Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Matej Šimlovič

Variabilní životní důchod

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2013

Rád by som poďakoval RNDr. Lucii Mazurovej, Ph.D., vedúcej bakalárskej práce, za ochotu a cenné rady pri písaní tejto práce. Takisto by som rád poďakoval svojím rodičom a bratovi za finančnú aj morálnu podporu, bez ktorej by bolo štúdium omnoho náročnejšie. V neposlednej rade chcem poďakovať svojím blízkym priateľom a spolužiakom, ktorí ma v štúdiu podporovali.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze, dne 5.12.2013 Matej Šimlovič

Název práce: Variabilní životní důchod

Autor: Matej Šimlovič

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práce obsahuje v první kapitole popis variabilního životního důchodu a čtyř základních garancí: garance minimálního plnění v případě smrti, garance minimálního zhodnocení, garance minimálního příjmu a garance minimálních výběrů. Pro každou garanci je popsaný její význam, přepoklady plnění, výška plnění, a rozdíl proti produktu bez garance, tedy samotný benefit z garance. V druhé kapitole jsou odvozeny očekávané hodnoty benefitů z popsaných garancí při doplněných předpokladech a numerický výpočet očekávaných hodnot benefitů pro obě pohlaví, různé vstupní věky a různé parametry investice.

Klíčová slova: variabilní životní důchod, garance, očekávaná hodnota, zbývající délka života

Title: Variable life annuity

Author: Matej Šimlovič

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In the first chapter, the thesis contains a description of variable annuity and description of four basic guarantees: guaranteed minimum death benefit, guaranteed minimum accumulation benefit, guaranteed minimum income benefit and guaranteed minimum withdrawal benefit. For each of these guarantees, there is a description of principle of the benefit, assumptions of payment, amount of payment and a difference from a product without such guarantee, thus a net benefit from the guarantee. In the second chapter, with additional assumptions, there are deductions of expected values of benefits from the described guarantees and numerical calculation of these expected values for both genders, various entering ages and various investment variables.

Keywords: variable annuity, guarantee, expected value, remaining life

Názov práce: Variabilný životný dôchodok

Autor: Matej Šimlovič

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práca obsahuje v prvej kapitole popis variabilného životného dôchodku a štyroch základných garancií: garancia mimimálneho plnenia v prípade smrti, garancia minimálneho zhodnotenia, garancia minimálneho príjmu a garancia minimálnych výberov. Pre každú z garancií je popísaný jej význam, predpoklady plnenia, výška plnenia a rozdiel oproti produktu bez garancie, teda samotný benefit z garancie. V druhej kapitole sú odvodené očakávané hodnoty benefitov z popísaných garancií pri doplnených predpokladoch a numerický výpočet očakávaných hodnôt benefitov pre obe pohlavia, rôzne vstupné veky a rôzne parametre investície.

Kľúčové slová: variabilný životný dôchodok, garancia, očakávaná hodnota, ostávajúca dĺžka života

Obsah

Úvod

Variabilný životný dôchodok[1] je poistný produkt s investičným zámerom obsahujúci možnosť viacerých garancií. Popis tohto produktu sa okrem iného nachádza v [1], [2] a [4]. Produkt sa dá rozdeliť na dve fázy. V prvej, kumulačnej, fáze klient vkladá peniaze na svoj účet. Za tieto peniaze sú nakupované podielové jednotky v jednom alebo viacerých podielových fondoch. Tieto fondy volí klient podľa vlastných preferencií. Môže si tak sám nakombinovať portfólio produktov a tým určiť mieru rizika a mieru očakávaného výnosu svojej investície. V druhej, výplatnej, fáze nadobúda klient príjem, ktorého výška je závislá na vkladoch a výnosoch zvolených investícií. Tento príjem môže pochádzať z predaja podielových jednotiek a peňažných výberov z klientovho účtu, alebo v prípade anuitizácie na konci kumulačnej fázy z platieb definovaných zakúpenou anuitou.

Podľa [2], variabilný životný dôchodok existuje v USA od päťdesiatych rokov dvadsiateho storočia. Prvý takýto produkt sa objavil v roku 1952. Bol vydaný asociáciou pre poistenie učiteľov[2] pre potreby plánov starobných dôchodkov zamestnancov univerzity. V roku 1980 bola k tomuto poisteniu poprvýkrát pripojená garancia poistného plnenia v prípade smrti. V roku 1996 nasledovala garancia minimálneho príjmu vo výplatnej fáze. V roku 2000 sa na trhu prvýkrát objavila garancia minimálneho výnosu pre prípad prepadu alebo stagnácie hodnoty klientovho účtu.

Dnes má produkt variabilného životného dôchodku mnoho modifikácií a ponúka výber z veľkej škály rôznych garancií a ich kombinácií. Produkt je veľmi obľúbený v USA a Západnej Európe a postupne preniká na ďalšie trhy.

V prvej kapitole tejto práce popíšeme základné vlastnosti produktu a garancií. Pre každú z garancií popíšeme jej význam, predpoklady plnenia, výšku plnenia a samotný benefit z garancie ako rozdiel oproti produktu bez danej garancie. V druhej kapitole odvodíme a numericky vypočítame očakávané hodnoty benefitov z popísaných garancií pri doplnených predpokladoch.

[1] angl. variable life annuity

[2] Teachers Insurance And Annuity Association, College Retirement Equities Fund

Kapitola 1

Vlastnosti variabilného životného dôchodku

1.1 Podúčty

Variabilný životný dôchodok začína prevažne jednorázovým vkladom klienta. Neskôr je možné realizovať ďalšie vklady, pravidelne aj nepravidelne. Po odrátaní počiatočných poplatkov sú vklady podľa rozhodnutia klienta rozdelené na čiastky investované do jednotlivých aktív v podobe účasti vo fondoch. Investícia do istého fondu tak tvorí podúčet[1] klientovho účtu, ktorého meniacu sa hodnotu je možné sledovať. Klient tak má dobrý prehľad o jednotlivých investíciach.

Za určených podmienok môže klient prostriedky medzi podúčtami presúvať, vystúpiť z istého fondu a podúčet tak zrušiť, investovať do iných fondov a tým vytvárať nové podúčty. Tým môže klient určovať vlastnosti portfólia, akými sú napríklad predpokladané výnosy a miera rizika.

Poplatky za vedenie produktu a zvolené garancie majú formu jednorázového alebo pravidelného znižovania hodnoty jednotlivých podúčtov, spravidla o percentuálnu čiastku z ich hodnoty.

1.2 Demografický model

Finančný priebeh produktu u každého klienta, počet a výška finančných transakcií, závisí na dĺžke života klienta. V tejto časti si ukážeme model dĺžky života podľa [3].

