Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Věra Kuběnová

Užitkové funkce a modelování vztahu k riziku

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa

Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

2006

Chtěla bych poděkovat RNDr. Ing. Milošovi Kopovi za zajímavé náměty a připomínky při zpracování této práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 24.5.2006 Věra Kuběnová

Obsah

Název práce: Užitkové funkce a modelování vztahu k riziku
Autor: Věra Kuběnová
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa
e-mail vedoucího: kopa@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci se zabýváme problematikou užitkových funkcí. V první a druhé kapitole vysvětlujeme teorii k tomuto tématu, zvláště pak vztah užitkových funkcí a míry rizikové averze. První kapitola vysvětluje souvislost mezi očekávaným užitkem a užitkovou funkcí a dále pojednává o dvou možných způsobech klasifikace užitkových funkcí. Druhá kapitola vychází z pojmu rizikové prémie. Na základě rizikové prémie zavádíme definici Arrow-Prattovy míry absolutní (relativní) rizikové averze. Dále jsou zde uvedeny vztahy mezi charakteristikami postoje investora vůči riziku. Ve třetí kapitole převádíme teoretické poznatky v praktický příklad. Na základě hodnot pojišťovací prémie se zde snažíme pro rizikově averzního investora odhadnout pomocí regresního modelu parametry jeho užitkové funkce a provádíme její konstrukci.

Klíčová slova: užitková funkce, míra rizikové averze, riziková prémie

Title: Utility functions and risk attitude
Author: Věra Kuběnová
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Ing. Miloš Kopa
Supervisor's e-mail address: kopa@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In this work we study the issue of utility functions. We deal with the theory of utility functions in the first and second chapter. In particular, there is the relationship between utility functions and measure of risk aversion. The first chapter recalls the relationship between expected utility and utility function and presents two types of classification of utility functions. The second chapter analyzes risk premiums and Arrow-Pratt´s measure of risk aversion. In the third chapter, the theoretical results are applied to numerical example of construction of a utility function. We estimate the utility function through a regression model.

Keywords: utility function, measure of risk aversion, risk premium

Úvod

Hlavním předmětem této práce je studie teorie týkající se užitkových funkcí. Užitkové funkce vznikly jako nástroj pro modelování různých mikroekonomických situací. Za standardní základ mikroekonomie jsou považovány preference investora a je obvyklé je znázorňovat pomocí užitkové funkce. V praxi se setkáváme s užitkovou funkcí např. při modelování finančního trhu, při optimalizaci investiční strategie a podobně.

Maximalizací očekávaného užitku se zabývali např. John von Neumann a Oskar Morgenstern při formulaci jejich teorie her a při zkoumání ekonomického chování subjektu při riziku.

Tato práce začíná objasněním vztahu mezi užitkem a užitkovou funkcí právě na základě von Neumannovy-Morgensternovy hypotézy očekávaného užitku. Dále jsou uvedeny některé druhy klasifikace užitkových funkcí a je podáno vysvětlení, v čem tyto klasifikace spočívají. Dalším důležitým předmětem této práce je postoj investora k riziku a vztah mezi tímto postojem a tvarem jeho užitkové funkce. Ve druhé kapitole je zadefinován pojem rizikové prémie a následně i míra absolutní (i relativní) rizikové averze. Tato práce dále pojednává o vztahu charakteristik chování dvou investorů na stejné hladině bohatství. Jsou zde uvedeny všechny možné tvary užitkových funkcí při konstantní míře absolutní (i relativní) rizikové averze.

V poslední kapitole se zabýváme modelováním užitkové funkce pro rizikově averzního investora. Vycházíme z hodnot pojišťovací prémie, ze kterých vypočteme hodnoty míry absolutní rizikové averze. Pomocí regresního modelu a odhadu parametrů metodou nejmenších čtverců pak získáme křivku míry absolutní rizikové averze a z ní tvar užitkové funkce investora. V této souvislosti je zde zmíněná speciální třída užitkových funkcí s hyperbolickou mírou absolutní rizikové averze, tzv. HARA funkce.

Kapitola 1

Užitková funkce

1.1 Vztah užitkové funkce a užitku

Funkci vyjadřující vztah mezi užitkem, tj. subjektivní hodnotou, a hodnotou majetku říkáme užitková funkce. Křivka znázorňující tuto funkci odráží postoj rozhodovatele k riziku. Všichni racionální investoři dávají za jinak stejných podmínek přednost většímu bohatství před menším bohatstvím, a proto je jejich užitková funkce neklesající.

Začneme samotným zadefinováním pojmu "užitková funkce" podle [2].

Definice 1:

Nechť I je interval z R. Potom spojitou, neklesající funkci $u : I \to R$ přiřazující bohatství investora užitek, který z něho má, nazýváme užitkovou funkcí.

Souvislost mezi užitkovou funkcí a užitkem vysvětluje von Neumannova-Morgensternova hypotéza očekávaného užitku (hypotéza je uvedena např. v [4]). V té se tvrdí, že očekávaný užitek ze hry může být zapsán jako $U = \sum_{x \in supp(p)} p(x)u(x)$, kde $u : X \to R$ značí von Neumannovu-Morgensternovu užitkovou funkci a $supp(p)$ je nosičem pravděpodobnostní míry p. Aplikace této hypotézy se využívají především při řešení ekonomických problémů, jako jsou například optimalizace portfólia, pojištění atd. Tyto aplikace používají modely, kde výstupem je užitek z investice.

Výsledek hry je možné modelovat náhodnou veličinou ω nabývající hodnot z R s pravděpodobnostním rozdělením P_ω a distribuční funkcí

$F_\omega(x) = P(\omega \leq x)$. V důsledku toho může být rozhodování mezi dvěma hrami považováno za rozhodování mezi dvěma pravděpodobnostními rozděleními, tj. mezi různými F_ω. Jestliže se na funkci očekávaného užitku $U(F_\omega) = \int_R u(x)dF_\omega(x)$ pohlíží jako na funkci pravděpodobnostního rozdělení P_ω, pak říkáme, že hra ω_1 je preferována před ω_2 tehdy a jen tehdy, jestliže $U(F_{\omega_1}) \geq U(F_{\omega_2})$. Přirozeně z toho vyplývá, že pokud ω nabývá pouze konečně mnoha hodnot, potom ω má diskrétní pravděpodobnostní rozdělení a dostáváme vyjádření $U(F_\omega) = \sum_x p(x)u(x)$.

