Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Eva Pavčová

Vybrané problémy v náhodných procházkách

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2013

Rada by som sa poďakovala predovšetkým vedúcemu mojej práce doc. RNDr. Danielovi Hlubinkovi Ph.D. za výber zaujímavej témy, za ochotu a čas, ktorý mi venoval a za rady, ktoré mi pri tvorbe textu veľmi pomohli.

Ďalej by som sa chcela poďakovať svojej rodine za podporu počas písania tejto práce a počas celého štúdia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....   Podpis autora

Název práce: Vybrané problémy v náhodných procházkách

Autor: Eva Pavčová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V této práci se zabýváme prostými náhodnými procházkami a řešíme teoretické vybrané problémy. Definujeme cestu, kterou můžeme interpretovat jako realizaci náhodné procházky. Uvádíme příklady cest spolu s ilustracemi a základní vlastnosti jako hlasovací problém a princip odrazu. Definujeme náhodnou procházku a uvádíme pravděpodobnosti, s jakými může daná procházka nastat. Pozornost věnujeme hlavnímu lemmatu, ze kterého vycházejí další zajímavá tvrzení jako například zákon arcsinu. Cílem práce je vyřešení vybraných problémů s využitím teoretických poznatků. Problémy se týkají pravděpodobností a počtu cest s určitými restrikcemi. Například problém kladných cest geometricky dokazuje rovnost počtu cest dvou typů. Speciálně se zabýváme důkazem reformulace hlavního lemmatu.

Klíčová slova: cesta, princip odrazu, hlavné lemma, zákon arcsinu

Title: Selected problems of random walks

Author: Eva Pavčová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis deals with simple random walks and solutions of theoretical selected problems. We define the path which can be interpreted as the realization of a random walk. We bring forward examples of paths with illustrations and basic properties such as ballot theorem and reflection principle. Random walk is defined and also the probability of its is brought forward. Our attention is concentrated on the main lemma. We derive from it other interesting assertions such as arcsin law. The aim of this thesis is to solve the selected problems using theoretical knowledge. The problems are concerned with probabilities and numbers of paths with certain restrictions. The specific problem of positive paths proves geometrically the equality of numbers of two types of paths. Specially, we are interested in the proof of reformulation of main lemma.

Keywords: path, reflection principle, main lemma, arcsin law

Názov práce: Vybrané problémy v náhodných prechádzkach

Autor: Eva Pavčová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt:

V tejto práci sa zaoberáme prostými náhodnými prechádzkami a riešime teoretické vybrané problémy. Definujeme cestu, ktorú môžeme interpretovať ako realizáciu náhodnej prechádzky. Uvádzame príklady ciest spolu s ilustráciami a zakladné vlastnosti ako hlasovací problém a princíp odrazu. Definujeme náhodnú prechádzku a uvádzame pravdepodobnosti, s akými môže daná prechádzka nastať. Pozornosť venujeme hlavnému lemmatu, z ktorého vychádzajú ďalšie zaujímavé tvrdenia ako napríklad zákon arcsinu. Cieľom práce je vyriešenie vybraných problémov s využitím teoretických poznatkov. Problémy sa týkajú pravdepodobností a počtu ciest s určitými reštrikciami. Napríklad problém kladných ciest geometricky dokazuje rovnosť počtu ciest dvoch typov. Špeciálne sa zaoberáme dôkazom reformulácie hlavného lemmatu.

Kľúčové slová: cesta, princíp odrazu, hlavné lemma, zákon arcsinu

Obsah

Úvod

Práca sa zaoberá prostými náhodnými prechádzkami a jej cieľom je vyriešenie konkrétnych vybraných problémov. Tieto riešené problémy danú problematiku lepšie vysvetľujú a prehlbujú.

Celá práca je rozdelená na dve kapitoly. Prvá je venovaná teórii potrebnej k vyriešeniu problémov. Definujeme cestu, ktorú môžeme interpretovať ako realizáciu náhodnej prechádzky. Uvádzame a dokazujeme princíp odrazu, ktorý je východiskom nielen pri dokazovaní dôležitých tvrdení, ale aj pri riešení niektorých problémov. Dôraz kladieme na hlavné lemma, ktoré je kľúčové pri dokazovaní tvrdení ako napríklad zákon arcsinu a zákon arcsinu pre časové úseky. Ďalej sa zaujímame o maximum cesty a jeho pozíciu.

Druhá kapitola sa zaoberá riešením vybraných problémov s využitím už dokázaných tvrdení a viet. Aplikáciu princípu odrazu vidíme u problémov počtu ciest. Dôležitú úlohu pri mnohých problémoch zohrávajú obrázky, ktoré majú pomocnú funkciu alebo riešenie spočíva v geometrickom dôkaze. Napríklad problém kladných ciest či geometrický dôkaz reformulácie hlavného lemmatu. Väčšiu pozornosť si zaslúži aj problém návratov do počiatku, ktorý dokazuje rovnosť pravdepodobností dvoch rôznych typov ciest.

Kapitola 1

Náhodná prechádzka

1.1 Úvod do teórie náhodných prechádzok

Nech $n \in \mathbb{N}$. Uvažujme konečnú postupnosť $\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n$, kde $\epsilon_i = \pm 1$ pre $\forall i \in \{1, ..., n\}$. Predpokladajme, že p je počet plus jednotiek a q je počet mínus jednotiek. Potom teda platí, že $n = p + q$. Označme parciálny súčet $s_k = \epsilon_1 + \epsilon_2 + ... + \epsilon_k$, ktorý reprezentuje rozdiel medzi počtom plus a počtom mínus jednotiek v prvých k členoch postupnosti. Potom platí

$$s_k - s_{k-1} = \epsilon_k = \pm 1, \qquad s_0 = 0, \qquad s_n = p - q, \tag{1.1}$$

kde $k \in \{1, ..., n\}$.

Postupnosť $\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n$ môžeme znázorniť v pravouhlom súradnicovom systéme s horizontálnou osou x a vertikálnou osou y. Na os x nanesieme prirodzené čísla $1, ..., n$ a na os y prislúchajúce parciálne súčty $s_1, s_2, ..., s_n$. Spojením týchto bodov získame lomenú čiaru vychádzajúcu z počiatku, ktorú budeme nazývať cesta.

Definícia 1. *Nech $n \in \mathbb{N}$ a $d \in \mathbb{Z}$. Cesta $s_1, s_2, ..., s_n$ z počiatku do bodu $[n, d]$ je lomená čiara spájujúca body $[0, s_0], [1, s_1], ..., [n, s_n]$, pričom $s_1, s_2, ..., s_n$ splňuje* (1.1) *a $s_n = d$. Počet členov n cesty $s_1, s_2, ..., s_n$ nazveme dĺžka cesty.*

Počet všetkých ciest dĺžky n je 2^n. Za predpokladu, že p je počet plus jednotiek a q je počet mínus jednotiek, platia tieto vzťahy

$$n = p + q, \qquad d = p - q. \tag{1.2}$$

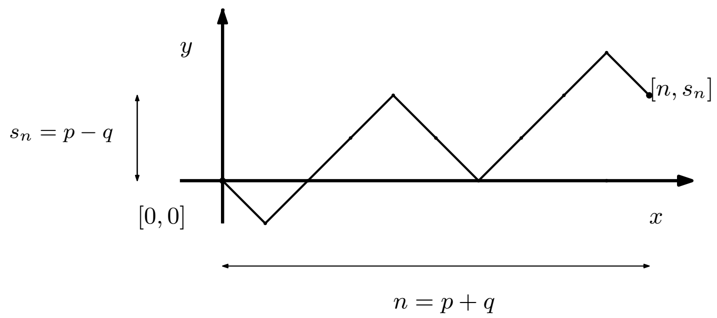
Cesta z počiatku do ľubovoľného bodu $[n, d]$ existuje práve vtedy, keď n a d sú tvaru (1.2). Počet takýchto ciest je

$$N_{n,d} = \binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}. \tag{1.3}$$

Stačí si uvedomiť, že p umiestnení plus jednotiek v postupnosti $\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n$ môžeme vybrať z $n = p + q$ dostupných umiestnení $N_{n,d}$ spôsobmi. Pre úplnosť dodefinujeme $N_{n,d} = 0$ v prípade, že n a d nie sú v tvare (1.2). Teda $N_{n,d}$ označuje počet všetkých ciest z počiatku do ľubovoľného bodu $[n, d]$.

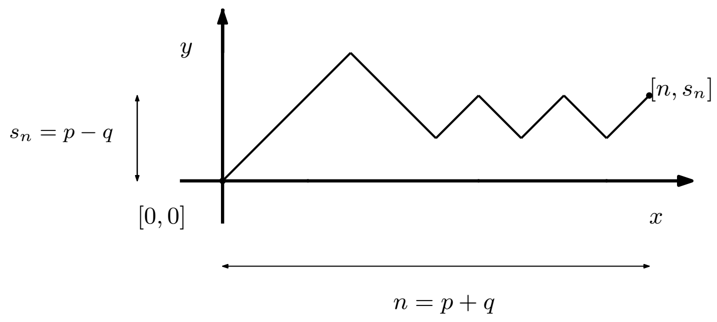
Nech postupnosť $\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_n$ je tvorená nezávislými rovnako rozdelenými náhodnými veličinami, potom platí $S_k = \epsilon_1 + \epsilon_2 + ... + \epsilon_k$ pre $k \in \{1, ..., n\}$. Uvedieme si dva základné príklady, kde cestu interpretujeme ako výsledok náhodného pokusu.