Predpokladajme podpis zmluvy v čase $t_0 = 0$. Ďalej predpokladajme, že sa klient v čase t_0 dožíva práve veku x. Nech T_x vyjadruje ostávajúcu dĺžku života klienta. Klient teda umrie vo veku $x + T_x$. Ostávajúca dĺžka života T_x je náhodná veličina s distribučnou funkciou

$$G(t) = P[T_x \leq t] \ , \ t \geq 0 \ . \tag{1.1}$$

Predpokladajme, že $G(t)$ poznáme. Pripomeňme, že $G(t)$ je taktiež funkciou x. Funkcia $G(t)$ pre dané t vyjadruje pravdepodobnosť, že klient vo veku x umrie

[1] angl. subaccount

pred dovŕšením veku $x+t$. Túto pravdepodobnosť označíme podľa bežného značenia ${}_tq_x$. Teda

$$ {}_tq_x = G(t) \ . \tag{1.2} $$

Podobne označíme

$$ {}_tp_x = 1 - G(t) \tag{1.3} $$

pravdepodobnosť, že sa klient vo veku x dožije aspoň veku $x+t$. Špeciálne potom označíme $q_x = {}_1q_x$ a $p_x = {}_1p_x$. Ďalej označíme

$$ {}_tq_{x+s} = P[T_x \leq s+t | T_x > s] = \frac{G(s+t) - G(s)}{1 - G(s)} \tag{1.4} $$

podmienenú pravdepodobnosť, že klient vo veku x umrie pred dovŕšením veku $x+s+t$ za podmienky dožitia sa veku $x+s$ a

$$ {}_tp_{x+s} = P[T_x > s+t | T_x > s] = \frac{1 - G(s+t)}{1 - G(s)} \tag{1.5} $$

podmienenú pravdepodobnosť, že klient vo veku x sa dožije veku $x+s+t$ za podmienky dožitia sa veku $x+s$. Z posledných rovníc je vidieť

$$ P[s < T_x \leq s+t] = G(s+t) - G(s) = (1 - G(s))\frac{G(s+t) - G(s)}{1 - G(s)} = {}_sp_x \ \cdot \ {}_tq_{x+s} \ . \tag{1.6} $$

Pre jednoduchosť nebudeme v ďalšom texte používať spojité, ale diskrétne rozdelenie ostávajúcej dĺžky života. Nech

$$ T_x = \tau_x + S_x \ , \tag{1.7} $$

kde $\tau_x = [T_x]$ je celočíselná ostávajúca dĺžka života v rokoch a S_x je zvyšok. τ_x je náhodná veličina a jej rozdelenie je definované vzťahom

$$ P[\tau_x = k] = P[k < T_x \leq k+1] = {}_kp_x \cdot \ q_{x+k} = \ p_x \cdot \ p_{x+1} \cdot .. \cdot \ p_{x+k-1} \cdot \ q_{x+k} \ . \tag{1.8} $$

Distribúciu ostávajúcej dĺžky života môžeme zkonštruovať z vhodne zvolenej úmrtnostnej tabulky.

O typoch úmrtnostných tabuliek sa pojednáva v [4]. V klasických úmrtnostných tabulkách môžeme nájsť podmienené pravdepodobnosti úmrtia q_x vo veku x. Táto pravdepodobnosť odpovedá úmrtnosti generačného ročníku, ktorý sa dožíva daného veku v roku, kedy je tabulka vytvorená. Pri výpočte podmienenej pravdepodobnosti dožitia sa vysokého veku u mladého človeka sa tak použijú podmienené pravdepodobnosti odpovedajúce celej škále generačných ročníkov a to napriek medzigeneračnému poklesu úmrtnosti. Tento prístup spresňujú takzvané generačné úmrtnostné tabulky, ktoré obsahujú maticu pravdepodobností úmrtia q_x^r pre rôzne veky x a rôzne roky narodenia r. Výpočet pravdepodobnosti, že sa napríklad muž, ktorý má v roku 2013 25 rokov, dožije veku 65 rokov, bude potom vyzerať nasledovne:

$$ {}_{40}p_{25}^{1988} = p_{25}^{1988} \cdot \ p_{26}^{1988} \cdot .. \cdot \ p_{64}^{1988} \ . \tag{1.9} $$

Ďalším spresnením môže byť vytvorenie úmrtnostnej tabulky špeciálne pre istú skupinu ľudí, poistný kmeň, ktorí sa svojimi špecifikami odlišujú od globálnej populácie. V tomto ohľade stojí za zmienku problematika takzvaných unisex úmrtnostných tabuliek zlučujúcich mužskú a ženskú populáciu z antidiskriminačných dôvodov, napriek nižšej úmrtnosti žien.

1.3 Anuitizácia účtu

Označme T čas ukončenia kumulačnej fázy. Nech sa klient pri započatí produktu rozhodne, že vo výplatnej fáze bude mať záujem o príjem pochádzajúci z anuity. Ak sa následne dožije času T, dôjde v tomto čase k zakúpeniu anuity za prostriedky na klientovom účte. Tento úkon je pomenovaný anuitizácia.
Klient tak následne stráca možnosť akokoľvek disponovať z danými prostriedkami a nadobúda právo na pravidelné platby podľa definície anuity. V prípade skorej smrti a nízkeho využitia anuity nemajú pozostalí automaticky právo na výplatu rozdielu medzi nákupnou cenou anuity a vyplatenými platbami klientovi. Takéto právo musí vyplývať z individuálnej definície anuity, alebo z iných garancií, napríklad garancie minimálneho plnenia v prípade smrti.

Na výpočet výšky platieb anuity sa používa takzvaná anuitizačná miera, vyjadrujúca podiel výšky pravidelnej platby k nákupnej cene anuity v čase T. Označme anuitizačnú mieru η. Ak predpokladáme jednotkovú nákupnú cenu anuity, pravidelné platby majú výšku práve η. Na jej výpočet použijeme princíp rovnosti nákupnej ceny anuity v čase T a očakávanej súčasnej hodnoty finančného toku vyplývajúceho z anuity v čase T. Na diskontovanie použijeme intenzitu úroku δ_0 odpovedajúcu bezrizikovej úrokovej miere.
V prípade doživotnej anuity závisí finančný tok na čase smrti. Očakávanú súčasnú hodnotu finančného toku tak vyjadríme vzťahom

$$1 = \eta \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_{x+T} \cdot e^{-\delta_0 k} \ . \tag{1.10}$$

V prípade anuity s pevným počtom platieb, značeným N, sa η vypočíta zo vzťahu

$$1 = \eta \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\delta_0 k} \ . \tag{1.11}$$

V tomto prípade budú všetky platby vyplatené klientovi alebo jeho pozostalým.

1.4 Garancie

Garancie sa delia do základných skupín označovaných ako GMxB[2], garantovaný minimálny benefit typu x, kde x môže byť D - smrť[3], A - zhodnotenie[4], I - príjem[5], alebo W - možnosť výberu[6] z účtu.

V nasledujúcej časti priblížime vlastnosti jednotlivých garancií a príslušných benefitov podľa [1]. Hodnoty týchto benefitov závisia na ostávajúcej dĺžke života klienta τ_x, ktorá je náhodnou veličinou. Pri popise benefitov použijeme konkrétne realizácie $\tau_x = \tau$. Nech klient v čase $t_0 = 0$ investuje do jedného aktíva vklad vo výške P a navyše zaplatí počiatočné poplatky spojené so zriadením účtu a poistné za zvolené garancie. Samotný vklad P tak v plnej výške tvorí hodnotu

[2]angl. Guaranteed Minimum x-type Benefit
[3]angl. Death
[4]angl. Accumulation
[5]angl. Income
[6]angl. Withdrawal

klientovho účtu v čase t_0. Nech kumulačná fáza trvá $T > 0$ rokov. Označme A_t hodnotu účtu klienta v čase t. Ďalej predpokladajme zvolenie garancií v čase t_0 a ich ponechanie po celé ich možné trvanie. Taktiež predpokladajme, že počas kumulačnej fázy nedôjde k žiadnym výberom z účtu.