1.2 Klasifikace užitkových funkcí

Užitkové funkce klasifikujeme na základě jejich vlastností např. podle [2] následujícími způsoby:

- podle změn preferencí investora mezi dvěma hrami při vzrůstajícím majetku,
- podle míry rizikové averze.

Změnu preferencí můžeme například pozorovat při rozhodování hráče mezi nějakou hrou A a hrou B. Nechť hráč na hladině svého bohatství W dá přednost hře A před B. Zvýšíme-li jeho bohatství o nějakou deterministickou hodnotu X, může nastat změna jeho preferencí a tedy upřednostní nyní hru B před A. Při další změně majetku se mohou jeho preference tzv. přesunout zpátky. Před následující definicí ještě zavedeme značení a vysvětlíme základní pojmy. Označme W počáteční majetek investora, t.j. majetek před hrou. V souladu se značením v [2] je výsledek hry modelovaný náhodnou veličinou ω. Jestliže konečný majetek (t.j. majetek po hře) je popsán výrazem $W + \omega$, jedná se o tzv. aditivní přístup ke hře. Zavedeme nyní podle [2] definici pro n změn preferencí investora mezi dvěma hrami.

Definice 2:

Nechť $u(x)$ je funkce s definičním oborem, tvořeným intervalem $I \subseteq R$ a uvažujeme aditivní přístup ke hře. Potom $u(x)$ je funkce s $n \geq 1$ změnami, jestliže pro každé dvě hry ω, ε lze definiční obor $u(x)$ rozdělit na maximálně $n+1$ disjunktních otevřených intervalů I_j, $j = 1, 2, \ldots, n+1$ tak, že jsou splněné obě následující podmínky:

- *$\bigcup_{j=1}^{n+1} \overline{I_j} = I$, kde $\overline{I_j}$ je uzávěr intervalu I_j,*
- *pro každé $j = 1, 2, \dots, n$ platí:*

$$[Eu(x_{j+1} + \omega) - Eu(x_{j+1} + \varepsilon)] \cdot [Eu(x_j + \omega) - Eu(x_j + \varepsilon)] < 0,$$

pro libovolné $x_j \in I_j$ takové, že všechny uvažované střední hodnoty existují.

Změnu preferencí pozorujeme například při loterii, kde za malou část svého bohatství může hráč mnoho získat. Zisk v loterii nastává s velice malou pravděpodobností, tedy střední hodnota čisté výhry je záporná. Stejný investor tedy na nějaké hladině bohatství W_1 riziko vyhledává, ale na jiné hladině W_2 může být vůči riziku averzní. Hráč loterie s malým majetkem ochotně riskuje ve hře s možností malé ztráty, kde na druhou stranu je i možnost vysoké výhry. Když se mu pak povede vyhrát a hladina jeho bohatství se o mnoho zvýší, už na hru nepřistoupí, protože střední hodnota čisté výhry je záporná a jeho postoj k riziku se změnil v důsledku změny W. Případná další výhra už mu nepřinese takový užitek jako výhra první.

Podle sklonu investora k riziku rozlišujeme následující tři typy chování (podle [2]).

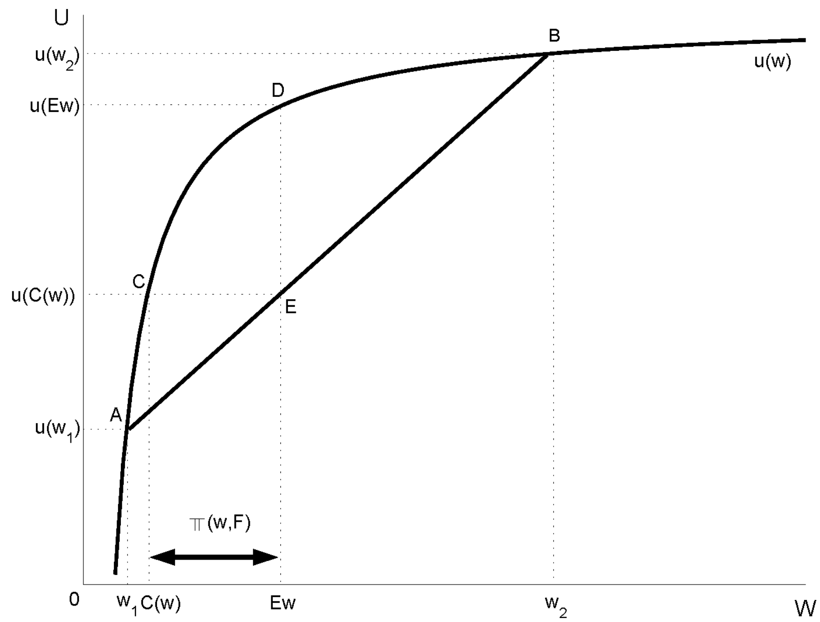
Definice 3:

Nechť $u : I \to R$ je užitková funkce na intervalu $I \subseteq R$. Nechť W je hladina bohatství investora a nechť vhodná hra ω, s rozdělením P, je náhodná veličina, pro kterou existují střední hodnoty $Eu(W + \omega)$, $E\omega$.

1. *Jestliže pro každou vhodnou hru platí $Eu(W+\omega) < u(W+E\omega)$, pak investor s touto užitkovou funkcí je rizikově averzní na hladině bohatství W.*

2. *Jestliže pro každou vhodnou hru platí $Eu(W + \omega) > u(W + E\omega)$, pak investor s touto užitkovou funkcí je investorem vyhledávajícím riziko na hladině bohatství W.*

3. *Jestliže pro každou vhodnou hru platí $Eu(W + \omega) = u(W + E\omega)$, pak investor s touto užitkovou funkcí je rizikově neutrální na hladině bohatství W.*



Obrázek 1.1: Užitková funkce a její základní vlastnosti pro hru w

Riziková averze tedy intuitivně naznačuje, že v situaci, kdy si investor vybírá mezi dvěma investicemi se srovnatelnými očekávanými výnosy, dá přednost té, která nese menší riziko. Problém si můžeme představit s pomocí předcházejícího obrázku 1.1 užitkové funkce.

