné hodnoty anuit a k tomu 5% a 95%-né kvantily pre jednotlivé veky a modely. Tieto samotné hodnoty pre nás nemajú význam, kým si ich neporovnáme s hodnotami vypočítanými na základe ÚT. Toto porovnanie, založené na tabuľkách pre Slovenskú republiku z roku 2009, sa nachádza v tabuľke č. 6.2. Najvhodnejšie je porovnať priamo priemer (teda očakávanú hodnotu), ale netreba zabúdať, že s predpoveďou podľa stochastických modelov je spojená neistota, ktorá sa odráža v šírke intervalu spoľahlivosti.

Lee-Carterov model

vek	20	40	50	60
dolný kvantil	19,26522	17,60846	15,35717	12,11421
horný kvantil	19,34716	17,95971	15,86672	12,70774
priemer	19,30834	17,7876	15,61333	12,40916

Cairns-Blake-Dowdov model

vek	20	40	50	60
dolný kvantil	19,22718	17,65458	15,49655	12,06835
horný kvantil	19,33169	17,99959	16,07345	12,8681
priemer	19,28225	17,83291	15,79302	12,46818

Tabuľka 6.1: Kvantily a očakávané hodnoty pre LC a CBD model a rôzne veky

Vek	20	40	50	60
Súčasná hodnota podľa ÚT	18,8654	17,2833	15,1666	12,0709
LC, rozdiel oproti priemeru	2,35%	2,92%	2,95%	2,80%
CBD, rozdiel oproti priemeru	2,21%	3,18%	4,13%	3,29%
LC, rozdiel oproti 5%kvan.	2,12%	1,88%	1,26%	0,36%
LC, rozdiel oproti 95%kvan.	2,55%	3,91%	4,62%	5,28%
CBD, rozdiel oproti 5%kvan.	1,92%	2,15%	2,18%	-0,02%
CBD, rozdiel oproti 95%kvan.	2,47%	4,14%	5,98%	6,60%

Tabuľka 6.2: Súčasná hodnota podľa ÚT a percentuálne porovnanie s hodnotami pre LC a CBD model

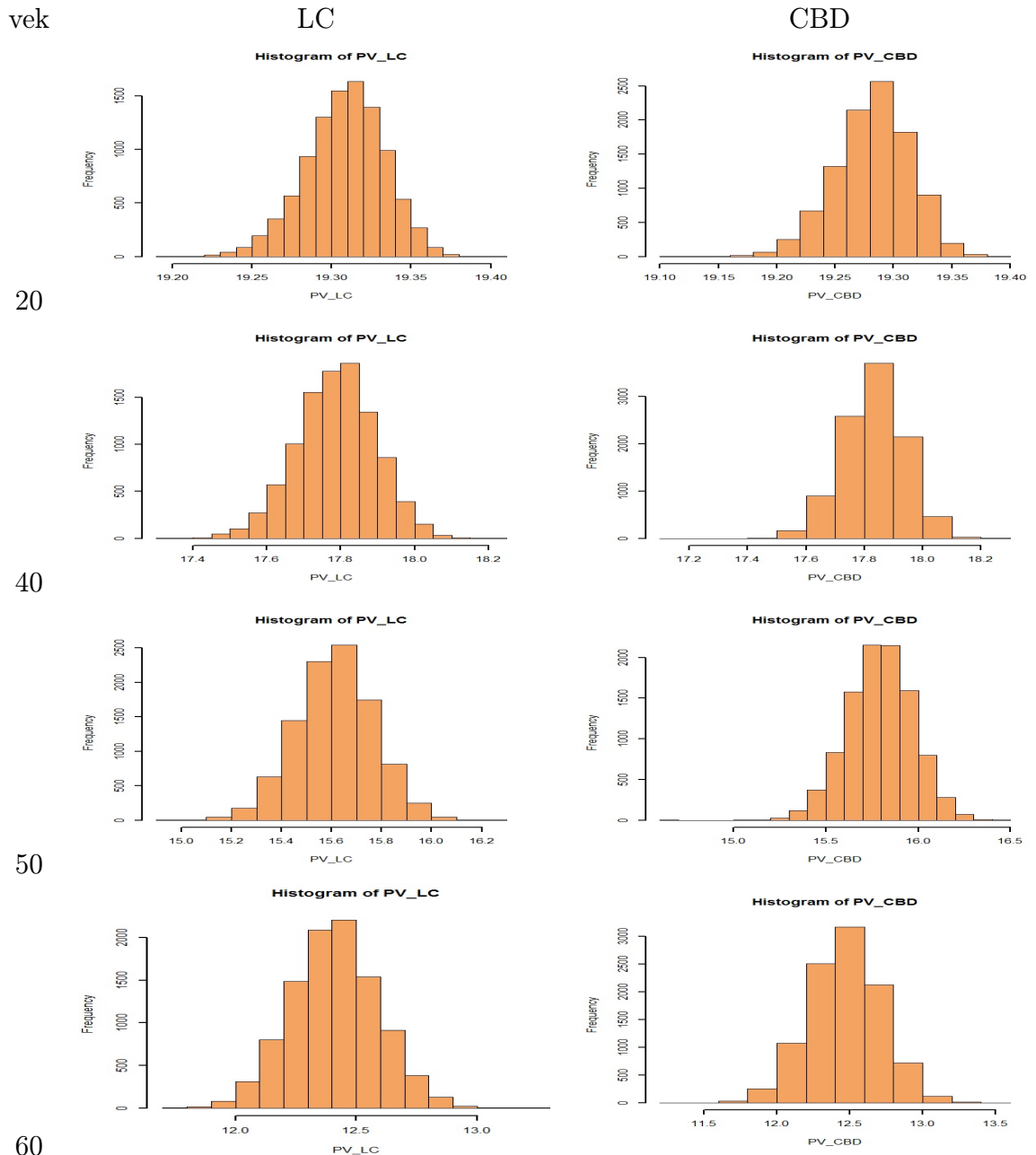
Na prvý pohľad vidieť, že hodnoty anuity počítanej podľa ÚT sú vždy nižšie, dokonca až na 1 prípad nižšie aj ako 5%-ný kvantil. Rozdiel vyjadrený v percentách nie je na prvý pohľad taký výrazný. Nedá sa jednoznačne povedať, že vo vyšších vekoch je rozdiel medzi priemernou hodnotou predpovede a ÚT väčší, čo by sa zhodovalo s rýchlejšim poklesom úmrtnosti vo vyšších vekoch. Tento vzťah veku a rozdielu je ale možné jasne vidieť pri hornom kvantile. Za zmienku stoja aj vysoké hodnoty rozdielu pri 95%-nom kvantile, vo veku 60 pri oboch modeloch.

