Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Bc. Zdeněk Smrčka

# Teorie čísel ve starém Řecku

Katedra didaktiky matematiky

| | |
|---|---|
| Vedoucí bakalářské práce: | doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc. |
| Studijní program: | Matematika |
| Studijní obor: | Matematika zaměřená na vzdělání |

Praha 2012

Děkuji vedoucímu bakalářské práce panu doc. RNDr. Jindřichu Bečvářovi, CSc., za odborné vedení práce, čas, rady, nápady, pochopení a velkou podporu, kterou mi věnoval. Za jeho skvěle vedené přednášky z Dějin matematiky, které mi velice pomohly. Také bych rád poděkoval panu Mgr. Zdeňku Halasovi, DiS., Ph.D., za velkou pomoc a obohacení o nové poznatky. A v neposlední řadě panu doc. RNDr. Zbyňku Šírovi, Ph.D., za pomoc a za možnost navštěvovat předmět Řecké matematické texty I.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na mou práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 6. 12. 2012 Zdeněk Smrčka

Název práce: Teorie čísel ve starém Řecku

Autor: Bc. Zdeněk Smrčka

Katedra: Katedra didaktiky matematiky (KDM)

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc. (KDM)

Abstrakt: Cílem této práce je přehledně a srozumitelně sepsat číselně teoretická bádání a jeho výsledky ve starém Řecku (zhruba od 6. století př. Kr. do 4. století po Kr.). V této práci se snažíme uvést příklady použití řecké matematiky ve výuce pro zlepšení výuky a k lepšímu porozumění abstraktního myšlení v matematice. Chceme, aby studenti pochopili schopnosti a myšlenky řeckých matematiků. Srovnáváme zde také středoškolský pohled na hledání největšího společného dělitele a Eukleidův algoritmus. Uvádíme důležité řecké poznatky, jako je Eratosthenovo síto, Diofantova aritmetika a další. Některé z řeckých poznatků, jako Eukleidův algoritmus, Eratosthenovo síto atd., jsou dodnes používány.

Klíčová slova: Matematika ve starém Řecku, figurální číslo, teorie čísel, řetězové zlomky, Eukleidův algoritmus

Title: Theory of Numbers in Ancient Greece

Author: Bc. Zdenek Smrcka

Department: The Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc.

Abstract: The goal of this thesis is to write up clearly and comprehensibly numeric theoretical research and its results in Ancient Greece between 6 century before Christ and 4 century after Christ. In this thesis we try show examples use of Greece's Mathematics for improvement teaching in education and better understanding abstract thinking in Mathematics. We want so that students understand thinking and abilities Greece's mathematicians. We compare high school view on searching greatest common divisor and Euclidean algorithm. We present important Greece's knowledges as sieve of Eratosthenes, arithmetic of Diofantos etc.. Something of Greece's knowledges as Euclidean algorithm, sieve of Eratosthenes etc. are use of up to now.

Keywords: Mathematics in Ancient Greece, figurate number, theory of numbers, Continual fraction, Euclidean algorithm

# Obsah

# Úvod

## *Motivace*

Snažíme se o to, aby žáci a studenti lépe pochopili probíranou látku a došlo k lepšímu zapamatování, budeme se snažit vysvětlit příklady na praktickém znázornění, které mohou vidět ve svém běžném životě. Na základních a středních školách se při výuce matematiky stává, že někteří studenti zcela nechápou látku, případně se snaží látku zapamatovat a ne pochopit. Již ve starém Řecku byly výklady matematiky znázorňovány obrázky a byla zde již abstrakce ve formě důkazů. Často se stává, že se studenti s důkazy seznámí až na vysoké škole nebo jen v malé formě na střední škole. Hlavní motivací pro nás je v budoucnosti zlepšit výuku na základních a středních školách, využít tuto bakalářskou práci k rozvoji výuky na školách a rozšířit povědomí o matematické historii.

## *Cíl práce*

Cílem této práce je přehledně a srozumitelně sepsat číselně teoretická bádání a jeho výsledky ve starém Řecku, zavedení řecké matematiky, obrázků, důkazů a poznatků do standardní výuky na školách a tím obohacení probírané látky a zlepšení celkového pochopení (zhruba od 6. století př. Kr. do 4. století po Kr.).

## *Hlavní přínosy práce*

Hlavní přínosy bakalářské práce jsou:

- Zkvalitnění a obohacení výuky na školách.
- Znalost dějin matematiky pro pochopení, jak vývoj matematiky probíhal.
- Zdokonalení abstraktního myšlení na střední škole.
- Srovnání středoškolského pohledu na NSD a Eukleidova algoritmu.
- Vysvětlení složitějších pojmů a vlastností na příkladech a obrázcích z řecké matematiky.
- Zavedení logického myšlení do výuky.

# 1. Řecké poznatky z teorie čísel

## 1.1 Úvodní seznámení s teorií čísel

Matematika a její disciplíny se vyvíjely již od počátku věků. Již v pravěku se používala aritmetika u „vrubovky“ jako zářezy na kostech. Při výkladu dějin matematiky na střední škole by bylo vhodné se studentů zeptat, jaký matematický nástroj používali pravěcí lidé při vstupu do jeskyně se zásobami pro ověření, že zásoby souhlasí, tj. souhlasí počet zářezů na vrubovce. Jistě bychom jako odpověď dostali, že použitý matematický nástroj je bijekce (tj. ke každému obrazu existuje právě jeden vzor). V dnešní době bychom mohli přirovnat inovovanou vrubovku ke skladní kartě v podniku pro kontrolu zásob. Myslím, že systém skladní karty v elektronické i v papírové podobě je stále na podobném principu jako vrubovka. Velký rozvoj matematiky také nastal v Mezopotámii, Egyptě, starém Řecku a v dalších zemích. V této práci se zaměříme na staré Řecko, ve kterém došlo k velkému rozvoji geometrie a aritmetiky (teorie čísel). Největší rozvoj matematiky se v Řecku udál zhruba od 6. století př. Kr. do 4. století po Kr. Tímto obdobím se budeme zabývat. Právě toto období se nazývá jako „řecký zázrak“, tj. vznik historické doby Řecka. V tomto období začala vznikat idea matematiky jako vědy. Zdroje našich dochovaných poznatků tvoří bohužel pouze zlomky. Víme, že původ řecké matematiky je v Egyptě, a možná i v jiných zemích. Začalo přebírání poznatků a tvůrčí postup. Empirické poznatky se přetvářely do vědy (Eukleides-Základy). Abstrakce, vytvoření základních poznatků (bod, přímka, číslo, poměr). Došlo k zformování postulátů, tj. konstrukce kružítkem a pravítkem. Zformování axiomů, logických principů odvozovacích a dokazovacích, idea důkazů. Postupné vytváření matematického světa ze základních prvků (bodů). Řekové se v matematice snažili využívat princip minimalizace. Jeden z největších řeckých matematiků byl Pythagoras ze Samu, který založil filozofickou školu. Pythagorejci uznávali, že podstatou všeho je číslo (arithmos), proto se tolik zajímali o teorii čísel. Pythagoras měl vliv na celou další matematiku, jelikož všichni řečtí matematici vzešli přímo nebo nepřímo z pythagorejské školy. Pythagorejci uznávali 4 disciplíny: aritmetika, geometrie, astronomie a hudba. V disciplíně hudby se zabývali matematickou teorií hudebních intervalů a věřili ve stavbu vesmíru, tj. vesmír a hudba.

Za doby Pythagorejců znali a uměli již využít průměry. Z důvodu, že Staré Řecko bylo velice vyspělé, mohli tyto ukazatelé používat k základním statistikám. Je možné, že aritmetický průměr používali k počtu otroků nebo k množství majetku na jednoho obyvatele. Využití průměrů bylo možné i k obchodním účelům nebo k přepočtu směnného kurzu, např. koupě obilí a masa. Když si představíme, že 1 ks masa má cenu 10 jednotek a určité množství obilí 2 jednotky, dostali za 1 ks masa 5x určité množství obilí. Je zajímavé, že existoval v této době již harmonický a geometrický průměr.

Pro úplnost práce uvádím vzorce pro výpočet jednotlivých průměrů a zákonitostí mezi nimi:

- aritmetický průměr (A)

$$\frac{a+b}{2}$$

- geometrický průměr (G)

$$\sqrt{ab}$$

- harmonický průměr (H)

$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}$$

Vztah mezi těmito průměry:

$$A \geq G \geq H$$

rovnost nastává jen tehdy, když jsou všechna průměrovaná čísla stejná. Objev tvrzení i důkazu je přisuzován Pýthagorovi.
Již v Mezopotámii byl zaznamenán vznik Pythagorovy věty, věděli také přesně, že $\sqrt{2} = 1,4142136$, společně s pythagorejskou trojici, která byla vyjádřena vztahem $\forall a, b, c \in N : a^2 + b^2 = c^2$ (tabulka Plimpton 322). Tabulka měla 15 pythagorejských trojic, které obsahovaly i velice náročné trojice.
Existovala matematická teorie hudebních intervalů, která vyjadřovala zkracování struny ve vhodných poměrech a tvořily ji základní hudební intervaly. Na příkladu hudební čtveřice naznačím využití. Příklad hudební čtveřice je: 6, 8, 9 a 12, zde je vidět využití aritmetického a harmonického průměry:

$$9 = \frac{6+12}{2},$$

$$8 = \frac{2 \cdot 6 \cdot 12}{6+12}.$$

Na hudební čtveřici je možné nahlížet jako na krychli, kde 6 určuje počet stěn, 12 počet hran, 8 vrcholů a 9 počet rovin souměrnosti. Nikomachos považuje tento příklad hudební čtveřice za takzvanou „dokonalou posloupnost“.
Objev matematické teorie hudby je přisuzován Pýthagorovi. Pythagorejci měli představy, že každé dvě úsečky se dají poměřit (souměřitelné). Domnívali se, že pro každé dvě úsečky $a, b$ platí, že existuje měrná úsečka $c$:

$$a = n \cdot c$$

$$b = m \cdot c$$

poměr $a, b$ je $n : m$ z nynějších poznatků víme, že tomu tak není. Důsledky, které odvodili ze svého zkoumání matematiky:

- Konečný počet úseček můžeme měřit.
- Pravoúhlé trojúhelníky odpovídají Pýthagorovým trojicím.

Dnes již víme, že platí jen jedna implikace. Zjistili také, že existují tzv. nesouměřitelné úsečky, to způsobilo problém pojmenovaný později jako „1. krize matematiky“. Dnes již víme, že nesouměřitelnost souvisí s iracionalitou. Theodoros (učitel

Theaiteta) přispěl ke studiu iracionalit, když dokázal, že odmocniny nečtvercových čísel až po 17 jsou iracionální. Důkaz iracionality

$$\sqrt{2}$$

provedeme až po zavedení důležitých poznatků řecké matematiky.

## 1.2 Hlavní řecké poznatky z teorie čísel

***Počátky řecké matematiky***

Na začátku 7. století před n.l. začíná vznikat řecká matematika v Řecku a v Ionii. Postupem času se řecká kultura smíchá s egyptskou a babylonskou vědou, která zahrnuje jak matematické tak astronomické poznatky. Podle Dějin matematiky ve starověku od Kolmana Řekové pravděpodobně začali čerpat své poznatky z egyptských a babylonských spisů. Právě Hérodotos (484-425 př.n.l.) popisuje jak egyptský král rozděloval svoje statky a poté bral dávky za jejich využívání. A také udává snížení dávky o jakou část daného území přišel zemědělec při rozvodnění řeky Nil za pomoci vyměřování. Díky této události se do Řecka dostalo zeměměřičství. Během této doby se stavěly sluneční hodiny, časoměrné sloupy (gnómony) a bylo zavedeno rozvržení dne na dvanáct části, které přijali Řekové od Babyloňanů. Podle Kolmana byly počátky abstraktního myšlení nejspíše převzaty z Egypta a Babylonie.
Právě zde můžeme vysledovat rozsáhlou diskuzi. Někteří historikové, filozofové a další rozhodně popírají skutečnost, že by matematika Orientu měla nějaký vliv na rozvoj Řecké matematiky. Jiní naproti tomu přiznávají, že Řekové některé věci převzali od Egypťanů a Babyloňanů, ale byly to prý pouze praktické dovednosti. Tj. podle nich byla teoretická matematika výhradně výtvorem Řeků. Pokud se pozorně zamyslíme a uvědomíme si z dochovaných faktů jednotlivé skutečnosti, dojde nám, že řecká matematika dosáhla za dvě století toho co v Egyptě trvalo dvě tisíciletí. Je tedy pravděpodobné, že Řecká matematika stavěla již na předchozích poznatcích a snažila se o jejich vylepšení, upřesnění a zobecnění.
Počátkem 6. století před n.l. začíná v matematické myšlení Řeků převládat teoretická stránka. Přepisování knih a výpočty začaly vykonávat otroci. Takto se odlišila teoretická a praktická matematika. Právě oproti praktické aritmetice a

geometrii by jsme v teoretické aritmetice a geometrii nenašli pouze návody na řešení úloh, ale byla zde právě zdůvodněna správnost řešení. Zavedením důkazů do matematiky byla možnost zobecňovat jednotlivé výsledky, získávat nové závěry a podobně. Matematika se začala v Řecku definitivně rozvíjet jako vědecký obor od poloviny 6. století před n.l. Velkolepým dílem byly Eukleidovy „Základy“, které vznikly v helenistickém období přibližně kolem roku 300 před n.l. Nejdříve se v řecké matematice dokazovaly jen některé věty, později se však začaly vyžadovat důkazy pro každé tvrzení. Postupně Řekové začali rozlišovat výchozí pojmy a předpoklady, názornost začala být nahrazována logickými závěry a začal se vytvářet harmonický systém. Pythagorejci znali pouze kladná čísla a racionální zlomky a do doby objevení nesouměřitelných veličin byla geometrie podřízena aritmetice. Po tomto objevu započali první základy geometrické algebry, které pocházejí od pythagorejců. klasifikace iracionalit od Theaitetose a Eukleida. Eudoxos vybudoval teorii proporcí, což byl geometrický ekvivalent teorie reálných čísel.
Bohužel se nám mnoho z řeckých matematických poznatků nedochovalo. Teprve od 4. století před n.l. existují některé částečné a dokonce i úplné texty.