Zde budeme modelovat hru náhodnou veličinou w a počáteční majetek investora položíme roven nule. Nechť w je tedy náhodná veličina, která může nabývat dvou hodnot $\mathsf{w}_1, \mathsf{w}_2$, a nechť p je pravděpodobnost, že nastane w_1, a $1-p$ je pravděpodobnost, že nastane w_2. Tedy střední hodnota očekávaného zisku je $E\,\mathsf{w} = p\,\mathsf{w}_1 + (1-p)\mathsf{w}_2$. Nechť $u : I \to R$ je konkávní užitková funkce zobrazená na obrázku 1.1. Očekávaný užitek $Eu(\mathsf{w}) = pu(\mathsf{w}_1) + (1-p)u(\mathsf{w}_2)$ je znázorněn bodem E na úsečce spojující bod $A = \{\mathsf{w}_1, u(\mathsf{w}_1)\}$ a bod $B = \{\mathsf{w}_2, u(\mathsf{w}_2)\}$. Pozice bodu E na úsečce $\overline{AB}$ je závislá na pravděpodobnostech $p, 1-p$.

Porovnáním pozice bodu D a bodu E na obrázku 1.1 dostáváme, že z konkávní užitkové funkce vyplývá nerovnost $u(E\,\mathsf{w}) > Eu(\mathsf{w})$, tedy užitek z očekávaného příjmu je větší než očekávaný užitek. Tato nerovnost lze vyjádřit rovněž následujícím způsobem:

$$u[p\,\mathsf{w}_1 + (1-p)\mathsf{w}_2] > pu(\mathsf{w}_1) + (1-p)u(\mathsf{w}_2).$$

U rizikově averzního investora každá další koruna z výnosu představuje stále klesající užitek. Jestliže první koruna výnosu představuje jednotku užitku, druhá koruna výnosu odpovídá užitku nižšímu než jednotka atd., je jeho užitková funkce konkávní. U rizikově neutrálního investora každá dodatečná koruna výnosu představuje stejné dodatečné množství užitku, čemuž odpovídá lineární užitková funkce. U investora vyhledávajícího riziko každá dodatečná koruna výnosu představuje stále vyšší dodatečné množství užitku a užitková funkce je konvexní.

Ze závislosti nerovností na hladině bohatství vyplývá, že jsme zde definovali pouze lokální vlastnost investora. Následující definice prezentuje analogickou globální vlastnost.

Definice 4:

Investor se nazývá globálně rizikově averzní (resp. neutrální, vyhledávající riziko), jestliže je rizikově averzní (resp. neutrální, vyhledávající riziko) na všech hladinách bohatství W.

A tedy dostáváme, že postoj investora vůči riziku je závislý pouze na jeho užitkové funkci a ne na zvolené hře.

Definice 5:

Funkci $u : I \to R$ nazýváme funkcí konkávní na intervalu I tehdy a jen tehdy, když pro libovolné $\alpha \in (0,1)$ a $x_1, x_2 \in I$ platí:

$$u(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha u(x_1) + (1-\alpha)u(x_2).$$

Funkci $u : I \to R$ nazýváme funkcí konvexní na intervalu I tehdy a jen tehdy, když pro libovolné $\alpha \in (0,1)$ a $x_1, x_2 \in I$ platí:

$$u(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha u(x_1) + (1-\alpha)u(x_2).$$

Jestliže do předchozích vzorců dosadíme ostré nerovnosti, dostaneme definici striktně konkávní resp. striktně konvexní funkce u pro libovolné $\alpha \in (0,1)$, $x_1, x_2 \in I$, kde $x_1 \neq x_2$.

Tuto definici konvexnosti resp. konkávnosti funkce použijeme následně v kontextu užitkové funkce v tvrzení následující věty, viz [2].

Věta 1:

Nechť $u : I \to R$ je užitková funkce investora. Potom investor je

1. *globálně rizikově averzní tehdy a jen tehdy, když jeho užitková funkce je striktně konkávní na intervalu I,*
2. *globálně rizikově neutrální tehdy a jen tehdy, když jeho užitková funkce je lineární na intervalu I,*
3. *globálně vyhledávající riziko tehdy a jen tehdy, když jeho užitková funkce je striktně konvexní na intervalu I.*

Důkaz: Podle [2]

1) Nechť u je striktně konkávní funkce. Potom pro libovolné W a pro každou vhodnou hru ω plyne z Jensenovy nerovnosti $Eu(W+\omega) < u(E[W+\omega])$. A tedy, podle definice 3 a definice 4, investor s užitkovou funkcí u je globálně rizikově averzní.

Naopak budeme uvažovat jednoduchou spravedlivou hru takovou, že $\omega = \alpha x$ s pravděpodobností $1-\alpha$ a $\omega = -(1-\alpha)x$ s pravděpodobností α pro libovolné W, x a $\alpha \in (0,1)$. Pak pro užitkovou funkci u globálně rizikově averzního investora platí $u(W) > Eu(W+\omega) = \alpha u[W-(1-\alpha)x] + (1-\alpha)u(W+\alpha x)$. Vzhledem k tomu, že $W = \alpha[W-(1-\alpha)x] + (1-\alpha)(W+\alpha x)$, z předchozí nerovnosti plyne striktní konkávnost užitkové funkce u.

2) Nechť u je lineární funkce. Pro libovolnou vhodnou hru ω a pro libovolnou hladinu bohatství W tedy z linearity střední hodnoty plyne rovnost $Eu(W+\omega) = u(W+E\omega)$ a tedy investor s touto užitkovou funkcí je globálně rizikově neutrální.

Naopak, je-li investor rizikově neutrální, a tedy pro jeho užitkovou funkci platí z definice rovnost $Eu(W+\omega) = u(W+E\omega)$, pak při stejné spravedlivé hře jako v 1) a pro libovolné W, x a $\alpha \in (0,1)$ dostáváme rovnost

$u(W) = Eu(W+\omega) = \alpha u[W-(1-\alpha)x] + (1-\alpha)u(W+\alpha x)$, takže užitková funkce u je lineární.