Príklad 1. *(Postupnosť hodov mincou)* Cestu dĺžky n môžeme interpretovať ako postupnosť ideálneho pokusu pozostavajúceho z n postupných hodov mincou. Nech pre rub v postupnosti získame plus jednotku a pre líc mínus jednotku. Potom S_k predstavuje rozdiel medzi počtom plus a počtom mínus jednotiek po k-tom hode mincou. Môžeme si predstaviť hráča, ktorý pri každom hode mincou získa resp. stratí určité množstvo. Potom postupné kumulatívne zisky resp. straty tohto hráča su reprezentované postupnosťou náhodných veličín S_1,S_2,...,S_n. Pre geometrickú intrepretáciu predpokladajme, že jednotlivé hody mincou nastávajú v rovnakých časových úsekoch. Obrázok (1.1) ilustruje cestu dĺžky 10 ako výsledok 10-tich hodov mincou pre $p = 6$ a $q = 4$.



Obrázok 1.1: Postupnosť hodov mincou

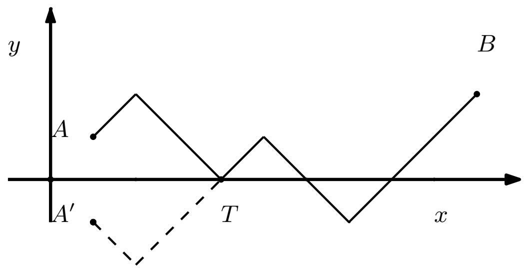
Príklad 2. *(Hlasovací problém[1]) Predpokladajme, že počas volieb, kandidát P získa p hlasov a kandidát Q získa q hlasov, kde p>q. Pravdepodobnosť, že počas celého hlasovania vedie kandidát P nad kandidátom Q je rovná* $\frac{p-q}{p+q}$. Záznam o hlasovaní môže byť reprezentovaný ako cesta dĺžky $p + q$, kde $\epsilon_k = +1$, ak k-tý hlas získa kandidát P. Inak povedané, každá cesta z počiatku do bodu $[p + q,p - q]$ môže byť interpretovaná ako záznam volieb pri danom p a q. Teda S_k je počet hlasov o koľko kandidát P vedie alebo zaostáva, v čase keď k-tý volič vloží do urny volebný lístok. Kandidát P vedie počas celého hlasovania práve vtedy, keď $S_1 > 0$,$S_2 > 0$,...,$S_n > 0$. Pre konkrétnu realizáciu to znamená, že všetky vrcholy ležia striktne nad osou x. Je potrebné si uvedomiť, že hlasovací problém predpokladá, že cesty sú rovnako pravdepodobné. Kdežto v predchádzajúcom príklade to bolo zrejmé. Obrázok (1.2) ilustruje pozitívnu cestu dĺžky 10 ako výsledok hlasovania 10-tich voličov, kde $p = 6$ a $q = 4$.



Obrázok 1.2: Ilustrácia pozitívnej cesty

[1]Tento problém dokázal W.A.Witworth v roku 1878, Angl. the ballot theorem

Nech $A = [a,\alpha]$ a $B = [b,\beta]$ také, že $b > a \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Pomocou osovej súmernosti získame k bodu A jeho zrkadlový obraz $A' = [a, -\alpha]$ určený osou x.(Viz obrázok (1.3))



Obrázok 1.3: Ilustrácia princípu odrazu

Lemma 1. *(Princíp odrazu[2]) Počet ciest z A do B, ktoré sa dotýkajú alebo pretínajú os x je rovnaký ako počet všetkých ciest z bodu A' do B.*

Dôkaz. Uvažujme cestu $s_a = \alpha, s_{a+1}, \ldots, s_b = \beta$ z A do B majúcu jeden alebo viac vrcholov na osi x. Nech t je prvá súradnica prvého takéhoto vrchola. Teda, vybrali sme t také, že $s_a > 0, s_{a+1} > 0, \ldots, s_{t-1} > 0, s_t = 0$. Potom $-s_a, -s_{a+1}, \ldots, -s_{t-1}, s_t = 0, s_{t+1}, \ldots, s_b$ je cesta vedúca z A' do B a majúca $T = [t,0]$ ako prvý vrchol na osi x. Úseky $A'T$ a AT sú si navzájom zrkadlovým obrazom a teda stačí si uvedomiť, že cesta z A do B majúca vrchol $T = [t,0]$ na osi x a cesta z A' do B sú navzájom jednoznačne určené. Teda existuje jednoznačný vzťah medzi všetkými cestami z A' do B a takými cestami z A do B, ktoré majú vrchol na osi x.

❑

Ako dôsledok uvedeného lemmatu (1) dokážeme už spomínaný hlasovací problém popísaný v príklade 2.

Dôsledok 1. (Hlasovací problém) Nech $n \in \mathbb{N}$ a $d \in \mathbb{N}$. Počet ciest z počiatku do $[n,d]$ takých, že $s_1 > 0, s_2 > 0, \ldots, s_n > 0$ je rovný $\frac{d}{n} N_{n,d}$.

Dôkaz. Jadro dôkazu spočíva v tom, že spočítame všetky prípustné cesty vedúce do bodu $[n,d]$ a od nich odpočítame cesty vedúce do $[n,d]$, ktoré sa dotýkajú alebo pretínajú os x. Počet všetkých ciest z bodu $[1,1]$ do $[n,d]$ je podľa (1.3) $N_{n-1,d-1}$. Počet všetkých ciest z bodu $[1,1]$ do $[n,d]$ takých, že platí $s_1 > 0, s_2 > 0, \ldots, s_n > 0$, je podľa lemmatu (1) rovný počtu všetkých ciest z bodu $[1,-1]$ do $[n,d]$, t.j. podľa vzťahu 1.3 $N_{n-1,d+1}$. Celkom teda máme

$$N_{n-1,d-1} - N_{n-1,d+1} = \binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}.$$

Triviálnou úpravou získame výsledok tvaru $\frac{p-q}{p+q} N_{n,d} = \frac{d}{n} N_{n,d}$.

❑

[2]Angl. the reflexion principle

1.2 Definícia náhodnej prechádzky

Teraz zavedieme náhodnú prechádzku formálne.

Definícia 2. *Nech $n, k \in \mathbb{N}$. Nech $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ je postupnosť nezávislých a rovnako rozdelených diskrétnych náhodných veličín. Označme S_n ako parciálny súčet $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Potom postupnosť $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva náhodná prechádzka*[3] *a platí $S_0 = 0$.*

Priblížime príklad (1) o postupnosti hodov mincou v terminológii náhodnej prechádzky. Cesta s_1,s_2,...,s_n, ktorá je záznamom postupných hodov mincí, reprezentujte jednotlivé kumulatívne zisky resp. straty hráča. Body s_1,s_2,...,s_n znázornené v súradnicovej sústave nazveme pozíciou "častice", ktorá danú náhodnú prechádzku prevádzala. Teda častica sa pohybuje v rovnakých časových úsekoch, hore alebo dole po vertikálnej osi. Je dôležité vedieť, s akou pravdepodobnosťou sa častica pobybuje. *V tomto texte budeme uvažovať, že častica sa pohybuje s rovnakou pravdepodobnosťou o $+1$ nahor či o -1 nadol, teda $P[X_k = 1] = P[X_k = -1]$, kde $k \in \{1,...,n\}$. Hovoríme teda o prostej náhodnej prechádzke*[4]*. Inú náhodnú prechádzku uvažovať nebudeme.*

Každá cesta dĺžky n môže byť interpretovaná ako výsledok náhodnej prechádzky. Počet všetkých takýchto ciest je 2^n a každá je rovnako pravdepodobná.

Jav, že sa častica v čase n nachádza v bode r, označíme $S_n = r$. Pravdepodobnosť tohto javu označme $p_{n,r}$. Počet ciest z počiatku do $[n,r]$ je daný (1.3). Potom platí

$$p_{n,r} = P[S_n = r] = \binom{n}{\frac{n+r}{2}} 2^{-n},$$

kde binomický koeficient je rovný nule v prípade, že $\frac{n+r}{2}$ nie je celé číslo medzi 0 a n, vrátane.

Návrat do počiatku nastáva v čase k, ak $S_k = 0$. V tomto prípade je k nevyhnutne párne. Pre $k = 2v$ je pravdepodobnosť návratu do počiatku $p_{2v,0}$. Označme túto pravdepodobnosť pre jednoduchosť u_{2v}. Potom platí

$$u_{2v} = P[S_{2v} = 0] = \binom{2v}{v} 2^{-2v}. \tag{1.4}$$

Počítanie kombinačných čísel môže byť náročné, preto sa používa aproximácia veľkých faktoriálov pomocou Stirlingovej formule.

Poznámka 1. Stirlingova formula znie: $n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$

Stirlingovu aproximáciu aplikujeme na vzťah (1.4) a získame

$$u_{2v} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi v}}.$$

Prvý návrat do počiatku nastáva v čase $2v$, ak

$$S_1 \neq 0,...,S_{2v-1} \neq 0, \qquad \text{ale} \qquad S_{2v} = 0.$$

Pravdepodobnosť prvého návratu označme f_{2v} a platí $f_0 = 0$.

Nasledujúca veta je v podstate veta o úplnej pravdepodobnosti.

[3] Náhodná prechádzka je špeciálny prípad stochastického procesu. Obecne nie je nutné predpokladať diskrétne rozdelenie veličiny X_k.