### ***Počítání ve starém Řecku***

Řekové se již od sedmi let učili počítat spolu se čtením a psaním. Řecká početní soustava byla desítková. Malá množství Řekové počítali na prstech velká pomocí kamínků. Nedostatek přímých dokladů je pravděpodobně, protože Řekové využívali při počítání zpaměti pouze počítadla (abaku). Nejprve Řekové používali číslovky do 1000, později do 10000. Až ve 3. století před n.l. Archimédes ve svém důležitém díle „Počítání písku“ vyvrací do té doby mylný názor, že existuje největší poslední číslo. Dále, zde naznačuje způsob jakým je možné vyjádřit libovolně velké číslo. Musíme si uvědomit, že řecká matematika neznala ani záporná čísla ani nulu. Řekové byli zběhlí ve čtyřech aritmetických operacích s celými kladnými čísly na počítadle, úkony se zlomky, použití předchozího v zeměměřičství a praktické úlohy všedního života. Později se začali zabývat také hledáním druhých a třetích odmocnin, řešením úloh, které se vztahovaly na určité veličiny a u Diofanta rovněž na veličiny neznámé. Takovéto úlohy dnes zahrnujeme do aritmetiky a algebry.
Řekové si pod pojmem číslo představovali přirozené číslo a chápali ho jako souhrn jednotek. Samotná jednička, ale nebyla za číslo považována. Později začala praxe Řeky nutit, aby se mimo čísel zabývali navíc poměry úseček v geometrii. Číselné hodnoty těchto poměrů vyjadřovali jak celými čísly tak zlomky.
Řekové se snažili o využití matematiky i v jiných oborech jako technika a přírodověda.
Pokud se podíváme do „Úvodu do aritmetiky“ od novopythagorejce Nikomacha (přibližně 100 n.l.) nalezneme zde tabulku čtverců celých čísel, která je sestavena přesně jako naše školní tabulky násobilky. Pomocí ní Nikomachos porovnával vlastnosti dělitelnosti celých čísel.

Ve způsobu násobení několikamístných čísel se od Řeků lišíme, my začínáme násobit od nižších řádů, to jsme převzali od Indů. Naproti tomu Řekové začínali násobit od nejvyšších řádů. Při výpočtech Řekové zlomky převáděli na společného jmenovatele, krátili je a rozšiřovali (násobili čitatele a jmenovatele stejným činitelem).

### ***Řecké pohledy na matematiku***

Anaximadrovi (610-543 př.n.l.) se připisuje sestrojení prvních zeměpisných map Řecka i celé Země, kde používá kolmou projekci a sestrojení slunečných hodin.
Právě zde a v aplikacích pro výpočet zatmění Slunce můžeme pozorovat, že Řekové nejspíše opravdu některé poznatky převzali od Babyloňanů, kteří se zabývali spočítáním periody zatmění Slunce a dalšími velice podobnými událostmi.
Pythagoras okolo roku 570-300 před n.l. založil školu stejného jména. Domníváme se, že Pythagorejci převzali znalosti aritmetiky, geometrie, teorie hudby a astronomie od egyptských a babylonských kněží a tyto znalosti poté dále rozvíjeli.
Pythagorejci zobrazovali čísla jako body, které seskupovali do geometrických obrazců. Takto právě vznikl pojem „figurálních čísel“, kde jak uvidíme je velká souvislost mezi pojmem „číslo“ a „geometrická prostorovost“. Figurální čísla jako trojúhelníková, čtvercová a další uvádíme později.
Pythagorejci se snažili o soulad mezi harmoniemi „omezena“ a „neomezena“ vyjádřenou v „zákonech čísel“. Pythagorejci měli také velký vztah k hudbě, tj. nalezení harmonie.
Eukleides ve svém spise „Katatomé kanons“ vlastně ukazuje, že vztahy tónů musí nutně odpovídat vztahům celých čísel. Právě matematické učení o harmonii přineslo znovu ideu o nesouměřitelnosti, tj. vyvrátilo základní princip a to že můžeme všechny věci měřit jen celými čísly. Interval mezi celými tóny není stále stejný a je nepřímo úměrný výšce tónů. Celý interval se musí dělit podle „harmonického principu“, tj. tak, aby se oktáva (poměr 1:2) dělila na dva nestejné intervaly: kvartu (3:4) a kvintu (2:3) podle zákona $\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$. Pro dělení oktávy na dva stejné intervaly $\frac{x}{y}$ by podle předchozího zákona bylo: $\frac{1}{2} = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y}$, tj. $\frac{y}{x} = \sqrt{2}$.
Jenže při poměru délek stran $1 : \sqrt{2}$ vzniká disharmonie.
Takto vidíme, že $\sqrt{2}$ nemůže být vyjádřena jako poměr dvou celých čísel, jedná se tedy o číslo iracionální.
U pythagorejců byl bod zobrazující jednotku dále nedělitelný. Bod byl definován jako jednotka, která má polohu. Pro rozlišení dvou bodů se používalo oddělení prostorem. Každý bod musel mít kolem sebe „pole“, tj. každé číslo bylo možné zobrazit nejen pomocí čísel, ale i pomocí čtvercových polí nebo oběma způsoby zároveň. (viz Kolman, Dějiny matematiky ve starověku strana 87)
Pokud se nad tím zamyslíme, mohlo by se jednat o to, že si staří Řekové začínali uvědomovat pojem okolí bodu a to by znázorňovala možnost použití obou způsobů zároveň.
Číslo bylo vyjádřeno obrazcem.

### ***Definice a rozdíly u Eukleida a Nikomacha***

Definice podle Eukleida (viz Eukleides, Základy; resp. Šír, Řecké matematické texty I):
Z matematického hlediska jsou Eukleidovy definice přesnější než Nikomachovy.

- *Jednotka* je to, podle čeho se každá ze jsoucích věcí nazývá jedno.
- *Číslo* je počet složený z jednotek. To znamená, že jednotka se nebere jako číslo.
- Číslo je *částí* (v některých spisech je pojem nazýván jako *díly*) čísla, menší většího, jestliže větší číslo měří, tj. měří beze zbytku. Dnes vidíme, že se jedná o dělitele.
- *Částmi* pak, jestliže jím měřeno není. V případě, že totiž menší číslo není částí většího, pak je nějakým násobkem některé jeho části. Například 4 je částí 16, tj. její čtvrtinou, ale 12 je částmi 16, tj. jejími třemi čtvrtinami. Pokud budou obě čísla nesoudělná, je nutné vzít za část většího jednotku. Rozumíme tomu tak, že pokud číslo není částí je částmi.
- Větší číslo je *násobkem* menšího, jestliže je menší číslem měřeno.
- *Sudé číslo* je to, které lze rozdělit napůl.
- *Liché číslo* je to, které nelze rozdělit napůl takové, které se liší od sudého o jednotku.
- *Sudě sudé číslo* je to, které je měřeno sudým číslem podle sudého čísla.
- *Sudě liché číslo* je to, které je měřeno sudým číslem podle lichého čísla.
- *Liše sudé číslo* je to, které je měřeno lichým číslem podle sudého čísla.
  Podle Eukleidovy definice je sudě sudé číslo každé číslo dělitelné 4 a sudě liché číslo každé sudé číslo, dělitelné nějakým lichým číslem. V definici (Základy VII,10) Eukleides uvádí, že liše sudé číslo je totéž co číslo sudě liché. Jak i Eukleides dokazuje (v Základech IX,34) mohou být některá čísla zároveň sudě sudá i sudě lichá. Například 24 je rovno zároveň $6 \cdot 4$ a $8 \cdot 3$. U novopythagorejců Nikomacha z Gerasy a Theóna ze Smyrny nalezneme jiné definice těchto termínů (Úvod do Aritmetiky I,8-10).
- *Liše liché* číslo je to, které je měřeno lichým číslem podle lichého čísla.
- *Prvočíslo* je to, které lze měřit pouze jednotkou.
- *Nesoudělná čísla* jsou ta, která lze měřit jako společnou mírou pouze jednotkou. V řečtině se pro nesoudělná čísla užívá pojem „navzájem první“ vidíme, zde příbuznost s pojmem „prvočíslo“.
- *Složené číslo* je to, které lze měřit nějakým číslem.
- *Soudělná čísla* jsou ta, která lze měřit nějakým číslem jako společnou měrou.

- Říkáme, že *jedno číslo násobí druhé*, pokud se násobené číslo přidá k sobě samému tolikrát, kolik je v prvním jednotek, a tím vznikne nějaké číslo.
- Pokud se dvě čísla navzájem vynásobí a vytvoří nějaké číslo, pak vzniklé číslo nazýváme *plošné* a jeho strany jsou čísla, která se navzájem vynásobila.
- Pokud se tři čísla navzájem vynásobí a vytvoří nějaké číslo, pak vzniklé číslo je *tělesové* a jeho hrany jsou čísla, která se navzájem vynásobila.
- *Čtvercové číslo* je to, které je stejněkrát stejné neboli sevřené dvěma stejnými čísly. Na rozdíl od Nikomacha z Gerasy nenalézáme u Eukleida přímo figurální čísla i přesto, že se v jeho terminologii odráží myšlenka geometrické reprezentace čísel.
- *Krychlové číslo* je to, které je stejněkrát stejné neboli sevřené třemi stejnými čísly.
- Čísla jsou v *úměře*, pokud první stejný násobek, stejná část nebo stejné části druhého jako třetí čtvrtého. Eukleides pro čísla podává jednodušší definici úměry, kterou obecně definoval pro velikosti v definicích (Základy V,5-6). V případě racionálních poměrů totiž stačí výčtová typologie poměrů, tu nalezneme u Nikomacha z Gerasy (Úvod do Aritmetiky I,17,7). Například $9{:}12 = 12{:}16$, protože 9 je stejná část (tři čtvrtiny) čísla 12 jako 12 čísla 16.
- *Podobná* plošná nebo tělesová čísla jsou ta, která mají strany v úměře.
- *Dokonalé číslo* je to, které se rovná součtu svých částí. Zde se rozumí včetně jednotky a bez čísla samého. U Eukleida uvažujeme pouze čísla dokonalá. Zato u Nikomacha jsou přidány další dvě kategorie: čísla nadměrná a podměrná (Úvod do Aritmetiky I,16,2).
- *Souměřitelné* se nazývají ty veličiny, jež jsou měřeny stejnou mírou, a nesouměřitelné ty, pro než není nalezena žádná společná míra. Tj. souměřitelnost předpokládá, že obě veličiny jsou stejného druhu, a to stejného jako jejich společná míra. Z matematického pohledu nemá otázka souměřitelnosti pro různorodé veličiny smysl.
- Přímé jsou *souměřitelné v mocnině*, jestliže se čtverec nad nimi měří stejnou plochou. Nesouměřitelné, pokud pro čtverec nad nimi není možné najít žádnou plochu jako společnou míru. Souměřitelnost v mocnině je slabší vlastnost než souměřitelnost délkou, takovým příkladem může být strana a úhlopříčka čtverce, které jsou nesouměřitelné délkou, ale souměřitelné v mocnině. Protože čtverec nad úhlopříčkou je dvojnásobkem čtverce nad stranou.
- Z předchozích poznatků se ukazuje, že k dané přímé existuje nekonečně mnoho přímých souměřitelných i veličin nesouměřitelných, jak délkou, tak mocninou. Danou přímku budeme nazývat *racionální* a přímé s ní souměřitelné, délkou i mocninou nebo jen mocninou, nechť jsou nazývány *racionální*, zatímco nesouměřitelné *iracionální*.
  Předchozí dva pojmy nám definují relativní souměřitelnost a nesouměřitelnost dvou veličin. Tento a následující pojem budou definovat vlastnost

(racionalitu nebo iracionalitu) úseček a ploch vzhledem k nějaké pevně dané úsečce. Tuto úsečku nazveme „jednotkou míry“, ke které se celé zkoumání vztahuje, tento přístup se používá dodnes (srovnání racionální, iracionální čísla - tj. souměřitelná, nesouměřitelná vzhledem k jednotce).

- Čtverec nad danou přímkou budiž nazýván *racionální*, i plochy s ním souměřitelné nechť jsou nazývány *racionální*. Kdežto plochy s ním nesouměřitelné nazýváme *iracionální* i přímé, které se jim v mocnině rovnají budeme nazývat *iracionální*. V případě, že se jedná o čtverec, pak jsou to přímo jejich strany. Pokud se jedná o nějaké jiné přímočaré útvary, pak jsou to takové přímé, že čtverce nad nimi se jim rovnají.

Definice podle Nikomacha (viz Nikomachos, Úvod do aritmetiky I; resp. Šír, Řecké matematické texty I):

- *Číslo* je ohraničený počet, soustava jednotek nebo proud množství, který se skládá z jednotek. První dělení čísla je na sudé a liché. Sudé číslo je to, které lze rozdělit na dvě stejná, aniž by se mezi nimi uprostřed objevila jednotka. Liché je to, které na dvě stejná rozdělit nelze kvůli oné jednotce uprostřed. Většinou je takto chápána sudost a lichost mezi lidmi, ale podle pythagorejského pojetí je sudé číslo to, které umožňuje dělení na největší i nejmenší zároveň, největší velikostí a nejmenší množstvím, takto to odpovídá přirozeně protikladnému vztahu těchto dvou rodů (velikost a množství). Liché je naproti tomu číslo, které takto nemůžeme rozdělit, dělí se totiž na dvě nestejná čísla.

- Při vzájemném vymezení je *liché číslo* to, které se od sudého liší na obou stranách o jednotku, tj. směrem nahoru i dolů. *Sudé číslo* je to, které se od lichého na obou stranách liší o jednotku, tj. je o jednotku větší i o jednotku menší.

- Každé číslo je polovinou součtu čísel ležících z obou stran vedle něj a podobně polovinou čísel ležících z obou stran ob jedno a také čísel ležících ještě za těmito čísly a tak dále, kam až je to možné. Představa uspořádání čísel do řady. Toto, ale neplatí pro jednotku, která nemá sousedy dva, ale jen jednoho. Protože jednotka není sama číslem, ale počátkem všech čísel.

- *Sudě sudé číslo* je to, které můžeme rozdělit napůl na dvě stejná čísla, což odpovídá povaze sudých čísel. Také je to číslo, které má obě své části dělitelné napůl a které má, opět stejným způsobem dělitelnou jakoukoliv ze svých částí na dvě stejné a tak dál,dokud dělení podčástí nedojde k nedělitelné jednotce.

- Kdo by postupoval od jednotky, tj. jakoby od kořene, podle dvojnásobného poměru až do nekonečna, zjistil by, že všechna čísla, která takto vznikají jsou sudě sudá a kromě nich není možné najít žádná jiná. Například to jsou: $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$ a tak dále.

- *Sudě liché* je číslo, které splňuje vlastnosti sudého čísla, ale od uvedeného sudě sudého čísla se odlišuje tím, že ačkoliv umožňuje dělení na dvě stejné části, má hned po prvním dělení na dvě stejné části obě tyto části nedělitelné. Například $6, 10, 14, 18, 22, 26$ a další podobná. Hned po rozdělení napůl se vyskytnou u každého z nich části, které napůl rozdělit nelze. Sudě lichá čísla jsou tedy právě dvojnásobky lichých čísel.