Pre lepšiu ilustráciu významnosti rozdielu v úmrtnosti, pozrime sa na absolútne hodnoty rozdielov očakávanej hodnoty z projekcií a hodnoty spočítanej z ÚT (tabuľka č. 6.3). V tejto tabuľke sme uvažovali výšku ročnej penzie 100 000 a počet poistencov v danej skupine 10 000. Očakávané navýšenie súčasnej hodnoty záväzkov na výplatu anuit sa aj pri malej percentuálnej zmene pohybuje v

vek	20	40	50	60
navýšenie podľa LC	442.907.559	504.311.172	446.703.828	338.255.952
navýšenie podľa CBD	416.817.559	549.621.172	626.393.828	397.275.952

Tabuľka 6.3: Potrebné navýšenie rezervy podľa rozdielu očakávanej hodnoty z projekcií a z ÚT

stovkách miliónov. Pre lepšiu predstavu o rozdelení súčasnej hodnoty uvádzame v tabuľke 6.4 aj histogramy pre oba modely a jednotlivé veky.



Tabuľka 6.4: Histogramy rozloženia súčasnej hodnoty anuity pre LC a CBD model v rôznych vekoch

Pri pohľade na výsledky, je zreteľné, že riziko dlhovekosti nie je vhodné podce-

ňovať, pretože má výrazný vplyv na zvýšenie súčasnej hodnoty záväzkov. Už pri malých zmenách v úmrtnosti nastávajú veľké rozdiely v absolútnej hodnote budúcich záväzkov, resp. v jej súčasnej hodnote. Tieto sú predovšetkým pri vyšších vekoch. Neistota v predpovedi sa odráža v intervaloch spoľahlivosti. Pri hornom kvantile je riziko úmrtnosti oveľa výraznejšie ako pri priemerných očakávaných hodnotách. Dôležité je pripomenúť, že sme uvažovali len výplatu dočasnej anuity. Ak by sme uvažovali doživotnú anuitu, rozdiely by boli výrazne vyššie. Vzájomné rozdiely medzi oboma modelmi sú pomerne malé, z oboch dostaneme podobné predpovede.