[4] Angl. the simple random walk

Veta 2. *Vzťah pravdepodobností f_{2v} a u_{2v} vyjadruje nasledujúci vzorec*

$$u_{2n} = f_2 u_{2n-2} + f_4 u_{2n-4} + ... + f_{2n} u_0 \qquad n \geq 1. \tag{1.5}$$

Dôkaz. [Viz Charles M. Grinstead a Snell, 1997, Theorem 12.2] ❑

Poznámka 2. Nasledujúci vzťah sa dá dokázať matematickou indukciou pre n.

$$\binom{a}{0}\binom{b}{n} + \binom{a}{1}\binom{b}{n-1} + \cdots + \binom{a}{n}\binom{b}{0} = \binom{a+b}{n}$$

1.3 Hlavné lemma

Lemma 3. *(Hlavné lemma) Nech $n \in \mathbb{N}$. Pravdepodobnosť, že návrat do počiatku nenastáva do a vrátane času $2n$ je rovnaká ako pravdepodobnosť, že návrat do počiatku nastane v čase $2n$. V matematickom zápise*

$$P[S_1 \neq 0,...,S_{2n} \neq 0] = P[S_{2n} = 0] = u_{2n}. \tag{1.6}$$

Dôkaz. Udalosť naľavo nastáva práve vtedy, keď sú všetky S_j buď kladné alebo záporné. Tieto dve možnosti sú rovnako pravdepodobné, preto môžeme vzťah (1.6) reformulovať nasledovne

$$P[S_1 > 0,...,S_{2n} > 0] = \frac{1}{2} u_{2n}. \tag{1.7}$$

Teda, ak dokážeme vzťah (1.7), dokážeme aj lemma (3). Uvážením všetkých možností, ktoré môže veličina S_{2n} nadobudnúť, je zrejmé, že platí

$$P[S_1 > 0,...,S_{2n} > 0] = \sum_{r=1}^{\infty} P[S_1 > 0,...,S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2r]$$

Je zrejmé, že členy na pravej strane pre $r > n$ vypadnú. Plynie z (1.2). Podľa (2) je počet ciest splňujúcich podmienky na pravej strane rovný $N_{2n-1,2r-1} - N_{2n-1,2r+1}$ a teda pravá strana je tvaru

$$\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} (p_{2n-1,2r-1} - p_{2n-1,2r+1}).$$

Sumu rozpíšeme, jednotlivé členy sa navzájom odpočítajú a výsledný tvar je $\frac{1}{2} p_{2n-1,1}$. Overením, že $p_{2n-1,1} = u_{2n}$, je lemma (3) dokázané. ❑

Lemma (3) môžeme reformulovať takto

$$P[S_1 \geq 0,..., S_{2n} \geq 0] = u_{2n}. \tag{1.8}$$

Vieme, že cesta dĺžky $2n$, ktorej vrcholy sú nad osou x, určite prechádza bodom [1,1]. Vezmeme bod [1,1] ako nový počiatok cesty, potom cesta má dĺžku $2n - 1$

a platí, že všetky vrcholy ležia na alebo nad novou osou x. A pretože prvý krok je pozitívny s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$, tak platí rovnosť

$$P[S_1 > 0,...,S_{2n} > 0] = \frac{1}{2}P[S_1 \geq 0,...,S_{2n-1} \geq 0]. \tag{1.9}$$

Všimneme si, že $2n-1$ je nepárne číslo, teda v tomto čase nemôže nastať návrát do počiatku a preto musí platiť, že $S_{2n-1} > 0$. To implikuje, že $S_{2n} \geq 0$. A preto pravdepodobnosť napravo vo vzťahu (1.9) je rovnaká ako pravdepodobnosť vo vzťahu (1.8) a teda vzťah (1.8) platí.

Lemma 4. *Pravdepodobnosť, že prvý návrat do počiatku nastane v čase $2n$ je*

$$f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n} = \frac{1}{2n-1}u_{2n}, \qquad \textit{pre} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dôkaz. Prvý návrat do počiatku nastáva v čase $2n$ práve vtedy, keď sú splnené podmienky

$$P[S_1 \neq 0,..., S_{2k} \neq 0],$$

a to pre $k = n-1$, nie pre $k = n$. Z pohľadu lemma (3) nám z toho vyplýva, že platí $f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n}$. Vzťah $\frac{1}{2n-1}u_{2n}$ získame triviálnym výpočtom.

❑

Dôsledok 2. Platí vzťah

$$f_2 + f_4 + ... = 1$$

Dôkaz. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-2} - u_{2n}) = u_0 = 1$

❑

1.4 Zákon arcsinu

Lemma 5. *(Zákon arcsinu pre posledný návrat) Pravdepodobnosť, že do a vrátane času $2n$ posledný návrat do počiatku nastane v čase $2k$, je daná*

$$\alpha_{2k,2n} = u_{2k}u_{2n-2k} \qquad \textit{pre} \qquad k = 0,1,...,n. \tag{1.10}$$

Dôkaz. Pravdepodobnosť návratu do počiatku v čase $2k$ je u_{2k}. Vezmeme bod $[2k,0]$ ako nový počiatok cesty splňujúcej $S_{2k} = 0, S_{2k+1} \neq 0,..., S_{2n} \neq 0$ a podľa lemmatu (3) máme, že pravdepodobnosť tejto cesty je u_{2n-2k}. Celkom teda $u_{2k}u_{2n-2k}$.

❑

Pravdepodobnosť rozdelenia, ktoré prislúcha $\alpha_{2k,2n}$, kde $k = 0,1,...,n$, nazveme *diskrétnym arcsin rozdelením rádu n*, pretože arcsin ho veľmi dobre aproximuje. Toto rozdelenie je symerické v zmysle $\alpha_{2k,2n} = \alpha_{2n-2k,2n}$. Pre n=2 nadobudne tri hodnoty $\frac{3}{8}$,$\frac{2}{8}$,$\frac{3}{8}$ a pre n=10 viz tabuľka (1.1).

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
	k=10	k=9	k=8	k=7	k=6	
$\alpha_{2k,2n}$	0.1762	0.0927	0.0736	0.0655	0.0617	0.0606

Tabulka 1.1: Diskrétne arcsin rozdelenie rádu n

Poznámka 3. Arcsin rozdelenie[5] je pravdepodobnostné rozdelenie s distribučnou funkciou

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x} \qquad \text{pre} \qquad 0 \leq x \leq 1$$

a hustotou

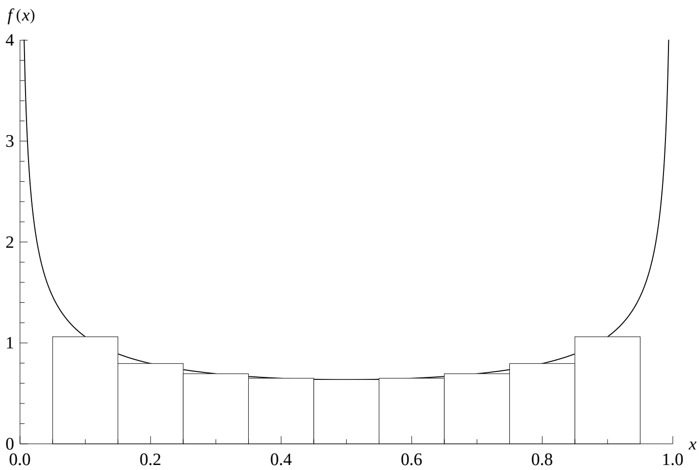
$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(x-1)}} \qquad \text{pre} \qquad x \in (0{,}1). \tag{1.11}$$

Stirligovu formulu uvedenú v poznámke (1) aplikujeme na vzťah (1.10) a dostaneme

$$u_{2k}u_{2n-2k} \approx \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi(n-k)}} = \frac{1}{\pi n\sqrt{\frac{k}{n}(1-\frac{k}{n})}} = \frac{1}{n} f(x_k), \tag{1.12}$$

kde $x_k = \frac{k}{n}$ a f je hustota arcsin rozdelenia. Taktiež platí

$$\sum_{k<xn} \alpha_{2k,2n} \approx \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x} \qquad \text{pre} \qquad x \in (0{,}1).$$



Obrázok 1.4: Graf funkcie (1.11). Konštrukcia vysvetľuje aproximáciu (1.12).

Aproximáciu rozdelenia času posledného návratu rozdelením arcsinu popisuje obrázok (1.4). Hodnota $\frac{1}{n}f(x_k)$ je rovna obsahu obdĺžnika s výškou $f(x_k)$ a základňou dĺžky $\frac{1}{n}$, pričom stred základne je x_k. Nech platí $0 < p < q < 1$ a nech n je dostatočne veľké, potom súčet pravdepodobností $\alpha_{2k,2n}$ pre $p < \frac{k}{n} < q$ je približne rovný ploche pod grafom funkcie f a nad intervalom $p < x < q$. Pre $p = 0$ a $q = 1$ je celková plocha pod grafom f a nad osou $x = 0$ rovna $\sum_{k=0}^{n} \alpha_{2k,2n}$.

[5] Arcsin rozdelenie je špeciálny prípad beta rozdelenia s parametrami $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Lemma (5) nám v podstate hovorí, že pri postupnosti hodov mincou, sú najvyššie pravdepodobnosti vtedy, keď posledný návrat do počiatku nastane v časoch pre k extrémne blízko 0 alebo n. Táto pravdepodobnosť je symetrická v zmysle $\alpha_{2k,2n} = \alpha_{2n-2k,2n}$. Nasledujúce lemma (6) nám situáciu postupnosti hodov mincou priblíži v zmysle, koľko času strávi častica na pozitívnej a koľko na negatívnej strane. Z lemma ľahko vidieť, že je celkom pravdepodobné, že častica strávi takmer celý čas na pozitívnej resp.negatívnej strane.