3) Nechť u je striktně konvexní funkce. Při důkazu budeme uvažovat funkci $-u$, která je tedy striktně konkávní. Pro striktně konkávní funkce už jsme ale požadovanou ekvivalenci dokázali v 1), a tedy i tvrzení 3) platí.

$\blacksquare$

Kapitola 2

Riziková prémie a míra rizikové averze

2.1 Riziková prémie

Nadále budeme uvažovat investora s majetkem W a s užitkovou funkcí u a ω bude představovat náhodnou veličinu s konečnou střední hodnotou a s distribuční funkcí F_ω.

Definice 6:

Nechť investor má užitkovou funkci u a bohatství W. Nechť střední hodnota $Eu(W+\omega)$ existuje. Potom existuje riziková prémie $\pi(W, F_\omega)$, kterou definujeme vztahem $u(W + E\omega - \pi(W, F_\omega)) = Eu(W + \omega)$.

Grafické znázornění rizikové prémie pro konkávní užitkovou funkci je pro přesnější představu uvedeno na obrázku 1.1. Význam rizikové prémie je v praxi tedy takový, že investor bude lhostejný vůči výběru mezi možností hrát hru s distribuční funkcí F_ω a možností získat s jistotou částku $E\omega - \pi(W, F_\omega)$. Obě možnosti mu přinesou stejný užitek.

Jak je z definice zřejmé, riziková prémie závisí na bohatství W a na distribuční funkci F_ω. Z definice okamžitě plyne rovnost $\pi(W, \omega) = \pi(W+\delta, \omega-\delta)$ pro každou konstantu δ. Jestliže položíme $\delta = E\omega$, za předpokladu konečnosti $E\omega$, můžeme nadále uvažovat pouze hru $\omega-\delta$, pro kterou platí $E(\omega-\delta) = 0$, a tudíž je to hra spravedlivá.

Tedy investor je neutrální mezi možností zúčastnit se hry ω a možností získat částku $\pi_a(W, F_\omega) = E\omega - \pi(W, F_\omega)$. Tato částka se většinou nazývá peněžní ekvivalent a je to nejmenší částka, za kterou by byl investor ochotný prodat svou možnost účasti ve hře ω. Částka $\pi_a(W, F_\omega)$ je tedy definována vztahem $u(W + \pi_a(W, F_\omega)) = Eu(W + \omega)$. Na obrázku 1.1 je tato hodnota označena písmeny $C(\mathsf{w})$ na ose W.

Dále rozlišujeme ještě hodnotu $\pi_b(W, F_\omega)$. Takto označujeme největší částku, kterou by byl investor ochotný zaplatit, aby získal možnost zúčastnit se hry ω. Částka je tedy definována rovnicí $u(W) = Eu(W + \omega - \pi_b(W, F_\omega))$.

Poslední zvažovanou částkou v této souvislosti je pojišťovací prémie $\pi_I(W, F_\omega)$ a to v případě nepříznivé hry ω, která hrozí ztrátou. Takže investor je lhostejný ve volbě mezi účastí ve hře ω a mezi zaplacením částky $\pi_I(W, F_\omega)$. Zaplacení $\pi_a(W, F_\omega)$ je stejné jako získání $\pi_I(W, F_\omega)$, takže máme rovnost $\pi_I(W, F_\omega) = -\pi_a(W, F_\omega) = \pi(W, F_\omega) - E\omega$. Jestliže ω představuje spravedlivou hru, potom riziková prémie a pojišťovací prémie splývají.

Poznamenejme na závěr, že odvození všech výše uvedených hodnot $\pi_*(W, F_\omega)$ je založeno na pojmu rizikové prémie. Ekvivalentně bychom mohli tyto hodnoty definovat i při vycházení z pojmů peněžního ekvivalentu nebo pojišťovací prémie.

2.2 Lokální riziková averze

Abychom mohli změřit investorovu lokální averzi vůči riziku, budeme uvažovat rizikovou prémii pro spravedlivou hru ω, která nese pouze malé riziko. Nechť tedy pro hru ω platí $E\omega = 0$ a její rozptyl σ_ω^2 je dostatečně malý.

Při předpokladu, že třetí absolutní centrální moment ω je menšího řádu než σ_ω^2, získáváme na nějakém otevřeném okolí bodu W za vhodných podmínek na u pomocí Taylorova rozvoje následující rovnice:

$$
\begin{aligned}
u(W - \pi) &= u(W) - \pi u'(W) + O(\pi^2) \\
Eu(W + \omega) &= E[u(W) + \omega u'(W) + \frac{1}{2}\omega^2 u''(W) + O(\omega^3)] \\
&= u(W) + \frac{1}{2}\sigma_\omega^2 u''(W) + o(\sigma_\omega^2).
\end{aligned}
$$

Nyní podle definice rizikové prémie položíme výrazy do rovnosti a dostaneme rovnici

$$\pi(W, F_\omega) = -\frac{1}{2}\sigma_\omega^2 \frac{u''(W)}{u'(W)} + o(\sigma_\omega^2).$$

To nás vede k následující definici podle [3].

Definice 7:

Nechť u je užitková funkce investora, která je rostoucí a dvakrát diferencovatelná na intervalu I. Potom funkce $r(W)$ s definičním oborem I, pro kterou platí:

$$r(W) = -\frac{u''(W)}{u'(W)} = -\frac{d}{dW}\log u'(W)$$

se nazývá míra absolutní rizikové averze anebo Arrow-Prattova absolutně rizikově averzní míra.

Ze způsobu odvození dostáváme lokální rizikovou averzi v okolí bodu W. Nyní si ukážeme, že předpoklad spravedlivosti hry není nikterak omezující. Položme $\mu = E\omega$. Pokud u je třikrát spojitě diferencovatelná máme $\pi(W, F_\omega) = \frac{1}{2}\sigma_\omega^2 r(W + \mu) + o(\sigma_\omega^2)$. Tudíž riziková prémie pro hru ω s libovolnou střední hodnotou $E\omega$ a malým rozptylem je přibližně $\frac{1}{2}\sigma_\omega^2 r(W + E\omega)$.

