

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Pavel Hejbal

Vizualizace numerických řešení parciálních diferenciálních rovnic pomocí balíku Tecplot

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Vít Dolejší, Ph.D.

Studijní program: Matematika, Obecná matematika

2006

Děkuji panu docentu Dolejšímu za ochotu a vstřícnost, kterou mi věnoval během všech konzultací, a za velmi cenné rady a připomínky při tvorbě této práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 11. 5. 2006

Pavel Hejbal

Obsah

1	Mechanika tekutin	5
2	Popis vstupních dat	7
3	Řešení úlohy	10
3.1	Triangulace	10
3.2	Hodnoty aproximace	11
4	Animace	15
5	Ukázky výsledků	16
	Literatura	19

Název práce: Vizualizace numerických řešení parciálních diferenciálních rovnic pomocí balíku Tecplot

Autor: Pavel Hejbal

Katedra: Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Vít Dolejší, Ph.D.

e-mail vedoucího: Vit.Dolejsi@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci se zabýváme vizualizací numerických řešení parciálních diferenciálních rovnic získaných nespojitou Galerkinovou metodou, která dává po částech polynomiální, ale nespojitou aproximaci. Pro vizualizaci chceme použít komerční software Tecplot, který však umožňuje vizualizovat pouze spojitou, po částech lineární funkci. Cílem této práce je vytvořit vhodný interface mezi výstupem nespojité Galerkinovy metody a vstupem programu Tecplot, což znamená navrhnout a posléze implementovat algoritmy, které aproximují nespojitou, po částech polynomiální funkci novou spojitou a po částech lineární funkcí. Na závěr se věnujeme tvorbě softwarových prostředků, které použitím zmíněných algoritmů umožní automaticky generovat animace numerického řešení.

Klíčová slova: Tecplot, nespojitá Galerkinova metoda, triangulace

Title: Visualization of numerical solutions of partial differential equations with the aid of software Tecplot

Author: Pavel Hejbal

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: Doc. RNDr. Vít Dolejší, Ph.D.

Supervisor's e-mail address: Vit.Dolejsi@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we deal with the visualization of numerical solutions of partial differential equations obtained by discontinuous Galerkin finite element method, which gives a discontinuous piecewise polynomial approximation. For the visualization we would like to use commercial software Tecplot, which enables to display only continuous piecewise linear function. The aim of this work is to create interface between the output of the discontinuous Galerkin finite element method and the input of the Tecplot. Therefore we propose and implement algorithms, which approximate discontinuous piecewise polynomial function by the function, which is continuous and piecewise linear. In the end of this work we turn to create software products, which could automatically generate animations of numerical solutions, with the aid of mentioned algorithms.

Keywords: Tecplot, discontinuous Galerkin method, triangulation

Kapitola 1

Mechanika tekutin

Studium proudění kapalin a plynů nachází uplatnění v mnoha rozmanitých oblastech vědy i techniky jako je např. letectví a aeronautika, automobilový průmysl, strojírenství (konstrukce turbín a kompresorů), chemický a potravinářský průmysl (mísicí zařízení, proudění chemicky reagujících tekutin), medicína (proudění krve v cévách), biologie, meteorologie, hydrologie, oceánografie či ochrana životního prostředí. Ke zkoumání proudění je možné využít dva přístupy. Jednak pomocí experimentů, které sice přinášejí realistický obraz skutečného proudění, ovšem jejich uskutečnění je často nákladné a zároveň časově náročné. Druhou možností je použití matematických modelů. Většina z nich umožňuje převést úlohu na řešení soustavy parciálních diferenciálních rovnic vyjadřujících základní fyzikální zákony zachování hmoty, hybnosti, momentu hybnosti a energie. Počítačová dynamika tekutin (známá pod zkratkou CFD = Computational Fluid Dynamics) se zabývá numerickým řešením takových soustav. Cílem tohoto oboru je vytvoření počítačové simulace proudění, získané na základě aplikace vhodných numerických metod a výpočtových algoritmů, která bude srovnatelná s výsledky experimentů.

Tato práce se zabývá závěrečnou fází tohoto procesu, kterou je vizualizace řešení. V poslední době se při řešení soustav diferenciálních rovnic popisujících proudění používají metody vyššího řádu, uveďme například ADGFEM (Adaptive Discontinuous Galerkin Finite Element Method), v současnosti vyvíjený na Katedře numerické matematiky, viz [1], [2], [3]. Touto metodou se získá po částech polynomiální aproximace. Většina dnes dostupného softwaru ovšem umožňuje vizualizovat pouze funkce po částech konstantní nebo spojitě a po částech lineární, jako v případě komerčního softwaru TECPLOT, jehož licenci zakoupila matematická sekce na MFF. Cílem této práce je tedy vytvořit interface mezi výsledky nespojitě Galerkinovy metody a vstupem programu Tecplot. To znamená navrhnout, a následně implementovat vhodný algoritmus, který aproximuje nespojitou po částech polynomiální funkci takovou funkcí, která je spojitá a po částech lineární. Výstupem vytvořeného programu je soubor

přímo zpracovatelný programem Tecplot.