Lemma 6. *(Zákon arcsinu pre časové úseky) Nech cesta má dĺžku $2n$. Pravdepodobnosť, že častica strávi $2k$ časových úsekov na pozitívnej strane (resp. negatívnej) a $2n - 2k$ na negatívnej (resp. pozitívnej) je rovna $\alpha_{2k,2n}$.*

Dôkaz. Uvažujme cestu dĺžky $2n$ a označme $b_{2k,2n}$ pravdepodobnosť, že presne $2k$ časových úsekov leží nad osou. Chceme dokázať

$$b_{2k,2v} = \alpha_{2k,2v}. \tag{1.13}$$

Prehlásime, že $b_{2k,2v} = u_{2v}$ a z dôvodu symetrie taktiež platí $b_{0,2v} = u_{2v}$. Teda stačí dokázať vzťah (1.13) pre $1 \leq k \leq v - 1$.

Predpokladajme, že presne $2k$ časových úsekov z $2n$, je strávených na pozitívnej strane, kde $1 \leq k \leq v-1$. V tomto prípade prvý návrat musí nastať v nejakom čase $2r < 2n$ a a existujú práve dve možnosti. Prvá možnosť je, že $2r$ časových úsekov do prvého návratu je strávených na pozitívnej strane. V tomto prípade $r \leq k \leq v - 1$ a ďalšia sekcia cesty počínajúc bodom $[2r,0]$ má presne $2k - 2r$ úsekov nad osou. Je zrejmé, že počet takýchto ciest je $\frac{1}{2}2^{2r}f_{2r}2^{2n-2r}b_{2k-2r,2n-2r}$. Druhá možnosť, že $2r$ časových úsekov do prvého návratu je strávených na negatívnej strane. V tomto prípade sekcia cesty počínajúc bodom $[2r,0]$ má presne $2k$ úsekov nad osou, kde $n - r \geq k$. Počet takýchto ciest je $\frac{1}{2}2^{2r}f_{2r}2^{2n-2r}b_{2k,2n-2r}$. Teda pre $1 \leq k \leq n - 1$ máme

$$b_{2k,2n} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} f_{2r}b_{2k-2r,2n-2r} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}b_{2k,2n-2r}. \tag{1.14}$$

Tvrdenie dokážeme indukciou. (1.13) platí pre $v = 1$ triviálne. Predpokladajme, že platí pre $v < n$. Potom (1.14) je tvaru

$$b_{2k,2n} = \frac{1}{2}u_{2n-2k}\sum_{r=1}^{k} f_{2r}u_{2k-2r} + \frac{1}{2}u_{2k}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}u_{2n-2k-2r}.$$

Podľa vzťahu (1.5) je prvá suma rovná u_{2k} a druhá suma u_{2n-2k}. Teda vzťah (1.13) taktiež platí pre $v = n$.

❑

1.5 Zmeny znamienka

Hovoríme, že zmena znamienka nastane v čase n, ak S_{n-1} a S_{n+1} majú opačné znamienka, t.j. cesta pretína os x. V tom prípade $S_n = 0$ a n je nevyhnutne párne.

Veta 7. *Nech $\xi_{r,2n+1}$ je pravdepodobnosť, že do času 2n+1 nastane presne r zmien znamienka. Potom platí*

$$\xi_{r,2n+1} = 2P[S_{2n+1} = 2r+1] = 2p_{2n+1,2r+1} \quad pre \qquad r = 0,1,\ldots$$

Dôkaz. Dôkaz začneme reformuláciou vety. Ak prvý krok prechádza bodom [1,1], potom vezmeme tento bod ako nový počiatok v novom súradnicovom systéme. Pretnutie horizontálnej osi v starom systéme korešponduje s pretnutím priamky $y = -1$ v novom systéme. Analogicky pre $S_1 = -1$. Teda vetu môžeme reformulovať nasledovne: Pravdepodobnosť, že do času $2n$ cesta pretne priamku $y = -1$ práve r-krát, je $2p_{2n+1,2r+1}$.

Nech $r = 0$. Teda požadujeme, aby sme priamku $y = -1$ nepreťali, t.j. aby sme sa nedotkli a ani nepreťali priamku $y = -2$. V tom prípade S_{2n} je nezáporné sudé celé číslo. Teda pre $k \geq 0$ a podľa lemmatu (1) je počet ciest dotýkajúcich sa priamky $y = -2$ z počiatku do bodu $[2n,2k]$ rovný počtu ciest z počiatku do bodu $[2n,2k+4]$. Teda celkom pravdepodobnosť cesty z počiatku do $[2n,2k]$ nedotýkajúcej sa priamky $y = -2$ je

$$\sum_{k=0}^{n} (p_{2n,2k} - p_{2n,2k+4}).$$

Výsledný tvar sumy je $p_{2n,0} + +p_{2n,2}$. Je zrejmé, že každá cesta prechadzajúca bodom $[2n+1,1]$ prechádza buď bodom $[2n,0]$ alebo $[2n,2]$. Potom hľadaná pravdepodobnosť pre $r = 0$ je tvaru $p_{2n+1,1} = \frac{1}{2}(p_{2n,0} + p_{2n,2})$.

Nech $r = 1$. Cesta pretínajúca priamku $y = -1$ v čase $2v - 1$ môže byť prestavaná do dvoch sekcií. Prvá je z počiatku do $[2v, -2]$ a druhá vychádza z bodu $[2v, -2]$ a má dĺžku $2n - 2v$. Na druhú sekciu cesty aplikujeme výsledok pre $r = 0$, ale zameníme roly plus a mínus. Teda bod $[2v, -2]$ vezmeme ako nový počiatok v novej súradnicovej sústave a spočítame všetky cesty vedúce z tohoto bodu do bodu $[2n,2k]$ nedotýkajúce sa priamky $y = 2$. Teda počet ciest, ktoré nepretnú priamku $y = -1$ (aby nenastala ďalšia zmena znamienka) je rovný počtu ciest z bodu $[2v, -2]$ do bodu $[2n+1, -3]$. Každú takúto cestu môžeme skombinovať s prvou sekciou na cestu z počiatku do bodu $[2n+1, -3]$. Z toho vyplýva, že počet ciest dĺžky $2n$ pretínajúcich priamku $y = -1$ práve raz je rovný počtu ciest z počiatku do bodu $[2n+1,-3]$, t.j. $2^{2n+1}p_{2n+1,3}$. Tvrdenie je dokázané pre $r = 1$.

Tvrdenie vyplýva indukciou pre ľubovoľné r.

❑

1.6 Maximum a prvý prechod

Uvažujme cesty pod priamkou $x = r$ pre $r > 0$, t.j. splňujúce

$$S_0 < r, S_1 < r, \ldots, S_n < r.$$

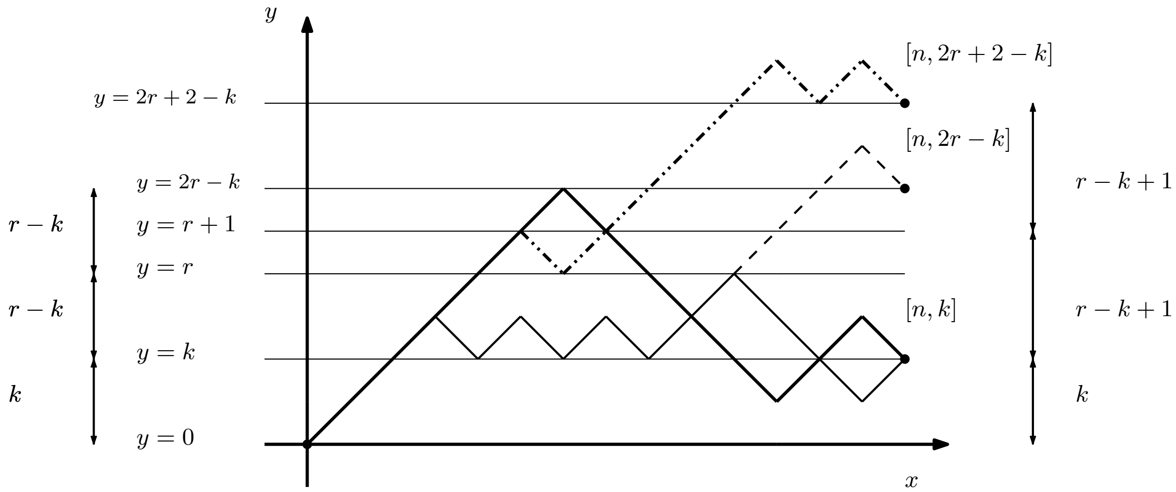
V tomto prípade hovoríme, že maximum cesty je $< r$. Je zrejmé, že maximum ≥ 0, pretože $S_0 = 0$.

Lemma 8. *Nech $A = (n,k)$ pre $k \leq r$. Pravdepodobnosť, že cesta dĺžky n vedie do bodu A a má maximum $\geq r$, je rovna $p_{n,2r-k} = P[S_n = 2r - k]$.*

Dôkaz. Pravdepodobnosť cesty z počiatku do bodu A dotýkajúcej sa alebo pretínajúcej priamku $y = r$ spočítame podľa lemmatu (1).

❑

Veta 9. *Pravdepodobnosť, že maximum cesty dĺžky n je práve r, je rovná hodnote kladného člena z dvojice $p_{n,r}$ a $p_{n,r+1}$.*



Obrázok 1.5: Hodnoty konkrétnej realizácie: n=14, k=2, r=4. Normálne tučnou čiarou je vyznačená cesta z počiatku do $[n,k]$, ktorá sa dotýka priamky $y = r$ a jej časť po preklopení cez túto priamku je vyznačená čiarkovanou čiarou. Cesta z počiatku do $[n,k]$, ktorá pretína priamku $y = r + 1$ je vyznačená tučnou čiarou. Jej časť preklopená cez priamku $y = r + 1$ je vyznačená bodkočiarkovanou čiarou.

