Posudek oponenta bakalářské práce **O. Vostala** s názvem

Míchající procesy nad konečnou abecedou

Student se ve své práci věnuje mírám (stochastické) závislosti aplikovaným na stacionární náhodné procesy. Rozebírá vztahy mezi pojmy $\alpha, \phi, \phi', \psi$-mixingu zejména u konečných markovských řetězců, kde ukazuje jejich ekvivalenci a vztahy s dalšími pojmy jako jsou mixující vlastnost ve smyslu ergodické teorie a ergodocita. Poslední část je věnována protipříkladům, na kterých je vidět, že obecně výše uvedené pojmy ekvivalentní nejsou.

Práce je psána z hlediska logické stavby velmi pečlivě a důsledně. Míra důslednosti a korektnosti beze všeho přesahuje běžné požadavky kladené na bakalářskou práci. Student jde v tomto směru dokonce tak daleko, že je občas obtížně se s takovým postupem emocionálně ztotožnit.

Běžná praxe říká, že v takových případech jak autor tak čtenář ztrácí přehled, což může být zdrojem těžko pochopitelných chyb, kterých se ovšem zde autor dopouští jen velmi zřídka. Některá nedopatření však v práci najít lze.

- Formule (23) na str. 24 je ve své podstatě nerovnost a v následném textu se zdá být použitá jako rovnost. Důkaz implikace (i) $\Rightarrow$ (iii) se zdá být tímto nedopatřením nedotčen. Naopak důkaz opačné implikace vyžaduje speciální postup. Pochybuji, že by stačilo volit $A = \Omega$. Pokud student najde jednodušší způsob, jak dokázat zbývající implikaci, než je ten následující, bude vhodné jej prezentovat při obhajobě práce.

  Předpoklad (iii) $P(A \cap C|\mathcal{B}) \overset{\text{sj}}{=} P(A|\mathcal{B})P(C|\mathcal{B})$ pro $A \in \mathcal{A}, C \in \mathcal{C}$ dává rovnost

  (1) $$E[1_A\, P(C|\mathcal{A} \vee \mathcal{B})|\mathcal{B}] \overset{\text{sj}}{=} P(A \cap C|\mathcal{B}) \overset{\text{sj}}{=} P(A|\mathcal{B})P(C|\mathcal{B}) \overset{\text{sj}}{=} E[1_A\, P(C|\mathcal{B})|\mathcal{B}].$$

  Naopak požadavku (i) $P(C|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \overset{\text{sj}}{=} P(C|\mathcal{B})$ pro každé $C \in \mathcal{C}$ lze z jednoznačnosti podmíněné střední hodnoty vyhovět tím, že se ukáže rovnost[1]

  (2) $$0 = E[P(C|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) - P(C|\mathcal{B}); D], \quad D \in \mathcal{D} \triangleq \{A \cap B; A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\},$$

  neboť $\mathcal{D}$ je systém uzavřený na konečné průniky generující σ-algebru $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$. Požadovanou rovnost (2) pak dostaneme z rovnosti (1) prostou integrací dle pravděpodobnosti P přes množinu $B \in \mathcal{B}$.
- V definici 3.2 na str. 14 první odsazená formule definující množinu $\mathcal{I}$ vyvolává otázku, zda se studentovi při této definici navíc nepřipletla definice σ-algebry $\sigma(X)$.
- Zobrazení $h : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ na str. 19 je lépe nenazývat funkcí.
- Proč je v poslední odsazené formuli na str. 20 nula ?
- V poslední odsazené formuli na str. 37 má být $P(X_0 = i - n|X_n = i)$ místo chybného $P(X_n = i - n|X_0 = i)$. Toto nedopatření si osobně dávám do souvislosti s ne příliš šťastným zavedením asymetrické míry stochastické závislosti vycházející z hodnoty

  $$c_\phi(A, B) = P(B|A) - P(B).$$

  Přirozený přístup by byl přesně opačný a zachovával by pořadí. Bohužel s tímto student nejspíš nemůže nic dělat, pokud se nechce vzbouřit proti nešťastně zavedené tradici.
- Funkce g v poslední odsazené formuli na str. 39 podle všeho není korektně definována na $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. Řešením je omezit její definiční obor na $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$ a modifikovat tvrzení 3.8 na str.18.
- Str. 39 řádek 9, zde má být nejspíš $0 \le W_{k-n} \le 1$ místo ostrých nerovností, které zjevně neplatí.

[1] Hodnota $E[Z; A]$ značí střední hodnotu r.n.v.Z na množině A definovanou jako $E[Z1_A]$.

- Proces $V = (\ldots, X_{k-1}, X_k)$ indexovaný přirozenými čísly by měl být zapisován ve tvaru $V = (X_k, X_{k-1}, \ldots)$, například na str. 7.
- Na str. 18 je příliš mnoho užití … znepřehledňující orientaci. Zde bylo na místě uvažovat o kompaktnějším značení.
- Na str. 12 student dokazuje spojitost funkce $x \mapsto |x/P(B) - 1|$ tím, že využije její konvexitu, aby následně čtenáře odkázal na větu 3.2 v knize Rudin 1974. Předpokládám, že čtenář, který si nepřeje obohatit své znalosti konvexních funkcí, by se spokojil s prostým konstatováním, že funkce je spojitá, neboť je zřejmě lipschitzovsky spojitá s konstantou lipschitzovskosti $1/P(B)$ (plyne z trojúhelníkové nerovnosti).

Autor by se při další práci měl vyhýbat používání symbolu jako počátečního slova vět. Čtenáře tím znejisťuje. Jinak bývá zvykem se také vyvarovat používání velkého a malého kvantifikátoru v celistvém textu, což znamená, že jejich užití je vhodné omezit na odsazené formule a v ostatním textu jejich užití raději nahradit slovním komentářem.

Na závěr lze konstatovat, že uvedená práce více než splňuje předpoklady kladené na bakalářskou práci na MFF UK.