Kapitola 2

Popis vstupních dat

V této části se podrobněji seznámíme s podobou výsledků nespojité Galerkinovy metody a uvedeme formát vstupních dat.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je oblast, která je rozdělena na uzavřené trojúhelníky $\{K_i\}$, přičemž platí:

$$K_i^o \cap K_j^o = \emptyset, \quad i \neq j$$

Množinu všech $\{K_i\}$, pokrývajících Ω , nazýváme triangulací. V našem případě pracujeme pouze s konformními triangulacemi, které splňují následující podmínku:

$$K_i \cap K_j = \begin{cases} \emptyset \\ 1 \text{ bod} \\ \text{celá hrana} \end{cases}, \quad i \neq j$$

Triangulace, která není konformní, se nazývá nekonformní.

Jeden ze dvou souborů, který náš program obdrží na vstup, bude specifikovat triangulaci $\{K_i\}$. To znamená, že v něm budou zapsány souřadnice uzlových bodů triangulace a dále jejich trojice, definující jednotlivé trojúhelníky. Numerické řešení, získané pomocí nespojité Galerkinovy metody, patří do prostoru S_h nespojitých po částech polynomiálních funkcí:

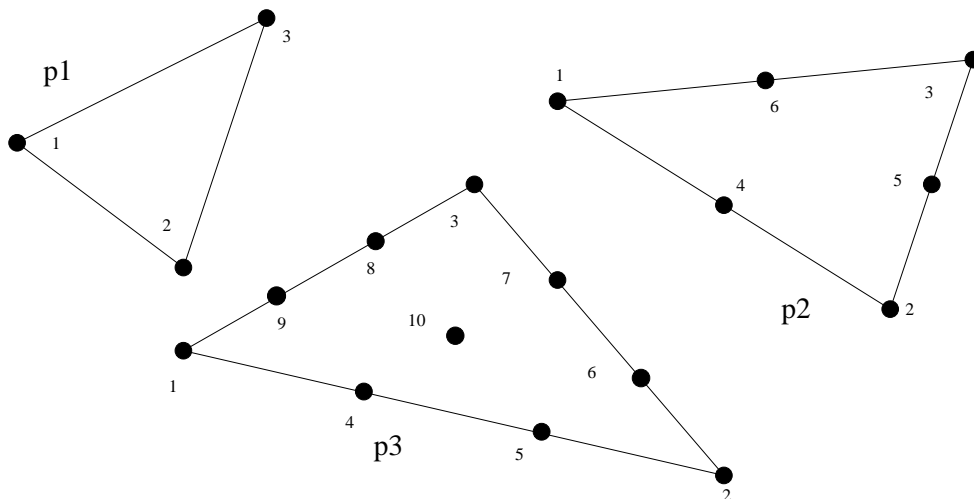
$$S_h = \{v_h, v_h|_{K_i} \in P_k(K_i), \forall K_i\}$$

kde $P_k(K_i)$ označuje prostor polynomů nejvýše k -tého stupně na elementu K_i .

Každý polynom definovaný na daném elementu je v naší úloze určen svými funkčními hodnotami na následující množině uzlů:

$$\{x = \sum_{i=1}^3 \lambda_i a_i, \lambda_j \in \{0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1\}, j \in \{1, 2, 3\}, \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1\}$$

kde a_1, a_2, a_3 jsou vrcholy daného trojúhelníku.



Obrázek 2.1: Uzly definující polynomiální funkci

Počet uzlů pro dané k je:

$$d(k) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Funkce z prostoru S_h je tedy jednoznačně určena svými hodnotami v $d(k)$ bodech pro každý trojúhelník. Na obrázku 2.1 jsou znázorněny tři případy $k = 1, 2, 3$, na které se v naší práci omezíme. Element, na kterém je definován polynom stupně i , budeme nadále označovat p_i . Polynom prvního stupně je určen třemi body ve vrcholech elementu. V případě p_2 známe navíc hodnoty ve středech hran. Podobně u p_3 , kde je známa též hodnota v těžišti trojúhelníku.