1.4.1 GMDB

Garancia minimálneho plnenia v prípade smrti sa väčšinou vzťahuje na kumulačnú fázu, prípadne na skoré obdobie výplatnej fázy. To býva definované ako obdobie do istého maximálneho veku klienta, napríklad 75 rokov. Označme tento maximálny vek M. V prípade smrti pred vekom M je pozostalým vyplatená jednorázová platba rovná maximu z garantovanej hodnoty G_τ^D a z aktuálnej hodnoty klientovho účtu A_τ. Výšku samotného benefitu z garancie v čase τ môžeme vyjadriť ako navýšenie platby pri úmrtí oproti platbe bez garancie, teda rozdielom týchto hodnôt, pokiaľ je kladný.

$$b_\tau^D = \max\{A_\tau, G_\tau^D\} - A_\tau \ = [G_\tau^D - A_\tau]_+ \ , \tag{1.12}$$

kde $[a]_+$ značí nezápornú časť čísla a.

Nech δ_0 je intenzita úroku odpovedajúca bezrizikovej úrokovej miere. Ak definujeme b_0^D ako diskontovanú hodnotu benefitu do času t_0, môžeme ju vyjadriť vzťahom

$$b_0^D = e^{-\delta_0 \tau}[G_\tau^D - A_\tau]_+ \ . \tag{1.13}$$

Garantovaná hodnota v čase τ, G_τ^D môže byť definovaná fixne, alebo môže byť závislá na hodnote klientovho účtu.

Príkladom fixne definovanej G_τ^D môže byť výška počiatočného vkladu v čase t_0

$$G_\tau^D = P \ , \tag{1.14}$$

alebo výška počiatočného vkladu úročeného garantovanou intenzitou úroku δ_g

$$G_\tau^D = Pe^{\delta_g \tau} \ . \tag{1.15}$$

Príklady G_τ^D odvodeného od hodnoty účtu klienta môžu byť nasledovné. Nech sa v pravidelných intervaloch zaznamenáva hodnota účtu až do času smrti τ. Tieto intervaly bývajú zpravidla ročné, ale môžu mať aj inú dĺžku. Označme časy záznamov t_i, $i \in \{0,1,2,..\}$, $t_i \leq \tau$. Pripomeňme, že v prípade anuitizácie v čase T bude hodnota účtu A_t v časoch $t_i > T$ nulová.
G_τ^D môže byť potom definované ako maximum z hodnôt klientovho účtu v časoch t_i

$$G_\tau^D = \max_{t_i \leq \tau}\{A_{t_i}\} \ , \tag{1.16}$$

alebo hodnota klientovho účtu na konci kumulačnej fázy v čase T

$$G_\tau^D = A_T \ . \tag{1.17}$$

Rovnako sú možné rôzne kombinácie vyššie uvedených definícií garancií. Napríklad

$$G_\tau^D = \max_{t_i \leq \tau}\{Pe^{\delta_g \tau}, A_{t_i}\} \ . \tag{1.18}$$

Pri úmrtí po anuitizácii teda v čase $\tau \geq T$ dosadzujeme $A_\tau = 0$. Ak dôjde k úmrtiu vo veku prevyšujúcom M, teda v čase $\tau \geq M - x$, dosadzujeme aj $G_\tau^D = 0$.

1.4.2 GMAB

Garancia minimálneho zhodnotenia sa vzťahuje na kumulačnú fázu produktu. V určených časoch sa kontroluje hodnota klientovho účtu. Ak je táto nižšia, ako príslušná garantovaná hodnota, je tento schodok dorovnaný. Kontrola sa koná zväčša raz ročne, ale interval môže byť definovaný rôzne. Označme časy, v ktorých sa porovnáva garantovaná hodnota a aktuálna hodnota účtu, $t_j,\ j = 1,2,...,n,\ t_j \leq T,\ t_n = T$. V prípade úmrtia klienta v čase $\tau < T$ bude schodok dorovnaný naposledy v poslednom čase $t_j \leq \tau$. Označme $G^A_{t_j}$ garantovanú hodnotu účtu v čase t_j. Výšku dorovnávaného schodku v čase t_j značenú $b^A_{t_j}$ môžeme vyjadriť vzťahom

$$b^A_{t_j} = \max\{A_{t_j}, G^A_{t_j}\} - A_{t_j} = [G^A_{t_j} - A_{t_j}]_+ \ . \tag{1.19}$$

Pri GMAB je teda definovaných viacero platieb $b^A_{t_j}$. Tie kladné sa pripíšu k hodnote klientovho účtu a klient ich tak môže ďalej zhodnocovať spolu so zvyškom prostriedkov. Celkovú hodnotu benefitu k času t_0 môžeme vyjadriť súčtom pripísaných schodkov diskontovaných do času t_0 intenzitou úroku δ_0

$$b^A_0 = \sum_{j=1}^{n} b^A_{t_j} e^{-\delta_0 t_j} I_{[t_j \leq \tau]} \ . \tag{1.20}$$

Špeciálne môže dôjsť k navýšeniu iba raz, a to na konci kumulačnej fázy v čase T, alebo v prípade smrti v čase $\tau < T$. Ak predpokladáme τ celočíselné, šlo by o spätnú kontrolu a prípadné dorovnanie k začiatku roku, v ktorom k úmrtiu došlo. Potom by predošlý vzťah vyzeral nasledovne

$$b^A_0 = b^A_{\min\{\tau,T\}} e^{-\delta_0 \min\{\tau,T\}} \ . \tag{1.21}$$

Výška garantovanej hodnoty v čase $t \leq \tau$, G^A_t býva definovaná podobne ako G^D_τ v prípade GMDB. Môže byť rovná počiatočnému vkladu

$$G^A_t = P \ , \tag{1.22}$$

alebo rovná výške počiatočného vkladu úročeného intenzitou úroku δ_g

$$G^A_t = P e^{\delta_g t} \ . \tag{1.23}$$

Tiež môže byť definovaná ako doposiaľ najvyššia zaznamenaná hodnota klientovho účtu v časoch t_i definovaných v časti GMDB

$$G^A_t = \max_{t_i \leq t} \{A_{t_i} I_{[t_i \leq T]}\} \ , \tag{1.24}$$

alebo ako kombinácia vyššie uvedených definicií, napríklad

$$G^A_t = \max_{t_i \leq t} \{P e^{\delta_g t}, A_{t_i} I_{[t_i \leq T]}\}. \tag{1.25}$$

1.4.3 GMIB

Garancia minimálneho príjmu sa vzťahuje na prípad, kedy po ukončení kumulačnej fázy v čase T dôjde k nákupu anuity za čiastku A. Predpokladajme dožitie klienta do času T. Tiež budeme predpokladať platby anuity raz ročne. Pre výpočet výšky platby anuity sa použije anuitizačná miera η definovaná v časti anuitizácia. Výška platby sa potom vypočíta vzťahom

$$p = \eta A \ . \tag{1.26}$$

Garancia môže mať dve základné podoby. Prvá podoba definuje hodnotu určenú k anuitizácii A ako maximum z hodnoty klientovho účtu v čase T a garantovanej hodnoty G_T^I

$$A = max\{A_T, G_T^I\} \ . \tag{1.27}$$

G_T^I môže byť definovaná podobnými definíciami ako G_t^A. Uveďme niekoľko možností definície G_T^I.

$$G_T^I = P \ , \tag{1.28}$$

$$G_T^I = Pe^{\delta_g T} \ , \tag{1.29}$$

$$G_T^I = \max_{t_j} \{A_{t_j}\} \ , \tag{1.30}$$

alebo

$$G_T^I = \max_{t_j} \{Pe^{\delta_g T}, A_{t_j}\} \ . \tag{1.31}$$

Rozdiel od nákupu anuity bez garancie tak spočíva v navýšení každej platby počas vyplácania anuity o čiastku

$$b_p^I = \eta \ [\max\{A_T, G_T^I\} - A_T] = \eta \ [G_T^I - A_T]_+ \ . \tag{1.32}$$