- O čísle *liše sudém* můžeme říct, že má něco společného s každým z výše uvedených dvou druhů čísel. Je to něco jako střed, který vykazuje podobnost v něčem se sudě sudými čísly a v něčem se sudě lichými čísly. Tam, kde se s jedním neshoduje má společné s druhým. Můžeme ho rozdělit na dvě stejná čísla, protože je to sudé číslo. Podobně jsou dělitelné i jeho vlastní části a takové mohou být i části jeho částí. V rozkladu částí, ale nedospějeme až k jednotce. Například: $24, 28, 40$ každé z těchto čísel můžeme rozdělit na stejné poloviny a ještě polovinu z poloviny. U některých můžeme půlit na části ve větší míře, ale žádné části nebudou dělitelné na poloviny až k jednotce. Protože liše sudé číslo umožňuje více než jedno dělení podobá se sudě sudému, odlišuje se takto od sudě lichého. Ale protože nikdy neskončí své dělení u jednotky podobá se sudě lichému a tím se odlišuje od sudě sudého. Liše sudá čísla jsou ta, která jsou dělitelná čtyřmi, ale zároveň nejsou mocninou dvou.

- Liché číslo se svou dělitelností odlišuje od sudého a nemá s ním nic společného. Sudé lze dělit napůl, pak liché je na dvě stejná čísla nedělitelné. U lichého Nikomachos nalézá tři různé druhy, z nichž jeden se nazývá *první a nesložený*, další vůči němu opačný, je *druhý a složený* a poslední, uprostřed mezi oběma, jenž se jeví jako *střed mezi dvěma krajnostmi* a který je sice sám o sobě druhý a složený, ale ve vztahu k jinému může být první a nesložený.
  Na rozdíl od Eukleida a od dnešního pojetí vidíme, že u Nikomacha je rozdíl mezi *prvočíslem* a *složeným číslem* definován pouze pro lichá čísla, u sudých čísel nemá význam. Nikomachos chce získat střed mezi prvočísly a složenými čísly, a tak je nucen opustit vlastnosti čísel jako takových a hovořit o dvojici čísel, která jsou o sobě složená, ale navzájem nesoudělná. Tj. vyjadřuje *relativní vlastnosti čísel.*

Z dochovaných spisů a poznatků bohužel není jasné, který z těchto dvou matematiků vychází z pythagorejské představy a jejich pojetí jednotlivých definic. Je nám určitě jasné, že Eukleides a jeho definice jsou po formální stránce správnější, ale nezabývá se například figurálními čísly mimo trojúhelníkovými a dokonalými čísly tak jako Nikomachos. Domníváme se, že Nikomachos vychází z pythagorejské představy a jejího myšlení. Snaží se najít všemožné vztahy mezi čísly i když ne vždy po formální stránce správně. Zatímco Eukleides preferuje správnost a další upotřebení.

### ***Figurální čísla***

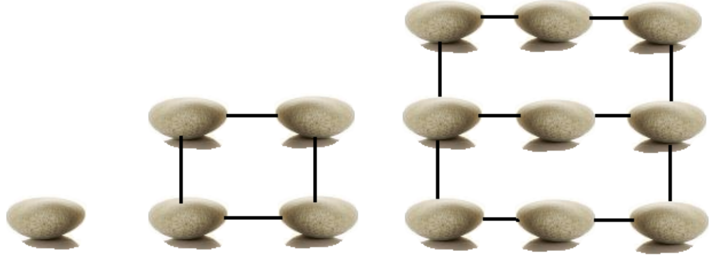
Pythagorejci se zajímali o svět přirozených čísel. Chtěli v něm najít řád, zákonitosti a klasifikovat přirozená čísla. Snažili se využít geometrickou interpretaci čísel. Základním stavebním kamenem byla 1, která nebyla považována za číslo. Figurální čísla vyjadřovala svým tvarem způsob, jak aritmeticky vznikla, zda to

bylo sčítáním nebo násobením.
Zamysleme se nad tím, že Pythagorejci přemýšleli hlavně nad čísly vznikající sčítáním (aditivně), kdežto Eukleides se zabýval geometrickým vyjádřením u čísel, které vznikaly násobením (multiplikativně).
Je jasné, že všechna figurální čísla a jejich vlastnosti nebyly objeveny najednou, ale postupně během několika staletí.
V této práci se snažíme pro figurální čísla použít obrázky tvořené kamínky, případně mincemi, tak jak je pravděpodobně znázorňovali i staří Řekové.

- Trojúhelníková čísla (viz obrázek 1)
  — čísla: 3, 6, 10, …
  — obecně:
  $$a_1 = 1$$
  $$a_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$
  — vznikají aditivním způsobem:
  $1 + 2 = 3, 1 + 2 + 3 = 6, 1 + 2 + 3 + 4 = 10, ...$
  — Pythagorejci pomocí trojúhelníkových čísel získali všechna čísla čtvercová (spojením dvou stejných trojúhelníkových čísel)
  — spojením tří stejných trojúhelníkových čísel získali Pythagorejci „pětiúhelníková čísla“

Obrázek 1 — trojúhelníková čísla

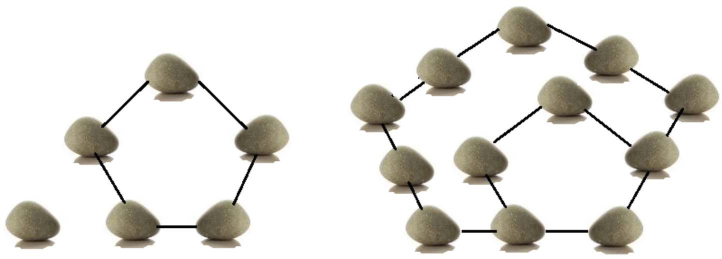
- Čtvercová čísla (viz obrázek 2)
  — čísla: 4, 9, 16, …
  — obecně:
  $$a_1 = 1$$
  $$a_n = n^2$$



Obrázek 2 — čtvercová čísla

- Pětiúhelníková čísla (viz obrázek 3)
  — čísla: 5, 12, 22, …
  — obecně:

$$a_1 = 1$$
$$a_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (3n - 1)$$



Obrázek 3 — pětiúhelníková čísla

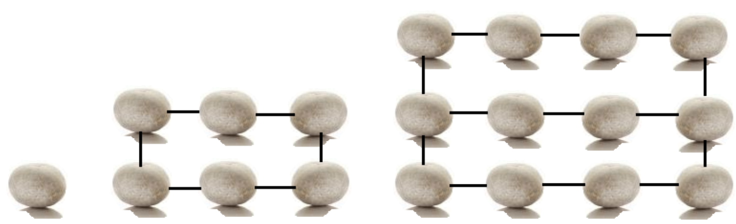
Alexandrijský matematik Hypsikles (2. století př. Kr.) podal obecný předpis pro vytvoření $n$-tého $m$-úhelníkového (figurálního) čísla.

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot [2 + (n - 1)(m - 2)]$$

(viz Kolman, Dějiny matematiky ve starověku)

- Obdélníková čísla (viz obrázek 4)
  — čísla, která je možné vyjádřit součinem dvou čísel větších než 1 (odpovídá uspořádáním do obdélníku)
  — čísla: 6, 12, 20, …
  — obecně:

$$a_1 = 1$$
$$a_n = n \cdot (n + 1)$$



Obrázek 4 — obdélníková čísla

- Přímková čísla (viz obrázek 5.1)
  — právě Pythagorejci dělili čísla vznikající násobením na přímková čísla, tj. prvočísla, ty se nedaly rozložit na činitele (byly zobrazovány body v řadě)

Obrázek 5.1 — přímková čísla

Pythagorejci dále dělili čísla vznikající násobením na čísla „plošná“. Ty bylo možné rozložit na dva činitele a dala se zobrazit body tvořící obdélník nebo čtverec (většinou ovšem kosočtverec). Dále „tělesová čísla“ jako součin tří členů, zobrazovali Pythagorejci body tvořící rovnoběžnostěn nebo krychli. V prostoru to byla čísla kubická

$$a_n = n^3$$

jehlanová čísla (zarovnání dělových koulí viz obrázek 5.2) – částečné součty posloupnosti $m$-úhelníkových čísel. Právě čtvercová a kubická čísla usnadňovali výpočet ploch a objemů. Pythagorejci určovali jehlanová čísla sčítáním mnohoúhelníkových čísel.

Obrázek 5.2 — jehlanová čísla jako dělové koule

- Čtyřstěnová čísla
  — vznikají z trojúhelníkových čísel: 1 + 3 = 4, 1 + 3 + 6 = 10, 1 + 3 + 6 + 10 = 20, …
  — dají se vyjádřit body uspořádanými do tvaru čtyřstěnu
  — obecně:

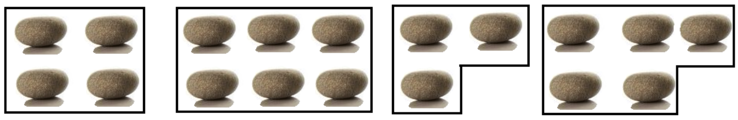
$$a_1 = 1$$

$$a_n = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

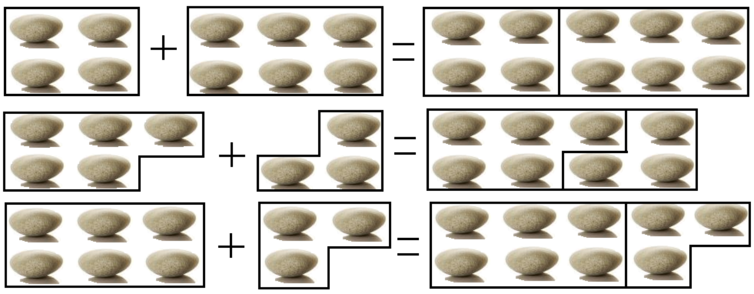
Znázorněním figurálních čísel byly objevovány principy, jak čísla vznikají a další důležité poznatky. Čtvercová, obdélníková a kubická čísla vznikají multiplikativním způsobem ($2 \cdot 2 = 4, 3 \cdot 3 = 9, ...$). Figurální čísla byla důležitá pro vnímání a pochopení matematického důkazu. Poznatky z figurálních čísel se dají využít jako důkazové metody pro některé matematické pojmy, jako třeba pro iracionalitu odmocniny ze dvou.
Pythagorejci odlišovali „mnohoúhelníková čísla“ od čísel vznikajících aditivně.

- Sudá a lichá čísla
  Nejjednodušší a nejstarší příklad aritmetického pojmu, zobrazovaného jednotkovými body je právě rozlišování sudého a lichého čísla.
  Sudé číslo můžeme uspořádat do obdélníku s jednou stranou 2, u lichého čísla to možné není. Stavebním kamenem sudých čísel bylo číslo 2, takže mezi vlastní sudá čísla nebylo počítáno. Součet dvou sudých (lichých) čísel je číslo sudé, součet sudého a lichého je číslo liché.
  Právě ve výuce na škole by bylo vhodné uvést sudost, lichost a vztahy mezi nimi. Je pravda, že i staří Řekové si uvědomovali tyto vztahy, proto by bylo vhodné vtáhnout studenty do děje pomocí ukázek, obrázků a historie, tak aby projevili zájem o matematiku.

  Domníváme se, že Řekové se zabývali sudými, lichými čísly a vztahy mezi nimi, protože je zajímala protikladnost sudých a lichých čísel. Pravděpodobně pro ně tyto poznatky sloužily jako klíč k odhalení dalších zákonitostí čísel a jako vyjádření protikladů.



Obrázek — sudá a lichá čísla



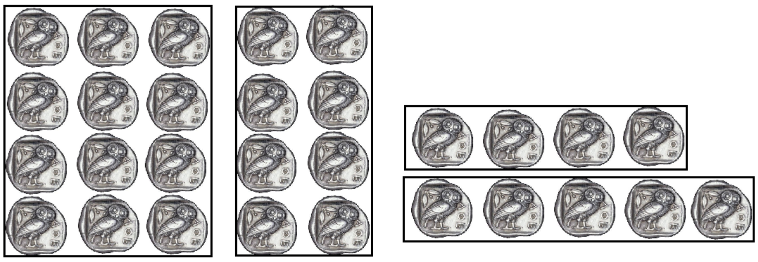
Obrázek — součet sudých a lichých čísel

- Dělitelnost
  Čísla reprezentovaná jako skupiny koleček. Kolečka srovnáváme do různých obdélníčků (resp. čtverců) a pomocí toho, zda je možné to provést nebo ne, případně kolik koleček zbývá. Takto rozlišíme čísla složená, která reprezentujeme nějakým obdélníkovým či čtvercovým číslem a prvočísla, která takto reprezentovat nemůžeme, tj. jsou reprezentovaná přímkovými čísly. Součet dvou čísel takových, že jsou dělitelná nějakým číslem, je rovněž tímto číslem dělitelný
  ($16 + 12 = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 4 \cdot (4 + 3)$). Takto můžeme zvažovat i soudělnost a nesoudělnost čísel. U největšího společného dělitele je potřeba čísla srovnat do obdélníků se společnou hranou tak, aby tato hrana byla co největší. Např. číslo 4 je největším společným dělitelem čísel 12 a 8 a čísla 4 a 5 jsou nesoudělná (viz obrázek 6). Můžeme znázornit i některé vlastnosti aritmetických operací (komutativitu, asociativitu násobení a distributivní zákon).

  Pokud se podíváme do Nikomachova spisu Úvod do aritmetiky I nalezneme,

zde tabulku násobilky, kterou využíval také pro určení vztahů dělitelnosti u celých čísel.
Podle naší hypotézy právě rozvíjení dělitelnosti a určování různých vztahů dovedlo nakonec Eukleida, k nalezení tolik známého Eukleidova algoritmu pro určení největšího společného dělitele. Pravděpodobně se snažil zlepšit a zobecnit metodu hledání dělitelů. Nejspíše si uvědomoval, že klíčem je nalezení největšího dělitele a bez něj není možné pokračovat v určování dalších důležitých čísel jako jsou dokonalá čísla. Eukleides se pravděpodobně vždy ve svých Základech snažil o nalezení, co možná nejobecnějšího postupu pro jednotlivé partie matematiky.

Příklady využití dělitelnosti můžeme jednoduše nalézt tak, že zadáme úkol ať se všichni žáci ve třídě rozdělí do co nejméně skupinek. Spočítáme celkový počet studentů ve třídě, zjistíme jednotlivé dělitele tohoto čísla a najdeme ten největší. Podobnou úlohu pravděpodobně řešili i v řecké armádě, kdy bylo nutné vojáky rozdělit tak, aby vytvořili určitou formaci.



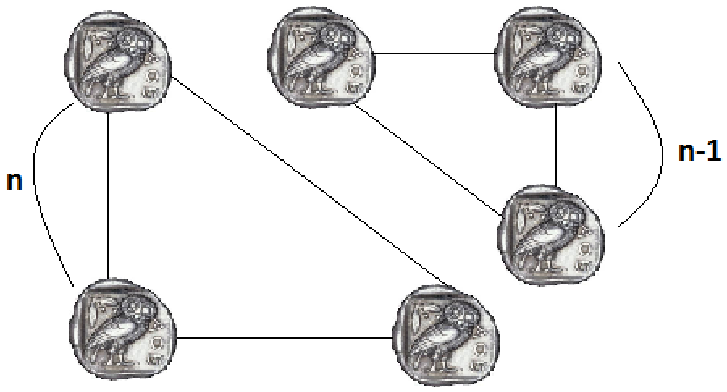
Obrázek 6 — NSD a nesoudělnost

- Podobnost
  Pythagorejci chápali podobnost i v aritmetice, resp. teorii čísel , ne jen v geometrii. Všechna trojúhelníková čísla považujeme za podobná, všechna čtvercová také a podobná jsou i obdélníková čísla tvaru $a \cdot b$ a $ka \cdot kb$ (obdélníky s „úměrnými" stranami). Součin dvou obdélníkových čísel je číslo čtvercové (viz Kolman,Dějiny matematiky ve starověku).

