Oponentský posudek na rigorózní práci

Mgr. Jiřího Widže

„Výpočtové problémy elementární teorie čísel“

Předložená práce je věnována všestrannému posouzení teorie *řetězových zlomků* včetně jejího historického vývoje a praktického uplatnění jak v rámci samotné matematiky, tak i fyziky a informatiky. Tomu odpovídá i členění celé práce do pěti výkladových kapitol, doplněných o bohatý seznam užité literatury. Názvy jednotlivých kapitol dobře odpovídají jejich obsahu, který vždy přesně naplňuje zamýšlený cíl, a proto ve svém posudku vynechám popis jednotlivých kapitol a budu se rovnou věnovat hodnocení výsledného textu.

Především oceňuji enormní množství matematické literatury, které autor při přípravě svého díla pročetl a zpracoval. Vytvořil tak ojedinělé dílo, které svým rozsahem nemá mezi četnými dostupnými a mně známými zdroji (věnovanými většinou jen jednotlivým otázkám teorie řetězových zlomků) obdoby. V tomto soustředění do jednoho kompaktního celku psaného jednotným stylem spatřuji hlavní přínos posuzované práce, která sice neobsahuje původní autorovy výsledky (což je s ohledem na zaměření a pojetí práce pochopitelné), avšak kvalitou svého zpracování naplňuje mé osobní představy o tom, jak by rigorózní práce daného obecného oboru (narozdíl od jiných, speciálně zaměřených matematických studijních oborů) měly vypadat. K tomu je nutno dodat, že osobní autorův vklad do výsledného textu je přece jen znatelný — mnohé prezentované výsledky autor ilustruje konkrétními numerickými příklady (věřím, že většinou „z vlastní dílny“), které předurčují možné využití textu ke studijním účelům pro středoškolské učitele matematiky a jejich talentované žáky, tím spíše, že celý text je i po jazykové stránce na velmi vysoké úrovni, když se v něm spojuje čtivost, srozumitelnost a přesnost výkladu myšlenek.

Přejdu nyní k jednotlivým připomínkám, které mě při čtení celého textu napadly. Rozdělím je do tří skupin A, B, C.

A. *Co zůstalo v textu přehlédnuto*

(1) Druhý sčítanec v posledním součtu na str. 8 má být $\frac{2}{10}$, nikoliv $\frac{3}{10}$.
(2) V posledním vzorci na str. 18 jsou za sebou chybně dva „plusy“.
(3) Ve větě 1.2 na str. 20 chybí vzorce $b_k = \dots$.
(4) Druhá tabulka na str. 31 má zmatečnou osnovu, v prvním řádku mělo namísto $n = 1, 2, 3, 4, 5$ správně být $i = 0, 1, 2, 3, 4$ a prvním sloupci pak d_{5-i} a c_{5-i} namísto d_{n-i} a c_{n-i}.
(5) V definici 1.7 na str. 34 namísto „nejmenší“ patří „největší“.
(6) Ve větě 1.15 na str. 36 se píše „označme r_k zbytek po dělení čísla r_{k+1} číslem r_{k+2}“, což je v rozporu s následnou rovností. Kvůli označení $r_0 = a$ a $r_1 = b$ ve znění věty chybí předpoklad $a \geq b$.
(7) Po důkazu věty 1.15 na str. 37 se zbytky r_k používají ke konstrukci řetězového zlomku s danou hodnotou $\frac{p}{q}$, která však u závěrečného řetězového zlomku není uvedena, navíc při využití označení z věty 1.15 měla být zna-

čena $\frac{a}{b}$. Co se počítá v následném „Například:" na str. 37 dole? Řetězový zlomek pro číslo $\frac{105}{38}$? Chybí tam zadání i odpověď.

(8) Zadání příkladu 1.9 na str. 40 není zadáním úkolu, není jasné, co se bude v řešení dít.

(9) Ve větě 1.22 na str. 44 má namísto $y < Q_k$ být $0 < y < Q_k$.

(10) V popisu geometrické interpretace na str. 48 postrádám zmínku, že obrazy sblížených zlomků jsou body o souřadnicích $[Q_k, P_k]$.

(11) Na straně 52 dole namísto „pokud je" raději uvést „protože je".

(12) Hodnota k_0 v definici 1.10 na str. 53 není jednoznačně určena, proto je problematické zavádět pojem „neryze periodický", aniž uvedeme „je-li k_0 nejmenší takové".

(13) Ve větě 1.37 na str. 63 nerozumím „netvoří dvojici podle (1.16)", patrně mělo být „podle (1.20)".

(14) Věta 2.20 na str. 82 není důsledkem věty 2.19, nýbrž důsledkem věty 2.18.

(15) Za rovnicí (2.12) na str. 89 místo „$n > 1$ je přirozené" má být „n je celé".

(16) Na str. 101 je záludný překlep s výsledkem „zaspat".

(17) V rovnici (2.23) na str. 119 má být $\varphi(N)$ namísto $\varphi(n)$.

(18) V poznámce pod čarou na str. 122 je odkaz na zdroj [Sz], který jsem v seznamu literatury nenašel.

(19) Poslední nerovnost v definici 3.1 na str. 131 má být ostrá.

(20) Na posledním řádku str. 145 je dvakrát f^k, správně má být φ^k.

(21) Za definicí 7 na str. 163 se píše $n \cdot a < m \cdot b$, správně má být $n \cdot a > m \cdot b$. Níže na téže straně je uvedena nerovnost $a : b > mc : nc$ bez určení, pro které dvojice (m, n) je splněna.