Druhá podoba GMIB je nasledovná. Anuitizovaná hodnota bude rovná aktuálnej hodnote klientovho účtu A_T. Anuitizačná miera však bude definová maximom z trhovej hodnoty η a garantovanej hodnoty g. Každá platba anuity tak bude oproti prípadu bez akejkoľvek garancie GMIB navýšená o čiastku

$$b_p^I = A_T[\max\{\eta, g\} - \eta] = A_T[g - \eta]_+ \ . \tag{1.33}$$

V prípade doživotnej anuity s pevnými platbami v časoch $t \in \{T, T+1, ..\}$ môžeme hodnotu benefitu k času t_0 vyjadriť

$$b_0^I = b_p^I \sum_{t=T}^{\infty} e^{-\delta_0 t} I_{[t \leq \tau]} \ . \tag{1.34}$$

V inom prípade môže byť definovaný pevný počet platieb N, kedy v prípade skorého úmrtia klienta zvyšné platby dostanú pozostalí. V tomto prípade budú platby realizované v časoch $t \in \{T, .., T+N-1\}$. Výšku benefitu k času t_0 potom môžeme vyjadriť vzťahom

$$b_0^I = b_p^I \sum_{t=T}^{T+N-1} e^{-\delta_0 t} \ . \tag{1.35}$$

Platby anuity sa tiež môžu postupom času upravovať koeficientmi ρ_t odvodenými od inflácie, aktuálnej hodnoty istého aktíva a podobne. S nimi sa upraví aj navýšenie platieb pochádzajúce z benefitu. Posledné dva vzťahy tak môžeme upraviť na tvar

$$b_0^I = b_p^I \sum_{t=T}^{\infty} \rho_t e^{-\delta_0 t} I_{[t \leq \tau]} \ , \tag{1.36}$$

$$b_0^I = b_p^I \sum_{t=T}^{T+N-1} \rho_t e^{-\delta_0 t} \ . \tag{1.37}$$

1.4.4 GMWB

Garancia minimálnych výberov je taktiež garancia budúceho príjmu, rovnako ako v prípade GMIB. Uplatňuje sa v prípade, kedy si klient chce účet ponechať otvorený aj počas výplatnej fázy. Za predpokladu, že klient sa dožije času T, nedochádza k anuitizácii a počínajúc časom T tvoria príjem klienta garantované výbery z účtu po pevne stanovenú dobu, alebo doživotne. Účet ostáva klientovi vlastný. Ostáva mu tak právo ďalej určovať, do akých aktív bude investovať a zostatková hodnota účtu po úmrtí klienta bude vyplatená pozostalým. Tieto výbery môžu byť definované podobne ako platby anuity v prípade GMIB. Hodnotu garantovaného výberu tak môžeme vyjadriť vzťahom

$$w = \beta \max\left\{A_T, G_T^W\right\} \ , \tag{1.38}$$

kde β je definovaná analogicky ako anuitizačná miera definovaná v časti anuitizácia. G_T^W je garantovaný základ výberov v čase T. Ten môže byť definovaný rovnako ako G_T^I vzťahmi (1.28)-(1.31).

Ak sú garantované výbery definované na určitý čas a na jeho konci ostáva hodnota klientovho účtu kladná, môže klient zostatkovú hodnotu vybrať jednorázovo, alebo pokračovať v čiastkových výberoch až do vyčerpania účtu. Garantované výbery bývajú však možné aj v prípade prečerpania účtu. To môže nastať pri zlých investičných rozhodnutiach vo výplatnej fáze. V prípade doživotných výberov potom aj z dôvodu dlhovekosti.

Ak dôjde k ukončeniu pravidelných výberov, no hodnota účtu ostane kladná, výška benefitu je $b^W = 0$, nakoľko bol klient schopný realizovať dané výbery zo svojho účtu s dostatočnou rezervou. Nezáleží pritom, či boli výbery ukončené z dôvodu úmrtia, alebo z dôvodu uplynutia dohodnutej lehoty. Výška benefitu je nenulová, ak došlo k prečerpaniu účtu. Potom ju vyjadríme rozdielom medzi súčtom realizovaných výberov diskontovaných intenzitou úroku δ_0 do času T a hodnotou účtu v čase T.

Nech sa výbery uskutočnia v časoch $t \in \{T,T+1,...\}$, $t \leq \tau$ pre prípad doživotných výberov. Vzťah určujúci výšku benefitu k času t_0 má potom tvar

$$b_0^W = e^{-\delta_0 T} \left[\left(\sum_{t=T}^{\infty} w e^{-\delta_0 (t-T)} I_{[t \leq \tau]} \right) - A_T \right]_+ \ . \tag{1.39}$$

Pre prípad N výberov v časoch $t \in \{T,T+1,...,T+N-1\}$ má vzťah tvar

$$b_0^W = e^{-\delta_0 T} \left[\left(\sum_{t=T}^{T+N-1} w e^{-\delta_0 (t-T)} \right) - A_T \right]_+ \ . \tag{1.40}$$

Kapitola 2

Oceňovanie produktu variabilného životného dôchodku

V prvej kapitole sme popísali a vyjadrili zmysel a výšku benefitov vyplývajúcich z jednotlivých garancií. V tejto kapitole odvodíme očakávané hodnoty týchto benefitov k času t_0. Získame tak rýdze poistné za dané garancie, ktoré by klient uhradil pri započatí kumulačnej fázy.

2.1 Model zhodnocovania klientovho účtu

Nech klient investuje v čase t_0 do jediného aktíva vklad P. Nech $P = 1$. Výška tohto vkladu je už po odrátaní počiatočných poplatkov a poistného za zvolené garancie.

Pravdepodobnostné rozdelenie výnosov klientovho účtu v kumulačnej fáze budeme modelovať podľa [5] nasledovne. Nech je účet počas jedného roku zhodnocovaný konštantnou intenzitou úroku $\Delta = \delta_0 + \xi$, kde δ_0 je intenzita úroku odpovedajúca bezrizikovej úrokovej miere a ξ je náhodná veličina s normálnym rozdelením $N(\mu,\sigma^2)$. Δ je tak náhodná veličina s rozdelením $N(\delta_0+\mu,\sigma^2)$. Potom ročný kumulačný faktor e^Δ je náhodná veličina s logaritmicko-normálnym rozdelením. Parametre μ a σ^2 určíme zo sústavy rovníc pre strednú hodnotu a rozptyl náhodnej veličiny e^Δ. Platí

$$\mathsf{E}[e^\Delta] = e^{\mu+\delta_0+\frac{\sigma^2}{2}} \ , \tag{2.1}$$

$$\mathsf{Var}[e^\Delta] = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2(\mu+\delta_0)+\sigma^2} \ , \tag{2.2}$$

kde za ľavé strany rovníc môžeme dosadiť empirické odhady momentov e^Δ.