- Vznik trojúhelníkového čísla
  Víme, že trojúhelníková čísla vznikají aditivním způsobem:
  $$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1).$$
  To je vzorec pro součet speciální aritmetické posloupnosti. Součet dvou $n$-tých trojúhelníkových čísel je obdélníkové číslo
  $$n \cdot (n + 1),$$
  tj. $n$-té trojúhelníkové číslo je
  $$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1).$$

Součet sousedních trojúhelníkových čísel je číslo čtvercové (viz obrázek 7). Dokážeme algebraicky:

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) + \frac{1}{2} \cdot (n-1) \cdot n = n^2.$$




Obrázek 7 — součet sousedních trojúhleníkových čísel

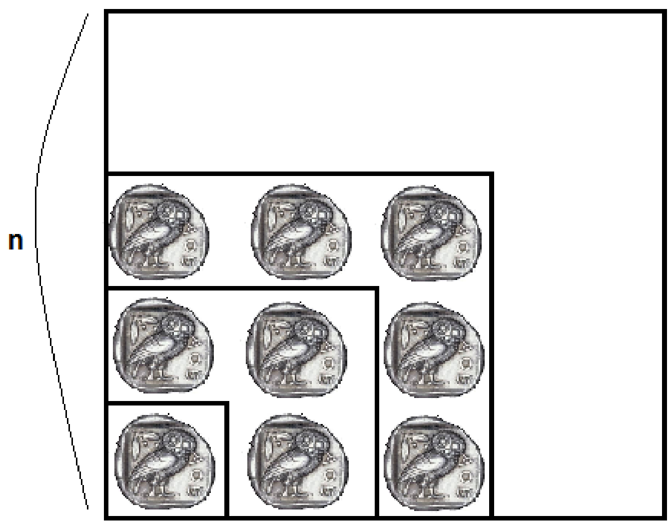
Pokud spojíme dvě stejná trojúhelníková čísla („překrytím“ - jednou stranou přes sebe). Pak spojením dvou stejných trojúhelníkových čísel dostaneme číslo čtvercové. Spojením tří stejných trojúhelníkových čísel dostaneme číslo pětiúhelníkové atd.

- Vznik čtvercového čísla

  Víme, že čtvercová čísla vznikají multiplikativním způsobem. Je možné je vytvořit i aditivně:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2.$$

Ve škole se tato rovnost dokazuje indukcí. Důkaz můžeme přiblížit graficky (viz obrázek 8).




Obrázek 8 — vznik čtvercového čísla aditivně

Současně z obrázku 8 vidíme, že každé liché číslo větší než 1 můžeme zapsat jako rozdíl dvou sousedních čísel čtvercových. Algebraicky:

$$2n - 1 = n^2 - (n-1)^2.$$

Součet dvou po sobě jdoucích lichých čísel je dělitelný čtyřmi. Zároveň si můžeme uvědomit, že čtvercové číslo je buď ve tvaru

$$4k + 1$$

nebo

$$4k.$$

Tyto dva typy čtvercových čísel se pravidelně střídají. Algebraicky snadno ověříme:

$$(2n-1) + (2n+1) = 4n$$

$$(2n)^2 = 4n^2$$

$$(2n+1)^2 = 4 \cdot (n^2 + n) + 1$$

Gnómon je číslo (nebo plošný obrazec), po jehož přidání k jinému číslu (nebo obrazci) vznikne číslo podobné (nebo obrazec podobný). Takový gnómon se na předchozím obrázku připojil ke čtverci a vznikl čtverec. Pythagorejci spojovali gnómon s pravoúhlým obrazcem, jenž odpovídal lichému číslu a při zkoumání posloupnosti gnómonů odvozovali řadu vlastností čísel. Takto také pravděpodobně odvodili Pythagorejci takzvaná čísla „protáhlá“, která měla tvar $n(n+1)$ (viz Kolman, Dějiny matematiky ve starověku).

Můžeme zkoumat i vznik kubického čísla:

$$1 + 7 + 19 + 37 + ... + (3n^2 - 3n + 1) = n^3.$$

Důkaz této rovnosti můžeme provést indukcí nebo geometricky. Víme, že

$$3n^2 - 3n + 1$$

je doplněk krychle

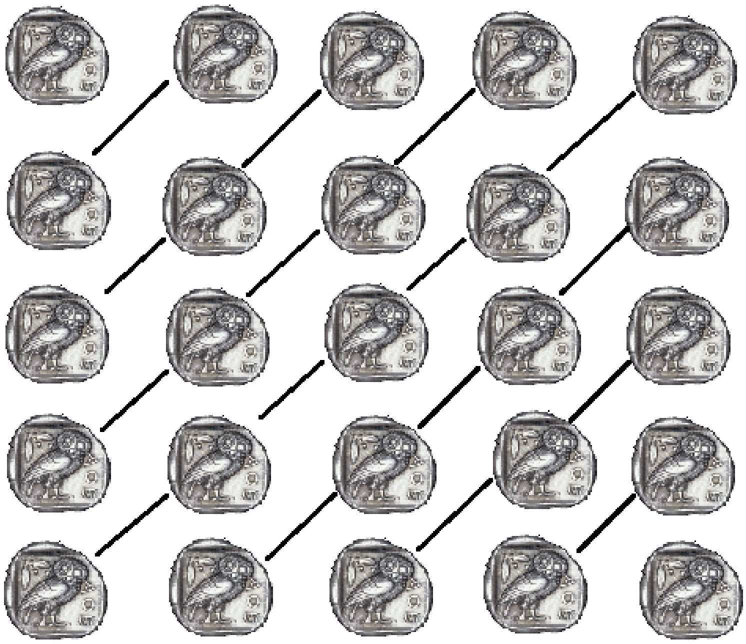
$$(n-1)^3$$

v krychli

$$n^3.$$

Pro každé přirozené číslo $n$:

$$n^2 = n + 2 \cdot [1 + 2 + ... + (n-1)].$$



Obrázek 9 a — znázornění čtvercového čísla

1 − 2 — 3 — 4
> 5
1 − 2 — 3 — 4

Obrázek 9 b — znázornění čtvercového čísla

> Tuto rovnost můžeme ihned vidět ze znázornění čtvercového čísla (viz obrázek 9 a). V souvislosti s předchozí rovností hovořili řečtí matematici o tzv. „stadionu“, tj. rovnost
>
> $$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25$$
>
> znázorňovali symbolicky schématem, které je na obrázku 9 b (viz Kolman, Dějiny matematiky ve starověku).

V naší hypotéze se domníváme, že Pythagorejci se zabývali figurálními čísly jako trojúhelníkovými, čtvercovými a dalšími, protože se snažili číselně vyjádřit geometrický vztah Pythagorovy věty, která byla používána již Egypťany. To nám ukazují i pythagorejské trojice, které byly v Egyptě také známé. Pravděpodobně zkoumali vztahy jako protiklady geometrie a čísla, tj. dva stejné trojúhelníky dají čtverec, tedy i dvě stejné trojúhelníkové čísla dají číslo čtvercové a tak podobně. U gnómonů pravděpodobně chtěli vyjádřit vztah například mezi podobností trojúhelníků a toho, že přidáním gnómonu k trojúhelníkovému číslu dostanu opět trojúhelníkové číslo.

### *Dokonalá čísla*

Řekové znali i *dokonalá čísla* 6, 28, 496 (asi i 8128). Číslo se nazývá dokonalé, je-li součtem všech svých dělitelů (např. $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$). I dokonalost čísla je možné znázornit pomocí figurálních čísel. Další dokonalé číslo 33 550 336 nalezl až J. Müller - Regimontanus (1436—1476).
*Věta* (Základy IX, 36):
„Jestliže budeme mít, počínaje jednotkou, libovolný počet čísel pořadě v dvojnásobné úměře, dokud se celkový součet nestane prvočíslem, a jestliže tento součet vynásobíme posledním členem, pak číslo, které vznikne, bude dokonalé."
Eukleidovi nešlo o vyjádření žádného konkrétního dokonalého čísla na rozdíl od Nikomacha. Eukleides v důkazu této věty nepodává příklady dokonalých čísel, ale obecný důkaz. Dokonalé číslo je to, které se rovná součtu svých částí.
V Eukleidových *Základech* je dokázáno (kniha IX, věta 36), že když je

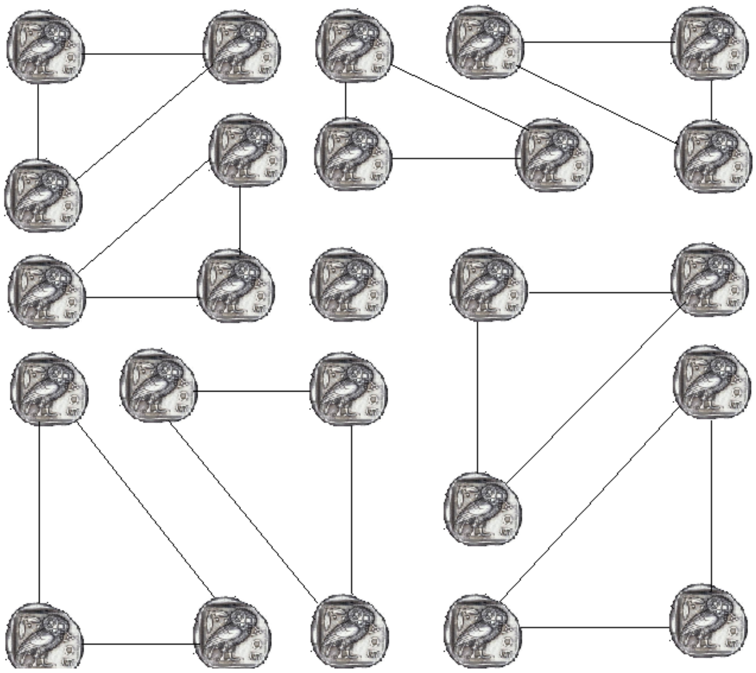
$$2^k - 1$$

prvočíslo, potom je číslo

$$2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$$

dokonalé. Při důkazu tohoto tvrzení si stačí uvědomit, jak vypadají dělitelé tohoto čísla a sečíst je (geometrická řada s koeficientem 2, která začíná od 1). Výše uvedené pětici dokonalých čísel odpovídá volba k = 2, 3, 5, 7, 13. Další tři dokonalá čísla nalezl až L. Euler (1707—1783). Navíc dokázal, že každé sudé dokonalé číslo má tvar ve zmíněné Eukleidově větě. Dodnes nevíme, zda je dokonalých čísel konečně nebo nekonečně mnoho. Dnes již známe asi 40 (pro $k$= 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, ...). Bohužel nevíme, zda vůbec existují lichá dokonalá čísla. Pythagorejci prý znali i tzv. *spřátelená* čísla 220 a 284. Číslo 220 je součtem všech dělitelů čísla 284 a číslo 284 je součtem všech dělitelů čísla 220 (mezi dělitele samozřejmě nepočítáme čísla 220 a 284) (viz Kolman, Dějiny matematiky ve starověku). Problematikou figurálních čísel se zabývali např. Nikomachos (kolem roku 100), který napsal o pythagorejském učení o číslech a Iamblichos autor pojednání o pythagorejcích. Mnohoúhelníková čísla studoval i Diofantos (3. stol.), *v jeho* knize *O mnohoúhelníkových číslech* najdeme následující tvrzení. Zvětšíme-li osminásobek trojúhelníkového čísla o jedničku, dostaneme číslo čtvercové. Algebraické vyjádření (viz Diofantos věta IV,38, Aritmetika):

$$8 \cdot \frac{1}{2} \cdot n(n+1) + 1 = (2n+1)^2.$$



Obrázek 10 — z trojúhelníkových čísel složíme číslo čtvercové

Platnost tvrzení je ihned vidět z obrázku 10. V Eukleidových *Základech* (kniha IX, věta 35) je tvrzení, které můžeme zapsat algebraicky:

$$1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

Nevíme, zda nejde o výsledek pythagorejců získaný při práci s figurálními čísly. Geometricky můžeme tuto rovnost znázornit postupným zdvojnásobováním čtverce či dvou čtverců.

Zamysleme se proč se vlastně řečtí matematici zabývali dokonalými, podměrnými a nadměrnými čísly. Řekové měli materiály Babyloňanů, ve kterých byly řetězové zlomky použité na aplikaci pro různé výpočty. Chtěli tedy pravděpodobně vyjádřit vztah mezi hledaným zlomkem, který by co nejlépe vyjadřoval iracionální číslo a jeho konvergenty. I zde se můžeme domnívat, že šlo o pokus dalšího přemýšlení a bádání nad nesouměřitelností. Dokonalým číslem, které je součtem svých dělitelů mělo nejspíše značit hledaný zlomek, který by byl co nejlepší aproximací iracionálního čísla. Podměrná a nadměrná čísla se svým významem velice podobají konvergentům u řetězových zlomků, které jsou také jednou větší a jednou menší než to co hledáme, tj. oscilují kolem tzv. dokonalého zlomku. Domníváme se, že právě řetězové zlomky a jejich konvergenty můžou značit již počátek limit, protože limita se také blíží, respektive konverguje k nějaké hodnotě.