Funkční hodnoty definující numerické řešení jsou dány samostatným vstupním souborem. V rámci této práce se věnujeme aplikacím z numerické simulace stlačitelného proudění, které je popsáno čtyřmi veličinami: hustota, hybnost ($\in \mathbb{R}^2$) a energie. Uveďme příklad části tohoto souboru:

```

2 1.016 1.013 1.020 1.015 1.016 1.018
2 0.953 0.964 0.940 0.958 0.954 0.945
2 0.026 0.000 0.002 0.010 0.001 0.014
2 7.797 7.777 7.823 7.789 7.798 7.813
1 1.017 1.013 1.019
1 0.953 0.965 0.939
1 0.026 0.001 0.002
1 7.805 7.779 7.817
3 0.975 0.971 0.977 0.974 0.973 0.973 0.975 0.976 0.976 0.975
3 1.062 1.075 1.066 1.065 1.071 1.070 1.065 1.061 1.062 1.066
3 0.040 0.057 0.056 0.045 0.050 0.057 0.057 0.061 0.045 0.051
3 7.483 7.463 7.497 7.477 7.470 7.475 7.486 7.491 7.486 7.481

```


Čtveřice řádků odpovídá jednomu z elementů. Každý ze čtyř řádků přísluší jedné z veličin. Na začátku každého řádku je uvedeno celé číslo nabývající hodnot 1, 2, nebo 3, které určuje stupeň polynomu na daném elementu. Dále již následují funkční hodnoty v takovém pořadí, jak je uvedeno na obrázku 2.1. V úloze předpokládáme, že na daném elementu je stupeň polynomu stejný pro všechny veličiny.

Kapitola 3

Řešení úlohy

V předchozí kapitole jsme popsali všechna vstupní data, můžeme tedy přikročit k samotnému řešení úlohy. Naším cílem bude vytvořit soubor, ve kterém bude popsána nová triangulace, a dále právě jedna hodnota aproximace v každém uzlu této triangulace. Tecplot tyto data vizualizuje jako spojitou a na každém trojúhelníku lineární funkci.

3.1 Triangulace

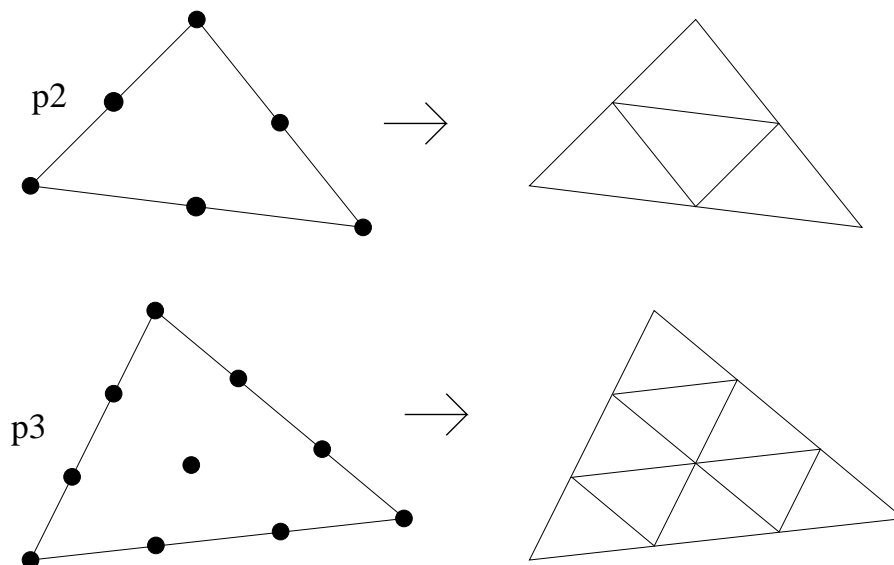
Aby byla maximálně využita všechna vstupní data, je potřeba vhodným způsobem zjemnit zadanou síť. V případě p_2 a p_3 máme totiž k dispozici řešení nejen v uzlových bodech, ale i v ostatních bodech na hranách sítě, eventuálně uvnitř elementu. Právě v těchto bodech budeme chtít rozšiřovat původní triangulaci.

Pokud neznáme hodnoty nikde mimo uzlové body, což je případ polynomiální aproximace řádu jedna, nemá velký smysl původní triangulaci nějak měnit. Tato aproximace je totiž po částech lineární a naším cílem je taktéž po částech lineární aproximace, ale navíc spojitá. Je proto nutné určit právě jednu hodnotu v každém uzlu. Počítáním hodnot v uzlech výsledné triangulace se budeme zabývat v příští podkapitole.