Pri viacročnom zhodnocovaní predpokladajme postupnosť nezávislých náhodných veličín e^{Δ_k}. $\Delta_k = \delta_0+\xi_k$, kde ξ_k má rozdelenie $N(\mu,\sigma^2)$. Nech t je celočíselný počet rokov. Hodnotu klientovho účtu v čase t môžeme vyjadriť vzťahom

$$A_t = \prod_{k=0}^{t-1} e^{\Delta_k} = e^{\delta_0 t+\sum_{k=0}^{t-1}\xi_k} \ . \tag{2.3}$$

Člen $\sum_{k=0}^{t-1} \xi_k$ označme ${}^t\xi$. ${}^t\xi$ je súčtom t nezávislých náhodných veličín s normálnym rozdelením $N(\mu,\sigma^2)$. Je teda náhodnou veličinou s normálnym rozdelením $N(\mu t,\sigma^2 t)$ s hustotou

$$f_{{}^t\xi}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} e^{-\frac{(u-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} \ . \tag{2.4}$$

2.2 Očakávané hodnoty benefitov

Postupne odvodíme vzťahy pre očakávané hodnoty jednotlivých benefitov na jednotkový vklad pri vyššie uvedených predpokladoch. Navyše budeme predpokladať $\delta_g = \delta_0$.

Upravme si dopredu 4 integrály vystupujúce v odvodeniach neskôr. Nech Φ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia, potom:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{a} f_{{}^t\xi}(u) du &= \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} e^{-\frac{(u-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} du \\ &= \Phi\left(\frac{a-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \ , \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{a} e^u f_{{}^t\xi}(u) du &= \int_{-\infty}^{a} e^u \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} e^{-\frac{(u-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} du \\ &= e^{\mu t + \frac{t\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} e^{-\frac{(u-(\mu t+\sigma^2 t))^2}{2\sigma^2 t}} du \\ &= e^{\mu t + \frac{t\sigma^2}{2}} \Phi\left(\frac{a-\mu t-\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \ , \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \int_{a}^{\infty} e^u f_{{}^t\xi}(u) du &= \int_{a}^{\infty} e^u \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} e^{-\frac{(u-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} du \\ &= e^{\mu t + \frac{t\sigma^2}{2}} \int_{a}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} e^{-\frac{(u-(\mu t+\sigma^2 t))^2}{2\sigma^2 t}} du \\ &= e^{\mu t + \frac{t\sigma^2}{2}} \left[1 - \Phi\left(\frac{a-\mu t-\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right] \ . \end{aligned} \tag{2.7}$$

2.2.1 Očakávaná hodnota benefitu GMDB

Pre výšku benefitu GMDB k času t_0 použijeme vzťah (1.13). Nech

$$G_\tau^D = e^{\delta_0 \tau} I_{[\tau < M-x]} \ , \tag{2.8}$$

$$A_\tau = e^{(\delta_0 \tau + {}^\tau\xi)} I_{[\tau < T]} \ . \tag{2.9}$$

Označme C_0^D očakávanú hodnotu benefitu GMDB k času t_0, potom

$$
\begin{aligned}
C_0^D &= \mathsf{E}\left[b_0^D\right] \\
&= \mathsf{E}\left[e^{-\delta_0\tau}[G_\tau^D - A_\tau]_+\right] \\
&= \mathsf{E}\left[[I_{[\tau<M-x]} - e^{{}^{\tau}\xi} I_{[\tau<T]}]_+\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{u=-\infty}^{\infty} [I_{[k<M-x]} - e^u I_{[k<T]}]_+ f_{{}^k\xi}(u) du P[\tau = k] \\
&= \sum_{k=0}^{T-1} \int\limits_{u=-\infty}^{\infty} [1-e^u]_+ f_{{}^k\xi}(u) du P[\tau = k] + \sum_{k=T}^{M-x-1} \int\limits_{u=-\infty}^{\infty} f_{{}^k\xi}(u) du P[\tau = k] \\
&= \sum_{k=0}^{T-1} P[\tau = k] \int\limits_{u=-\infty}^{0} (1-e^u) f_{{}^k\xi}(u) du + \sum_{k=T}^{M-x-1} P[\tau = k] \int\limits_{u=-\infty}^{\infty} f_{{}^k\xi}(u) du \\
&= \sum_{k=0}^{T-1} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \left(\Phi\left(-\sqrt{k}\frac{\mu}{\sigma}\right) - e^{\mu k + \frac{k\sigma^2}{2}} \Phi\left(-\sqrt{k}\frac{\mu+\sigma^2}{\sigma}\right)\right) + \sum_{k=T}^{M-x-1} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \; .
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

2.2.2 Očakávaná hodnota benefitu GMAB

Predpokladajme jedno dorovnanie prípadného schodku hodnoty klientovho účtu oproti garantovanej hodnote, a to v prípade smrti klienta v čase $\tau < T$, alebo v čase T. Pre prehľadnosť v odvodení označme $m = \min\{\tau, T\}$. Pre výšku benefitu GMAB k času t_0 použijeme vzťah (1.21), pričom za výšku dorovnávaného schodku b_m^A dosadíme odpovedajúci tvar vzťahu (1.19). Nech

$$G_m^A = e^{\delta_0 m} \; , \tag{2.11}$$

$$A_m = e^{(\delta_0 m + {}^m\xi)} \; . \tag{2.12}$$

Označme C_0^A očakávanú hodnotu benefitu GMAB k času t_0, potom

$$
\begin{aligned}
C_0^A &= \mathsf{E}\left[b_0^A\right] \\
&= \mathsf{E}\left[e^{-\delta_0 m}[G_m^A - A_m]_+\right] \\
&= \mathsf{E}\left[[1 - e^{{}^m\xi}]_+\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{u=-\infty}^{\infty} [1-e^u]_+ f_{{}^m\xi}(u) du P[\tau = k] \\
&= \sum_{k=0}^{T-1} P[\tau = k] \int\limits_{u=-\infty}^{0} (1-e^u) f_{{}^k\xi}(u) du + \sum_{k=T}^{\infty} P[\tau = k] \int\limits_{u=-\infty}^{0} (1-e^u) f_{{}^T\xi}(u) du \\
&= \sum_{k=0}^{T-1} {}_k p_x \cdot q_{x+k} \left(\Phi\left(-\sqrt{k}\frac{\mu}{\sigma}\right) - e^{\mu k + \frac{k\sigma^2}{2}} \Phi\left(-\sqrt{k}\frac{\mu+\sigma^2}{\sigma}\right)\right) \\
&\quad + {}_T\, p_x \left(\Phi\left(-\sqrt{T}\frac{\mu}{\sigma}\right) - e^{\mu T + \frac{T\sigma^2}{2}} \Phi\left(-\sqrt{T}\frac{\mu+\sigma^2}{\sigma}\right)\right) \; .
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

2.2.3 Očakávaná hodnota benefitu GMIB

Predpokladajme nákup doživotnej anuity. Nech je výška benefitu GMIB k času t_0 definovaná vzťahom (1.34), kde pravidelná platba anuity b_p^I je definovaná vzťahom (1.32) a anuitizačná miera η vzťahom (1.10). Nech