B. *Co mohlo být v textu jinak*

(1) V obecné definici 1.1 na straně 17 bych neuváděl obory, odkud jsou prvky řetězových zlomků. Na mnoha místech práce to totiž jsou racionální, reálná či komplexní čísla nebo dokonce funkce.

(2) Na str. 20 namísto „existuje opačné tvrzení" lépe „platí opačné tvrzení".

(3) Myslím, že pojmenování „intuitivní způsob výpočtu" na str. 27 je myslím nevhodné. Jedná se přece o přesný postup výpočtu na základě dohodnutých pravidel o zapisování složených zlomků. Proto bych preferoval pojmenování „klasický" nebo „standardní" způsob výpočtu.

(4) Ilustrující příklad k větě 1.13 na str. 33 je málo výstižný, týká se totiž pouze triviálního závěru „Hodnota konečného jednoduchého řetězového zlomku je racionální číslo". Ostatně i dále uvedený „Důsledek věty 1.13" je rovněž důsledkem zmíněného triviálního závěru. Plnohodnotné uvedené znění věty 1.13 pak souvisí s dříve uvedeným „Důsledkem věty 1.9" ze strany 26, což na straně 33 zmíněno není.

(5) Polemizuji s názorem z odstavce na str. 34 nahoře, že totiž Euklidův algoritmus je nepoužitelný k výpočtu řetězových zlomků pro iracionální čísla. Původní (patrně geometrický) Euklidův algoritmus lze totiž uplatnit, jak sám autor popisuje dále v paragrafu 4.2, pro jakékoliv dvě (ať už souměřitelné či nesouměřitelné) veličiny. Proto i první způsob převodu (ať už racionálního či iracionálního) čísla x na jednoduchý řetězový zlomek (popsaný

na straně 34 pomocí funkce celá část) dle mého názoru vychází z původního Euklidova algoritmu, kdy v prvním kroku srovnáváme hodnoty x a 1, ve druhém kroku hodnoty 1 a $\{x\}$ (zlomková část čísla x) atd.

(6) U netriviálních a nedokazovaných pravidel z odstavců 1.11.3 a 1.11.4 postrádám odkaz na zdroj, u zajímavé poznámky na str. 67 by stálo za to uvést, kdo popsanou chybu odhalil.

(7) U příkladu na str. 69 bych se zmínil i o hodnotě $\left|\frac{1}{5} - \frac{0}{1}\right|$.

(8) I když je motivační role věty 1.22 před uvedením definice 2.1 na str. 69 zmíněna, přece jen bych explicitně i tady uvedl, že *každý* sblížený zlomek je nejlepším přiblížením prvního druhu.

(9) Příklad 2.2 na str. 72: úkolem jistě není najít *celou* posloupnost.

(10) U tří speciálních druhů polynomů na str. 123–126 bych rozhodně uvedl, na jakých intervalech jsou dotyčné skupiny polynomů ortogonální.

C. *Otázky k obhajobě*

(1) Znění věty 1.12 na str. 27 je v rozporu se zněním předchozí věty 1.10 ve speciálním případě $b_k = 1$ pro každé k. Kde je chyba?

(2) Nerozumím druhému postupu („zepředu") výpočtu řetězového zlomku, jak je podán na str. 28–29. Pokud jsou výpočty zlomků $\frac{P_k}{Q_k}$ pro $k = 0, 1, 2, 3$ zbytečné, proč byly vůbec uváděny? A odkud se pak vzal obecný vzorec pro $\frac{P_4}{Q_4}$, když ne výpočtem „odzadu"? Domnívám se, že výpočet „zepředu" je nemožný bez užití základních rekurentních vzorců z věty 1.1, ty však na kritizovaném místě nejsou zmíněny.

(3) Týká se Lagrangeův výsledek letmo zmíněný na str. 90 i Pellovy rovnice $x^2 - 3y^2 = -1$?

(4) V řešení příkladu 2.14 na str. 103 se píše „předpokládejme, že existuje (limita) α". Jak tu existenci dokázat?

(5) Na str. 171 (Lambert) a na str.177 (Sierpinski) se objevují řady typu

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_1a_2a_3} + \dots,$$

ve kterých vidím rozvoje „vzestupných" řetězových zlomků

$$\frac{1 + \frac{1 + \frac{1 + \dots}{a_3}}{a_2}}{a_1}.$$

V práci jsou však naopak uvedeny zápisy „sestupných" řetězových zlomků. Proč?

Přes uvedený výčet A (většinou drobných) přehlédnutí konstatuji, že celá rozsáhlá předložená práce je vysázena velmi dobře i po stránce grafického členění, ve složitých matematických vzorcích (s častými řetězovými zlomky) se chyby prakticky nevyskytují. Svědčí to jistě o velké píli a pečlivosti, kterou uchazeč věnoval i formální podobě výsledného díla.

Závěrem shrnuji, že práce je aktuálním a původním příspěvkem věnovaným různým aspektům teorie řetězových zlomků, kterým autor prokázal schopnost samostané tvůrčí práce i vyspělou matematickou kultivovanost. Mohu proto konstatovat, že výsledný text nepochybně splňuje požadavky kladené na rigorózní práci v oboru *Obecné otázky matematiky a informatiky* a doporučuji jej tudíž k obhajobě před příslušnou komisí.

V Brně 18. května 2013 doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.