***Pythagorejské trojice***

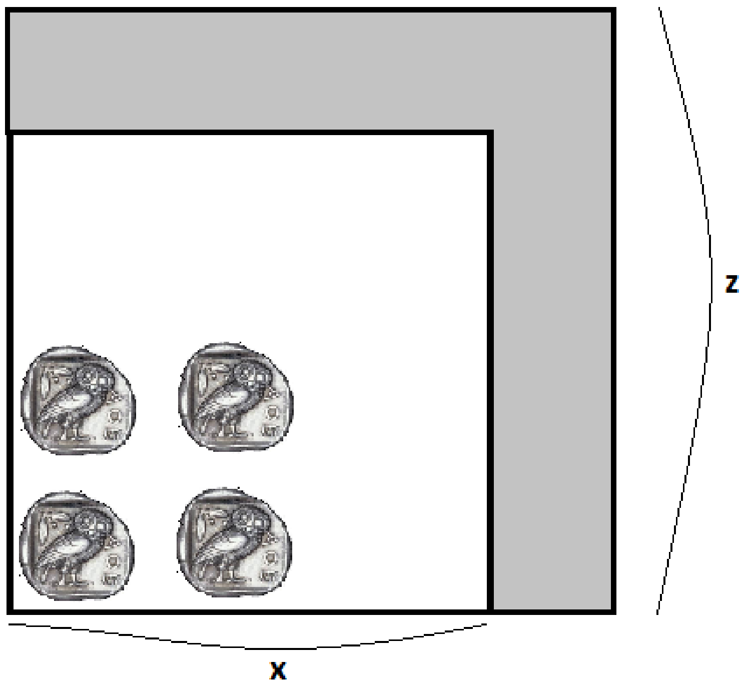
*Pythagorejskou trojicí* rozumíme trojici $(x, y, z)$ přirozených čísel $x, y, z$, pro která platí

$$x^2 + y^2 = z^2;$$

tato čísla jsou délkami stran nějakého pravoúhlého trojúhelníka. Nejznámější trojicí je (3, 4, 5), kterou pravděpodobně využili staří Egypťané ke konstrukci pravého úhlu. V Mezopotámii znali některé pythagorejské trojice již tisíc let před Pythagorem. Pokud je $(x, y, z)$ pythagorejská, pak je i $(kx, ky, kz)$ pythagorejská. Při hledání všech pythagorejských trojic se omezíme jen na tzv. základní trojice, které sestávají z čísel nesoudělných. Uvádí se, že Pythagoras a později i Platón objevili obecná pravidla pro nalezení některých pythagorejských trojic.
Pythagoras: $x = 2p^2 + 2p, \quad y = 2p + 1, \quad z = 2p^2 + 2p + 1$
Platón: $p^2 - 1, \quad 2p, \quad p^2 + 1$
Přirozené číslo $p$ je libovolné a současně $y, z$ jsou dvě sousední přirozená čísla (viz Kolman, Dějiny matematiky ve starověku). Pravidla odvodíme pomocí čtvercových figurálních čísel.

*Výtěžek I., věty 28 (Eukleides Základy, kniha X), tj. nalezení všech pythagorejských trojic*:
Zadání: „Najdi dvě čísla čtvercová, by též součet jejich byl čtvercový."
Řešení: „Mějme dvě čísla $AB, BC$, a buď též (pokaždé obě) buďto sudá buďto lichá. $A$ ježto zbytek jest sudý, ať se odečte sudé od sudého, ať liché od lichého; zbytek tedy $AC$ jest sudý. Rozpulme $AC$ v $D$. Buďte pak též $AB, BC$ buďto podobné roviny buďto čtverce, jež i samy jsou podobné roviny. Tedy $AB \cdot BC + CD^2 = BD^2$ (Základy kniha II,7). I jest $AB \cdot BC$ čtverec, ježto bylo dokázáno (Základy kniha IX,1), když dvě podobné roviny vespolek se znásobí, že vzniklé číslo je čtverec. Jsou tedy nalezena dvě čísla čtvercová $AB \cdot BC$ a $CD^2$, jejichž součet je čtverec $BD^2$. I jest patro, že opět nalezeny jsou dva čtverce $BD^2$ a $CD^2$, takže rozdíl jejich $AB \cdot BC$ je čtverec, jsou-li $AB, BC$ podobné roviny. Pakli to nejsou podobné roviny, nalezeny jsou dva čtverce $BD^2, DC^2$, jejichž rozdíl $AB \cdot BC$ není čtverec; což právě bylo dokázati."

Problém nalezení všech pythagorejských trojic můžeme převést na to (viz obrázek 11), kdy je možné přetvořit vyšrafovaný gnómon na čtverec $y^2$ ?




Obrázek 11 — přetvoření vyšrafovaného gnómonu na čtverec

Využijeme gnómon o velikosti 1 a předpokládáme, že $z = x + 1$. Gnómon $y^2$ je číslo liché a tak i $y$ je liché. Píšeme $y = 2p + 1$, odtud $y^2 = 4p^2 + 4p + 1$. Pro získání čísla $x$, musíme od gnómonu $y^2$ odečíst číslo 1 (pravý horní „roh" čtverce) a výsledek vydělit dvěma. Tedy $x = 2p^2 + 2p$ a konečně $x = 2p^2 + 2p + 1$. Poté užijeme gnómon „šířky" 2 a předpokládáme, že $z = x + 2$. Gnómon $y^2$ je číslo sudé (součet dvou po sobě jdoucích lichých čísel) a číslo $y$ je sudé, $y = 2p$ a $y^2 = 4p^2$. Pro získání čísla $x$ musíme od gnómonu odečíst číslo 4 (pravý horní „roh") a vydělit čtyřmi. Tedy $x = p^2 - 1$ a $x = p^2 + 1$. Vidíme jakým způsobem bylo možné dospět pomocí čtvercových čísel k výše uvedeným popisům pythagorejských trojic.

### ***Poměry a úměry***

Řekové věnovali velkou pozornost poměrům a úměrám. Eudoxovým přínosem je obecná teorie poměrů a úměr. Pravděpodobně i zde hrála velkou roli podobnost geometrických útvarů. Jsou-li např. dva obdélníky o stranách $a, b$, resp. $p, q$ podobné (pořadí stran je uvedeno s ohledem na podobnost).

$$a : b = p : q,$$

resp.

$$a : p = b : q$$

Eukleides ve větách (Základy VII, 20-22) podává následující charakterizaci poměrů: Pro každý daný poměr existují právě dvě nesoudělná čísla $p, q$ taková, že $p : q$ je v daném poměru. Ty jsou zároveň nejmenšími čísly , které mají mezi sebou daný poměr. Pokud mají dvě jiná čísla $m, n$ stejný poměr, potom existuje číslo $k$ takové, že $m = k \cdot p$ a $n = k \cdot q$. Takto získáme pro každý poměr jednu dvojici, která jej reprezentuje. Hlavní metodou, kterou užívá Eukleides v důkazech těchto vět nazveme geometrické krácení zlomků celých čísel. Nikomachos naproti tomu vyjmenovává velké množství různých poměrů, které spadají do pěti skupin, jenž definoval (Úvod do Aritmetiky I, 17,7).
Například z Eukleidových Základů (viz věta Základy VIII, 8):
Jestliže mezi dvě čísla padnou nějaká čísla ve spojité v úměře, potom kolik čísel mezi ně padne pořadě v úměře, tolik čísel padne pořadě v úměře i mezi čísla, která jsou v témže poměru jako ona.
Pokud máme čtyři čísla $k < l, m < n$, přičemž $k : l = m : n$, a mezi čísly $k, l$ nalezneme $i$ čísel $a_1, ..., a_i$ tak, že čísla $k, a_1, ..., a_i, l$ tvoří geometrickou posloupnost. Pak i mezi čísly $m, n$ nalezneme $i$ čísel $b_1, ..., b_i$ tak, že čísla $m, b_1, ..., b_i, n$ tvoří geometrickou posloupnost. Tato věta nám říká, že pokud jsou dvě čísla v poměru $n : (n + 1)$ (podle terminologie Nikomacha z Gerasy takzvaný epimorní poměr), pak mezi ně nelze vložit žádný počet čísel tvořící s nimi geometrickou posloupnost. Důkaz s pomocí věty VIII, 8 je zřejmý, neboť stejný počet čísel by bylo možné vložit přímo mezi $n$ a $n + 1$, což není možné, neboť to jsou dvě po sobě jdoucí čísla. Pro hudební teorii z toho vyplývá, že oktávu nelze rozdělit na žádný počet stejných intervalů. Oktávu můžeme vyjádřit poměrem $1 : 2$ a čistý interval musí být vyjádřen poměrem $m : n$ dvou přirozených čísel. V případě, že by byla oktáva rozdělena na $k$ těchto stejných intervalů, pak bude platit $1 : 2 = m^k : n^k$. Mezi čísly $m^k$ a $n^k$ leží geometrická posloupnost $m^k, m^{k-1}n, m^{k-2}n^2, ..., mn^{k-1}, n^k$, což by bylo ve sporu s Archytovou větou.
Pomocí předchozích úvah je možné dokázat iracionalitu $\sqrt{2}$.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, a > b$$

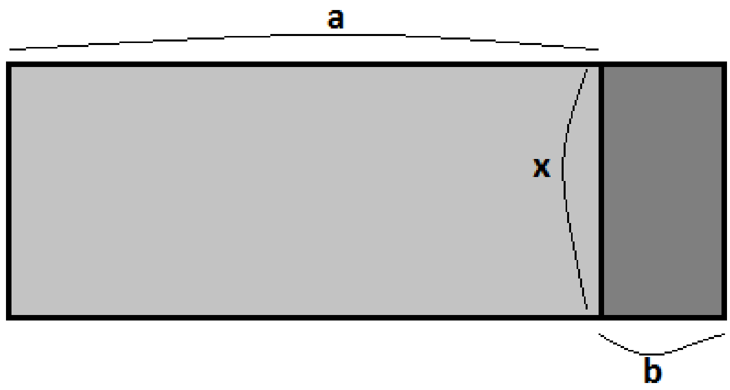
$$b^2, ab, a^2$$

máme tedy poměr $1 : 2$ a mělo by být možné něco vložit mezi 1 a 2, což nejde.

*Věta* (Základy X,1): „Jestliže jsou dány dvě nestejně velké veličiny a jestliže se z větší odejme více než polovina a ze zbytku více něž polovina a tak stále dál, pak zůstane nějaká veličina, která bude menší z obou daných veličin.“
Tato věta má důležitý význam v důkazech tzv. *exhaustační metodou* například v Eukleidových Základech kniha XII a zejména ve spisech Archimédových. Tento princip je také někdy nazýván *Archimédovým axiomem*. Důkaz je založen na definici (Základy V,4), se kterou je věta ekvivalentní. Implicitně tedy vyplývá, že budeme studovat pouze veličiny, které mají mezi sebou poměr.

Dnes poměry zapisujeme většinou pomocí zlomku jako rovnost dvou poměrů (zlomků), tj. z jednoho zlomku dostaneme druhý krácením a rozšiřováním , nebo oběma těmito operacemi. Rovnost dvou poměrů můžeme chápat i geometricky, např. pomocí podobnosti obdélníků: jeden obdélník dostaneme z druhého zmenšením, zvětšením nebo oběma těmito operacemi. Např. úměru $25 : 5 = 30 : 6$.

Od poměru 25 : 5 přejdeme k poměru 5 : 1 zkrácením číslem 5 a od poměru 5 : 1 k poměru 30 : 6 rozšířením číslem 6.




Obrázek 12 — podobné obdélníky se společnou stranou

Geometricky mluvíme o zmenšení obdélníku pětkrát a následnému zvětšení šestkrát. Zmenšení i zvětšení uvažujeme jen „celočíselná“. Takto patrně staří Řekové s poměry a úměrami pracovali. V souhlasu s původním pythagorejským pohledem na čísla a veličiny byly zprvu uvažovány jen poměry přirozených čísel. Pravděpodobně nebylo problémem zjistit, zda dva dané poměry jsou si rovny nebo převést poměr $a : b$ na poměr $x : e$, resp. $e : x$, kde číslo $e$ bylo dáno, a zjistit, pro jaké číslo $e$ to vůbec jde. Použijeme-li dnešní terminologii, bylo možné zvládnout tyto úlohy pomocí rozšiřování a krácení zlomků. Závažnější otázkou bylo nalézt k daným číslům $a, b$ takové číslo $x$, aby bylo $a : x = x : b$. Geometricky je možné tuto úlohu interpretovat několika způsoby. Jako problém o podobných obdélnících se společnou stranou (viz obrázek 12), nebo problém o převedení obdélníka o stranách $a, b$ na „rovnoplochý“ čtverec o straně $x$; z výše uvedené úměry vyplývá rovnost $ab = x^2$. Geometricky není vždy možné zvládnout tuto úlohu v oboru přirozených čísel. Hledaná veličina $x$ se nazývá *geometrický průměr* veličin $a, b$, někdy též *střední geometrická úměrná*, také se mluvilo o „vložení“ veličiny $x$ mezi dvě dané veličiny $a, b$. Úměry tohoto typu úzce souvisejí s Eukleidovskými větami; u pravoúhlého trojúhelníka ABC s přeponou AB dojde k obdobným vztahům. Spustíme výšku z vrcholu $C$ na stranu $AB$. Označíme:

$$c : a = a : c_a, c : b = b : c_b, c_b : v = v : c_a.$$

Eukleidovy věty se často takto dokazují. Speciálním případem úměry $a : b = p : q$ je *zlatý řez*. Vedle *geometrických úměr* vyšetřovali Řekové i *aritmetické úměry* $a - b = p - q$.

Př:

K daným veličinám $a, b$ nalezněte veličinu $x$: $a - x = x - b$.
Vidíme, že jde o *aritmetický průměr* veličin $a, b$

$$2x = a + b$$

$$x = \frac{a + b}{2}$$

Pokud bychom hledali veličinu $x$, pro kterou je: $\frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{b}$.
Vidíme, že hledanou veličinou je *harmonický průměr* veličin $a, b$

$$x = \frac{2ab}{a+b}$$

.

### *Řetězové zlomky - Nalezení zlomku, který by co nejlépe vyjadřoval iracionální číslo*

Řešení nalezení co nejlepšího zlomku, jenž vyjadřuje iracionální číslo spočívá ve ztracené matematice, v tak zvaných *Řetězových zlomcích (Continual fraction).*
Řešení:
Řetězové zlomky si ukážeme na příkladě $\sqrt{2} = 1,4142136$.

$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = \leftarrow$zde vidíme použíti klasické finty přičtu, odečtu.
$= 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = \longleftarrow$ tady používáme složený zlomek.
$= 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}} = \leftarrow$rozšířili jsme $(\sqrt{2} - 1)$
$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1 + \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}} =$
$= 1 + \frac{1}{\mathit{2}+\frac{1}{\mathit{2}+\frac{1}{\mathit{2}+...}}}$ $\leftarrow$kurzívou jsou zvýrazněni nositelé informace.

Dostali jsme řetězový zlomek. Je možné dokázat, že řetězový zlomek je periodický.
$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, ...] = [1; 2]$ $\leftarrow$před středníkem je celá část.

Zlomek vyjadřující iracionální číslo spočítáme takto:
$1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}} = 1 + \frac{1}{2+\frac{2}{5}} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12}$.

Vyjádření pomocí zlomku jako poměr malých celých čísel.
$\frac{3}{2} = 1,5; \frac{7}{5} = 1,4; \frac{17}{12} = 1,41\overline{6}$
Konvergenty vždy oscilují kolem hodnoty iracionálního čísla.
$>, <, >$
Ukážeme, že není možné najít žádný lepší zlomek než řetězový, tj. neexistuje lepší aproximace.
Nechť hledaný zlomek je $\frac{p}{q}$ a konvergenty odhadneme jako
$|\frac{p}{q} - \frac{P_k}{Q_k}| < |\frac{p}{q} - \frac{m}{n}|$, kde $n < q$ a zlomek $\frac{P_k}{Q_k}$ označuje k-tý konvergent.
Odhad přesnosti: $|\alpha - \frac{P_k}{Q_k}| < \frac{1}{Q_k \cdot Q_{k+1}}$
Důkaz se provede rozepsáním řetězových zlomků.