$$G_T^I = e^{\delta_0 T} I_{[\tau \geq T]} \ , \tag{2.14}$$

$$A_T = e^{(\delta_0 T + {}^T\xi)} I_{[\tau \geq T]} \ . \tag{2.15}$$

Označme C_0^I očakávanú hodnotu benefitu GMIB k času t_0, potom

$$\begin{aligned}
C_0^I &= \mathsf{E}\left[b_0^I\right] \\
&= \mathsf{E}\left[\eta[G_T^I - A_T]_+ \sum_{t=T}^{\infty}\left(e^{-\delta_0 t} I_{[t \leq \tau]}\right)\right] \\
&= \mathsf{E}\left[\eta[1 - e^{{}^T\xi}]_+ \sum_{t=0}^{\tau - T}\left(e^{-\delta_0 t}\right) I_{[\tau \geq T]}\right] \\
&= \mathsf{E}\left[\eta[1 - e^{{}^T\xi}]_+ \frac{1 - e^{-\delta_0(\tau - T + 1)}}{1 - e^{-\delta_0}} I_{[\tau \geq T]}\right] \\
&= \frac{\eta}{1 - e^{-\delta_0}} \sum_{k=T}^{\infty} \int_{u=-\infty}^{\infty} [1 - e^u]_+ \left(1 - e^{-\delta_0(k - T + 1)}\right) f_{{}^T\xi}(u) du P[\tau = k] \\
&= \frac{\eta}{1 - e^{-\delta_0}} \sum_{k=T}^{\infty} \left(1 - e^{-\delta_0(k - T + 1)}\right) P[\tau = k] \int_{u=-\infty}^{0} (1 - e^u) f_{{}^T\xi}(u) du \\
&= \eta \frac{\Phi\left(-\sqrt{T}\frac{\mu}{\sigma}\right) - e^{\mu T + \frac{T\sigma^2}{2}} \Phi\left(-\sqrt{T}\frac{\mu + \sigma^2}{\sigma}\right)}{1 - e^{-\delta_0}} \sum_{k=T}^{\infty} \left(1 - e^{-\delta_0(k - T + 1)}\right)_k p_x \cdot q_{x+k} \ .
\end{aligned} \tag{2.16}$$

2.2.4 Očakávaná hodnota benefitu GMWB

Predpokladajme zvolenie doživotných výberov z účtu aj v prípade prečerpania. Výška benefitu GMWB k času t_0 je teda definovaná vzťahom (1.39), s výškou pravidelného výberu w definovanou vzťahom (1.38). Nech

$$G_T^W = e^{\delta_0 T} I_{[\tau \geq T]} \ , \tag{2.17}$$

$$A_T = e^{(\delta_0 T + {}^T\xi)} I_{[\tau \geq T]} \ . \tag{2.18}$$

Označme C_0^W očakávanú hodnotu benefitu GMWB k času t_0, potom

$$
\begin{aligned}
C_0^W &= \mathsf{E}\left[b_0^W\right] \\
&= \mathsf{E}\left[e^{-\delta_0 T}\left[\left(\sum_{t=T}^{\infty}\beta \max\{A_T, G_T^W\} e^{-\delta_0(t-T)} I_{[t\le\tau]}\right) - A_T\right]_+\right] \\
&= \mathsf{E}\left[\left[\beta \max\{e^{T\xi}, 1\}\frac{1-e^{-\delta_0(\tau-T+1)}}{1-e^{-\delta_0}} - e^{T\xi}\right]_+ \cdot I_{[\tau\ge T]}\right] \\
&= \sum_{k=T}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty}\left[\beta\max\{e^u,1\}\frac{1-e^{-\delta_0(k-T+1)}}{1-e^{-\delta_0}} - e^u\right]_+ f_{T\xi}(u)du P[\tau=k] \\
&= \sum_{k=T}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{0}\left[\beta\frac{1-e^{-\delta_0(k-T+1)}}{1-e^{-\delta_0}} - e^u\right]_+ f_{T\xi}(u)du P[\tau=k] \\
&+ \sum_{k=T}^{\infty}\int_{u=0}^{\infty}\left[\beta e^u\frac{1-e^{-\delta_0(k-T+1)}}{1-e^{-\delta_0}} - e^u\right]_+ f_{T\xi}(u)du P[\tau=k] \\
&= \sum_{k=T}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\log\left(\beta\frac{1-e^{-\delta_0(k-T+1)}}{1-e^{-\delta_0}}\right)}\left(\beta\frac{1-e^{-\delta_0(k-T+1)}}{1-e^{-\delta_0}} - e^u\right) f_{T\xi}(u)du P[\tau=k] \\
&+ \sum_{k=T}^{\infty}\int_{u=0}^{\infty} e^u f_{T\xi}(u)du\left[\beta\frac{1-e^{-\delta_0(k-T+1)}}{1-e^{-\delta_0}} - 1\right]_+ P[\tau=k] \\
&= \frac{\beta}{1-e^{-\delta_0}}\sum_{k=T}^{\infty}\left(1-e^{-\delta_0(k-T+1)}\right)P[\tau=k]\int_{u=-\infty}^{\log\left(\beta\frac{1-e^{-\delta_0(k-T+1)}}{1-e^{-\delta_0}}\right)} f_{T\xi}(u)du \\
&- \sum_{k=T}^{\infty}P[\tau=k]\int_{u=-\infty}^{\log\left(\beta\frac{1-e^{-\delta_0(k-T+1)}}{1-e^{-\delta_0}}\right)} e^u f_{T\xi}(u)du \\
&+ e^{\mu T+\frac{T\sigma^2}{2}}\left[1-\Phi\left(-\sqrt{T}\frac{\mu+\sigma^2}{\sigma}\right)\right]\sum_{k=T}^{\infty}{}_kp_x\cdot q_{x+k}\left[\beta\frac{1-e^{-\delta_0(k-T+1)}}{1-e^{-\delta_0}} - 1\right]_+ \\
&= \frac{\beta}{1-e^{-\delta_0}}\sum_{k=T}^{\infty}\left(1-e^{-\delta_0(k-T+1)}\right){}_kp_x\cdot q_{x+k}\cdot\Phi\left(\frac{\log\left(\beta\frac{1-e^{-\delta_0(k-T+1)}}{1-e^{-\delta_0}}\right)-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&- e^{\mu T+\frac{T\sigma^2}{2}}\sum_{k=T}^{\infty}{}_kp_x\cdot q_{x+k}\cdot\Phi\left(\frac{\log\left(\beta\frac{1-e^{-\delta_0(k-T+1)}}{1-e^{-\delta_0}}\right)-\mu T-\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&+ e^{\mu T+\frac{T\sigma^2}{2}}\left[1-\Phi\left(-\sqrt{T}\frac{\mu+\sigma^2}{\sigma}\right)\right]\sum_{k=T}^{\infty}{}_kp_x\cdot q_{x+k}\left[\beta\frac{1-e^{-\delta_0(k-T+1)}}{1-e^{-\delta_0}} - 1\right]_+ .
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

2.3 Výpočet očakávaných hodnôt benefitov

V tejto časti vypočítame odvodené očakávané hodnoty pre vybrané parametre. Dostaneme tak rýdze poistné za garancie s danými parametrami. Nech vek klienta pri započatí kumulačnej fázy je x rokov. Očakávané hodnoty spočítame pre všetky štyri garancie pre mužov a ženy vo vekoch $x \in \{25{,}30{,}35{,}40{,}45{,}50{,}55{,}60\}$. Nech vek, v ktorom sa klientovi ukončí kumulačná fáza, je 65 rokov. Čas ukončenia kumulačnej fázy T teda môžeme vyjadriť $T = 65 - x$. Vek, v ktorom prestáva byť garantované plnenie v prípade smrti vyplývajúce z GMDB, zvolíme $M = 75$ rokov. Parametre μ a σ^2 vypočítame zo sústavy rovníc (2.1) a (2.2), kde za odhady momentov e^{Δ} dosadíme empirické odhady momentov ročného kumulačného faktoru vybraných podielových fondov na trhu. Historické ceny podielových jednotiek týchto fondov pochádzajúce z [7] sú uvedené v prílohách tejto práce s výpočtom odhadov potrebných momentov.

Pre konštrukciu pravdepodobnostného rozdelenia ostávajúcej dĺžky života τ_x zvolíme generačnú tabulku odvodenú v [6]. Túto tabulku je možné nájsť v prílohách, na CD priloženom k tejto práci. Nájdeme v nej podmienené pravdepodobnosti q_x^r pre mužov a ženy narodené v rokoch 1920 až 2011.