Z definice Arrow-Prattovy absolutně rizikově averzní míry r vyplývají následující vztahy mezi postojem investora k riziku a znaménkem r na okolí nějakého bodu W:

- $r(W) > 0$ pro lokálně rizikově averzního investora,
- $r(W) = 0$ pro lokálně rizikově neutrálního investora,
- $r(W) < 0$ pro lokálně rizikově vyhledávajícího investora.

Jiné odvození r vychází ze speciálního případu, kde $\omega = \pm t$, to znamená, že při hře ω lze získat nebo ztratit pouze pevně určené bohatství $t > 0$. Taková hra je spravedlivá, právě když získání $+t$ nebo $-t$ má stejnou pravděpodobnost.

V obecnosti můžeme zavést pravděpodobnostní prémii hry ω jako $p(W, t) = P(\omega = t) - P(\omega = -t)$, kde investor je lhostejný mezi neměnným stavem svého bohatství a možností hrát hru ω. Potom vzhledem k tomu, že $P(\omega = t) + P(\omega = -t) = 1$, dostaneme:

$$
\begin{aligned}
P(\omega = t) &= \frac{1}{2}[1 + p(W,t)], \\
P(\omega = -t) &= \frac{1}{2}[1 - p(W,t)]
\end{aligned}
$$

a tedy $p\,(W,t)$ dle definice vyhovuje rovnici:

$$u(W) = E[u(W+\omega)] = \frac{1}{2}[1 + p(W,t)]u(W+t) + \frac{1}{2}[1 - p(W,t)]u(W-t).$$

Na okolí W opět funkci u přepíšeme pomocí Taylorova rozvoje jako $u(W) = u(W) + tp(W,t)u'(W) + \frac{1}{2}t^2u''(W) + O(t^3)$. Položíme obě vyjádření $u(W)$ do rovnosti a vyřešením pro $p(W,t)$ dostaneme $p(W,t) = \frac{1}{2}tr(W) + O(t^2)$, kde t musí být dostatečně malé tak, že $O(t^2)$ je zanedbatelné.

Tímto způsobem může být $r(W)$ interpretováno jako míra lokální rizikové averze anebo jako lokální sklon k pojištění při bohatství W a užitkové funkci u.

Dále se budeme zabývat porovnáním míry rizikové averze u dvou různých investorů. Nechť u_1 a u_2 jsou užitkové funkce těchto investorů s příslušnými mírami absolutní rizikové averze r_1 a r_2.

Definice 8:

Nechť u_1, u_2 jsou užitkové funkce dvou investorů a r_1, r_2 jsou příslušné míry absolutní rizikové averze. Pokud v nějakém bodě W platí nerovnost

$$r_1(W) > r_2(W),$$

potom u_1 je lokálně více rizikově averzní než u_2 v bodě W.

Vztahy mezi charakteristikami chování dvou investorů vyjadřuje následující věta (viz [3]).

Věta 2:

Nechť $r_i(x)$, $\pi_i(x, F_\omega)$ a $p_i(x)$ jsou lokálně rizikově averzní míry, rizikové prémie a pravděpodobnostní prémie odpovídající užitkovým funkcím u_i, kde $i = 1, 2$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní, a to i v silnější podobě uvedené v hranatých závorkách:

(a) $r_1(x) \geq r_2(x)$ *pro všechna* x *[*$a >$ *pro nejméně jedno* x *v každém intervalu],*

(b) $\pi_1(x, F_\omega) \geq [>] \pi_2(x, F_\omega)$ *pro všechna* x *a* ω*,*

(c) $p_1(x,t) \geq [>] p_2(x,t)$ *pro všechna* x *a všechna* $t > 0$*,*

(d) $u_1(u_2^{-1}(s))$ *je [striktně] konkávní funkcí* s*,*

(e)
$$\frac{u_1(y) - u_1(x)}{u_1(w) - u_1(v)} \leq [<] \frac{u_2(y) - u_2(x)}{u_2(w) - u_2(v)}$$
pro všechna v*,* w*,* x*,* y*, pro která platí* $v < w \leq x < y$*.*

Stejné ekvivalence platí při restrikci na nějaký interval I*, přidáme-li podmínky, že* x*,* $x+\omega$*,* $x+t$*,* $x-t$*,* $u_2^{-1}(s)$*,* v*,* w *a* y *náleží do intervalu* I*.*

Důkaz:

viz [3] nebo viz [2]

■

Jestliže lokální riziková averze je konstantní funkce, tzn. $r(W) = c$, potom podle [3] má užitková funkce jeden z následujících tvarů:

- $u(W) \sim W$, jestliže $r(W) = 0$;
- $u(W) \sim -e^{-cW}$, jestliže $r(W) = c > 0$;
- $u(W) \sim e^{-cW}$, jestliže $r(W) = c < 0$;

kde relace $\sim$ znamená, že $f(x) \sim g(x)$, právě když $f(x) = a + bg(x)$, $a \in R$ a $b > 0$. Tyto užitkové funkce jsou po řadě lineární, striktně konkávní a striktně konvexní. Jestliže je míra absolutně rizikové averze konstantní, potom změny v bohatství investora nemění preference mezi různými hrami. Lze snadno ověřit, že pro libovolné k platí $u(k + W) \sim u(W)$ v každém z předchozích případů. Tudíž u konstantní rizikové averze lze dokázat, že užitková funkce je beze změny, viz [2].

Uvažujme investora, který každé hře přisuzuje nějakou pozitivní rizikovou prémii (tj. $\pi(W, F_\omega) > 0$ pro všechna W a ω), ale čím větší je jeho bohatství W, tím je riziková prémie pro stejnou hru menší - je to striktně klesající funkce W. Vztahy mezi charakteristikami chování investora shrnuje následující věta podle [3].

Věta 3:

Následující vlastnosti jsou ekvivalentní, a to i v silnější formě uvedené v hranatých závorkách:

(a) *Lokální riziková averze $r(W)$ je [striktně] klesající.*

(b) *Riziková prémie $\pi(W, F_\omega)$ je [striktně] klesající funkce W pro všechna ω.*

(c) *Pravděpodobnostní prémie $p(W, t)$ je [striktně] klesající funkce W pro všechna $t > 0$.*

Stejné ekvivalence platí, nahradíme-li klesající funkce za rostoucí a navíc omezíme-li se na nějaký interval I, pak musíme přidat podmínky W, $W + \omega$, $W + t$ a $W - t$ náleží I.