Dôkaz. Pravdepodobnosť, že cesta vedie z počiatku do A a dotýka sa alebo pretína priamku $y = r$ je podľa lemmatu (1) rovná $p_{n,2r-k}$. Pravdepodobnosť, že cesta vedie z počiatku do A a dotýka sa alebo pretína priamku $y = r + 1$, je podľa lemmatu (1) rovná $p_{n,2r+2-k}$. Situáciu ilustruje obrázok (1.5). Suma rozdielu týchto pravdepodobností pre všetky $k \leq r$

$$\sum_{k=-n}^{r} (p_{n,2r-k} - p_{n,2r+2-k})$$

je pravdepodobnosť, že cesta dĺžky n má maximum rovné práve r. Jednotlivé členy sumy sa navzájom odpočítajú a výsledný tvar je hodnota kladného člena z dvojice $p_{n,r}$ a $p_{n,r+1}$ v závislosti na tom, či n a r majú rovnakú alebo rôznu paritu.

❑

Povšimneme si, že pre $r = 0$ sa predchádzajúca veta redukuje na vzťah

$$P[S_1 \leq 0,..., S_{2n} \leq 0] = u_{2n},$$

ktorý je ekvivalentný so vzťahom (1.8). Teda veta (9) je zobecnením hlavného lemmatu. Pre $r > 0$ budeme hovoriť, že *prvý prechod cez bod* $[n,r]$ nastáva, ak platí

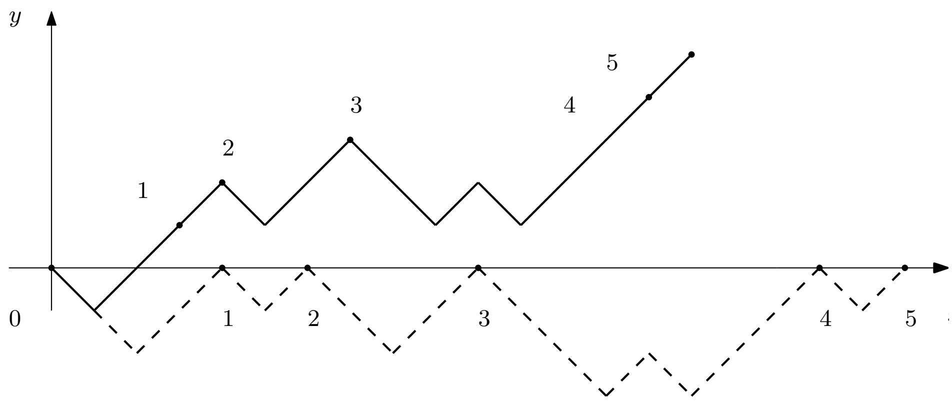
$$S_1 < r, ..., S_{n-1} < r, S_n = r. \tag{1.15}$$

Veta 10. *Označme $\phi_{r,n}$ pravdepodobnosť prvého prechodu cez bod $[n,r]$. Potom platí*

$$\phi_{r,n} = \frac{1}{2}[p_{n-1,r-1} - p_{n-1,r+1}]. \tag{1.16}$$

Dôkaz. Uvedomíme si, že cesta splňujúca vzťah (1.15) musí prechádzať bodom $[n-1,r-1]$ a jej maximum do času $n-1$ je najviac $r-1$. Podľa dôsledku (1) je pravdepodobnosť tejto udalosti rovná $p_{n-1,r-1} - p_{n-1,r+1}$. Triviálnym výpočtom získame $\phi_{r,n} = \frac{r}{n}\binom{n}{\frac{n+r}{2}}2^{-n}$.

❑



Obrázok 1.6: Hodnoty konkrétnej realizácie: n=20, r=5. Normálne tučnou čiarou je vyznačená cesta dĺžky $n-r$, ktorej prvý prechod nastáva v bode $[n-r,r]$. Čiarkovanou čiarou je vyznačená reprezentatívna cesta.

Veta 11. *Pravdepodobnosť, že r-tý návrat do počiatku nastáva v čase n je $\phi_{r,n-r}$.*

Inak povedané: Všimneme si, že r-tý návrat v čase n má rovnakú pravdepodobnosť ako prvý prechod cez bod $[n-r,r]$.

Dôkaz. Uvažujme cestu z počiatku do $[n,0]$ so všetkými vrcholmi na alebo pod osou x, pričom na osi má práve $r-1$ vnútorných vrcholov. Pre jednoduchosť nazveme túto cestu reprezentatívnou. Situáciu ilustruje obrázok (1.6). Reprezentatívna cesta pozostáva z r sekcií končiacich na osi x. Preklopením sekcií cez os x, môžeme skonštruovať 2^r takýchto rôznych ciest, pretože každý z r úsekov môže ležať pod alebo nad osou. Takto sme získali všetky cesty končiace r-tým návratom, pričom vieme že ich počet je 2^r-krát väčší než počet reprezentatívnych ciest. Teda, ak dokážeme, že počet ciest s prvým prechodom cez bod $[n-r,r]$ je rovnaký ako počet reprezentívnych ciest, tým dokážeme platnosť rovnosti

$$\frac{\text{počet ciest s prvým prechodom cez bod } [n-r,r]}{2^{n-r}} = \frac{\text{počet reprezentatívnych ciest}.2^r}{2^n}.$$

Jednoznačnú korešpodenciu medzi týmito dvoma triedami ciest dokážeme geometricky. Ak z reprezentatívnej cesty odoberieme r stien, ktorých ľavý bod leží na osi x, tak dostaneme cestu s prvým prechodom cez bod $[n-r,r]$. Reverzná konštrukcia spočíva vo vložení záporných r stien začínajúcich v počiatku a $r-1$ vrcholov označujúcich prvé prechody cez $1,2,\ldots,r-1$.

❑

1.7 Dualita a pozícia maxima

Nech je daná postupnosť $X_i = \pm 1$ dĺžky n. Obrátením poradia postupnosti získame novú postupnosť, a tým aj novú cestu. Geometricky túto cestu získame rotáciou danej cesty o 180 stupňov okolo bodu, v ktorom cesta končí. Na tento bod sa pozeráme ako na nový počiatok v novom súradnicovom systéme.

Definícia 3. *Nech $n,k \in \mathbb{N}$. Nech $\{X_k\}_{k=1}^n$ je postupnosť nezávislých a rovnako rozdelených diskrétnych náhodných veličín. Označme S_k ako parciálny súčet $S_k = X_1 + X_2 + ... + X_k$. Potom náhodná prechádzka $\{S_k^*\}_{k=1}^n$ definovaná vzťahom*

$$X_1^* = X_n, \ldots, X_n^* = X_1, \tag{1.17}$$

sa nazýva duálna.

Parciálne sumy duálnej náhodnej prechádzky sú určené vzťahom

$$S_k^* = X_1^* + \cdots + X_k^* = S_n - S_{n-k},$$

kde $S_0^* = 0$ a $S_n^* = S_n$.

Uvedieme základné príklady duálnych náhodných prechádzok.

Príklad 3. Podľa (1.17) je zrejmé, že udalosti splňujúce

$$S_j^* > 0, \qquad j = 1,2,\ldots,n \tag{1.18}$$

a

$$S_n > S_j, \qquad j = 0,1,2,\ldots,n-1 \tag{1.19}$$

sú duálne navzájom. Podľa vzťahu (1.7) je pravdepodobnosť prvej udalosti $\frac{1}{2}u_{2v}$ pre $n = 2v$ alebo $n = 2v+1$. Teda je to aj pravdepodobnosť, že prvý prechod cez pozitívny bod nastane v čase n (t.j. posledný bod náhodnej prechádzky nebol pred časom n navštívený).

Príklad 4. V predchádzajúcom príklade nebol posledný bod náhodnej prechádzky bližsie špecifikovaný. Doplníme k vzťahu (1.19) podmienku $S_n = r$, potom bod $[n,r]$ je bodom prvého prechodu. Duálna udalosť pozostáva z ciest z počiatku do $[n,r]$ a všetky jej vnútorné vrcholy sú nad osou. Počet takýchto ciest spočítame podľa lemmatu (1). Všimneme si, že sme alternatívne dokázali vzťah (1.16).

Príklad 5. Nový pár duálnych udalostí je definovaný, keď striktné nerovnosti $>$ v (1.18) a (1.19) zmeníme na $\geq$. Druhá udalosť nastáva vtedy, keď S_n je maximálne párne číslo, dokonca aj v prípade, že maximum už bolo dosiahnuté pred časom n. Podľa vzťahu (1.8) vidíme, že pravdepodobnosť tejto udalosti je u_{2v} pre $v = \frac{1}{2}n$ alebo $v = \frac{1}{2}(n-1)$.