### *Největší společný dělitel - NSD*

Eukleidův algoritmus najdeme na samém začátku Eukleidovy aritmetiky. To je proto, že Eukleides nejdříve studuje vlastnosti poměrů dvou čísel a největší společný dělitel je prostředníkem mezi oběma čísly, jenž jsou jeho násobky. To je opačný postup než nalezneme u Nikomacha, u kterého jsou nejprve prostudována samotná čísla a teprve potom poměry čísel.

Z Eukleidových Základů můžeme vypozorovat následující vlastnost. Pokud aplikujeme Eukleidův algoritmus na dvě veličiny, pak se buď zastaví, nebo nezastaví. V případě, že se nezastaví, pak jsou tyto veličiny nesouměřitelné. Pokud se však zastaví, tak jsou souměřitelné a poslední zbytek je největší společnou mírou. Bude-li tato největší společná míra jednotka, pak jsou čísla nesoudělná, nebo dostaneme nějaké číslo, které je jejich největším společným dělitelem.
Největší společný dělitel daných čísel. Je to největší z čísel, které dělí daná čísla beze zbytku. Určujeme ho následujícím způsobem:

- Použitím prvočíselného rozkladu
  Př: Určete NSD čísel 78, 18, 36, 54
  $78 = 2 * 3 * 13$
  $18 = 2 * 3^2$
  $36 = 2^2 * 3^2$
  $54 = 2 * 3^3$
  $NSD = 2 * 3 = 6$
  Vybíráme prvočísla, která se vyskytují v každém rozkladu alespoň jednou a to s nejvyšší mocninou, která je ve všech rozkladech (2 je ve všech rozkladech nejvýše v první mocnině a 3 také).

- Eukleidovým algoritmem
  Máme-li určit největší společný dělitel například čísel 78 a 136, můžeme užít Euklidova algoritmu:
  136 : 78 = 1 zb. 58
  78 : 58 = 1 zb. 20
  58 : 20 = 2 zb. 18
  20 : 18 = 1 zb. **2** - NSD
  18 : 2 = 9 zb. 0
  Největším společným dělitelem čísel 136 a 78 je číslo 2. Číslo 2 je poslední nenulový zbytek po dělení čísel v Eukleidově algoritmu.

Eukleidův algoritmus můžeme využít ve výuce například tak, že zadáme úlohu: Potřebujeme oplotit zahrádku obdélníkového tvaru o rozměrech 13 x 8 metrů. Naším cílem je rozmístit kůly po obvodu zahrady v pravidelných rozestupech tak, aby v každém rohu zahrady byl kůl. Cílem je nalézt co největší rozestup mezi kůly (a tedy nejmenší počet kůlů), který toto umožňuje.
Úloha je zaměřena na hledání největší společného dělitele délek stran zahrady. Pro řešení je možné buď uvést rozklad na prvočísla nebo úlohu řešit geometricky. Řešení této úlohy přenecháme čtenáři.
Výsledek pro kontrolu:
Úlohu můžeme převést na úlohu oplocení zahrady o rozměrech 2 x 1 metr tak aby splňovaly požadavky lze kůly oplotit ve vzdálenosti jeden metr.
Tato vzdálenost je současně řešením i původní úlohy a zahradu o rozměrech 13 x 8 lze dle požadavků zadání oplotit kůly ve vzdálenosti jeden metr a tato vzdálenost je největší možná. Což znamená, že $NSD(13, 8) = 1$.

#### *Eratosthenovo síto*

Eratosthenovo síto je jednoduchý algoritmus pro nalezení všech prvočísel nižších, než je daná horní mez $n$. Tento algoritmus je připisován starořeckému učenci Eratosthenovi z Kyrény a je datován cca do roku 200. Jedná se o jednu z nejefektivnějších metod pro hledání prvočísel do 10 000 000.

Algoritmus se skládá z následujících kroků:

1. Napíšeme všechna čísla 2 až $n$ (2 je první prvočíslo). A předpokládáme, že všechna jsou prvočísla.
2. Vezmeme si první prvočíslo a víme, že všechny jeho násobky nemohou být z definice prvočísly, proto je vyškrtneme z našeho seznamu.
3. Nyní si vezmeme další prvočíslo z proškrtaného seznamu a opět vyházíme všechny jeho násobky.
4. Opakujeme 3, dokud nedojdou čísla.

Algoritmus můžeme zlepšit: zamyslíme se nad tím, že je zbytečné ověřovat všechna čísla, stačí do odmocniny z horní meze, protože pokud by horní mez byla složeným číslem (ve tvaru $m \cdot n$), tak $m \leq \sqrt{m \cdot n}$ nebo $n \leq \sqrt{m \cdot n}$. Z tohoto důvodu, pokud nejvyšší testované číslo není prvočíslem, tak je prověřeno v nejhorším případě při čítání své odmocniny, všechny další testy jsou zbytečné. Algoritmus můžeme ještě vylepšit vynecháním sudých čísel.

#### *Nadměrná čísla*

Nadměrné číslo je takové číslo, jehož součet částí je větší než původní číslo. Nikomachos se takto snažil označit čísla, která určitým způsobem překračují souměrnost. Tj. jako například některá zvířata jsou větší než jiná v dané skupině. Nadměrnými čísly jsou například 12, 24 a některá další. Číslo 12 má polovinu 6, třetinu 4, čtvrtinu 3, šestinu 2 a dvanáctinu 1, tj. součet dává dohromady 16, a to je více než původních 12. Takže součet částí čísla 12 je větší než celek.

#### *Podměrná čísla*

Podměrné číslo je opačným případem nadměrných čísel. Součet částí podměrného čísla je menší než to číslo samo. Opět se takto snažil Nikomachos zahrnout mezi čísla to, že nějaké zvíře z dané skupiny má například jen jedno oko oproti ostatním ve skupině. Podměrnými čísly jsou například 8 a 14. Číslo 8 má polovinu 4, čtvrtinu 2 a osminu 1, tj. součet dává dohromady číslo 7, a to je méně než původní číslo 8. Takže součet části čísla 8 je menší než celek.

### *Hypotézy odvozené z řecké matematiky*

Figurální čísla chtěli pravděpodobně Řekové připodobnit jednotlivým geometrickým útvarům jako je trojúhelník, čtverec, krychle a tak podobně. Domníváme se, že Řekové se snažili vylepšit poznatky, které se k nim pravděpodobně dostaly od Babyloňanů a Egypťanů. Na dochovaných spisech a tabulkách můžeme vidět, že Babyloňané případně Egypťané již znaly některé z věcí používaných Řeky, například pythagorejské trojice, odmocninu ze dvou atd. Skutečnost, že Řekové některé pojmy převzaly můžeme uvést na následujícím příkladě. Anaximandres jako první seznámil Řeky s pojmem gnómon, v tomto případě jako ukazatel slunečních hodin kolmý na rovinu číselníku, který znal jako nástroj používaný u Babyloňanů. Číňané mají také zmínku o použití gnómonu v knize „Devět kapitol matematického umění“, která byla psána několika generacemi v období od 10. do 2. století př. n.l. I zde můžeme sledovat postupné rozšiřování tohoto pojmu. Například Eukleides rozšířil tento pojem na plochý útvar, který vznikne odstraněním podobného rovnoběžníku z rohu většího rovnoběžníku. A Theon ze Smyrny definoval ve stejném smyslu gnómon jako číslo, které přidáno k polygonálnímu číslu vytvoří další číslo, stejného typu.
Zobecnění, vylepšení a zkvalitnění takto převzatých poznatků někdy vedlo i ke zcela nesprávným či nejasným definicím a vztahům. Například do 3. století před n.l. si Řekové mysleli, že existuje nějaké největší poslední číslo, to se povedlo vyvrátit Archimédovy v jeho spisech „Počítání písku“.
Domníváme se, že Eratosthenes vymyslel síto, aby dokázal od sebe oddělit prvočísla a čísla složená pravděpodobně to potřeboval k nějaké další práci. Předpokládáme, že zkoumání přímkových čísel a Eratosthenovo síto pomohlo v zájmu o teorii prvočísel.
Například i zde mezi Řeky vznikaly diskuze, protože Eukleides zahrnul číslo 2 mezi prvočísla a mnozí se domnívali, že je to nesprávně neboť číslo dvě bylo základním stavebním kamenem sudých čísel.
Domníváme se také, že studium čísel, které vznikají sčítáním dovedlo matematiky v Řecku až ke sčítání číselných řad, které prováděl Archimédes, tuto naši hypotézu potvrzuje i Kolman ve svých Dějinách matematiky ve starověku. Právě figurální čísla a jejich gnómony můžeme zapsat jako součet aritmetických řad. Například součet lichých čísel je číslo čtvercové, tuto vlastnost můžeme zapsat jako $\sum_{k=0}^{m}(2k+1) = (m+1)^2$.
Máme také hypotézu, že Pythagorejci se snažili vyřešit problém iracionality odmocniny ze dvou pomocí teorie hudby, snaha o vytvoření matematického modelu hudby. Je možné, že dokonce při hledání půl oktávy objevili problém iracionality $\sqrt{2}$. To, že se Řekům nedařilo nalézt $\sqrt{2}$ jako poměr dvou celých čísel vedlo ke snaze nalezení alespoň přibližné hodnoty. Případně nalezení důkazu o tom, že není možné vyjádřit $\sqrt{2}$ jako poměr dvou celých čísel.
Pythagorejci se zabývali délkou strun a udávaly tóny jako poměry, takto vznikl „Pythagorejský Triton“, což byl poměr tónů $c - f - g$. Pythagorejci si pravděpodobně uvědomovali vztah nepřímé úměrnosti, tj. krátká struna určuje vysokou frekvenci a dlouhá struna určuje nízkou frekvenci. Ukažme si na příkladě tzv. interval celého pythagorejského tónu, tj. tón $f$ je kvarta $\frac{3}{4}$ a tón $g$ je kvinta $\frac{2}{3}$. Interval mezi $f - g$ vypočteme jako $\frac{3}{4} \cdot x = \frac{2}{3}$, což je $x = \frac{8}{9}$. Postupně se pokračuje

v kvintových krocích, bohužel zde vznikne slyšitelná nepřesnost, tzv. „Pythagorejské Komma“. Tento problém se však vyřeší až později temperovaným laděním. Důležité pozorování je, že i v hudbě Pythagorejci objevili disharmonii a proto se všemožně snažili o jeho vyřešení, později se tzv. skupině „Harmoniků“ podařilo o něco vylepšit nepřesnost v hudbě.
Jak jsme zmiňovali v úvodu Theodoros dokázal, že všechny druhé odmocniny nečtvercových čísel od 3 do 17 jsou iracionální. Domníváme se, že to dokázal pomocí řetězových zlomků jejichž aplikace viděl v babylonských spisech, protože i Archytas využívá v důkazu odmocniny ze dvou podobných vlastností jako když využíváme řetězové zlomky pro zjištění konvergentů odmocniny ze dvou. Theodoros a Archytas pravděpodobně spočetli jednotlivé konvergenty a tak zjistili iracionality jednotlivých odmocnin.

# 2. Řecká matematika ve výuce

## 2.1 Příklady použití řecké matematiky ve výuce

- ***Definice čísla***

  Pokud chceme vědět co je to vlastně číslo, resp. jaká je řecká definice čísla, musíme si uvědomit, že již od pythagoreismu je aritmetika velice úzce propojena s metafyzikou. Základní pojmy *jednotka* a *číslo* vycházejí snad ještě více než u geometrie z metafyzických úvah. Podle Eukleida (viz Základy def. VII,1-2): „Jednotka je to, podle čeho se každá ze jsoucích věcí nazývá jedno. Číslo je počet složených jednotek.“ U Nikomacha známe tři různé definice pojmu *číslo*. První definice jako „ohraničený počet“, ta je velice podobná Aristotelově definici čísla v Metafyzice jako „omezenému počtu“. Druhá bere číslo jako „soustavu jednotek“ a je velmi blízko Eukleidově definici. Poslední definice, která není podobná žádné z definic uvádí číslo jako „proud množství, který sestává z jednotek“. U této definice má „množství“ význam diskrétní velikosti a „proud“ význam vlastnosti čísel, že přirozeně následují jedno za druhým. Tyto definování nám říkají, že číslo je složeno z jednotek, které jsou všechny stejné a ničím se neliší.

- ***Aplikace průměrů***

  1. **Příklad na aritmetický průměr**
     Zadání:
     Vypočtěte průměrnou rychlost jízdy na koni na celé své dráze. Koně si označíme písmenem $A$. První hodinu jel rychlostí $a = 20$ km/h a druhou hodinu jel rychlostí $b = 30$ km/h.
     Řešení:
     Průměrnou rychlost počítáme jako podíl celkově ujeté dráhy a celé doby jízdy. Tj. takto:

     $$A = \frac{a+b}{2} = \frac{20+30}{2} = 25km/h$$

     Počítali jsme podle vzorce pro aritmetický průměr.

  2. **Příklad na geometrický průměr**
     Zadání:
     Obdélník má rozměry $a = 4$cm, $b = 9$cm. Jaké rozměry má čtverec stejného obsahu jako obdélník, tj. jak musíme zprůměrovat hodnoty $a, b$?
     Řešení:
     Bude-li $n$ strana čtverce, pak platí:

     $$n^2 = a \cdot b,$$
     $$n = \sqrt{ab} = \sqrt{4 \cdot 9}cm = 6cm.$$

     Počítali jsme podle vzorce pro geometrický průměr.

3. **Příklad na harmonický průměr**
Zadání:
Určete průměrnou rychlost posla, označíme ho $P$, který vyrazil na koni z místa $A$ do místa $B$ stálou rychlostí $a = 20$ km/h a zpět z místa $B$ do místa $A$ stálou rychlostí $b = 30$ km/h.
Řešení:
Pokud je $s$ vzdálenost mezi místy $A, B$, dále $t$ doba jízdy z $A$ do $B$ a $z$ doba jízdy z $B$ do $A$, je průměrná rychlost rovna:

$$P = \frac{2s}{t+z} = \frac{2s}{\frac{s}{a}+\frac{s}{b}} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}} km/h = 24 km/h$$

Počítali jsme podle vzorce pro harmonický průměr.

- ***Aplikace prvočísel***

1. **Každé složené číslo je měřeno nějakým prvočíslem**
Důkaz:
Nechť číslo $A$ je složené. Budeme předpokládat, že A je měřeno nějakým prvočíslem. Číslo $A$ je složené, tj. bude ho měřit nějaké číslo. Nechť ho tedy měří a nechť je to $B$ (viz def. Základy VII,13). Pokud je $B$ prvočíslo, pak nastalo to, co bylo zadáno. Pokud je $B$ složené číslo, pak je bude měřit nějaké číslo. Nechť je měří a nechť je to $\Gamma$. Jestliže $\Gamma$ měří $B$ a $B$ měří $A$, pak i $\Gamma$ měří $A$. Je-li $\Gamma$ prvočíslo, pak nastalo to, co bylo zadáno. V případě, že to bude složené číslo, pak je měří nějaké číslo. Pokud provedeme takové, zkoumání nalezneme nějaké prvočíslo, které je bude měřit. V případě, že takové číslo nenalezneme, bude číslo $A$ měřeno nekonečným počtem čísel, z nichž každé je menší než předchozí. Což u čísel není možné (toto je nejstarší dochovaná formulace nemožnosti, tj. tak zvaného *nekonečného sestupu* pro přirozená čísla, který se stal jedním z klíčových principů u Fermata). Nalezneme tedy nějaké prvočíslo, kterým bude měřeno číslo předchozí, a kterým bude tedy měřeno i číslo $A$. Každé složené číslo je tudíž měřeno nějakým prvočíslem. Což se mělo dokázat.