Uvažujme nyní polynomiální aproximaci vyššího řádu než jedna. Tentokrát budeme zjemňovat zadanou triangulaci. První fáze dělení elementů je zachycena na obrázku 3.1. Trojúhelník typu p_2 a p_3 se rozdělí na více elementů podle schématu na obrázku. Pokud provedeme toto dělení pro všechny patřičné trojúhelníky a jestliže se stupně polynomů zadaných na elementech této triangulace budou lišit, získáme nekonformní triangulaci. Naším cílem je ovšem vytvořit konformní triangulaci, což znamená, že je nutné provést dodatečná dělení. Nyní probereme základní případy, které mohou nastat.

Pokud vedle sebe budou ležet elementy stejného typu, není třeba provádět další dělení, neboť výsledná triangulace bude konformní.

Uvažujme tentokrát element typu p_2 a jeho sousední element typu p_1 . Abychom získali konformní triangulaci, element p_1 se rozdělí na dva



Obrázek 3.1: Vnitřní dělení trojúhelníku

trojúhelníky. Podobně se řeší soused p_3 , jak je patrné z obrázku 3.2. Je na něm vidět, že element p_1 se může dělit popsáním způsobem vícekrát. Pokud by element p_1 měl tři sousedy typu p_3 , rozdělí se na sedm elementů, jak je vidět na obrázku 3.3.

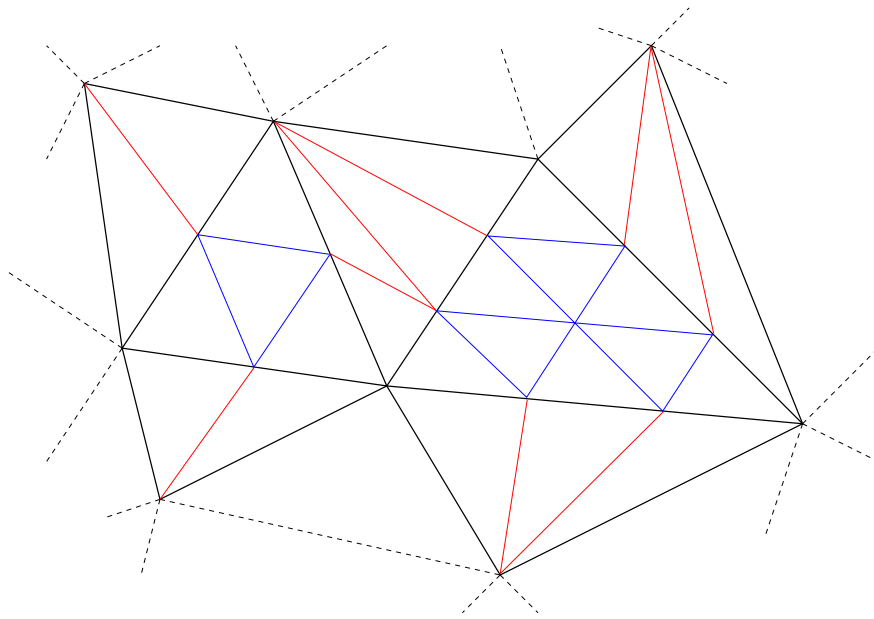
Zbývá situace, kdy spolu sousedí elementy typu p_2 a p_3 . Dělení trojúhelníků potom probíhá opět podobným způsobem. *Hanging node*, což je bod, který leží uvnitř hrany jednoho trojúhelníku a současně je vrcholem jiného trojúhelníku, je propojen hranou s protějším bodem. Pro názornost je uveden obrázek 3.4 zachycující případ, kde leží p_2 mezi dvěma p_3 .