Ak by poisťovňa alebo penzijný fond chceli kúpiť za účelom zaistenia niektorý z finančných derivátov, napr. q-forward, ocenia ho na základe odhadov založených na týchto modeloch. Takéto budúce odhady môžu využiť aj pri oceňovaní potrebných poisťných rezerv.

Tieto inštitúcie majú často k dispozícii aj vlastné údaje pre svoju špecifickú populáciu, na základe ktorých odhadujú aj budúce úmrtnosti. Keď sme si prezreli grafy pre vývoj úmrtnosti na Slovensku v minulosti, dalo by sa konštatovať, že úmrtnosť populácie nezaznamenáva také prudké zmeny. V mnohých iných krajinách sú tieto zmeny omnoho väčšie a o to dôležitejšie je dbať na správne predpovede a ohodnotenie očakávaných záväzkov.

Záver

Ako sme sa dozvedeli v tejto práci, existuje množstvo prístupov a modelov, ktoré je možné navrhnuť na projektovanie úmrtnosti. Pritom existuje ešte množstvo metód, ktoré táto práca nezahŕňa. Výber použitej metódy závisí na dátach, ich spoľahlivosti a účelu projektovania budúcej úmrtnosti. Žiaľ vo všeobecnosti nie je možné považovať žiadny prístup za "správny". Preto dva rôzne aktuárske tímy môžu prísť k rôznym výsledkom na základe tých istých dát. To tiež prispieva k dôvodom, prečo je riziko dlhovekosti v poisťovniach podceňované a jeho ohodnoteniu sa nevenuje patričná pozornosť.

V teoretickej časti práce sme si vysvetlili riziko dlhovekosti a pojmy s ním súvisiace. Zamerali sme sa na vysvetlenie jednotlivých prístupov k predpovedaniu úmrtnosti, hlavne pomocou stochastických projekčných modelov. Načrtli sme si aj ich výhody a nevýhody. Preštudovali a popisali sme si aj produkty LifeMetrics a Xpect, ktoré napomáhajú pri ohodnotení rizika dlhovekosti. Vysvetlili sme ako ich využiť nie len pri výpočte rezerv, ale aj pri prenose rizika na kapitálové trhy. Vtedy tieto produkty poskytujú vhodný benchmark a pomáhajú ohodnotiť primeranú cenu produktov k tomu určených. Najdôležitejšou časťou práce bolo aplikovanie získaných poznatkov na konkrétne dáta.

Pri aplikácii sme sa zamerali na dáta pre Slovenskú republiku. Zo získaných projekcií sme spočítali možné súčasné hodnoty anuity, intervaly spoľahlivosti a pozreli sme sa nato, o koľko by bolo potrebné navýšiť dôchodkové rezervy, ak by sa poisťovne alebo penzijné fondy riadili týmito modelmi, resp. o koľko sa zvýši očakávaná hodnota záväzkov. Vo všetkých prípadoch sú predpovedané hodnoty vyššie a výpočet rezerv podľa súčasných úmrtnostných tabuliek nedostatočný.

Percentuálne zmeny vo vývoji úmrtnosti však neboli veľké a je otázne, či stojí zato, používať stochastické modely a či by sme neprišli k podobným výsledkom použitím omnoho jednoduchších modelov, ako napr. exponenciálnej formule. Na otázku, nakoľko je čisto matematický pohľad na úmrtnosť postačujúci, bez zahrnutia sociologického, medicínskeho alebo iného prístupu, nie je v našich silách odpovedať. Pri reálnych výpočtoch netreba zabúdať, že veľkú mieru neistoty zohráva aj úroková miera, ktorá má významný podiel na súčasnej hodnote anuity. A v porovnaní s týmito rizikami sa zmeny v súčasnej hodnote pár percent javia nevýznamné.