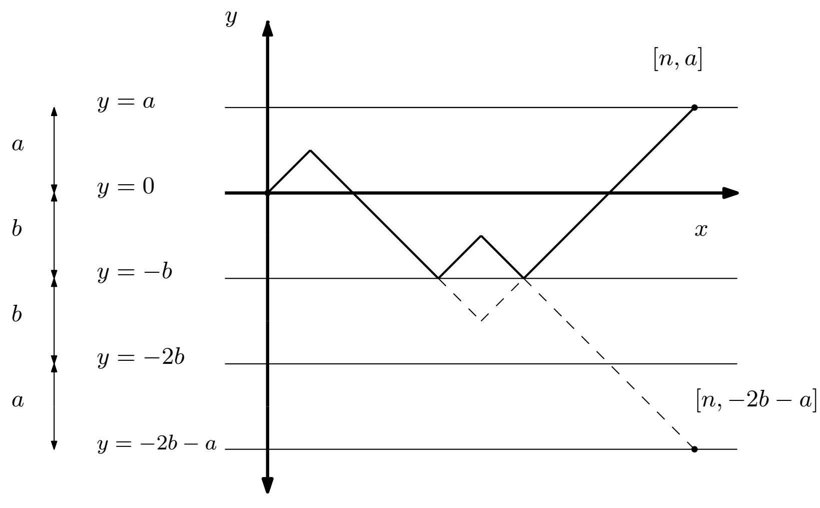
Kapitola 2

Vybrané problémy a ich riešenia

2.1 Problém počtu ciest

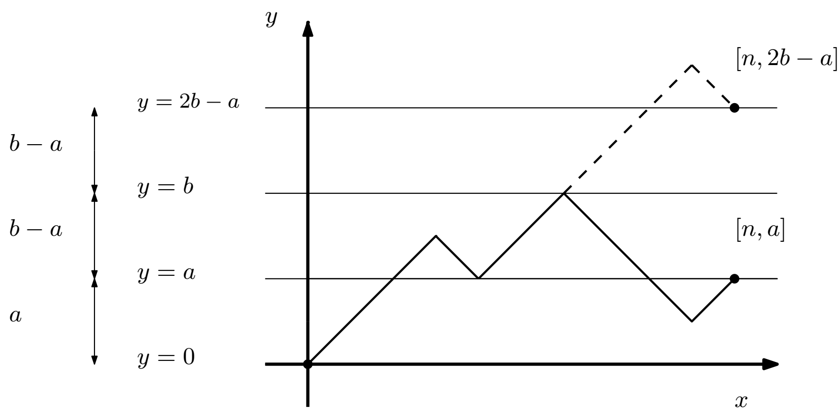
Zadanie. Nech $a > 0$ a $b > 0$, počet všetkých ciest s_1,s_2,...,s_n takých, že $s_1 > -b$,...,$s_{n-1} > -b$,$s_n = a$ je rovný $N_{n,a} - N_{n,2b+a}$.

Riešenie. Jadro riešenia spočíva v tom, že spočítame všetky cesty idúce z počiatku do bodu $[n,a]$ a od nich odpočítame všetky cesty idúce z počiatku do bodu $[n,a]$ také, ktoré sa dotýkajú alebo pretínajú priamku $y = -b$. Teda počet ciest z počiatku do $[n,a]$ dotýkajúcich sa alebo pretínajúcich priamku $y = -b$ je podľa lemmatu (1) rovný počtu všetkých ciest z počiatku do bodu A'. Pričom zrkadlový obraz $A' = [n, -2a - b]$ bodu $[n,a]$, sme získali pomocou osovej súmernosti a je určený priamkou $y = -b$. Súradnice bodu $A' = [n, -2a - b]$ ľahko spočítame z obrázka (2.1). Obrázok približuje jednu konkrétnu realizáciu. Teda máme $N_{n,a} - N_{n,-2b-a}$, pričom platí $N_{n,-2b-a} = N_{n,2b+a}$.



Obrázok 2.1: Hodnoty konkrétnej realizácie: n=10, a=2, b=2. Plnou čiarou je vyznačnená cesta idúca z počiatku do bodu $[n,a]$, ktorá sa dotýka priamky $y = -b$. Časť tejto cesty preklopená cez priamku $y = -b$ je vyznačená čiarkovanou čiarou.

Zadanie. Nech $b > a > 0$, potom máme $N_{n,a} - N_{n,2b-a}$ ciest splňujúcich podmienky $s_1 < b, ..., s_{n-1} < b, s_n = a$.



Obrázok 2.2: Hodnoty konkrétnej realizácie: n=10, a=2, b=4. Plnou čiarou je vyznačnená cesta idúca z počiatku do bodu $[n,a]$, ktorá sa dotýka priamky $y = b$. Časť tejto cesty preklopená cez priamku $y = b$ je vyznačená čiarkovanou čiarou.

Riešenie. Riešime ako v predchádzajúcom prípade, teda spočítame počet všetkých ciest z počiatku do $[n,a]$ a od nich odpočítame všetky cesty z počiatku do $[n,a]$ také, ktoré sa dotýkajú alebo pretínajú priamku $y = b$. S využitím lemmatu (1) máme riešenie $N_{n,a} - N_{n,2b-a}$, pričom zrdkadlový bod $[n,2b-a]$ je určený osou $y = b$. Situáciu popisuje obrázok (2.2) pre jednu konkrétnu realizáciu.

2.2 Druhý problém počtu ciest

Zadanie. Nech $a > c > 0$ a $b > 0$. Počet ciest, ktoré sa dotýkajú $y = a$ a potom vedú do $[n,c]$ bez toho, aby sa dotkli priamky $y = -b$ je rovný $N_{n,2a-c} - N_{n,2a+2b+c}$. Uvedomme si, že to zahrňuje cesty dotýkajúce sa priamky $y = -b$ predtým, než sa dotkli priamky $y = a$.

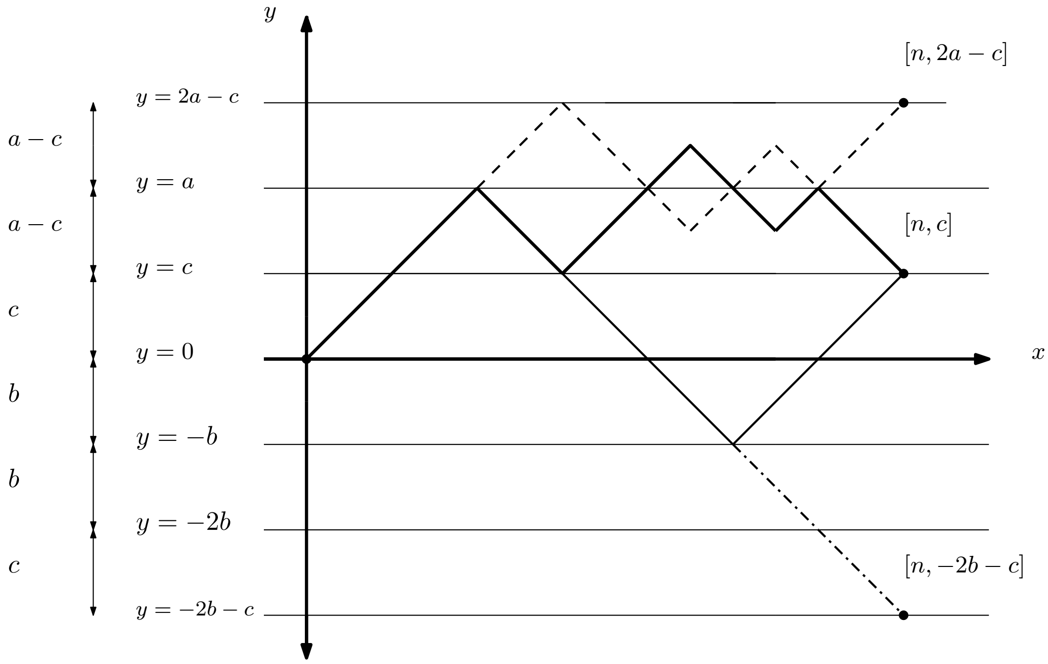
Riešenie. Situáciu popíšeme pomocou obrázka (2.3) pre jednu konkrétnu realizáciu. Najprv požadujeme, aby sa cesta vedúca z počiatku do bodu $[n,c]$ dotkla priamky $y = a$. Podľa príkladu (2.1) druhého zadania je počet takýchto ciest $N_{n,2a-c}$. Takže máme počet ciest, ktoré sa dotknú priamky $y = a$ a ďalej požadujeme, aby sa tieto cesty nedotkli priamky $y = -b$. Použijeme lemma (1) na cestu dotýkajúcu sa priamky $y = -b$, pričom sa predtým mohla dotknúť priamky $y = a$. Teda celkom je výsledný počet ciest tvaru $N_{n,2a-c} - N_{n,2a-(-b-b-c)}$.

2.3 Problém pravdepodobností

Zadanie. Pomocou lemma (3) vyvoďte platnosť vzťahu (bez výpočtu)

$$u_0 u_{2n} + u_2 u_{2n-2} + ... + u_{2n} u_0 = 1$$

Riešenie. Pomocou vzorca (1.6) môžeme pravdepodobnosť $u_{2k}u_{2n-2k}$ ekvivaletne napísať ako $P[S_{2k} = 0]P[S_{2k+1} \neq 0, \ldots, S_{2n-2k} \neq 0]$. Je to pravdepodobnosť cesty s posledným návratom do počiatku v čase $2k$. Stačí si uvedomiť, že súčet pravdepodobností disjunktného rozkladu množiny všetkých ciest podľa posledného návratu do nuly v čase $2k$ je 1, kde $k = 0,1,...,n$.



Obrázok 2.3: Hodnoty konkrétnej realizácie: n=14, a=4, b=2, c=2. Tučnou čiarou je vyznačená cesta z počiatku do $[n,c]$, ktorá sa dotýka priamky $y = a$ a jej časť po preklopení cez túto priamku je vyznačená čiarkovanou čiarou. Cesta z počiatku do $[n,c]$, ktorá sa najprv dotýka priamky $y = a$ a potom priamky $y = -b$, je vyznačená normálne tučnou čiarou. Jej časť preklopená cez priamku $y = -b$ je vyznačená bodkočiarkovanou čiarou.