3.2 Hodnoty aproximace

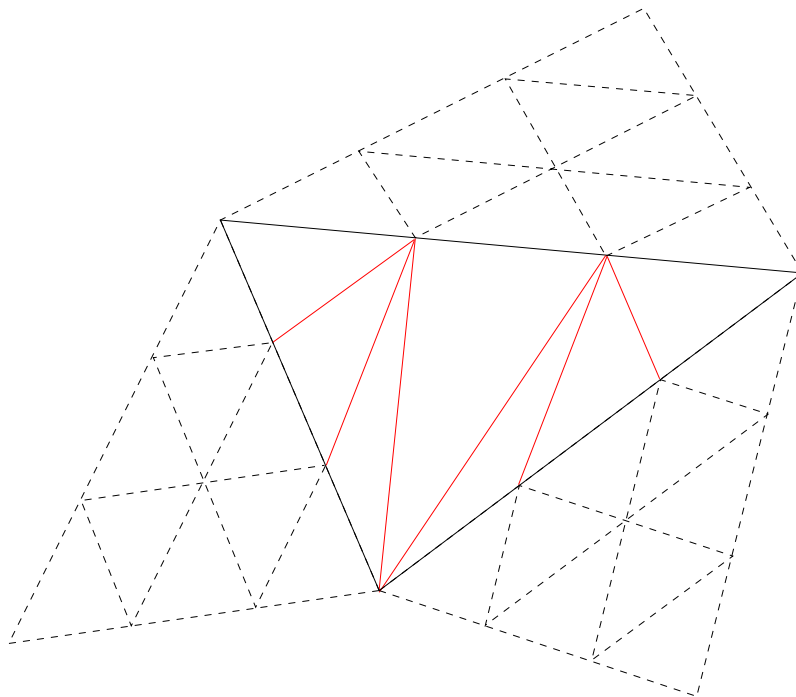
Nyní už známe podobu první části výstupního souboru, zbývá teď ještě určit hodnoty naší aproximace v uzlech nové triangulace. Z polynomiální aproximace známe hodnoty v $d(k)$ bodech na daném trojúhelníku, který je typu p_k . Z předchozí podkapitoly plyne, že sjednocení těchto bodů jednoznačně odpovídá právě všem uzlům nové triangulace. Abychom získali pro každý uzel jednu hodnotu, spočítáme vhodný průměr hodnot zadaných v tomto bodě, popřípadě i hodnot v bodech ležících v blízkosti daného uzlu.

Je-li uzel uvnitř hrany ležící na hranici Ω , nebo leží-li v těžišti trojúhelníku p_3 , známe v něm ze vstupu jedinou hodnotu, která se přímo přenese i do naší nové aproximace.

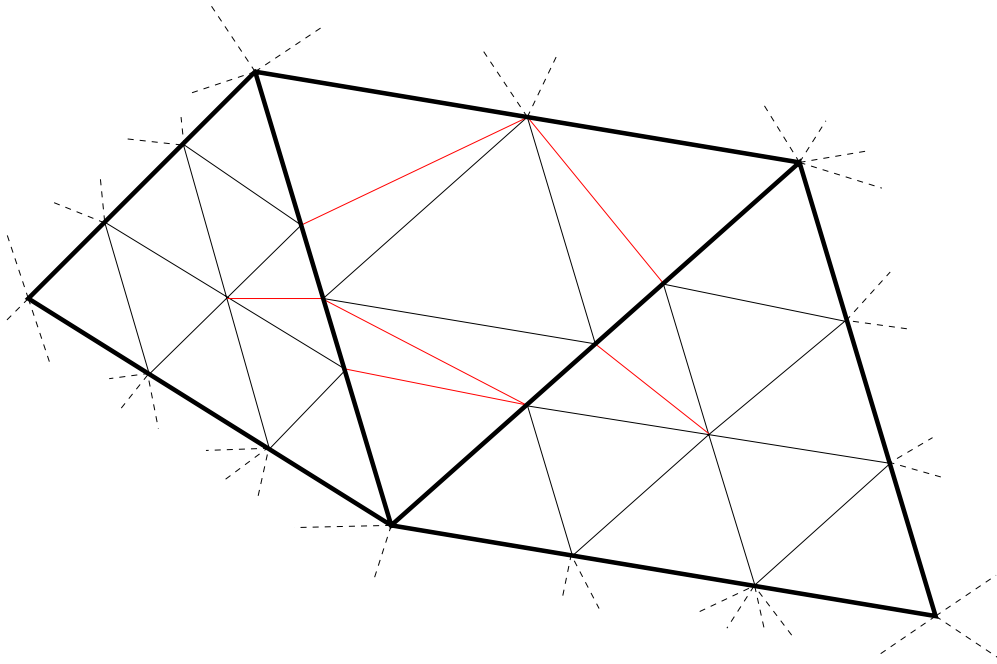
Pokud bod leží na společné hraně dvou původních elementů stejného



Obrázek 3.2: Dělení trojúhelníků typu p_1 (značeno červeně)



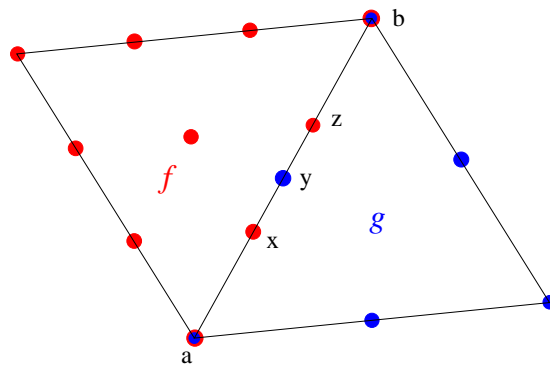
Obrázek 3.3: Dělení trojúhelníku typu p_1 , který má tři sousedy p_3



Obrázek 3.4: element p_2 leží mezi dvěma p_3 . Červeně jsou vyznačena dodatečná dělení.

typu, nebo pokud je uzlem v původní triangulaci, máme v tomto bodě ze vstupu k dispozici různý počet hodnot polynomiální aproximace. Jednotlivé hodnoty v tomto bodě dávají polynomy zadané na trojúhelnících, jejichž hrany obsahují tento bod. Za hodnotu aproximace zde vezmeme jednoduše aritmetický průměr těchto hodnot.