Důkaz:

viz [3], návodem je aplikovat předchozí větu na funkce $u_1(W) = u(W)$ a $u_2(W) = u(W + k)$ pro libovolné W a k.

■

Tyto vlastnosti nezávisí na tom, zda je hra spravedlivá či nikoliv, jak bylo ukázáno již dříve.

Prozatím jsme uvažovali pouze aditivní přístup ke hře, tj. majetek investora po hře ω je popsaný výrazem $W + \omega$. Nyní se budeme zabývat multiplikativním přístupem ke hře, to znamená, že výsledný majetek investora po hře ω je ve tvaru $W\omega$. Nechť investor s bohatstvím W a užitkovou funkcí u je lhostejný mezi možností zúčastnit se hry ω a možností obdržet pevně daný obnos $E(W\omega) - W\pi_\varrho(W, F_\omega)$, kde $\pi_\varrho(W, F_\omega)$ je multiplikativní riziková prémie. Pro malou spravedlivou hru ω s dostatečně malým rozptylem σ_ω^2 lze analogicky ukázat, že $\pi_\varrho(W, F_\omega) = \frac{1}{2}\sigma_\omega^2 W r(W) + o(\sigma_\omega^2)$, viz [3].

Definice 9:

Nechť $r(W)$ je míra absolutní rizikové averze odpovídající užitkové funkci investora u. Potom $r_\varrho(W) = W\, r(W)$ se nazývá míra relativní rizikové averze.

Kdyby uvažovaná hra ω nebyla spravedlivá, potom dostáváme $\pi_\varrho(W, F_\omega) = \frac{1}{2}\sigma_\omega^2 r_\varrho(W + WE\omega) + o(\sigma_\omega^2)$.

Obdobně můžeme nyní definovat i odpovídající pravděpodobnostní prémii $p_\varrho(W, t)$. Jiná interpretace $r_\varrho(W)$ je umožněna výrazem $p_\varrho(W, t) = \frac{1}{2}tr_\varrho(W) + O(t^2)$.

Nyní můžeme vyslovit větu o vztazích mezi charakteristikami chování investora při multiplikativním přístupu ke hře, viz [3].

Věta 4:

Následující vlastnosti jsou ekvivalentní, a to i v silnější formě uvedené v hranatých závorkách:

(α) *Lokální relativní riziková averze $r_\varrho(W)$ je [striktně] klesající.*

(β) *Relativní riziková prémie $\pi_\varrho(W, F_\omega)$ je [striktně] klesající funkce W pro všechna ω.*

(γ) *Relativní pravděpodobnostní prémie $p_\varrho(W, t)$ je [striktně] klesající funkce W pro všechna $t > 0$.*

Stejné ekvivalence platí, nahradíme-li klesající funkce za rostoucí a navíc omezíme-li se na nějaký interval I, pak musíme přidat podmínky W, $W + W\omega$, $W + Wt$ a $W - Wt$ náleží I.

Důkaz:

Důkaz se provede aplikací věty 2 na funkce $u_1(W) = u(W)$ a $u_2(W) = u(kW)$ pro libovolné W a k, viz [3].

$\blacksquare$

Pokud bychom položili míru relativní rizikové averze rovnou konstantě, $r_\varrho(W) = c$, potom $r(W) = \frac{c}{W}$, a tedy dostáváme striktně klesající míru absolutní rizikové averze pro $c > 0$ a zápornou, striktně rostoucí míru absolutní rizikové averze pro $c < 0$. Podle [3] jsou pak možné pouze následující tvary užitkových funkcí:

- $u(W) \sim W^{1-c}$, jestliže $r_\varrho(W) = c < 1$,
- $u(W) \sim \log W$, jestliže $r_\varrho(W) = 1$,

- $u(W) \sim -W^{-(c-1)}$, jestliže $r_\varrho(W) = c > 1$.

Jestliže relativní riziková averze je konstantní, potom změna v bohatství investora nezpůsobuje žádnou změnu preferencí mezi různými hrami (stále uvažujeme multiplikativní přístup ke hře). To plyne okamžitě ze vztahu $u(kW) \sim u(W)$ v každém z výše uvedených tvarů užitkových funkcí.

Kapitola 3

Studie užitkové funkce rizikově averzního investora

3.1 Předpoklady pro studii

Obecně v praxi se nejčastěji setkáváme s investory, kteří jsou vůči riziku averzní. Pokusíme se odhadnout nějaký příklad průběhu jejich užitkové funkce. Pro vhodnou hru ω můžeme snadno odhadnout hodnoty pojišťovací prémie rizikově averzního investora na různých hladinách bohatství. V kapitole 2 jsme odvodili přibližný výsledek:

$$\pi_I(W, F_\omega) + E\omega = \frac{1}{2}\sigma_\omega^2 r(W + E\omega). \tag{3.1}$$

Dále vypočítáme hodnoty míry absolutní rizikové averze investora na vybraných hladinách jeho bohatství. Těmito body se pokusíme proložit funkci. Z definice míry absolutní rizikové averze pak spočítáme odpovídající tvar užitkové funkce investora.

Abychom mohli se zmíněnými vzorci pracovat, musí hra ω splňovat předpoklad, že nepřináší příliš velké ztráty ani zisky a že její rozptyl je dostatečně malý. Zavedeme tedy hru ω jako náhodnou veličinu, která nabývá hodnoty 1 s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ a hodnoty -1 s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Jedná se tudíž o hru spravedlivou, tzn. $E\omega = 0$, a její rozptyl σ_ω^2 je roven 1.

Dalším předpokladem pro studii bude, že investor se musí buď hry zúčastnit nebo musí zaplatit pojišťovací prémii. Protože v našem případě se jedná o hru spravedlivou, tak z rovnice $\pi_I(W, F_\omega) = \pi(W, F_\omega) - E\omega$ plyne, že pojišťovací prémie v této situaci je shodná s prémií rizikovou. Dále budeme předpokládat, že investor své preference se vzrůstajícím majetkem nezmění a bude tedy stále vůči riziku averzní.