Očakávané hodnoty s konkrétnymi parametrami budeme počítať v softvéri Wolfram Mathematica 8.0 for Students. Zdrojový kód výpočtu je taktiež možné nájsť v prílohách, na CD priloženem k tejto práci.

Pre odhady momentov e^{Δ} z Prílohy 1 dostávame očakávané hodnoty benefitov:

Muž, Vek x	C_0^D	C_0^A	C_0^I	C_0^W
25	0.050322	0.006185	0.005641	0.163350
30	0.057623	0.007330	0.006655	0.165308
35	0.065912	0.008673	0.007838	0.168409
40	0.075345	0.010214	0.009211	0.173265
45	0.086204	0.011936	0.010799	0.180907
50	0.098911	0.013764	0.012600	0.192490
55	0.114458	0.015510	0.014525	0.209647
60	0.133854	0.016303	0.015762	0.231956
Žena, Vek x	C_0^D	C_0^A	C_0^I	C_0^W
25	0.021807	0.006066	0.005854	0.117966
30	0.025667	0.007203	0.006929	0.118788
35	0.030192	0.008534	0.008190	0.121084
40	0.035496	0.010076	0.009661	0.124476
45	0.041730	0.011821	0.011354	0.129746
50	0.049097	0.013721	0.013241	0.137857
55	0.057883	0.015560	0.015147	0.149627
60	0.068500	0.016418	0.016190	0.166128

Tabulka 2.1:
Očakávané hodnoty benefitov pre $\mathsf{E}[e^{\Delta}] = 1.03218$, $\mathsf{Var}[e^{\Delta}] = 0.0019726$

Muž, Vek x	C_0^D	C_0^A	C_0^I	C_0^W
25	0.049868	0.000123	0.000033	2.055140
30	0.057072	0.000197	0.000074	1.471260
35	0.065269	0.000360	0.000168	1.053110
40	0.074652	0.000694	0.000386	0.754687
45	0.085545	0.001370	0.000891	0.543477
50	0.098431	0.002773	0.002089	0.395750
55	0.114273	0.005793	0.004993	0.297184
60	0.133979	0.012721	0.012054	0.244105
Žena, Vek x	C_0^D	C_0^A	C_0^I	C_0^W
25	0.021626	0.000066	0.000034	1.484300
30	0.025446	0.000129	0.000077	1.059940
35	0.029934	0.000261	0.000176	0.762694
40	0.035219	0.000542	0.000405	0.549690
45	0.041466	0.001140	0.000937	0.398493
50	0.048898	0.002476	0.002195	0.292433
55	0.057805	0.005543	0.005207	0.219612
60	0.068552	0.012662	0.012382	0.177522

Tabulka 2.2:
Očakávané hodnoty benefitov pre $\mathsf{E}[e^{\Delta}] = 1.10157$, $\mathsf{Var}[e^{\Delta}] = 0.0187596$

Muž, Vek x	C_0^D	C_0^A	C_0^I	C_0^W
25	0.052370	0.029493	0.026901	3.933580
30	0.060161	0.034748	0.031535	2.611840
35	0.069060	0.040946	0.036964	1.740600
40	0.079149	0.048142	0.043336	1.168870
45	0.090568	0.056354	0.050852	0.796963
50	0.103457	0.065396	0.059685	0.557371
55	0.118391	0.074746	0.069827	0.406330
60	0.136103	0.081167	0.078377	0.312457
Žena, Vek x	C_0^D	C_0^A	C_0^I	C_0^W
25	0.022605	0.028926	0.027916	2.849030
30	0.026698	0.034136	0.032832	1.891190
35	0.031491	0.040269	0.038626	1.271680
40	0.037075	0.047444	0.045451	0.864218
45	0.043525	0.055726	0.053464	0.599137
50	0.050969	0.065078	0.062726	0.428619
55	0.059535	0.074883	0.072817	0.319207
60	0.069451	0.081681	0.080501	0.248511

Tabulka 2.3:
Očakávané hodnoty benefitov pre $\mathsf{E}[e^{\Delta}] = 1.11941$, $\mathsf{Var}[e^{\Delta}] = 0.0839239$

Muž, Vek x	C_0^D	C_0^A	C_0^I	C_0^W
25	0.049887	0.000134	0.000026	11.53910
30	0.057095	0.000209	0.000062	6.657850
35	0.065306	0.000378	0.000150	3.840580
40	0.074715	0.000738	0.000366	2.217390
45	0.085653	0.001488	0.000902	1.285340
50	0.098602	0.003115	0.002259	0.751297
55	0.114493	0.006810	0.005790	0.449260
60	0.134190	0.015973	0.015095	0.288862
Žena, Vek x	C_0^D	C_0^A	C_0^I	C_0^W
25	0.021632	0.000064	0.000027	8.333940
30	0.025455	0.000127	0.000064	4.796490
35	0.029951	0.000259	0.000157	2.781410
40	0.035248	0.000550	0.000384	1.615040
45	0.041513	0.001198	0.000949	0.942510
50	0.048968	0.002725	0.002375	0.555573
55	0.057898	0.006466	0.006038	0.333407
60	0.068641	0.015874	0.015505	0.213735

Tabulka 2.4:
Očakávané hodnoty benefitov pre $\mathsf{E}[e^{\Delta}] = 1.15013$, $\mathsf{Var}[e^{\Delta}] = 0.0432103$

Záver

V práci sme popísali základné vlastnosti a predpoklady produktu variabilného životného dôchodku. Popísali sme štyri základné garancie, z ktorých si klient môže vybrať. Z popisu je vidieť, že garancie majú niektoré vlastnosti spoločné a iné vlastnosti naopak špecifické.

Voľba medzi garanciou minimálneho príjmu GMIB a garanciou minimálnych výberov GMWB závisí od klientovej predstavy o príjme počas výplatnej fázy. Garancia GMIB sa vzťahuje na nákup anuity na konci kumulačnej fázy. Klient tak v prípade skorého úmrtia po anuitizácii môže z platieb anuity získať prostriedky výrazne nižšie, ako je nákupná cena anuity. Pre tento dôvod je vhodné garanciu GMIB kombinovať s garanciou minimálneho plnenia v prípade smrti GMDB. V prípade zvolenia garancie minimálnych výberov GMWB ostáva klientovi otvorený účet, z ktorého postupne realizuje garantované výbery. V prípade zlých investičných rozhodnutí však môže rýchlo dôjsť k prečerpaniu účtu. To síce neovplyvní samotný príjem klienta, no v prípade jeho úmrtia nemusí ostať pozostalým dostatočné finančné zabezpečenie. Pre tento dôvod je vhodná voľba garancie minimálneho zhodnotenia GMAB, alebo garancie GMDB. V prípade úmrtia počas kumulačnej fázy majú GMDB a GMAB rovnaké plnenie. Voľba medzi nimi v kombinácii s GMWB vychádza z odlišných plnení v prípade smrti vo výplatnej fáze. Pripomeňme, že v tejto práci je GMDB definovaná pri predpoklade uskutočnenia anuitizácie na konci kumulačnej fázy. Pri voľbe ponechania si účtu vo výplatnej fáze je potrebné analogicky upraviť výšku samotného benefitu v prípade úmrtia v tejto fáze a tým aj výpočet poistného za túto garanciu.