Stejně se řeší případ uzlů, ležících na hranici p_1 a elementu jiného



Obrázek 3.5: f je polynom stupně 3, g je polynom stupně 2

typu. Výsledkem bude opět aritmetický průměr hodnot dvou polynomů v tomto bodě. Rozdíl spočívá v tom, že hodnotu polynomu na p_1 nemáme zadanou přímo na vstupu. Funkční hodnota lineární funkce se však jedno-

duše dopočítá.

Zbývají už jen uzly ležící na společné hraně trojúhelníků p_2 a p_3 . Označme x, y, z body na společné hraně stejně jako na obrázku 3.5. Polynom na p_3 označme f a polynom na p_2 značme g . Naše aproximace u bude nabývat v uzlech na hraně následujících hodnot:

$$u(x) = \frac{3f(x) + 2g(y) + u(a)}{6}$$

$$u(y) = \frac{2g(y) + f(x) + f(z)}{4}$$

Uzel z je symetrický případ uzlu x . Hodnota aproximace v bodě x závisí na hodnotě stejné aproximace v bodě a . To však není ve sporu, neboť algoritmus nejprve vypočte hodnoty ve vrcholech trojúhelníků původní triangulace, které ovšem nezávisí na hodnotách v uzlech uvnitř hran.

Na závěr kapitoly dodejme, že program nedává aproximace původních veličin. Ve výstupním souboru budou hodnoty následujících veličin: hustota, rychlost ($\in \mathbb{R}^2$), tlak, Machovo číslo.

Kapitola 4

Animace

V předchozích kapitolách jsme popsali výstup programu, kterým je datový soubor, jenž lze načíst přímo do programu Tecplot. V něm si uživatel může vytvořit grafický výstup svého numerického řešení. Tecplot umožňuje navíc vytvářet animace a exportovat je ve formátu AVI. Aby uživatel při vytváření animaci použitím více datových souborů popsaných ve druhé kapitole nemusel zdlouhavě zpracovávat každý soubor jednotlivě, a poté každý zvlášť importovat do Tecplotu, vytvořil jsem softwarové prostředky pro Unixový operační systém, které celý tento proces automatizují. Jednotlivé úkony jsou prováděny pomocí shell skriptu.

První z nich slouží k načtení více datových souborů, které pak uživatel může dále zpracovávat v interaktivním prostředí Tecplotu. Jediné, co uživatel musí udělat po spuštění skriptu, je určit, která data vytvořená ADGFEM chce vizualizovat. Skript už dále zajistí vytvoření všech datových souborů a dále vygeneruje speciální makrosoubor, který se následně předá Tecplotu. To má za následek spuštění interaktivního režimu, ve kterém jsou načtena všechna data určená uživatelem.

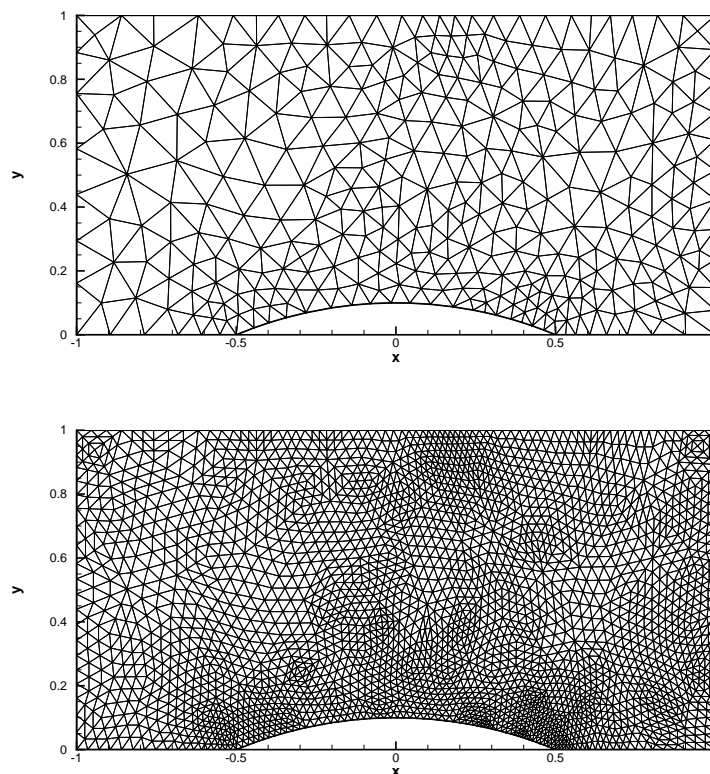
Druhý shell script svým použitím navazuje na první skript, pomocí kterého se uživatel seznámil s grafickou podobou výsledků a mohl se rozhodnout, z kterých dat bude chtít vytvořit animaci. Prostřednictvím druhého skriptu může uživatel rychle a jednoduše generovat animaci ve formátu AVI. V tomto případě se pro urychlení nespouští grafické prostředí Tecplotu. Uživatel po spuštění skriptu vybere datové soubory a veličinu, zvolí si rychlost a velikost animace. Poté se podobně jako v předchozím případě automaticky vytvoří makrosoubor, jenž se předá Tecplotu a zajistí tak vytvoření příslušného video souboru.