2. **Každé číslo je buď prvočíslem, nebo je nějakým prvočíslem měřeno**
Důkaz:
Mějme číslo $A$. Předpokládejme, že $A$ je buď prvočíslem, nebo je nějakým prvočíslem měřeno. Pokud je $A$ prvočíslo, pak nastalo to, co bylo zadáno. Pokud je složené číslo, pak bude měřit nějaké prvočíslo (viz Základy VII, 31). Každé číslo je tedy buď prvočíslem, nebo je nějakým prvočíslem měřeno. Což se mělo dokázat.

- ***Diofantova aritmetika***

1. **Úkol: Nalézt dvě čísla taková, aby jejich součet a součin byla zadaná čísla.**
Řešení:
Čtverec nad polovinou součtu obou nalezených čísel musí přesahovat

jejich součin o čtverec. To je nutná podmínka řešitelnosti. Tj. pro daná $a, b$ tedy máme najít čísla $y, z$ tak, aby $y + z = a$ a $yz = b$. V takovém případě musí platit podmínka řešitelnosti $(\frac{a}{2})^2 > b$, která vyplývá například z Eukleida (viz Základy II,5). Diofantos při řešení položí $y = \frac{a}{2} + x, z = \frac{a}{2} - x$. Takto je splněna první rovnice a druhá se převede na $x^2 = \frac{a^2}{4} - b$.
Například součet čísel má dávat 20 a součin má dávat 96. Jejich rozdíl bude $2x$. Pokud je rozdělíme napůl, tak bude každá z částí z dělení tohoto součtu 10, jelikož jejich původní součet je 20. A když polovinu rozdílu ($x$), k jedné části přidám a od druhé ji odeberu, zůstane jejich součet opět 20, rozdíl je $2x$. Větší číslo bude $x + 10$ (10 je polovina součtu). Menší bude $10-x$. Jejich součet zůstává 20 a rozdíl $2x$. Zbývá jen, aby jejich součin byl 96. Jenže jejich součinem je $100 - x^2$. To se má rovnat 96, tj. dostaneme $x = 2$. Větší číslo tedy bude 12, menší 8 a splňují tak zadání.

2. **Úkol: Rozdělení zadaného čtverce na dva čtverce**
Řešení:
Pro dané $a$ se tedy má řešit rovnice $x^2 + y^2 = a^2$. Právě k této větě si Fermat učinil slavnou poznámku, ve které tvrdí, že nalezl důkaz faktu, že pro $n > 2$ rovnice $x^n + y^n = a^n$ nemá řešení. Toto tvrzení se nyní nazývá Velká Fermátova věta a její důkaz byl nalezen až na konci 20. století.
Budeme mít za úkol rozdělit 16 na dva čtverce.
Prvním čtvercem je $x^2$, druhý bude tedy $16 - x^2$. Tj. $16 - x^2$ musí být rovno čtverci. Vytvořím čtverec nad stranou $x$ bez tolika jednotek, kolik jich strana z 16. Například $2x - 4$, tj. samotný čtverec bude mít $4x^2 + 16 - 16x$. To se musí rovnat $16 - x^2$. Upravíme tak, že k oběma stranám přičteme záporné členy, takto se odečtou stejné členy. Pak $5x^2 = 16$ a dostáváme $x = \frac{16}{5}$. Jeden čtverec bude $\frac{256}{25}$, druhý $\frac{144}{25}$ a součet obou dává $\frac{400}{25}$, tj. 16 a každý z nich je čtvercem.
Shrnutí Diofantova postupu: Jeden ze čtverců je $x^2$, druhý musí splňovat $y^2 = a^2 - x^2$ a Diofantos jej hledá ve tvaru $y = mx - a$ pro libovolné $m$. Po dosazení $x = \frac{2ma}{m^2+1}$, a tedy $y = \frac{(m^2-1)a}{m^2+1}$. Při výkladu Diofantos pracuje s konkrétními hodnotami $a = 4$ a $m = 2$, tj. dostává $(\frac{16}{5})^2 + (\frac{12}{5})^2 = 4^2$.

3. **Úkol: Nalézt dvě čísla taková, aby čtverec nad každým z nich, sečten se zbývajícím číslem, dával čtverec**
Řešení:
Diofantos řeší soustavu podurčených rovnic $x^2 + y = z^2$ a $y^2 + x = w^2$. Předpokládá, že $y = 2x + 1$, a tedy $z = x + 1$. Druhá rovnice je $4x^2 + 4x + 1 = w^2$, kterou může řešit tak, že předpokládá $w = 2x - m$ pro libovolné m, které Diofantos volí rovno 2. Dostává tak řešení $x = \frac{3}{13}$ a $y = \frac{19}{13}$.
První číslo bude $x$, druhé $1 + 2x$, takže čtverec nad prvním, sečten

s druhým dává celkově čtverec. Je nutné, aby i čtverec nad druhým, sečten s prvním dával také čtverec. Jenže čtverec nad druhým, sečten s prvním dává $4x^2 + 5x + 1 = w^2$. Což se má rovnat čtverci. Takže vezmu čtverec nad stranou $2x - 2$. Čtverec sám bude tedy $4x^2 + 4 - 8x$. Dostaneme $\frac{3}{13}$. První číslo bude $\frac{3}{13}$, druhé $\frac{19}{13}$ a obě splňují požadavky úlohy.

- ***Aplikace Eukleidova algoritmu***

1. **Největší společný dělitel**
Určitě je vhodné použít jako příklad využití řecké matematiky výpočet největšího společného dělitele pomocí Eukleidova algoritmu a prvočíselného rozkladu jak bylo uvedeno v předchozí kapitole.

2. **Aplikace postupu Eukleidova algoritmu**
Jsou dána dvě nestejně velká čísla a odebírejme střídavě a opakovaně menší od většího. Pokud nikdy nedojdeme k tomu, že by zbývajícím číslem bylo měřeno číslo z předchozího kroku, dříve než se dospěje k jednotce, pak čísla daná na počátku jsou nesoudělná viz Eukledes (věta ze Základů VII,1).
Důkaz:
V celé Eukleidově aritmetice jsou čísla reprezentována pomocí úseček. Řekové nevyjadřovali čísla pomocí proměnných označených písmeny, protože písmena abecedy měla konkrétní číselné hodnoty. Pokud v důkazu není třeba dělit příslušné číslo na části, je úsečka pojmenovaná pomocí jednoho písmene, jako je tomu u čísla $E$. V opačném případě je označena svými krajními body, jako je tomu u čísla $AB$. Rozdělení čísla je pak znázorněno bodem a části nesou jména příslušných úseček, například $ZA, ZB$. V Eukleidových důkazech se nepoužívá toho, že se nějaký postup zastaví po n krocích jako dnes. Eukleidův postup se zastaví po nějakém konečném počtu kroků, který je však nutno chápat jako příklad jejich libovolného počtu. Algoritmus z důkazu této věty se zastaví po třech krocích, ale přitom je zřejmé, že celý postup důkazu je platný pro libovolný počet kroků.

Budeme předpokládat, že ze dvou čísel $AB$ a $\Gamma\Delta$ odebíráme střídavě a opakovaně menší od většího a zároveň výsledné číslo nikdy neměří číslo z předchozího kroku tak dlouho, dokud nedospějeme k jednotce. Tvrdíme, že čísla $AB$ a $\Gamma\Delta$ jsou nesoudělná, tj. čísla $AB$ a $\Gamma\Delta$ jsou měřena pouze jednotkou (viz def. VII,12).
Pokud by $AB$ a $\Gamma\Delta$ nebyla nesoudělná, muselo by ji měřit nějaké číslo. Nechť tedy měří a nechť je to $E$. Nechť $\Gamma\Delta$ měří $BZ$ a zbude přitom $ZA$ menší než $\Gamma\Delta$. $AZ$ nechť měří $\Delta H$ a zbude přitom $H\Gamma$ menší než $AZ$. $H\Gamma$ nechť měří $Z\Theta$ a zbude jednotka $\Theta A$.
$E$ tedy měří $\Gamma\Delta$ a $\Gamma\Delta$ měří $BZ$, pak $E$ měří i $BZ$. Měří však i celé $BA$, tj. bude měřit i zbytek $AZ$. Avšak $AZ$ měří $\Delta H$, a tak $E$ měří také $\Delta H$. Měří však i celé $\Delta\Gamma$, tj. bude měřit i zbytek $\Gamma H$. $\Gamma H$ měří $Z\Theta$, a tak měří $E$ rovněž $Z\Theta$, měří také celé $ZA$. A to znamená, že bude

měřit i zbylou jednotku $A\Theta$, přestože je číslem. To však není možné, čísla $AB$ a $\Gamma\Delta$ nejsou tedy měřena žádným číslem, tj. $AB$ a $\Gamma\Delta$ jsou tudíž nesoudělná (viz def. VII,12). Což se mělo dokázat.

3. **Nalezení největšího společného dělitele dvou soudělných čísel pomocí Eukleidova algoritmu**
   Jsou dána dvě čísla, která nejsou nesoudělná, a máme nalézt jejich největší společnou míru.
   Důkaz:
   Nechť $AB$ a $\Gamma\Delta$ jsou dvě daná čísla, která nejsou nesoudělná. Je nutné nalézt největší společnou míru $AB$ a $\Gamma\Delta$. Pokud tedy $\Gamma\Delta$ měří $AB$, pak měří i sama sebe, $\Gamma\Delta$ je tudíž společnou mírou $AB$ a $\Gamma\Delta$. A je zjevně i největší, protože žádné číslo větší než $\Gamma\Delta$ nebude měřit $\Gamma\Delta$. Jestliže však $\Gamma\Delta$ neměří $AB$, odebírejme z čísel $AB$ a $\Gamma\Delta$ střídavě a opakovaně menší od většího a bude nalezeno nějaké číslo, které bude měřit číslo z předchozího kroku. Nedospěje se totiž až k jednotce. Kdyby tomu tak nebylo, byla by čísla $AB$ a $\Gamma\Delta$ nesoudělná (viz VII,1). To se, ale nepředpokládalo. Nalezneme tedy nějaké číslo, které bude měřit číslo z předchozího kroku. Nechť $\Gamma\Delta$ měří číslo $BE$ a zbude přitom $EA$, menší než $\Gamma\Delta$, a nechť $EA$ měří $\Delta Z$ a zbude přitom $Z\Gamma$, menší než $EA$, a nechť $\Gamma Z$ měří $AE$. $\Gamma Z$ měří $AE$ a $AE$ měří číslo $\Delta Z$, pak $\Gamma Z$ měří $\Delta Z$. $\Gamma Z$ měří také sama sebe a bude měřit i celé $\Gamma\Delta$. Avšak $\Gamma\Delta$ měří $BE$, takže $\Gamma Z$ měří i $BE$. Měří však i $EA$, a proto bude měřit i celé $BA$. Měří však i $\Gamma\Delta$, takže $\Gamma Z$ měří $AB$ i $\Gamma\Delta$. $\Gamma Z$ je tedy společnou mírou $AB$ i $\Gamma\Delta$.
   Tvrdíme, že je rovněž mírou největší. V případě, že by $\Gamma Z$ nebylo největší společnou mírou čísel $AB$ a $\Gamma\Delta$, měřilo by čísla $AB$ a $\Gamma\Delta$ nějaké číslo, které by bylo větší než $\Gamma Z$. Nechť je tedy měří a je to $H$. $H$ měří $\Gamma\Delta$ a $\Gamma\Delta$ měří $BE$, tj. měří $H$ i $BE$. Měří, ale i celé $BA$, proto také měří i zbylé $AE$. $AE$ měří i $\Delta Z$, tj. $H$ měří i $\Delta Z$. Měří však i celé $\Delta\Gamma$, takže bude měřit i zbylé $\Gamma Z$, tj. větší bude měřit menší. To, ale není možné,tj. čísla $AB$ a $\Gamma\Delta$ nebudou měřena žádným číslem větším než $\Gamma Z$. $\Gamma Z$ je tím pádem největší společnou mírou čísel $AB$ a $\Gamma\Delta$, což se mělo dokázat.
   Důsledek:
   Pokud jsou dvě čísla měřena nějakým číslem, pak jím bude měřena i jejich největší společná míra. Což jsme chtěli dokázat.

4. **Archimédův problém dobytka**
   Zadání:
   „Řekni mi, příteli, přesně počet Heliova skotu. Pečlivě mi vypočítej, není-li ti moudrost cizí, kolik ho bylo, když se jednou pásl na nivách ostrova Sicílie, rozdělen do čtyř stád. Každé stádo bylo jinak zbarveno; první bylo mléčně bílé, ale druhé zářilo zcela tmavou černí. Třetí pak bylo hnědé, čtvrté strakaté; v každém měli býci v počtu velikou převa-

hu. A tito (býci) byli nyní v takovémto poměru: bílí se rovnali v počtu hnědým vzatým dohromady s třetinou a polovinou černých, ó příteli. Dále množství černých bylo rovno čtvrtině a pětině strakatých zvětšených o všechny hnědé. Nakonec musíš počet strakatých býků položit rovný, příteli, šestině a sedmině bílých s přičteným ještě množstvím hnědých.
Jak však tomu bylo s kravami: ty s bílou srstí byly rovny třetině a čtvrtině černého skotu, krav i býků. Dále černé krávy byly rovny čtvrtině a pětině strakatého stáda, když byli počítáni jak býci, tak krávy. Právě tak byly strakaté krávy pětina a šestina všeho (skotu) s hnědou srstí, když šel na pastvu. Nakonec hnědé krávy byly šestina a sedmina celého stáda s bílou srstí.
Můžeš-li mi říct přesně, můj příteli, kolik skotu tam bylo dohromady a také kolik bylo krav každé barvy a dobře živených býků, pak tě věru právem nazývají zdatným v počtech. Ještě tě však nepočítají k mudrcům; nuže, pojď tedy a řekni mi, jak se to má dále:
Když se spojil celkový počet černých a bílých býků, pak zde stáli uspořádáni stejně do šířky jako do hloubky; širé sicilské nivy byly zcela zaplněny tím množstvím býků. Když se však postavili dohromady hnědí a strakatí, pak byl vytvořen trojúhelník, jeden stál na špičce a nechyběl žádný z hnědých a strakatých býků, ještě se mezi nimi našel jeden jiné barvy.
Když jsi to také vypátral a v duchu pochopil a uvedeš mi poměr, příteli, který se nalézá v každém stádu, pak můžeš pyšně vykračovat jako vítěz, protože teď tvá vědecká sláva jasně září.“
Řešení:
Není těžké sestavit soustavu rovnic pro první část zadání.
Označení:
$B$ = počet bílých býků, $B^*$ = počet bílých krav,
$C$ = počet černých býků, $C^*$ = počet černých krav,
$S$ = počet strakatých býků, $S^*$ = počet strakatých krav,
$H$ = počet hnědých býků, $H^*$ = počet hnědých krav.
Takže první část zadání vede k této soustavě rovnic:

$$B = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})C + H,$$

$$C = (\frac{1}{4} + \frac{1}{5})S + H,$$

$$S = (\frac{1}{6} + \frac{1}{7})B + H,$$

$$B^* = (\frac{1}{3} + \frac{1}{4})(C + C^*),$$

$$C^* = (\frac{1}{4} + \frac{1}{5})(S + S^*),$$

$$S^* = (\frac{1}{5} + \frac{1}{6})(H + H^*),$$

$$H^* = (\frac{1}{6} + \frac{1}{7})(B + B^*).$$

Další část není úplně jasná. Podle textu, se kterým pracujeme bychom dostali tyto rovnice:
$B + C =$ čtvercové číslo,
$S + H + 1 =$ trojúhelníkové číslo,
Místo čtvercového čísla může být na pravé straně rovnice i obdélníkové číslo.
Místo druhé rovnice by se dala použít i tato: $S + H =$ trojúhelníkové číslo,
Úloha má v každém případě nekonečně mnoho řešení.
V jednodušším případě, kdy máme rovnici: $B+C =$ obdélníkové číslo, bude celkový počet skotu při nejmenším řešení přibližně roven $5,9 \cdot 10^{12}$ kusů.