Zoznam použitej literatúry

- [1] PITACCO, E., DENUIT, M., HABERMAN, S., OLIVIERI, A.M. *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*. Oxford University Press, 2009. ISBN 978-0-19-954727-2
- [2] CIPRA, T. *Pojistná matematika- teorie a praxe*, EKOPRESS, Praha, 1999. ISBN 80-86119-17-3
- [3] COUGHLAN, G. *LifeMetrics Technical Document* dostupné na internete: <http://www.llma.org>, 2007
- [4] BLAKE, D., BURROWS, W. *Survivor bonds: Helping to hedge mortality risk*. In *Journal of Risk and Insurance*, vol.68, 2001, s.336-348.
- [5] COUGHLAN, G.D., EPSTEIN, D., et al. *q-forwards: Derivatives for transferring longevity and mortality risk*. J.P. Morgan: London, dostupné na internete pod www.lifemetrics.com, 2007
- [6] LLMA *Sample Term Sheet q-forward a q-forward Example Sheet* dostupné na internete pod [www.llma.org/publications.html]
- [7] LIFE LONGEVITY MARKETS ASSOCIATION, *Longevity Pricing Framework: A framework for pricing longevity exposures developed by the LLMA*. LLMA, dostupné na internete pod [www.llma.org/publications.html], 2010
- [8] DOWD, K. *Survivor Bonds: A Comment on Blake and Burrows*. In *Journal of Risk and Insurance*, vol. 70(2), 2003, s.339-348
- [9] RENSHAW, A.E., HABERMAN, S. *A cohort-based extension to the Lee-Carter model for mortality reduction factors*. In *Insurance: Mathematics Economics*, vol.38(3), 2006, s.556-570.
- [10] CURRIE, I.D. *Smoothing and forecasting mortality rates with p-splines*. Dostupné na adrese: <http://www.ma.hw.ac.uk/iain/research/talks.html> 2006
- [11] CURRIE, I.D., DURBAN, M., EILERS, P.H.C. *Smoothing and forecasting mortality rates*. In *Statistical Modelling*, vol.4, 2004, s.279-298.
- [12] MCCUTCHEON, J.J. *Some remarks on splines*. In *Transactions of Society of Actuaries*, vol. 37, 1981, s.421-438 2006
- [13] CAIRNS, A., BLAKE, D., et al. *A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from England and Wales and the United States*. dostupné na internete: <http://www.lifemetrics.com>, 2007
- [14] LEE, R.D., CARTER, L.R. *Modeling and forecastign U.S.Mortality*. In *Journal of the American Statistical Association*, vol.87, 1992, s.659-671.
- [15] BOOTH, H., MAINDONALD, J., SMITH, L. *Applying Lee-Carter under conditions of variable moratility decline*. In *Population Studies*, vol. 56(3), 2002, s.325-336

- [16] LEE, R.D. *The Lee-Carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications*. In *North American Actuarial Journal*, vol. 4(1), 2000, s.80-93
- [17] STRANG, G., *Linear algebra and its applications*. Thomson Learning, Inc., 1988, tretie vydanie, s. 443, ISBN 0-15-551005-3
- [18] BROUHNS, N., DENUIT, M., VERMUNT, J.K. *A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected life-tables*. In *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 31, 2002a, s.373-393
- [19] CAIRNS, A.,BLAKE, D.,DOWD, K. *A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty: Theory and calibration*. In *The Journal of Risk and Insurance*, vol.73(4), 2006, s.687-718.
- [20] CIPRA, T. *Finanční ekonometrie*. Ekopress, 2008. ISBN 978-80-86929-43-9
- [21] GIROSI, F., KING, G. *Understanding the Lee-Carter mortality forecasting method*. Technical report, 2007
- [22] GOVERNMENT ACTUARY'S DEPARTMENT *National Population Projections 1992-based* HMSO, London 1995
- [23] GOVERNMENT ACTUARY'S DEPARTMENT *National Population Projections: review of methodology for projecting mortality* Government Actuary's Department, London 2001
- [24] GOVERNMENT ACTUARY'S DEPARTMENT *National Population Projections 2000-based* HMSO, London 2002
- [25] *The health of adult Britain 1841-1994*. In *Office of National Statistics*, London, 1997
- [26] WILLETS, R.C., *The Cohort Effect: Insights and Explanations*. In *British Actuarial Journal*, vol.10, s.833-877, 2004.
- [27] COUGHLAN, G. *Longevity Index Technical Document (version 1.0)* dostupné na internete: <http://www.jpmorgan.com/pages/jpmorgan/investbk/solutions/lifemetrics/library>, 2012
- [28] LIFEMETRICS ADVISORS *LifeMetrics Software user guide* dostupné na internete: <http://www.jpmorgan.com/pages/jpmorgan/investbk/solutions/lifemetrics/software>, 2007
- [29] UNIVERSITY OF CALIFORNIA, BERKELEY (USA), AND MAX PLANCK INSTITUTE FOR DEMOGRAPHIC RESEARCH (GERMANY) *Human Mortality Database*. Dostupné na adrese www.mortality.org (dáta stiahnuté 20.10.2012).