Popsané programy jsou k dispozici na přiloženém CD.

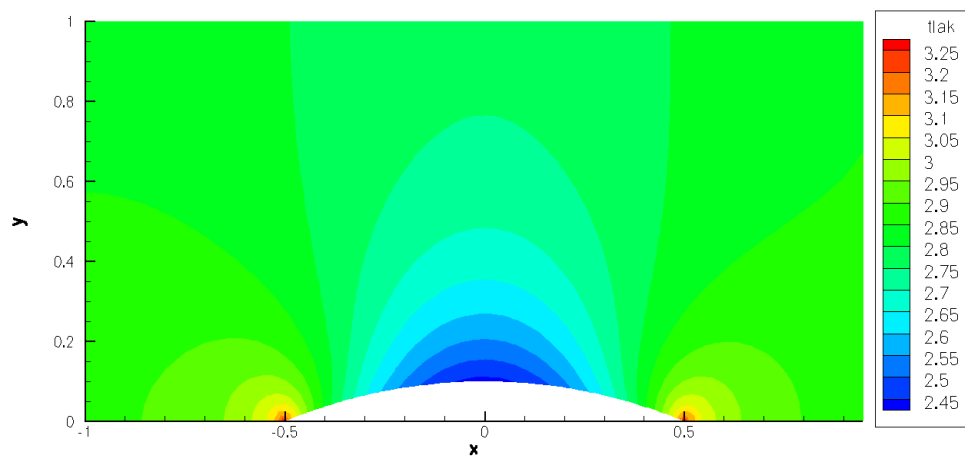
Kapitola 5

Ukázky výsledků

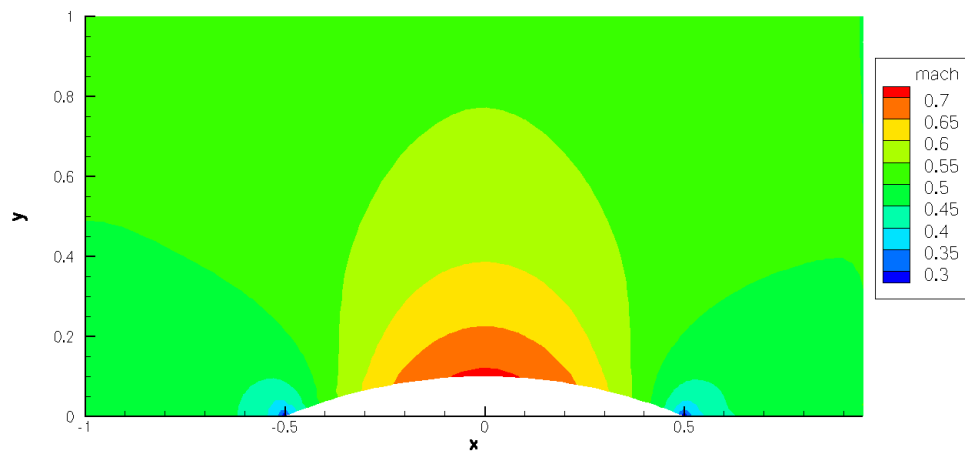
V této kapitole jsou ukázky výsledných vizualizací numerického řešení vytvořené Tecplotem. Obrázky 5.1, 5.2 a 5.3 zachycují typický testovací příklad pro transonické proudění, kterým je proudění nevazké stlačitelné tekutiny GAMM kanálem, viz [1],[2],[3]. Na obrázku 5.4 je příklad nestacionárního proudění nevazké stlačitelné tekutiny přes dopředný schod, viz [4].