- ***Aplikace řetězových zlomků***

1. **Zatmění Slunce**
   Za pomoci teorie řetězových zlomků. Již Babyloňané využívali aritmetická schémátka pro Zatmění Slunce. Tušili, že se opakuje s periodicitou.
   Řešení:
   Potřebujeme vědět, kdy proběhlo zatmění Slunce. Například vezmeme zatmění 11.8.1999. Je nutné, aby Měsíc zakryl Slunce. Musí být splněny dvě podmínky:
   a) Měsíc musí být v novu (je vidět pouze samá tma)
   b) Měsíc musí být v uzlovém bodě
   Nov nastane jednou za synodický měsíc - 29,530588853 dne. Drakonický měsíc 27,212220817 dne. Dáme obě čísla do zlomku
   $$\frac{27,...}{29,...} = \frac{n}{k}$$
   $$k \cdot 27,... = n \cdot 29,...$$
   Hledáme malá celá čísla. Využijeme řetězové zlomky.
   $$\frac{27,...}{29,...} = [0; 1, 11, 1, 2, 1, 4, 3, ...]$$
   konvergenty $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$ ←za jeden rok,$\frac{11}{12}, \frac{12}{13}, \frac{35}{38}$ ←příliš velká chyba,$\frac{47}{51}$, $\frac{223}{242}$ ←ideální liší se o pár hodin, 223 synodických měsíců (podělím 12),$\frac{716}{777}$. $223/12 = 18$ let 10 dní 8 hodin = právě $\frac{1}{3}$ (perioda „saros“).

2. **Metónův cyklus-Kalendář**
   Popisujeme zde návaznost na řetězové zlomky.
   V 5. století v Řecku neexistuje jednotný kalendář. Jsou vkládány dny do kalendáře tak, aby svátky a oběti připadli na zvolené dny. Řekové věděli, že rok má 12 měsíců, podle fází měsíce. Měsíc měl 29 až 30

dní, někdy bylo potřeba vložit dokonce 13. měsíc. Věděli, že měsíce řídí Měsíc a roky Slunce. Začali vznikat snahy na sjednocení kalendáře. Chtěli matematický řád, tj. snažili se o nalezení periody pohybu Slunce a Měsíce.
*Antické hodnoty*:
$p \cdot (29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{33})$ synodický měsíc (doba mezi dvěma fázemi Měsíce)
$= q \cdot (365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{300})$ solární měsíc jako 12-tina roku.
Periodu spočítáme pomocí malých celých čísel v čitateli i jmenovateli.
$\frac{syn}{sol} = [0; 1, 32, 1, 1, 3, ...]$ $\leftarrow$podělením a rozvinutím do řetězového zlomku.
Konvergenty:
$0, \frac{1}{1}$ $\leftarrow$velká chyba,$\frac{32}{33}, \frac{33}{34}, \frac{65}{67}, \frac{228}{235} = 19$ let, ... $\leftarrow$sejde se synodický a solární měsíc $228 \cdot syn, 235 \cdot sol$ a hledáme rozdíl mezi těmito hodnotami. Chceme rozdíl mezi těmito hodnotami v řádu hodin.
Chyba jaké se dopustíme:
-708 hodin, 21 hodin, -12 hodin, 9 hodin, -$2\frac{2}{3}$, 1,5 hodiny
Získali jsme periodu 19 let s nejlepší přesností, chyba je jen 1,5 hodiny. Takto fáze měsíce připadnou na stejný den v roce, tj. spojuje solární a lunární kalendář. Arabové dnes používají lunární kalendář, tj. islámský kalendář. Metón ještě s jedním řeckým astronomem 432 př. Kristem v Athénách stály u zrodu empirického kalendáře - ten znali již Babyloňané.

## 2.2 Různé typy důkazu iracionality odmocniny ze dvou

1. ***Klasický středoškolský důkaz pro odmocninu ze dvou***

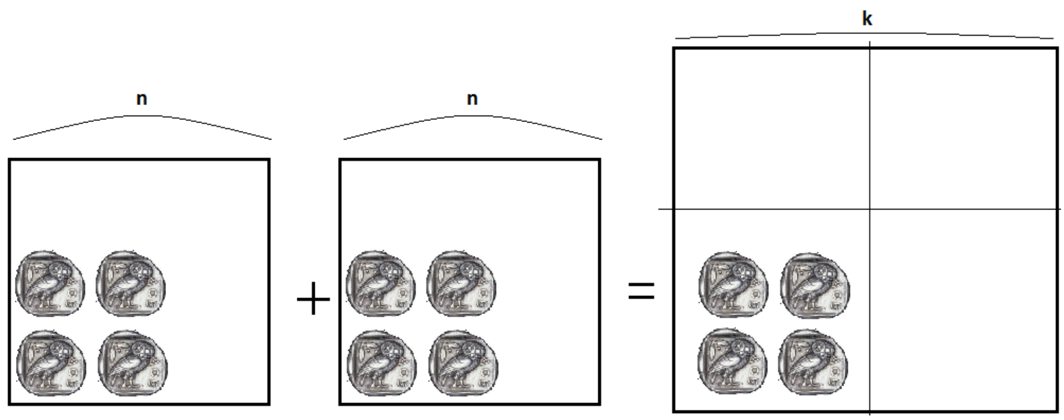
   Předpokládá se, že $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, kde $NSD(p, q) = 1$.
   Pak platí, že $2q^2 = p^2$, tj. $p = 2k$ (odsud je vidět, že $p$ je sudé) a $2q^2 = 4k^2$.
   Dále vidíme, že $q^2 = 2k^2$, pak tedy $q = 2s$ ($q$ je odsud také sudé).
   Což je spor s nesoudělností čísel $p, q$.

2. ***Důkaz z Eukleidových Základů***

   Zde předvedeme ekvivalentní důkaz odmocniny ze dvou, pouze provedený geometricky. Jedná se o nepřímý důkaz, který je založen na následující úvaze. Máme čtverec o straně $n$ a úhlopříčce $k$. Čísla $n, k$ jsou nesoudělná. Pak podle Pythagorovy věty platí, že $k^2 = 2n^2$, protože je pravá strana dělitelná dvěma, pak musí být $k^2$ sudé číslo, tj. $k$ je sudé číslo. Z předpokladu, že jsou $n, k$ nesoudělná musí být $n$ liché číslo. Z poznatku, že číslo $k$ je sudé víme, že čtverec $k^2$ je dělitelný čtyřmi, tj. i pravá strana je dělitelná čtyřmi. Což je spor s tím, že jsme předpokládali, že $n$ je liché číslo. Odsud tedy vyplývá, že $\sqrt{2}$ nemůže být vyjádřena číslem, tj. podle pythagorejců může být znázorněna usečkou, ale nemůže být znázorněna body.

3. ***Důkaz pomocí figurálních čísel***

Budeme předpokládat, že strana čtverce měří $n$ jednotek a úhlopříčka $k$ jednotek. Jednotka bude zvolena jako co největší, aby nemohla být čísla $n, k$ současně sudá. $n^2 + n^2 = k^2$ je Pythagorejská trojice $(n, n, k)$, to znázorníme pomocí čtvercových čísel. Protože $k^2$ je sudé (součet dvou stejných čísel), pak je i $k$ sudé. Odsud vyplývá, že čtvercové číslo $k^2$ je možné rozdělit jak vodorovně, tak svisle díky tomu, že je sudé. Odsud je pak jasné, že číslo $n^2$ je sudé a tedy i číslo $n$ je sudé. Což je spor s předpokladem.




Obrázek 13 — důkaz pomocí figurálních čísel

Jak vidíme z obrázku 13 pro nesoudělná přirozená čísla $n, k$ nemůže platit, že:

$$n^2 + n^2 = k^2.$$

4. ***Důkaz založený na přibližné metodě výpočtu odmocniny***

Právě Archytas se snažil nalézt druhou odmocninu ze dvou, jenž netvoří úplný čtverec. Aby dokázal iracionalitu $\sqrt{2}$, rozkládá toto číslo pod odmocninou na dva různé činitele, například $2 = 2 \cdot 1$. Dále určuje aritmetický a harmonický průměr obou činitelů, zde to bude $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$ a sestrojí z těchto čtyř čísel „hudební úměru", tj. $2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3} : 1$. Součin středních členů se rovná číslu 2 a rozdíl $\frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{1}{6}$ je menší než rozdíl $2 - 1 = 1$, tj. $\frac{3}{2}$ a $\frac{4}{3}$ je možné považovat za přibližné hodnoty $\sqrt{2}$, první s přebytkem druhou s nedostatkem. Tento postup je možné dále opakovat, dále bychom dostali $\frac{17}{12}$ a $\frac{24}{17}$, jenž se od sebe liší o $\frac{1}{204}$ atd (viz Kolman, Dějiny matematiky ve starověku).

Vidíme, že je zde použit podobný postup jako při výpočtu pomocí řetězových zlomků. Také, zde vlastně dostáváme jednotlivé konvergenty pro odmocninu ze dvou. Archytův postup nám naznačuje, že nejspíš opravdu měli Řekové spisy Babyloňanů a pomocí nich se snažili vyřešit i tak závažné

problémy jako byla iracionalita odmocniny ze dvou.
Z Archytových matematických spisů se nám bohužel dochovaly pouze zlomky. Právě v nich je, ale důkaz, že mezi dvě veličiny, které jsou v poměru $n : (n+1)$, nemůžeme již nic dalšího vložit, tj. výraz $\sqrt{n \cdot (n+1)}$ nelze vyjádřit racionálním číslem.

5. ***Důkaz pomocí poměru a vložení něčeho mezi dvě čísla***

Jak jsme ukázali v části poměrů a úměr můžeme provést důkaz iracionality odmocniny ze dvou takto:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, a > b$$

$$b^2, ab, a^2$$

máme tedy poměr $1 : 2$ a mělo by být možné něco vložit mezi 1 a 2, což nejde.

# Závěr

Tato bakalářská práce je zaměřena na vývoj matematiky ve starém Řecku, konkrétně na teorii čísel.

Cílem této práce bylo srozumitelně, přehledně a kultivovaně sepsat číselně teoretická bádání ve starém Řecku v období přibližně od 6. století př. Kr. do 4. století po Kr. Také jsme se snažili o využití těchto poznatků při dosavadní výuce a srovnání metod pro hledání největšího společného dělitele. Je nutné si uvědomit, že mnoho z řeckých poznatků a nápadů je buď používáno dodnes jako Eratosthenovo síto, Eukleidův algoritmus atd. nebo inspirovaly další matematiky v jejich bádání a zdokonalování, jako například u dokonalých čísel pro ucelení celkového obrazu dnešní matematiky. Najdeme, zde také řetězové zlomky, které znali již staří Babyloňané a užívali je pro zjištění periody zatmění Slunce a dalších velice pěkných věcí. Snažíme se také jednotlivá témata doprovodit příklady a obrázky pro lepší pochopení a oživení výuky matematiky na školách. Tato práce se tedy snaží o využití matematických poznatků ze starého Řecka, jejich ucelení, doplnění a obohacení výuky (například soubor *animace.gif* na CD) proto, abychom zavedli na středních školách více názorných ukázek jak využít poznatky z matematiky například pro sestavení kalendáře. Také se snažíme o zdokonalení určování vlastností z obrázků a také zlepšení abstraktního myšlení. Řekové byli na svou dobu velice vyspělí a proto je určitě dobré, když jejich poznatky neupadnou v zapomnění.

***Možné rozšíření práce:***

Další vývoj či rozšíření se může ubírat několika směry:

- **Rozšíření o řecké poznatky z geometrie** v tomto období.
- **Aplikace**, tj. podrobně probrat další možné aplikace jednotlivých témat.
- **Zvýraznění dosažených poznatků pomocí nových technologií**, tj. například vytvoření různých animací a dalších věcí použitelných při výuce.

# Seznam použité literatury

[1] Jindřich Bečvář. Přednáška: *Dějiny matematiky I.*

[2] Jindřich Bečvář: *Hrdinský věk řecké matematiky I.*, in J. Bečvář, E. Fuchs. *Historie matematiky. I.* Brno: JČMF, 1993

[3] Jindřich Bečvář: *Hrdinský věk řecké matematiky II.*, in J. Bečvář, E. Fuchs. *Historie matematiky. II.* Praha: Prometheus, 1997

[4] Arnošt Kolman. *Dějiny matematiky ve starověku.* Praha: Academia, 1969.

[5] Eukleides. *Eukleidovy Základy (Elementa).* Přeložil: František Servít Praha: Nákladem Jednoty českých matematiků - Tiskem Alberta Malíře na Král. Vinohradech, 1907.

[6] Julian Havil. *The Irrationals.* United States of America: Princeton University Press, 2012.

[7] Zbyněk Šír. *Řecké matematické texty.* Praha: OIKOYMENH, 2011.

[8] Karel Mačák. *Tři středověké sbírky matematických úloh. Alkuin, Métrodóros, Abú Kámil.* Praha: Prometheus, 2001.

[9] Viz http://www.karlin.mff.cuni.cz/ becvar/pgs/recko.pdf

# Přílohy

**Obsah CD:**
Na přiloženém disku se nachází:

- Tato práce ve formátu PDF: BP/documents
- Animace figurálních čísel („animace.gif“): BP/others