Budeme uvažovat investora s kladnou hladinou bohatství. Pokud investor je na nulové hladině bohatství, pak předpokládáme, že by dal cokoliv za to, aby se hry ω, při které hrozí ztráta, nemusel zúčastnit, a tedy přiřadíme pojišťovací prémii v bodě 0 hodnotu ∞, tzn. $\pi_I(0, F_\omega) = \infty$.

3.2 Vlastní studie

Na začátku musíme odhadnout přibližné hodnoty pojišťovací prémie pro rizikově averzního investora na námi vybraných hladinách bohatství. V obecně nejčastějším případě bude investor se vzrůstajícím majetkem čím dál víc lhostejnější vůči možnosti prohry ve hře ω a tedy bude ochoten platit čím dál nižší pojišťovací prémii. Uvažujme hodnoty pojišťovací prémie na různých hladinách bohatství uvedené v následující tabulce. V posledním řádku tabulky jsou podle (3.1) spočteny hodnoty míry absolutní rizikové averze po dosazení za střední hodnotu hry 0 a za její rozptyl 1.

W	10	25	50	100	150	200	250	500	1000
$\pi_I(W, F_\omega)$	0.1	0.05	0.02	0.01	0.007	0.004	0.003	0.001	0.0005
$r(W)$	0.2	0.1	0.04	0.02	0.014	0.008	0.006	0.002	0.001

Tabulka 3.1: Hodnoty pojišťovací prémie a míra absolutní rizikové averze při hře ω

Z vypočtených hodnot míry absolutní rizikové averze $r(W)$ vyplývá, že investor s těmito hodnotami rizikové prémie má při vzrůstajícím majetku klesající averzi vůči riziku.

Nyní bychom chtěli vzniklými hodnotami míry absolutní rizikové averze proložit spojitou a monotónní funkci. Pokusíme se vyjádřit míru absolutní rizikové averze $r(W)$ pomocí nějaké hyperbolické funkce tvaru $r(W) = \frac{1}{aW+b}$ s definičním oborem $(0, \infty)$, kde a a b jsou parametry z R. K tomu využijeme regresní model. Regresním modelem rozumíme model

$$Y_i = f(x_{i1}, \dots, x_{il}; \beta_1, \dots, \beta_k) + e_i, \;\; i = 1, \dots, n,$$

kde Y_i jsou náhodné veličiny, jejichž hodnoty pozorujeme, f je známá funkce, x_{ij}, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, l$, jsou známá čísla, $\beta_1, \dots \beta_k$ jsou neznámé parametry a $e_1, \dots, e_n$ jsou náhodné chyby, tj. náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou. V našem případě odpovídají náhodné veličiny Y hodnotám $r(W)$, x jsou vybrané hladiny bohatství W (viz tabulka 3.1), $\beta_1 := a$, $\beta_2 := b$ a funkcí f tedy rozumíme předpis $\frac{1}{aW+b}$.

Pro odhady hodnot parametrů a a b v regresním modelu použijeme metodu nejmenších čtverců. Tímto odhadem v našem případě nazýváme hodnoty $\hat{a}$ a $\hat{b}$, které minimalizují součet

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{9} \left[r(W_i) - \frac{1}{aW_i + b} \right]^2 .$$

Odhad je tedy řešením soustavy rovnic $\frac{\partial S}{\partial a} = 0$ a $\frac{\partial S}{\partial b} = 0$. Více o regresním modelu a o odhadu parametrů metodou nejmenších čtverců viz [1].

Naše soustava dvou rovnic pro dvě neznámé a a b má tvar:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{9} W_i \frac{r(W_i)(aW_i + b) - 1}{(aW_i + b)^3} &= 0 \\ \sum_{i=1}^{9} \frac{r(W_i)(aW_i + b) - 1}{(aW_i + b)^3} &= 0. \end{aligned}$$

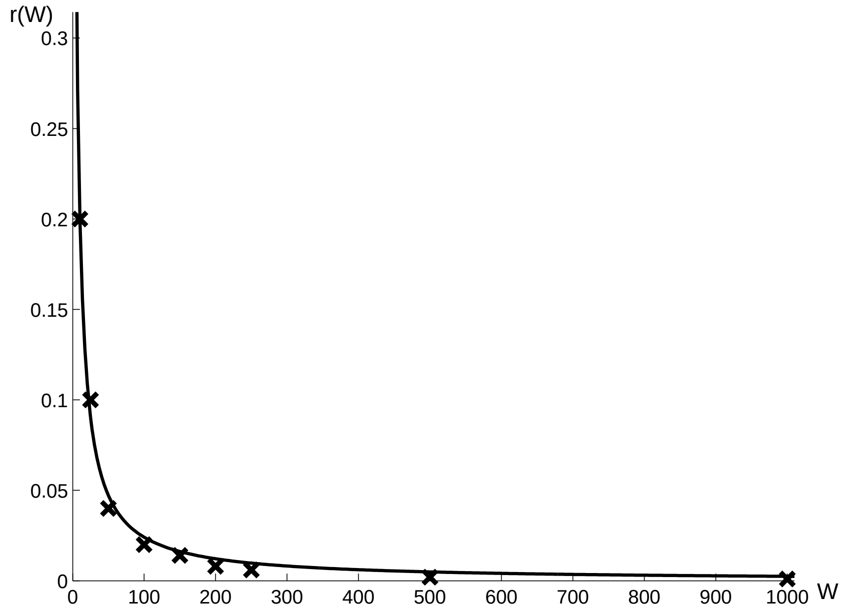
Pomocí matematického softwaru MatLab6.5 jsme zjistili, že

$$\begin{aligned} \hat{a} &\doteq 0.406, \\ \hat{b} &\doteq 0.901. \end{aligned}$$

Dostaneme následující graf míry absolutní rizikové averze pro tohoto investora, kde jsou znázorněny hodnoty míry absolutní rizikové averze z tabulky 3.1 a jimi proložená křivka (obrázek 3.1).

Užitkové funkce s hyperbolickou mírou absolutní rizikové averze (tzv. HARA funkce) mají svoje speciální místo mezi třídami užitkových funkcí. Patří sem exponenciální, logaritmické a mocninné užitkové funkce, které se v praxi používají nejčastěji. Více o HARA funkcích lze najít např. v [2].