Výšky rýdzeho poistného za jednotlivé garancie pre dané parametre vychádzajú z definícií plnení týchto garancií. Výška poistného za garanciu minimálneho príjmu C_0^I v hrubom odpovedá prípadnému doplateniu schodku medzi hodnotou klientovho účtu a garantovanou hodnotou za predpokladu dožitia sa konca kumulačnej fázy, aby bol možný nákup anuity za najnižšiu, garantovanú sumu. V prípade zvolenia fondu s dostatočne vysokým predpokladaným výnosom je pravdepodobnosť tejto situácie malá, obzvlášť pri dlhšom trvaní kumulačnej fázy. To sa odrazí v relatívne malej výške poistného za túto garanciu. Podobné plnenie je definované garanciou minimálneho zhodnotenia, kde je navyše definované plnenie v prípade úmrtia počas kumulačnej fázy. Poistné za túto garanciu, C_0^A má teda podobné hodnoty ako C_0^I najmä pri krátkom trvaní kumulačnej fázy. Podstatne vyššie vychádza poistné za garanciu minimálneho plnenia v prípade smrti C_0^D počítané s predpokladom nákupu anuity na konci kumulačnej fázy. Tu sa odráža predovšetkým pravdepodobnosť vysokého plnenia v prípade skorého úmrtia po začiatku výplatnej fázy. Suverénne najvyššie hodnoty dosahuje poistné za garanciu minimálnych výberov C_0^W, v ktorom sa odráža pravdepodobnosť situácie, že klient dosiahne veľkého zhodnotenia, z ktorého budú garantované výbery aj v prípade prečerpania z dôvodu dlhovekosti. Narozdiel od výplat anuity nie je táto možnosť kompenzovaná možnosťou skorého úmrtia po začiatku výplatnej fázy, nakoľko kladná zostatková hodnota účtu je vyplatená pozostalým. Toto sa prejaví predovšetkým pri vysokom predpokladanom výnose fondu a dlhom trvaní kumučnej fázy, kde môže poistné dosahovať násobky počiatočného vkladu. V takomto prípade by bolo zrejme nutné realizovať splátky poistného v pravidelných platbách počas trvania kumulačnej fázy s možným prihliadaním na zhodnotenie v danom roku.

Zoznam použitej literatúry

[1] A.R. Bacinello et al. *Variable annuities: A unifying valuation approach* Insurance: Mathematics and Economics 49 (2011) 285–297

[2] M. C. Ledlie, D. P. Corry, G. S. Finkelstein, A. J. Ritchie, K. Su and D. C. E. Wilson (2008). *Variable Annuities.* British Actuarial Journal, 14, pp 327389 doi:10.1017/S1357321700001744

[3] Hans U. Gerber *Life insurance mathematics, second edition* With exercises contributed by Samuel H. Cox. Swiss Association of Actuaries, Zűrich. [Transl.: W. Neuhaus]. -2., expanded ed. - Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Budapest; Honk Kong; London; Milan; Paris; Santa Clara; Singapore; Tokyo: Springer 1995 Dt. Ausg. u.d.T.: Lebensversicherungsmathematik ISBN 3-540-58858-2

[4] Tomáš Cipra *Penze: kvantitativní přístup* Ekopress, s.r.o.,2012 ISBN 978-80-86929-87-3

[5] Petr Mandl *Účetní výkaznictví pojišťoven pro matematiky* MATFYZPRESS, 2009 ISBN 978-80-7378-080-7

[6] Petr Šťástka *Diplomová práce: Některé kvantitativní aspekty životních anuit* Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky, Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc., Praha 2013

[7] *http://www.ingbank.cz/ing-fondy/o-ing-fondech/historicke-ceny/*

Zoznam tabuliek

Zoznam použitých skratiek

GMxB	guaranteed minimum x-type benefit garancia minimálneho benefitu typu x
GMDB	guaranteed minimum death benefit garancia minimálneho plnenia v prípade smrti
GMAB	guaranteed minimum accumulation benefit garancia minimálneho zhodnotenia
GMIB	guaranteed minimum income benefit garancia minimálneho príjmu
GMWB	guaranteed minimum withdrawal benefit garancia minimálnych výberov

Prílohy

Dátum	Cena/ks v CZK	Ročný kumul. faktor e^{Δ}
03.06.2013	2672.49	1.06477
01.06.2012	2509.92	1.042
01.06.2011	2408.76	1.03591
01.06.2010	2325.27	1.09931
02.06.2009	2115.21	1.00861
02.06.2008	2097.15	0.9851
01.06.2007	2128.87	1.0068
01.06.2006	2114.49	0.991489
01.06.2005	2132.64	1.10192
01.06.2004	1935.39	0.985925
02.06.2003	1963.02	
	$\mathsf{E}[e^{\Delta}]$	1.03218
	$\mathsf{Var}[e^{\Delta}]$	0.0019726

Tabulka 3.5:
ING International Český fond obligací: história cien a ročných kumulačných faktorov, odhady momentov

Dátum	Cena/ks v USD	Ročný kumul. faktor e^{Δ}
03.06.2013	1541.54	1.19907
01.06.2012	1285.61	0.995216
01.06.2011	1291.79	1.23483
01.06.2010	1046.13	1.10898
02.06.2009	943.33	0.794477
02.06.2008	1187.36	1.10363
01.06.2007	1075.87	1.26585
01.06.2006	849.92	1.07328
01.06.2005	791.89	1.0593
01.06.2004	747.56	1.18107
02.06.2003	632.95	
	$\mathsf{E}[e^{\Delta}]$	1.10157
	$\mathsf{Var}[e^{\Delta}]$	0.0187596

Tabulka 3.6:
ING (L) Invest Food & Beverages: história cien a ročných kumulačných faktorov, odhady momentov

Dátum	Cena/ks v CZK	Ročný kumul. faktor e^{Δ}
03.06.2013	2640.74	1.21073
01.06.2012	2181.12	0.699959
01.06.2011	3116.07	1.10627
01.06.2010	2816.74	1.26994
02.06.2009	2218.01	0.655508
02.06.2008	3383.65	0.832122
01.06.2007	4066.29	1.34883
01.06.2006	3014.68	1.22051
01.06.2005	2470.02	1.40647
01.06.2004	1756.19	1.44377
02.06.2003	1216.39	
	$\mathsf{E}[e^{\Delta}]$	1.11941
	$\mathsf{Var}[e^{\Delta}]$	0.0839239

Tabulka 3.7:
ING International Český akciový fond: história cien a ročných kumulačných faktorov, odhady momentov

Dátum	Cena/ks v USD	Ročný kumul. faktor e^{Δ}
03.06.2013	753.15	1.20227
01.06.2012	626.44	0.771041
01.06.2011	812.46	1.27014
01.06.2010	639.66	1.01819
02.06.2009	628.23	0.84502
02.06.2008	743.45	1.21855
01.06.2007	610.11	1.39361
01.06.2006	437.79	1.28921
01.06.2005	339.58	1.15819
01.06.2004	293.20	1.33503
02.06.2003	219.62	
	$\mathsf{E}[e^{\Delta}]$	1.15013
	$\mathsf{Var}[e^{\Delta}]$	0.0432103

Tabulka 3.8:
ING (L) Invest Greater China: história cien a ročných kumulačných faktorov, odhady momentov

Na CD priloženom k tejto práci sa nachádza:
-Elektronická verzia tejto bakalárskej práce.
-Generačná úmrtnostná tabulka odvodená v [6]. Nájdeme v nej podmienené pravdepodobnosti q_x^r pre mužov a ženy narodené v rokoch 1920 až 2011.
-Zdrojový kód výpočtu očakávaných hodnôt benefitov v softvéri
Wolfram Mathematica 8.0 for Students.