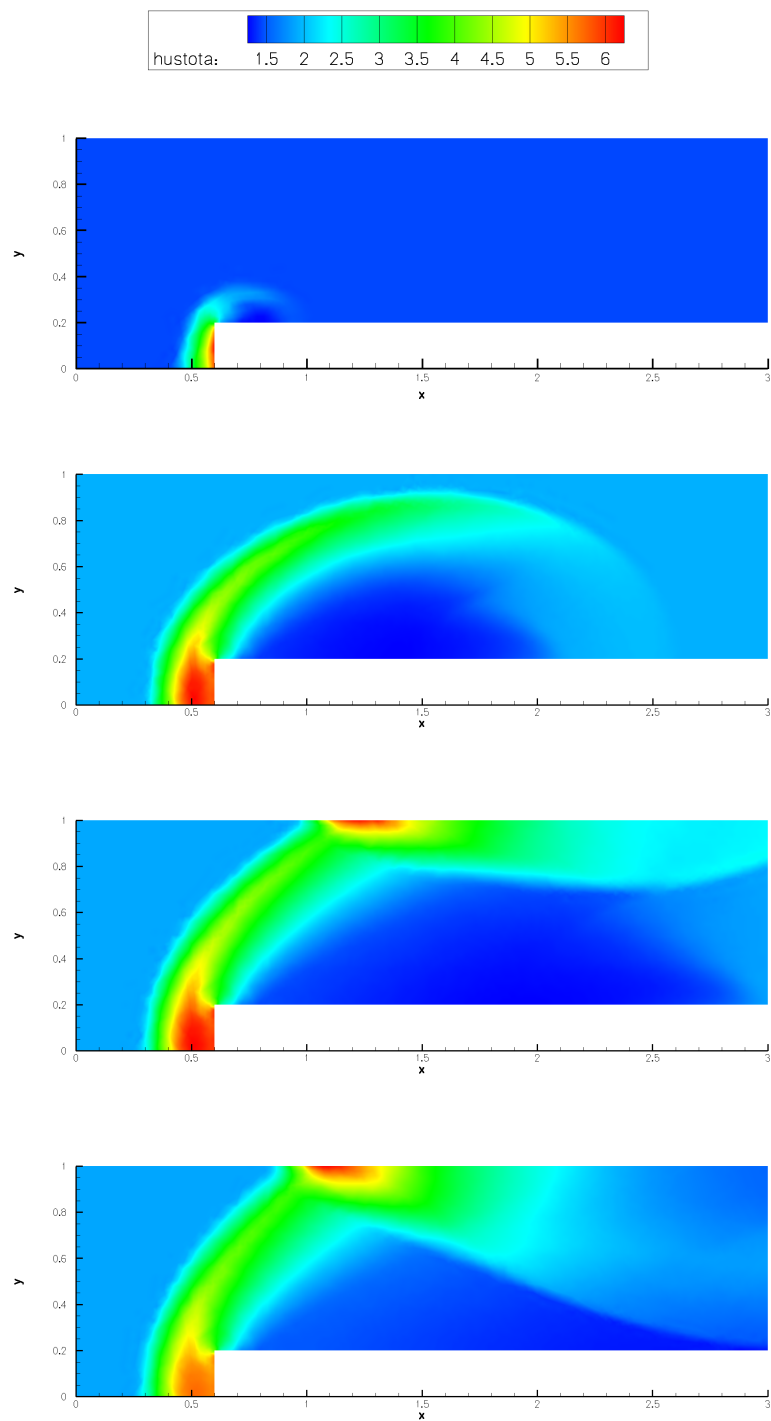
Obrázek 5.1: Nahoře je původní triangulace s elementy typu p_3 a níže výsledná triangulace.



Obrázek 5.2: Tlak nevazké stlačitelné tekutiny při proudění GAMM kanálem



Obrázek 5.3: Machovo číslo stlačitelné tekutiny při proudění GAMM kanálem



Obrázek 5.4: Ukázky z animace hustoty stlačitelné tekutiny při proudění přes dopředný schod

Literatura

- [1] V. Dolejší: Discontinuous Galerkin method for the numerical simulation of unsteady compressible flow, *WSEAS Transactions on Systems*, **5** (5): 1083-1090, 2006.
- [2] V. Dolejší, M. Feistauer: A Semi-implicit Discontinuous Galerkin Finite Element Method for the Numerical Solution of Inviscid Compressible Flow, *J. Comput. Phys.*, **198** (2): 727-746, 2004.
- [3] V. Dolejší: On the Discontinuous Galerkin Method for the Numerical Solution of the Navier–Stokes Equations, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **45**:1083–1106, 2004.
- [4] Woodward, Paul; Colella, Phillip: The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *J. Comput. Phys.* 54, 115-173 (1984)