Z obrázku 3.1 vidíme, že míra absolutní rizikové averze je kladná na svém definičním oboru, což odpovídá předpokladu o rizikové averzi investora.



Obrázek 3.1: Míra absolutní rizikové averze

Pokud se hladina bohatství blíží k nekonečnu, pak je investorovi lhostejné, že existuje možnost malé ztráty ve hře ω, a tedy pojišťovací prémie konverguje k nule. Z toho vyplývá, že i míra absolutní rizikové averze konverguje k nule. Z obrázku 3.1 vyplývá, že $r(W)$ nabývá pouze kladných hodnot, a tedy musí být $aW+b>0$.

Řešme obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu $\frac{1}{aW+b} = -\frac{u''(W)}{u'(W)}$ pro obecné parametry a, b. Pro $a \neq 0$ dostáváme

$$\begin{aligned} \log u'(W) &= -\frac{1}{a}\log\left(aW+b\right)+c_0,\ c_0 \in R \\ u'(W) &= c_1\left(aW+b\right)^{-\frac{1}{a}},\ c_1 \in R^+. \end{aligned}$$

Pro $a=0$ bychom dostali rovnost $u'(W) = c_2\, e^{-\frac{W}{b}},\ c_2 \in R^+$. Po dalším zintegrování rovnice získáme tvar užitkové funkce $u(W) = -ce^{-\frac{W}{b}}+d$, $c>0$, $d \in R$, který odpovídá konstantní míře absolutní rizikové averze.

Vyřešením rovnice pro $a \neq 0$ dostáváme dva možné tvary užitkové funkce:

- $u_1(W) = \frac{c}{a-1}(aW+b)^{\frac{a-1}{a}} + d$ pro $a \neq 0, 1$, $aW + b > 0$;
- $u_2(W) = c \ln(W+b) + d$ pro $a = 1$, $W + b > 0$.

Většinou se pokládá $d = 0$, neboť průběh užitkové funkce nezávisí na posunutí. Protože užitková funkce je neklesající, musí $c \geq 0$.

V našem konkrétním případě, kdy $a = \hat{a}$, $b = \hat{b}$ a položíme-li např. $c = 10$ a $d = 2$, budou tedy hodnoty užitkové funkce na daných hladinách bohatství následující:

W	10	25	50	100	150	200	250	500	1000
$u(W)$	0.38	1.5	1.8	1.93	1.96	1.97	1.98	1.99	2

Tabulka 3.2: Hodnoty užitkové funkce investora

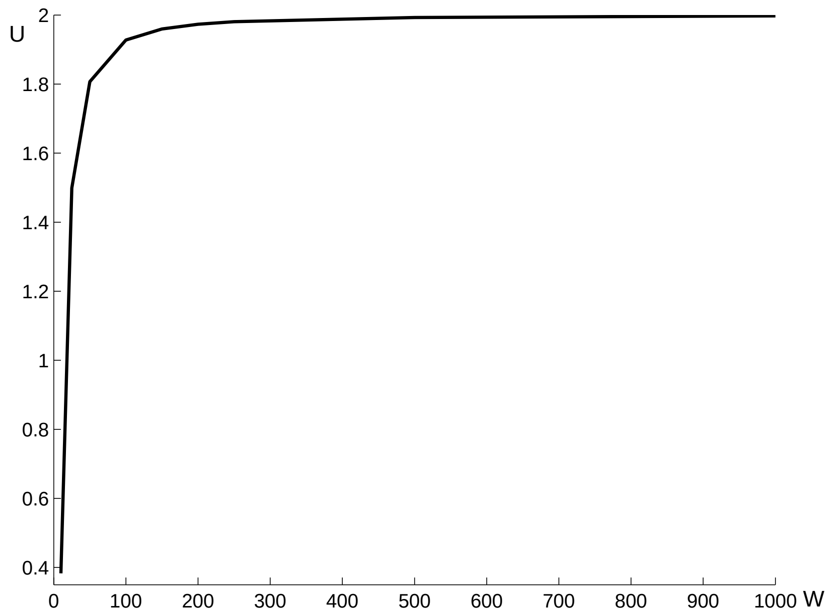
Graf užitkové funkce tohoto investora je znázorněn na obrázku 3.2. Investor je tedy rizikově averzní s klesající mírou absolutní rizikové averze.

Nyní zjistíme z derivace $r(W)$, jakých hodnot mohou nabývat parametry užitkové funkce pro investora s klesající mírou absolutní rizikové averze.

$$r'(W) = -a \frac{1}{(aW+b)^2}$$

Tedy vypočtené užitkové funkce u_1 a u_2 budou mít klesající míru absolutní rizikové averze tehdy a jen tehdy, jestliže $a > 0$.

Při zkoumání vlivu parametru a a b na průběh užitkové funkce budeme nadále uvažovat volbu $c = 1$ a $d = 0$. Pokud parametr a v předpisu funkce u_1 přibližujeme k nule zprava, potom investor bude vůči riziku čím dál více averzní. To se projeví na tvaru jeho užitkové funkce tak, že bude více "konkávně zahnutá". Jestliže parametr a v u_1 přibližujeme k 1 zleva, pak je investor méně rizikově averzní a jeho užitková funkce je méně "konkávně zahnutá". Pro $a = 1$ dostáváme předpis užitkové funkce u_2, tedy funkci logaritmickou. Pro parametr $a > 1$ se opět dostáváme k předpisu funkce u_1. Užitková funkce u_1 s parametrem $a > 1$ je pak s rostoucím a stále méně



Obrázek 3.2: Užitková funkce

"konkávně zahnutá". Pro b platí, že čím je menší, tím více je užitková funkce "konkávně zahnutá". Při jakékoliv zmíněné volbě parametrů a, b musí být vždy splněna podmínka $aW + b > 0$.

Literatura

[1] Anděl, J.: Statistické metody. Matfyzpress, 2003.

[2] Kopa, M.: Postavení užitkové funkce v úlohách stochastického programování. Rigorózní práce, MFF UK, 2004.

[3] Pratt J.W.: Risk aversion in the small and in the large, Econometrica **32**, 122-136, 1964.

[4] The theory of risk aversion, http://cepa.newschool.edu/het, (únor 2006).