2.4 Pravdepodobnosti u_{2n} a f_{2n}

Zadanie. Ukážte, že

$$u_{2n} = (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} \qquad \text{a} \qquad f_{2n} = (-1)^{n-1} \binom{\frac{1}{2}}{n}.$$

Riešenie. u_{2n} a f_{2n} dosadíme do vzťahu (1.5) a dostaneme

$$(-1)^0 \binom{\frac{1}{2}}{1} (-1)^{n-1} \binom{-\frac{1}{2}}{n-1} + (-1)^1 \binom{\frac{1}{2}}{1} (-1)^{n-2} \binom{-\frac{1}{2}}{n-2} + ... \\ + (-1)^{n-1} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-1)^0 \binom{-\frac{1}{2}}{0} = (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n},$$

následne upravujeme

$$-(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} + (-1)^0 \binom{\frac{1}{2}}{1} (-1)^{n-1} \binom{-\frac{1}{2}}{n-1} + (-1)^1 \binom{\frac{1}{2}}{1} (-1)^{n-2} \binom{-\frac{1}{2}}{n-2} + ... \\ + (-1)^{n-1} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-1)^0 \binom{-\frac{1}{2}}{0} = 0$$

$$(-1)^{-1}\binom{\frac{1}{2}}{0}(-1)^{n}\binom{-\frac{1}{2}}{n}+(-1)^{0}\binom{\frac{1}{2}}{1}(-1)^{n-1}\binom{-\frac{1}{2}}{n-1}+$$
$$(-1)^{1}\binom{\frac{1}{2}}{1}(-1)^{n-2}\binom{-\frac{1}{2}}{n-2}+...+(-1)^{n-1}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^{0}\binom{-\frac{1}{2}}{0}=0$$

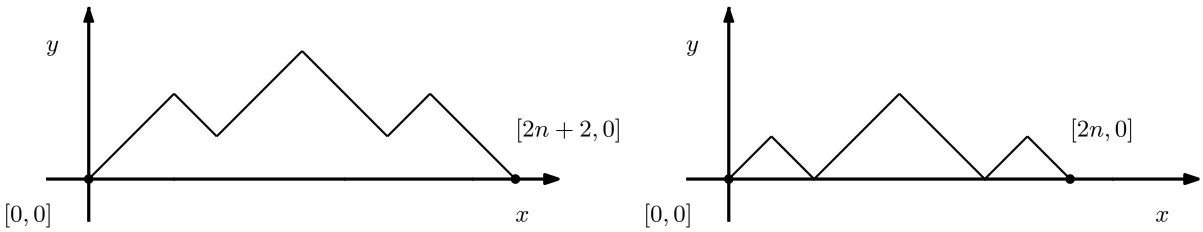
$$(-1)^{n-1}[\binom{\frac{1}{2}}{0}\binom{-\frac{1}{2}}{n}+\binom{\frac{1}{2}}{1}\binom{-\frac{1}{2}}{n-1}+\binom{\frac{1}{2}}{1}\binom{-\frac{1}{2}}{n-2}+...+\binom{\frac{1}{2}}{n}\binom{-\frac{1}{2}}{0}]=0.$$

Podľa poznámky (2) posledná rovnosť platí.

2.5 Kladné cesty

Zadanie. Geometricky dokážte, že počet ciest končiacich v bode $[2n+2{,}0]$ so všetkými vrcholmi striktne nad osou x je rovný počtu všetkých ciest končiacich v bode $[2n{,}0]$ so všetkými vrcholmi na alebo nad osou x. Potom platí vzťah

$$P[S_1 \geq 0,...,S_{2n-1} \geq 0, S_{2n} = 0] = 2f_{2n+2}.$$



Obrázok 2.4: Hodnota konkrétnej realizácie: n=4. Naľavo vidíme cestu z počiatku do bodu $[2n+2{,}0]$ s vrcholmi striktne nad osou x. Napravo vidíme cestu z počiatku do bodu $[2n{,}0]$ s vrcholmi na a nad osou x.

Riešenie. Cesta(I.typ) z počiatku idúca do bodu $[2n+2{,}0]$ a majúca všetky vrcholy striktne nad osou, určite prechádza bodom $[1{,}1]$ a bodom $[2n+1{,}1]$. Z cesty I.typu odstránime prvý a posledný úsek, pričom prvý úsek je nutne rastúci a druhý klesajúci. Potom nová cesta(II.typ) má dĺžku $2n$ a má všetky vrcholy na alebo nad novou osou x. Tieto 2 cesty sa navzájom jednoznačne určujú. Obrázok (2.4) ilustuje oba typy ciest pre jednu konkrétnu realizáciu. Teda existuje jednoznačný vzťah medzi týmito dvoma typmi ciest a ich počet je rovnaký.

Cesta I.typu, je cesta s prvým návratom do počiatku v čase $2n+2$ a s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ je pozitívna. Teda pravdepodobnosť, že nastane cesta I.typu je $\frac{1}{2}f_{2n+2}$. Cesta II.typu nastane s pravdepodobnosťou

$$P[S_1 \geq 0,...,S_{2n-1} \geq 0, S_{2n} = 0].$$

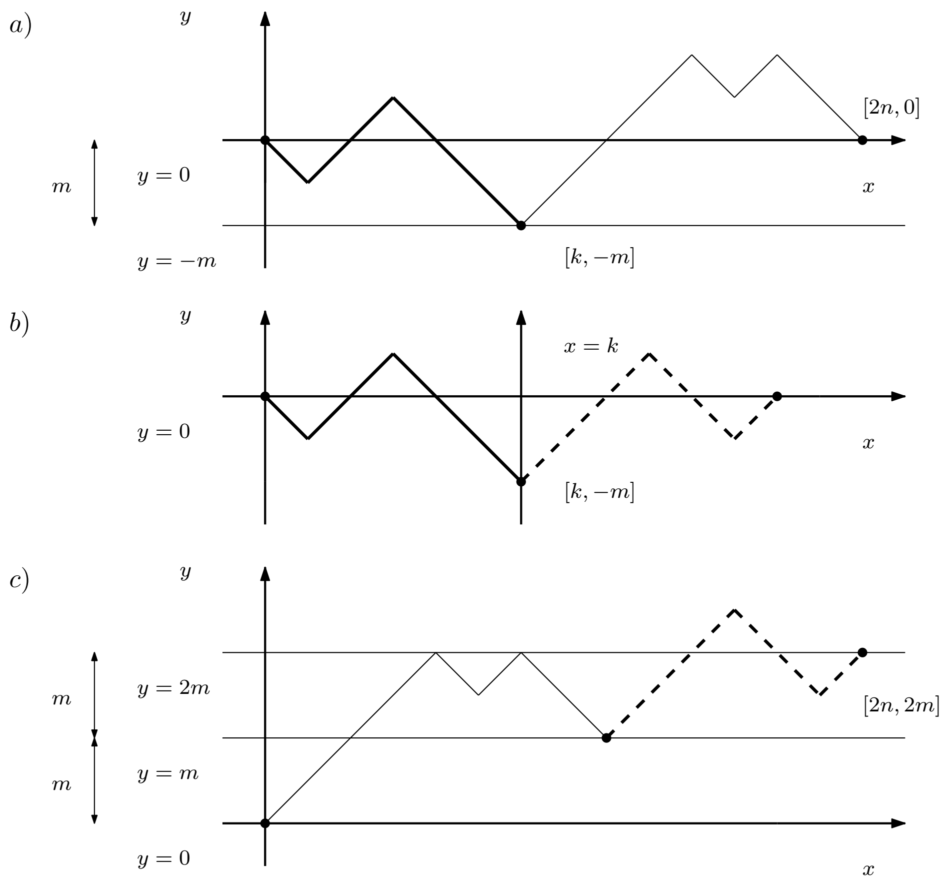
Uvedomíme si, že jav $S_1 > 0$ a súčasne jav $S_{2n+2} > 0$ v pôvodnej súradnicovej sústave nastanú s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Potom teda platí rovnosť

$$\frac{1}{2}f_{2n+2} = \frac{1}{4}P[S_1 \geq 0,...,S_{2n-1} \geq 0, S_{2n} = 0].$$

2.6 Geometrický dôkaz reformulácie hlavného lemmatu

Zadanie. Geometricky dokážte lemma (3) ukázaním, že nasledujúca konštrukcia[1] potvrdzuje jednoznačnú korešpondenciu medzi dvoma triedami ciest.

Nech je daná cesta z počiatku do bodu $[2n,0]$. Označme bodom $M = [k, -m]$ minimum tejto cesty, ktoré je umiestnené najviac vľavo. Úsek z počiatku do bodu M zrkadlovo prevrátime cez vertikálnu priamku $x = k$ a tento zrkadlovo prevrátený úsek presunieme do bodu $[2n,0]$. Bod M vezmeme ako nový počiatok v novom súradnicovom systéme, pričom nová cesta vedie do bodu $[2n,2m]$ a má všetky vrcholy na alebo nad novou osou x. Túto konštrukciu popisuje obrázok (2.5) pre jednu konkrétnu realizáciu.



Obrázok 2.5: Hodnoty konkrétnej realizácie: n=7, m=2, k=6. a) Cesta z počiatku do bodu $[2n,0]$, pričom tučnou čiarou je vyznačená jej časť z počiatku do bodu minima $M = [k,-m]$. b) Tučnou čiarou je vyznačená cesta z počiatku do minima a čiarkovanou čiarou jej zrkadlový obraz určený priamkou $x = k$. c) Novovzniknutá cesta s novým počiatkom vedúca do bodu $[2n,2m]$, pričom čiarkovanou čiarou je vyznačená jej časť, ktorej konštrukciu popisuje obrázok b).

Riešenie. Nazvime cestu z počiatku do bodu $[2n,0]$ cestou I.typu. $P[S_{2n} = 0] = u_{2v}$ je zrejme pravdepodobnosť, že nastane cesta I.typu. Kedže bod $M = [k, -m]$

[1] Konštrukcia vznikla zásluhou E.Nelsona.

je minimum tejto cesty, tak platí, že $m \in 0,1,\ldots,n$. Konštrukciou popísanou v zadaní teda získame cestu(II.typ) z počiatku do bodu $[2n,2m]$, kde $m \in 0,1,\ldots,n$. Vidíme, že pravdepodobnosť cesty II.typu je $P[S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \ldots, S_{2n} \geq 0]$. U oboch tried je dĺžka ciest rovnaká. Teda ak dokážeme, že tieto dve triedy ciest sa navzájom jednoznačne určujú, dokážeme aj platnosť vzťahu

$$P[S_{2n} = 0] = P[S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \ldots, S_{2n} \geq 0],$$

ktorý je reformuláciou lemmatu (3).

Na cestu II.typu môžete aplikovať reverznú konštrukciu ku konštrukcii popísanej v zadaní a to nasledovným spôsobom. Nech teda máme danú ľubovoľnú cesta II.typu. Táto cesta ide z počiatku do bodu $[2n,2m]$. Vezmeme bod vo výške m prvý zprava(=posledný zľava). Tento bod má súradnice $[2n-k,m]$. Úsek z bodu $[2n-k,m]$ do bodu $[2n,2m]$ zrkadlovo prevrátime cez vertikálnu priamku $x = 2n - k$. Tento prevrátený úsek posunieme na začiatok cesty, a to tak, že posledný bod tohto úseku bude identický s bodom $[0,0]$. Bod $[-k,m]$, v ktorom nová cesta začína, prehlásime za nový počiatok v novej súradnicovej sústave. A teda získali sme jednoznačne určenú cestu I.typu.

Predpokladajme, že máme dve cesty, ktoré vznikli aplikáciou konštrukcie popísanej v zadaní na I.typ. Potom aplikáciou vyššie popísanej reverznej konštrukcie by sme mali získať práve jednu cestu a to pôvodnú. My však dostame dve rôzne cesty a sme v spore s predpokladom. Geometricky sme teda dokázali, že medzi týmito dvoma triedami ciest existuje jednoznačná korešpondecia a teda dokázali sme aj lemma (3).

2.7 Dôkaz reformulácie hlavného lemmatu

Zadanie. Dokážte priamo vzťah (1.9) uvažením ciest, ktoré sa nikdy nedotknú priamky $y = -1$.

Riešenie. Ľavá strana je rovna $\frac{1}{2}u_{2n}$ podľa (1.7). Spočítame pravdepodobnosť na pravej strane nasledovne

$$P[S_1 \geq 0, \ldots, S_{2n-1} \geq 0] = \sum_{k=1}^{\infty} P[S_1 \geq 0, \ldots, S_{2n-2} \geq 0, S_{2n-1} = 2k-1]$$

Podľa prvého problému (2.1) je počet ciest splňujúcich podmienky na pravej strane rovnosti $N_{2n-1,2k-1} - N_{2n-1,2k+1}$ a teda máme

$$\sum_{k=1}^{\infty} (p_{2n-1,2k-1} - p_{2n-1,2k+1}).$$

Je zrejmé, že členy sumy pre $2k-1 > 2n-1$ vypadnú. Sumu rozpíšeme, jej členy sa odpočítajú a výsledný tvar je $p_{2n-1,1}$. Teda celkom máme

$$\frac{1}{2}u_{2n} = P[S_1 > 0, \ldots, S_{2n} > 0] = \frac{1}{2}P[S_1 \geq 0, \ldots, S_{2n-1} \geq 0] = \frac{1}{2}p_{2n-1,1} = \frac{1}{2}u_{2n}$$

Všimneme si, že sme zároveň dokázali aj vzťah (1.8).

2.8 Návraty do počiatku

Zadanie. Pravdepodobnosť, že pred časom $2n$ nastane presne r návratov do počiatku je rovnaká ako pravdepodobnosť, že návrat nastane v čase $2n$ a je predchádzaný najmenej r návratmi.

Riešenie. Nazvime pravdepodobnosť, že pred časom $2n$ nastane presne r návratov do počiatku, pravdepodobnosťou cesty I.typu a pravdepodobnosť, že návrat nastane v čase $2n$ a je predchádzaný najmenej r návratmi, pravdepodobnosťou cesty II.typu.

Nech $r = 0$. Pre pravdepodobnosť cesty I.typu, t.j. že žiaden návrat do počiatku nenastane, platí

$$P[S_1 \neq 0,...,S_{2n} \neq 0] = u_{2n}.$$

Pre pravdepodobnosť cesty s návratom do počiatku v čase $2n$ predchádzaným najmenej žiadnym návratom (II.typu) platí

$$P[S_{2n} = 0] = u_{2n}.$$

S využitím hlavného lemmatu pre $r = 0$ je pravdepodobnosť cesty I.typu rovná pravdepodobnosti cesty II.typu.

Chceme ukázať rovnosť pravdepodobností oboch typov ciest pre $1 \leq r \leq n-1$. Predpokladajme, že posledný návrat do počiatku pre cestu I.typu nastane v čase $2v$, kde $r \leq v \leq n-1$. Stačí si uvedomiť, že pravdepodobnosť, že r-tý návrat do počiatku nastáva v čase $2v$ je daná $\phi_{r,2v-r}$ podľa (11). To je pravdepodobnosť prvého úseku cesty z počiatku do bodu $[2v,0]$. Na cestu vedúcu z bodu $[2v,0]$ dĺžky $2n - 2v$ aplikujeme hlavné lemma. Teda pravdepodobnosť cesty I.typu pre $1 \leq r \leq n-1$ je rovná

$$\sum_{v=r}^{n-1} \phi_{r,2v-r} u_{2n-2v}.$$

Pre pravdepodobnost cesty II.typu máme, že pravdepodobnosť r-tého návratu do počiatku nastáva v čase $2v$ je daná $\phi_{r,2v-r}$ podľa (11). Na cestu vedúcu z bodu $[2v,0]$ do bodu $[2n,0]$ aplikujeme hlavné lemma. Je zrejmé, že pravdepodobnosti oboch typov ciest sa rovnajú a to pre $0 \leq r \leq n-1$.

2.9 Pokračovanie návratov do počiatku

Zadanie. Označme pravdepodobnosť, že presne r návratov do počiatku nástavá do a vrátane času $2n$. S využitím predchádzajúceho problému ukážte, že $z_{r,2n} = \rho_{r,2n} + \rho_{r+1,2n} + ...$, kde $\rho_{r,2n}$ je pravdepodobnosť, že r-tý návrat nastáva v čase $2n$.

Riešenie. Označme $\psi_{r,2n}$ pravdepodobnosť, že pred časom $2n$ nastane presne r návratov do počiatku. V predchádzajúcom probléme sme spočítali, že $\psi_{r,2n} = \sum_{v=r}^{n-1} \phi_{r,2v-r} u_{2n-2v}$. Keďže $\rho_{r,2n}$ je pravdepodobnosť, že r-tý návrat nastáva v čase $2n$, tak platí $\psi_{r,2n} = \rho_{r+1,2n} + \rho_{r+2,2n} + ... + \rho_{n,2n}$. Teda pravdepodobnosť, že presne r návratov do počiatku nástavá do a vrátane času $2n$ je rovna súčtu pravdepodobosti, že pred časom $2n$ nastane presne r návratov do počiatku a pravdepodobnosti, že r-tý návrat nastáva v čase $2n$. V matematickom zápise

$$z_{r,2n} = \psi_{r,2n} + \rho_{r,2n}.$$

2.10 Maximum cesty

Zadanie. Pravdepodobnosť, že $S_{2n} = 0$ a maximum cesty $S_1, \ldots, S_{2n-1}$ je aspoň k, je rovnaká ako $P[S_{2n} = 2k]$. Tvrdenie dokážte pomocou princípu odrazu a taktiež ukázaním, že existuje jednoznačná korešpondecia medzi týmito dvoma triedami ciest.

Riešenie. Bod $A' = [2n{,}2k]$, zrkadlový obraz bodu $A = [2n{,}0]$, získame pomocou osovej súmernosti a je určený priamkou $y = k$. Potom počet ciest z počiatku do bodu $A = [2n{,}0]$ takých, ktoré sa dotýkajú alebo pretínajú priamku $y = k$, t.j. majú maximum aspoň k, je podľa lemmatu (1) rovný $p_{2n,2k} = P[S_{2n} = 2k]$.

Z pricípu odrazu taktiež vidíme korešpondenciu medzi týmito dvoma triedami ciest. Počet ciest z počiatku do bodu $A = [2n{,}0]$ dotýkajúcich sa alebo pretínajúcich priamku $y = k$, je rovnaký ako počet všetkých ciest z počiatku do bodu A'. Tieto dve triedy sú navzájom jednoznačne určené a pretože cesty u oboch tried majú rovnakú dĺžku $2n$, tak aj ich pravdepodobnosti sa rovnajú.

Záver

V práci sme sa zaoberali prostými náhodnými prechádzkami a vybranými problémami s nimi súvisiacimi.

V prvej časti sme kládli dôraz na dôležité tvrdenia ako princíp odrazu, hlavné lemma, tiež zákon arcsinu a na ich dôkazy pre lepšiu orientáciu v problematike a pre pomoc pri riešení. Ďalej sme bližšie vysvetlili podstatu zákona arcsinu a popísali aproximáciu pravdepodobnosti.

V druhej časti sme vyriešili 10 problémov. Uvedomili sme si, že problémy počtu ciest sa dajú ľahko vypočítať podľa princípu odrazu. Geometricky a aj výpočtom sme dokázali reformuláciu hlavného lemmatu. Taktiež sme vypočítali pravdepodobnosť v probléme s návratom do počiatku a v probléme maxima cesty. Vyriešením problémov sme si osvojili používanie základných princípov a do danej problematiky sme sa dostali hlbšie.

Zoznam použitej literatúry

CHARLES M. GRINSTEAD, S. C. a SNELL, J. L. (1997). *Introduction to probabilitity.* Second revised edition. ISBN 978-0-8218-9414-9.

FELLER, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume I. Third edition.

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek