Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ondřej Vostal

Míchající procesy nad konečnou abecedou

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Michal Kupsa, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	obecná matematika

Praha 2013

Z celého srdce děkuji Mgr. Michalu Kupsovi, Ph.D. za jeho cenné rady, kterých mi během psaní nemálo udělil a bez nichž by práce jen stěží dosahovala svých nynějších kvalit.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Míchající procesy nad konečnou abecedou

Autor: Ondřej Vostal

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Michal Kupsa, Ph.D., Ústav teorie informace a automatizace AV ČR, v.v.i

Abstrakt: Výkladem teorie mixingu náhodných procesů směřujeme k rozdělení obecných procesů, markovských řetězců a markovských řetězců nad konečnou abecedou do skupin různě mixujících procesů. Výklad doplňujeme příklady. Ukazujeme, že pro obecné procesy jsou tyto skupiny různé, pro markovské řetězce některé splývají a pro markovské řetězce nad konečnou abecedou splývají všechny.

Klíčová slova: Koeficienty silného mixingu, konečná abeceda, markovský řetězec, náhodný proces

Title: Mixing processes with finite alphabet

Author: Ondřej Vostal

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Michal Kupsa, Ph.D., Institute of Information Theory and Automation, Public Research Institution

Abstract: An introduction to the theory of mixing of random processes is presented. The aim of this introduction is to be eventually able to separate general random processes, markov chains and markov chains with finite alphabet into groups which mix differently. The introduction is made complete by examples. We show, that for general processes those groups are separate, for markov chains some coincide, and for markov chains with finite alphabet all coincide.

Keywords: Strong mixing coefficients, finite alphabet, markov chain, random process

Obsah

Úvod **2**

1 Příprava **4**

2 Mixing obecně **6**

3 Stacionární procesy **14**

4 Procesy se spočetnou množinou stavů **21**

5 Markovské řetězce **24**

5.1 Markovské trojice 24

5.2 Stacionární markovské řetězce 26

5.2.1 Stacionární markovské řetězce nad konečnými abecedami . 29

6 Třídy mixujících procesů **30**

6.1 Markovské řetězce nad konečnými abecedami 30

6.2 Markovské řetězce nad nekonečnými množinami 32

6.3 Obecné procesy 38

Závěr **41**

A σ-algebry **42**

B Markovské trojice a Markovské řetězce **44**

C Symetrická diference **46**

D Vlastnosti pravděpodobnosti **49**

E Vlastnosti pravděpodobnostního prostoru **53**

F Řady **57**

Úvod

Mnoho jevů skutečného světa lze studovat skrze modely založené na náhodných procesech. Ke studiu modelových náhodných procesů je dále potřeba, aby měly vhodné vlastnosti. Můžeme např. požadovat splnění jistých strukturálních podmínek, které model zjednoduší, nikoliv však příliš, aby byl stále ještě dostatečně přesný. Modely často užívají procesy s nezávislými složkami nebo markovské řetězce. V některých případech však může být požadování konkrétní struktury příliš omezující. Navíc se ukazuje, že pro platnost centrálních limitních vět není předepsání struktury nezbytné. Stačí, aby proces splňoval jisté podmínky silného mixingu.

Mixing vyjadřuje vytrácení se závislosti budoucnosti na vzdalující se minulosti. Čím vzdálenější minulost uvažujeme, tím více se závislost budoucnosti na ní vytrácí. O závislosti budoucnosti na omezené minulosti se přitom nehovoří. Může tedy být libovolně silná, což je v kontrastu s markovskou vlastností a časově nezávislými procesy, kde je přípustná buď jen velmi jednoduchá závislost, nebo vůbec žádná.

K popisu vytrácení závislosti je potřeba závislost měřit. Pro náhodný proces $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ se definují různé částečné koeficienty mixingu. Předmětem práce budou koeficienty α_n, ϕ_n a ψ_n. Řekneme, že proces je α-mixující, jestliže $\alpha_n \to 0$, podobně pro ϕ a ψ. Obecně platí, že každý α-mixující proces je už i ϕ-mixující a každý ϕ-mixující je už i ψ-mixující. V obecném případě opačné implikace neplatí.

Protože je definováno α_n, ϕ_n a ψ_n pro každé $n \in \mathbb{N}$, lze měřit i rychlost rozpadu závislosti. Tím se zabývají Kesten & O'Brien (1976). Ve svém článku podali konstrukce procesů, kterými ukázali, že rychlosti rozpadu závislosti jednotlivých typů mixingu mohou být prakticky libovolné. Není tedy smysluplné předpokládat, že jistá rychlost rozpadu např. α_n už bude implikovat ϕ-mixing.

V práci budeme zkoumat, jaké vztahy mezi sebou mají α-, ϕ- a ψ-mixing, počítají-li se pro různé skupiny procesů. Uvidíme, že ani tak významné strukturní omezení, jako je splnění markovské vlastnosti, nezpůsobí ekvivalenci α-, ϕ- a ψ-mixingu. Omezíme-li však množinu stavů řetězců na konečnou, α-, ϕ- a ψ-mixing začnou být ekvivalentní.

Původním záměrem práce bylo reagovat na tuto skutečnost a zodpovědět, zdali jsou α-, ϕ- a ψ-mixing ekvivalentní pro obecné procesy s diskrétním časem nad konečnou abecedou. Zkonstruovat příklad, který by dokázal pracovní hypotézu a sice, že α-, ϕ- a ψ-mixing ekvivalentní nejsou, se nám nepodařilo. Práce je tedy nakonec především ucelenou rešerší vybraných koeficientů mixingu, která vznikla při snaze naplnit původní záměr práce.

Výklad základů mixingu, který tvoří velkou část práce, přebíráme z Bradley (2007). V některých důkazech doplňujeme místa, která Bradley považuje za zřejmá a nechává jejich doplnění na čtenáři. Původní jsou také důkazy některých tvrzení, která Bradley formuluje, ale jejich důkazy buď vůbec neuvádí (zejména Tvrzení 2.6 na str. 8 a Tvrzení 5.2 na str. 24), nebo podává strohý návod (zejména Tvrzení E.1 na str. 53). Hlavní přínos práce spočívá v tvrzeních Příkladu 1 na str. 31 a Příkladu 2 na str. 33.

Zbytek práce je členěn následovně:

V Kapitole 1 zavádíme značení a představujeme další základní pozorování, která používáme dále.

V Kapitole 2 podáváme výklad obecných základů mixingu.

V Kapitole 3 vykládáme základy mixingu silně stacionárních procesů.

V Kapitole 4 vykládáme základy mixingu procesů nad spočetnými množinami stavů.

V Kapitole 5 vykládáme základy mixingu markovských řetězců.

V Kapitole 6 využíváme vyloženou teorii a popisujeme příklady k tomu, abychom ukázali, zdali jsou α-, ϕ- a ψ-mixing ekvivalentní pro silně stacionární markovské řetězce nad konečnou abecedou.

1 Příprava

V hlavní části práce se budeme zabývat převážně náhodnými procesy s diskrétním časem a spočetnou množinou stavů. Přehled dosavadního poznání o mixingu náhodných procesů však vyslovíme v obecnosti běžné v literatuře.

Neuvedeme-li jinak, budeme předpokládat, že je v celé práci dán dostatečně bohatý pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a že všechny náhodné procesy jsou definovány na tomto pravděpodobnostním prostoru. V práci se budeme zabývat především oboustrannými náhodnými procesy $(\Omega, \mathcal{F}, P) \to \big(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathbb{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}})\big)$. *$\sigma$-algebru generovanou náhodným procesem* $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ zavedeme předpisem[1]

$$\sigma(X) = \left\{[X \in A]; A \in \mathbb{B}\big(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\big)\right\}.$$

Nechť je $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ náhodný proces. Pro $i \leq j \in \mathbb{Z}$ označme

$$\mathcal{F}_i^j(X) = \sigma(X_k, k = i, \ldots, j); \qquad \mathcal{F}_i(X) = \sigma(X_i);$$
$$\mathcal{F}_{-\infty}^j(X) = \sigma(X_k, k = \ldots, j); \qquad \mathcal{F}_i^\infty(X) = \sigma(X_k, k = i, \ldots).$$

(Bradley, 2007, 0.9 Notations, str. 9)

Věta 1.1. *Pro každý náhodný proces $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ existuje náhodný proces $Y = (Y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ splňující*

$$Y_k(\omega) = \omega_k, \ \forall \omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, k \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

se stejným rozdělením[2] jako má X.

(Bradley, 2007, A standard „nice" probability space, str. 17)

Důkaz. Nechť je Q pravděpodobnostní míra na $\big(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathbb{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}})\big)$. Definujme náhodný proces $Y = (Y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ předpisem (1). Pro takto definovaný náhodný proces je $[Y \in A] = A$, pročež je také $Q(Y \in A) = Q(A)$, což znamená, že rozdělením Y je míra Q. Stačí tedy položit $Q = P_X$, kde P_X je rozdělením X a Y je pak hledaným procesem o kterém mluví věta. Q.E.D.

[1] $\mathbb{B}\big(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\big)$ je systém borelovských množin generovaný otevřenými množinami $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, kde uvažujeme topologii generovanou intervaly; $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ má analogický význam. Pro náhodnou veličinu X a množinu $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ značí $[X \in A]$ jev $\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in A\}$; podobné značení používáme pro náhodné procesy.

[2] Rozdělením náhodného procesu $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ myslíme míru P_X na $\big(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathbb{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}})\big)$, která je obrazem míry P, tj. splňuje $\forall A \in \mathbb{B}\big(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\big): P_X(A) = P(X \in A)$ (Billingsley, 1995, str. 73).

Věty hovořící o náhodných procesech se zpravidla zabývají především rozdělením procesů nikoliv pravděpodobnostním prostorem, na kterém jsou procesy definovány. Lze proto díky Větě 1.1 často bez újmy na obecnosti přejít od náhodného procesu $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ definovaného na obecném pravděpodobnostním prostoru k náhodnému procesu $Y = (Y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ definovanému na $\big(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathbb{B}\big(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\big), P_X\big)$ (Bradley, 2007, 0.24 Remark, str. 21).

Zaveďme ještě některá další značení pro zpřehlednění vyjadřování.

Značení 1.

(i) Pro jevy $A, B \in \mathcal{F}$ budeme psát

  (a) $A \mathrel{\dot\subseteq} B$, jestliže bude platit $P(B \setminus A) = 0$;

  (b) $A \doteq B$, jestliže bude $A \mathrel{\dot\subseteq} B$ a $B \mathrel{\dot\subseteq} A$, tj. bude $P(A \triangle B) = 0$.

(ii) Pro $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ a jev $A \in \mathcal{F}$ budeme psát

  (a) $A \mathrel{\dot\in} \mathcal{A}$, jestliže $\exists B \in \mathcal{A}\colon A \doteq B$;

  (b) $\mathcal{A} \mathrel{\dot\subseteq} \mathcal{B}$, jestliže $\forall A \in \mathcal{A}\colon A \mathrel{\dot\in} \mathcal{B}$;

  (c) $\mathcal{A} \doteq \mathcal{B}$, jestliže $\mathcal{A} \mathrel{\dot\subseteq} \mathcal{B}$ a $\mathcal{B} \mathrel{\dot\subseteq} \mathcal{A}$.

(iii) $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ bude značit $\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$. Přirozeně budeme užívat i velký operátor $\bigvee$.

Pro náhodné veličiny X a Y bude $X \doteq Y$ znamenat $X = Y,\ P - s.j.$ Podobně pak pro relace uspořádání.

(Bradley, 2007, 0.3 Notations on a probability space, str. 4)

Značení 2. Pro $i \leq j \in \mathbb{Z}$ budeme bez dalšího upozornění psát $\mathcal{F}_i^j$ místo $\mathcal{F}_i^j(X)$ a $\mathcal{G}_i^j$ místo $\mathcal{F}_i^j(Y)$.

Nechť je $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ náhodný proces. *Převrácením procesu* X rozumíme náhodný proces $Y = (Y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ zadaný jako

$$Y_k = X_{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Pro převrácený proces Y zřejmě platí $\mathcal{G}_i^j = \mathcal{F}_{-j}^{-i},\ i < j \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$.

2 Mixing obecně

Definice 2.1. Nechť $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou σ-algebry nad Ω. Pro $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{B}$ splňující $P(A) > 0$ a $P(B) > 0$ označme

$$c_\alpha(A, B) = P(A \cap B) - P(A)P(B); \qquad c_\phi(A, B) = P(B|A) - P(B);$$
$$c_\psi(A, B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)P(B)} - 1.$$

Položme $c_\alpha(A, B) = c_\phi(A, B) = c_\psi(A, B) = 0$, jestliže $P(A) = 0$, nebo $P(B) = 0$. Dále pro $\lambda \in \{\alpha, \phi, \psi\}$ definujme

$$\lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} |c_\lambda(A, B)| \quad \text{a také} \quad \phi'(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \phi(\mathcal{B}, \mathcal{A}).$$

Nechť $\lambda \in \{\alpha, \phi, \phi', \psi\}$. Pro daný náhodný proces $X = (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ definujme částečné koeficienty mixingu

$$\lambda_n(X) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \lambda(\mathcal{F}_{-\infty}^k, \mathcal{F}_{k+n}^\infty).$$

Bude-li z kontextu zřejmé s jakým procesem právě pracujeme, budeme místo $\lambda_n(X)$ psát jen λ_n. Konečně řekneme, že X je λ-mixující[3], jestliže

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0.$$

(Bradley, 2007, 3.3 Definitions, str. 67)

Poznámka 2.2. Nechť je $X = (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ náhodný proces a Y nechť je jeho převrácením. Pak platí $\alpha_n(X) = \alpha_n(Y)$ a $\psi_n(X) = \psi_n(Y)$. Jednak

$$c_\alpha(A, B) = P(A \cap B) - P(A)\,P(B) = P(B \cap A) - P(B)\,P(A) = c_\alpha(B, A).$$

Navíc

$$\begin{aligned}
\alpha_n(X) &= \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\substack{A \in \mathcal{F}_{-\infty}^k \\ B \in \mathcal{F}_{k+n}^\infty}} |c_\alpha(A, B)| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\substack{B \in \mathcal{F}_{-\infty}^k \\ A \in \mathcal{F}_{k+n}^\infty}} |c_\alpha(B, A)| \\
&= \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\substack{B \in \mathcal{G}_{-k}^\infty \\ A \in \mathcal{G}_{-\infty}^{-k-n}}} |c_\alpha(A, B)| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\substack{A \in \mathcal{G}_{-\infty}^k \\ B \in \mathcal{G}_{k+n}^\infty}} |c_\alpha(A, B)| = \alpha_n(Y);
\end{aligned}$$

podobně pro ψ; podobně se také ukáže, že $\phi_n(X) = \phi'_n(Y)$.

[3] Bradley (2007, str. 28) nazývá α-mixing raději silným mixingem. Zde jsme se spokojili s označením „α-mixing", abychom se vyhnuli možné záměně s mixingem ve smyslu ergodické teorie o kterém pojednáváme v Kapitole 3.

Poznámka 2.3. Buď $\lambda \in \{\alpha, \phi, \psi\}$.

(i) Pro náhodné procesy $V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $W = (W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ platí

$$\lambda(\sigma(V), \sigma(W)) = \sup_{\substack{A\in\sigma(V)\\ B\in\sigma(W)}} |c_\lambda(A, B)| = \sup_{C,D\in\mathbb{B}^{\mathbb{N}}} |c_\lambda(V \in C, W \in D)| .$$

(ii) Nechť je $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ náhodný proces a nechť $n \in \mathbb{N}$, potom platí

$$\lambda(\mathcal{F}^k_{-\infty}, \mathcal{F}^\infty_{k+n}) = \sup_{C,D\in\mathbb{B}^{\mathbb{N}}} |c_\lambda(V \in C, W \in D)| ,\ \forall k \in \mathbb{Z},$$

kde $V = (\dots, X_{k-1}, X_k)$ a $W = (X_{k+n}, X_{k+n+1}, \dots)$. Jako zřejmý důsledek také platí

$$\lambda_n = \sup_k \sup_{C,D\in\mathbb{B}^{\mathbb{N}}} |c_\lambda(V \in C, W \in D)| .$$

(Bradley, 2007, 1.7 Remarks, str. 28; zobecnění)

Tvrzení 2.4. *Nechť je $\lambda \in \{\alpha, \phi, \psi\}$. Nechť jsou $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ a $Y = (Y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ náhodné procesy, které mají stejná rozdělení. Buďte $R = \{r_1, r_2, \dots\} \subseteq \mathbb{Z}$ a $S = \{s_1, s_2, \dots\} \subseteq \mathbb{Z}$. Položme $V = (X_{r_1}, X_{r_2}, \dots)$, $W = (X_{s_1}, X_{s_2}, \dots)$, $V' = (Y_{r_1}, Y_{r_2}, \dots)$ a $W' = (Y_{s_1}, Y_{s_2}, \dots)$. Pak platí*

$$c_\lambda(V \in C, W \in D) = c_\lambda(V' \in C, W' \in D), \quad \forall C, D \in \mathbb{B}^{\mathbb{N}},$$

(Bradley, 2007, 1.7 Remarks, str. 28; zobecnění)

Podáváme původní důkaz. Bradley tvrzení nedokazuje.

Důkaz. Tvrzení musíme dokázat pro jednotlivé koeficienty mixingu. Pro c_α máme

$$\begin{aligned} c_\alpha(V \in C, W \in D) &= P(V \in C, W \in D) - P(V \in C)\, P(W \in D) \\ &= P(V' \in C, W' \in D) - P(V' \in C)\, P(W' \in D) = c_\alpha(V' \in C, W' \in D). \end{aligned}$$

Pro c_ϕ platí

$$\begin{aligned} c_\phi(V \in C, W \in D) &= P(W \in D | V \in C) - P(W \in D) \\ &= \frac{P(W \in D, V \in C)}{P(V \in C)} - P(W \in D) = \frac{P(W' \in D, V' \in C)}{P(V' \in C)} - P(W' \in D) \\ &= P(W' \in D | V' \in C) - P(W' \in D) = c_\phi(V' \in C, W' \in D). \end{aligned}$$

Konečně pro c_ψ můžeme psát

$$
\begin{aligned}
c_\psi(V \in C, W \in D) &= \frac{P(V \in C, W \in D)}{P(V \in C)\, P(W \in D)} - 1 \\
&= \frac{P(V' \in C, W' \in D)}{P(V' \in C)\, P(W' \in D)} - 1 = c_\psi(V' \in C, W' \in D).
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

Nechť je dán náhodný proces $X = (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Koeficienty v Definici 2.1 pro tento proces nemohou být libovolné. Omezení, která musí splňovat, nastíníme v několika následujících tvrzeních.

Lemma 2.5. *Pro jevy A a B platí*

$$|P(A \cap B) - P(A)\, P(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

(Bradley, 2007, 1.3 Propositon, str. 26)

Důkaz doslovně přebíráme z Bradleyho.

Důkaz. Je obecně známo, že platí $x - x^2 \leq \frac{1}{4}$. Pro jevy A a B platí

$$P(A \cap B) - P(A)\, P(B) \leq P(A \cap B) - [P(A \cap B)]^2 \leq \frac{1}{4}$$

a zároveň je podle Poznámky D.6

$$-[P(A \cap B) - P(A)\, P(B)] = P(A^c \cap B) - P(A^c)\, P(B) \leq \frac{1}{4},$$

z čehož už Lemma plyne. Q.E.D.

Tvrzení 2.6. *Buď $\lambda \in \{\alpha, \phi, \phi', \psi\}$. Pak platí:*

(i) $\lambda_n \geq \lambda_{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\lambda(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0) \leq \lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, *pro σ-algebry splňující* $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}, \ \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$.

(iii) $\lambda(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0) \leq \lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, *pro σ-algebry splňující* $\mathcal{A}_0 \dot{\subseteq} \mathcal{A}, \ \mathcal{B}_0 \dot{\subseteq} \mathcal{B}$.

(iv) Koeficienty mixingu splňují nerovnosti

(a) $0 \leq \alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \frac{1}{4}$

(b) $0 \leq \phi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq 1$,

(c) $0 \leq \psi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \infty$.

(v) $\lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = 0$, *jsou-li* $\mathcal{A}$ *a* $\mathcal{B}$ *nezávislé*[4] σ*-algebry.*

(Bradley, 2007, Chapter 3, str. 66-86)

Důkaz je původní. Bradley tvrzení, vyjma (iva), považuje za zřejmá. K bodu (iv) navíc konstruuje příklady, které ukazují, že se horních mezí může nabýt.

Důkaz. **(ii).** Platí

$$\lambda(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0) = \sup_{A \in \mathcal{A}_0, B \in \mathcal{B}_0} |c_\lambda(A, B)| \leq \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} |c_\lambda(A, B)| = \lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B}),$$

neboť se supremum počítá přes větší množiny.

(i). Zřejmě je splněno $\sigma(X_{k+n+1}, \dots) \subseteq \sigma(X_{k+n}, X_{k+n+1}, \dots) = \sigma(X_{k+n}, \dots)$, pro všechna $n \in \mathbb{N}$, platí tedy $\mathcal{F}_{k+n+1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}_{k+n}^{\infty}$. Proto platí (i) podle (ii).

(iii). Označme

$$S_0 = \{|c_\lambda(A, B)|; A \in \mathcal{A}_0, B \in \mathcal{B}_0\}, \quad S = \{|c_\lambda(A, B)|; A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}.$$

Zvolme $A_0 \in \mathcal{A}_0$ a $B_0 \in \mathcal{B}_0$. Pak $|c_\lambda(A_0, B_0)| \in S_0$. Podle předpokladů existují $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{B}$ splňující $A \doteq A_0, B \doteq B_0$, proto $P(A) = P(A_0), P(B) = P(B_0)$; z Definice 2.1 plyne $|c_\lambda(A_0, B_0)| = |c_\lambda(A, B)| \in S$. Proto je $S_0 \subseteq S$, a také $\lambda(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0) = \sup S_0 \leq \sup S = \lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Tím je (iii) dokázáno.

(iv). $\lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq 0$ plyne triviálně z nezápornosti absolutní hodnoty a z toho, že každá σ-algebra je neprázdná. ***(i)*** plyne přímo z Lemmatu 2.5. ***(ii).*** Buďte $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{B}$. Z vlastností pravděpodobnosti $0 \leq P(B) \leq 1$, $0 \leq P(B|A) \leq 1$ plyne $|c_\phi(A, B)| = |P(B|A) - P(B)| \leq 1$. ***(iii)*** je vlastností absolutní hodnoty. To, že se horních mezí nabývá i v netriviálních případech ukazuje na příkladech Bradley (2007, str. 100-101).

(v). Buďte $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{B}$. Z nezávislosti plyne $c_\lambda(A, B) = 0$, proto platí i

$$\lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \sup_{\substack{A \in \mathcal{F}_{-\infty}^{k} \\ B \in \mathcal{F}_{k+n}^{\infty}}} |c_\lambda(A, B)| = 0.$$

Q.E.D.

[4] Řekneme, že σ-algebry $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou *nezávislé*, jestliže splňují $P(A)\,P(B) = P(A \cap B)$ pro všechna $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{B}$.

Tvrzení 2.7. *Nechť jsou $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebry . Pak platí*

$$2\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \phi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \frac{1}{2}\psi(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

(Bradley, 2007, Proposition 3.11, str. 76)

Důkaz první nerovnosti jsme zjednodušili, neboť dokazujeme jen speciální případ toho, co dokazuje Bradley. Důkaz druhé nerovnosti doslovně přebíráme z Bradleyho.

Důkaz. Nejprve dokážeme první nerovnost. Nechť $B \in \mathcal{B},\ A \in \mathcal{A},\ P(A) > 0$. Počítejme

$$|P(A \cap B) - P(A)\,P(B)| \ \leq \ P(A)\,|P(B|A) - P(B)| \ \leq \ P(A)\,\phi(\mathcal{A}, \mathcal{B}). \quad (3)$$

Navíc pokud je $P(A) = 0$, (3) platí triviálně.

Podle Poznámky D.6 na str. 52 a (3) platí

$$\begin{aligned}2|P(A \cap B) - P(A)\,P(B)| &= |P(A \cap B) - P(A)\,P(B)| + |P(A^{\mathrm{c}} \cap B) \\ &\quad - P(A^{\mathrm{c}})\,P(B)| \leq P(A)\,\phi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) + P(A^{\mathrm{c}})\,\phi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \phi(\mathcal{A}, \mathcal{B}).\end{aligned}$$

Přechodem k supremu plyne z Definice 2.1 důkaz první nerovnosti.

Dále dokážeme druhou nerovnost. Nejprve si uvědomme, že je-li $P(B) > \frac{1}{2}$ pak nutně $P(B^{\mathrm{c}}) < \frac{1}{2}$. Podle poslední rovnice Poznámky D.6 na str. 52 pak platí

$$\phi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{\substack{A \in \mathcal{A}, P(A) > 0 \\ B \in \mathcal{B}, P(B) \leq \frac{1}{2}}} |P(B|A) - P(B)|\,.$$

Nechť je tedy $A \in \mathcal{A},\ P(A) > 0,\ B \in \mathcal{B},\ P(B) \leq \frac{1}{2}$. Ukážeme, že

$$|P(B|A) - P(B)| \leq \frac{1}{2}\psi(\mathcal{A}, \mathcal{B}). \quad (4)$$

Pokud je $P(B) = 0$, pak (4) platí triviálně (levá strana je 0). Předpokládejme tedy, že $0 < P(B) \leq \frac{1}{2}$. Platí

$$\frac{1}{2}\psi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq P(B)\left|\frac{P(A \cap B)}{P(A)\,P(B)} - 1\right| = |P(B|A) - P(B)|\,.$$

(4) tedy platí, což dává důkaz druhé nerovnosti. Q.E.D.

Tvrzení 2.8. *Nechť $\lambda \in \{\alpha, \phi, \psi\}$ a nechť jsou pro každé $n \in \mathbb{N}$ dány σ-algebry $\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{F}$ splňující $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \ldots$, $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \subseteq \ldots$ Označme $\mathcal{A} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ a $\mathcal{B} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$. Pak platí*

$$\lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \lim_{n\to\infty} \lambda(\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda(\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n).$$

(Bradley, 2007, Proposition 3.18, str. 85)

Tvrzení dokazujeme v podstatě stejně jako Bradley.

Důkaz. Dokážeme druhou rovnost. Podle Tvrzení 2.6(ii) tvoří koeficienty monotónní posloupnost $\lambda(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1) \leq \lambda(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2) \leq \ldots$ Limita takové posloupnosti existuje (ať už vlastní, nebo nevlastní) a je rovna supremu; čímž je druhá rovnost dokázána.

Rovněž podle Tvrzení 2.6(ii) platí $\lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda(\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n)$. Stačí tedy dokázat opačnou nerovnost. Definujme $\mathcal{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ a $\mathcal{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$. Tyto systémy množin jsou definovány tak, že generují σ-algebry $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Nechť je $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ a $\delta > 0$. Podle Tvrzení E.2 na str. 54 (iii,iv,v) existují množiny $A_0 \in \mathcal{D}$ a $B_0 \in \mathcal{E}$ tak, že $|c_\lambda(A_0, B_0)| \geq |c_\lambda(A, B)| - \delta$. Z toho, jak jsou $\mathcal{D}$ a $\mathcal{E}$ definovány, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $A_0 \in \mathcal{A}_{n_0}$ a $B_0 \in \mathcal{B}_{n_0}$. Pro takové n_0 jistě platí

$$|c_\lambda(A, B)| - \delta \leq \lambda(\mathcal{A}_{n_0}, \mathcal{B}_{n_0}) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda(\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n).$$

Jelikož $\delta > 0$ bylo libovolné, platí rovněž $|c_\lambda(A, B)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda(\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n)$. Jelikož konečně i $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{B}$ byly libovolné, platí $\lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda(\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n)$. Tím je tvrzení dokázáno. Q.E.D.

Tvrzení 2.9. *Pro σ-algebry $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ platí*

(i) $$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{B\in\mathcal{B}} \frac{1}{2} \mathsf{E}\, |P(B|\mathcal{A}) - P(B)|\,;$$

(ii) $$\phi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{B\in\mathcal{B}}\ \operatorname{ess\,sup} |P(B|\mathcal{A}) - P(B)|\,;$$

(iii) $$\psi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{\substack{B\in\mathcal{B}\\ P(B)>0}} \operatorname{ess\,sup} \left| \frac{P(B|\mathcal{A})}{P(B)} - 1 \right|.$$

(Bradley, 2007, 3.22 Proposition, str. 89)

Důkaz doslovně přebíráme z Bradleyho.

Důkaz. **(i).** Pro každé dvě množiny $G \in \mathcal{A}$ a $H \in \mathcal{B}$ platí

$$\begin{aligned}|P(G \cap H) - P(G)\,P(H)| &= \left| \int_G P(H|\mathcal{A}) - P(H) dP \right| \\ &\leq \int_G |P(H|\mathcal{A}) - P(H)|\, dP, \quad (5)\end{aligned}$$

podobně také platí

$$|P(G^c \cap H) - P(G^c)\,P(H)| \leq \int_{G^c} |P(H|\mathcal{A}) - P(H)|\, dP. \qquad (6)$$

Podle Poznámky D.6 na str. 52, (5) a (6) platí

$$2c_\alpha(G, H) = 2\,|P(G \cap H) - P(G)\,P(H)| \leq \int_\Omega |P(H|\mathcal{A}) - P(H)|\, dP. \qquad (7)$$

Aplikací suprema na obě strany snadno obdržíme, že

$$2\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq \sup_{B \in \mathcal{B}} \int_\Omega |P(B|\mathcal{A}) - P(B)|\, dP = \sup_{B \in \mathcal{B}} \mathsf{E}\, |P(H|\mathcal{A}) - P(H)|\,.$$

Nechť je dále $H \in \mathcal{B}$ a $G = [P(H|\mathcal{A}) \geq P(H)]$. Pak platí $G^c = [P(H|\mathcal{A}) < P(H)]$; v (5), (6) a (7) se nabývá rovnosti, čímž je (i) dokázáno.

(iii). Buď $B \in \mathcal{B}$ takové, že $P(B) > 0$. Definujme

$$m_B = \operatorname{ess\,inf} P(B|\mathcal{A}) \quad \text{a} \quad M_B = \operatorname{ess\,sup} P(B|\mathcal{A}). \qquad (8)$$

Definujme dále funkci na $\mathbb{R}$ předpisem

$$f_B(x) = \left| \frac{x}{P(B)} - 1 \right|. \qquad (9)$$

f_B je zřejmě konvexní funkcí x. Podle Tvrzení D.5 na str. 52 (iii) plyne z (8)

$$\operatorname{ess\,sup} f_B(P(B|\mathcal{A})) = \max\{f_B(m_B), f_B(M_B)\}. \qquad (10)$$

Pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňující $P(A) > 0$ máme podle Tvrzení D.4 na str. 51 $m_B \leq P(B|\mathcal{A}) \leq M_B$ a z Tvrzení D.5 na str. 52(i) dále plyne

$$f_B(P(B|A)) \leq \max\{f_B(m_B), f_B(M_B)\}. \qquad (11)$$

Protože f_B je konvexní, je také spojitá (viz např. Theorem 3.2, Rudin, 1974). Navíc z (8) a Tvrzení D.4 lze zvolit $A \in \mathcal{A}$ splňující $P(A) > 0$ tak, že $P(B|A)$ bude libovolně blízko k číslům m_B a M_B. Z (11) tedy plyne

$$\sup_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ P(A) > 0}} f_B(P(B|A)) = \max\{f_B(m_B), f_B(M_B)\}.$$

Podle (10) tedy platí

$$\sup_{\substack{A\in\mathcal{A}\\P(A)>0}} f_B(P(B|A)) = \operatorname{ess\,sup} f_B(P(B|\mathcal{A}). \tag{12}$$

Jelikož $B \in \mathcal{B}$: $P(B) > 0$ bylo ve (12) libovolné, supremum obou stran dává

$$\sup_{\substack{A\in\mathcal{A},P(A)>0\\B\in\mathcal{B},P(B)>0}} f_B(P(B|A)) = \sup_{\substack{B\in\mathcal{B}\\P(B)>0}} \operatorname{ess\,sup} f_B(P(B|\mathcal{A})). \tag{13}$$

Dosazením za f_B z (9) plyne dokončení důkazu (iii).

(ii). Důkaz je stejný jako důkaz (iii), pouze v (9) se použije funkce $f_B(x) = |x - P(B)|$ a vypustí se omezení $P(B) > 0$. Q.E.D.

3 Stacionární procesy

T bude dále značit *operátor posunu* na $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, který definujeme předpisem složek

$$T_k(\omega) = \omega_{k+1}, \quad \omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, k \in \mathbb{Z}. \tag{14}$$

mocniny posunu lze vyjádřit jako $(T^n)_k(\omega) = \omega_{k+n},\ n \in \mathbb{Z}$ (Bradley, 2007, The shift operator, str. 17). Pro množinu $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}})$ a $j \in \mathbb{Z}$ definujeme $T^{-j}A = \{\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}; T^j\omega \in A\}$ (Billingsley, 1965, Definitions, str. 2). Řekneme, že náhodný proces X je *silně stacionární*, jestliže splňuje

$$P(X \in A) = P(X \in T^{-1}A), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Důsledek 3.1. *Pro silně stacionární oboustranný proces* $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $\lambda \in \{\alpha, \phi, \psi\}, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ *platí* $\lambda(\mathcal{F}_{-\infty}^k, \mathcal{F}_{k+n}^\infty) = \lambda(\mathcal{F}_{-\infty}^0, \mathcal{F}_n^\infty)$ *a* $\lambda_n = \lambda(\mathcal{F}_{-\infty}^0, \mathcal{F}_n^\infty)$.

Důkaz. Díky stacionaritě má T^kX stejné rozdělení jako X pro každé $k \in \mathbb{Z}$. Podle Poznámky 2.3 na str. 7(ii) a Tvrzení 2.4 na str. 7 je $\forall k \in \mathbb{Z}$ splněno

$$\begin{aligned}\lambda(\mathcal{F}_{-\infty}^k, \mathcal{F}_{k+n}^\infty) &= \sup_{C,D\in\mathbb{B}^{\mathbb{N}}} |c_\lambda(V \in C, W \in D)| \\ &= \sup_{C,D\in\mathbb{B}^{\mathbb{N}}} |c_\lambda(V' \in C, W' \in D)| = \lambda(\mathcal{F}_{-\infty}^0, \mathcal{F}_n^\infty),\end{aligned}$$

kde $V = (\dots, X_{k-1}, X_k)$, $W = (X_{k+n}, X_{k+n+1}, \dots)$, $V' = T^kV = (\dots, X_{-1}, X_0)$ a $W' = T^kW = (X_n, X_{n+1}, \dots)$. Navíc také platí

$$\lambda_n = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \lambda(\mathcal{F}_{-\infty}^k, \mathcal{F}_{k+n}^\infty) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \lambda(\mathcal{F}_{-\infty}^0, \mathcal{F}_n^\infty) = \lambda(\mathcal{F}_{-\infty}^0, \mathcal{F}_n^\infty).$$

Q.E.D.

Definice 3.2. Nechť je $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ silně stacionární náhodný proces. *σ-algebrou s.j. invariantních množin* X definujeme jako

$$\mathcal{I} = \{A \in \sigma(X); [X \in A] \doteq [X \in T^{-1}A]\}.$$

Řekneme, že X je *ergodický* jestliže $P(X \in A) \in \{0, 1\}$ pro všechna $A \in \mathcal{I}$. Řekneme, že X je *mixující ve smyslu ergodické teorie*, jestliže platí

$$\lim_{n\to\infty} P(X \in A \cap T^{-n}B) = P(X \in A)\, P(X \in B), \quad \forall A, B \in \sigma(X). \tag{15}$$

(srov. s Bradley, 2007, 2.2 Definition, str. 48)

Poznámka 3.3. Nechť je $Y = (Y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ silně stacionární náhodný proces splňující (1) na str. 4. Pak je $A = [Y \in A]$ pro všechna $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}})$. Zřejmě je pak $\mathcal{I} = \{A \in \sigma(Y); A \doteq T^{-1}A\}$ σ-algebrou s.j. invariantních množin Y. Také platí, že Y je ergodický, resp. mixující ve smyslu ergodické teorie právě tehdy, když $P(A) \in \{0,1\}$ pro všechna $A \in \mathcal{I}$, resp. $\lim_{n\to\infty} P(A \cap T^{-n}B) = P(A)\,P(B)$ pro všechna $A, B \in \sigma(Y)$ (srov. s Bradley, 2007, str. 50 a str. 18).

Tvrzení 3.4. *Buď $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ silně stacionární náhodný proces. Pokud je X mixující ve smyslu ergodické teorie, je už i ergodický.*

(Bradley, 2007, 2.6 Remark, str. 50)

Důkaz je doplněním důkazu, který podává Bradley.

Důkaz. Označme $\mathcal{I}$ σ-algebru s.j. invariantních množin X. Vezměme $A \in \mathcal{I}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $T^{-n}A = TT^{-n+1}A \doteq T^{-n+1}A \doteq \ldots \doteq A$ a proto je i $A \cap T^{-n}A \doteq A \cap A = A$. Z podmínky mixingu ve smyslu ergodické teorie (15) máme

$$\lim_{n\to\infty} P(X \in A) = \lim_{n\to\infty} P(X \in A \cap T^{-n}A) = P(X \in A)^2,$$

odkud plyne $P(X \in A) = P(X \in A)^2$, odkud dále plyne $P(X \in A) \in \{0,1\}$. Dokázali jsem, že $P(X \in A) \in \{0,1\}$, $\forall A \in \mathcal{I}$, čímž jsme ověřili podmínku z definice ergodicity a tím dokázali, že je X ergodický. Q.E.D.

Tvrzení 3.5. *Buď $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ stacionární proces a $Y = (Y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ proces odpovídající X podle Věty 1.1 na str. 4. Pak je X ergodický, resp. mixující ve smyslu ergodické teorie právě tehdy, když je Y ergodický, resp. mixující ve smyslu ergodické teorie.*

Důkaz. Jelikož je role X a Y zaměnitelná, stačí, dokážu-li jednu z implikací.

Nechť je tedy X ergodický a nechť je $\mathcal{I}$ σ-algebra s.j. invariantních množin X. Označme $\mathcal{J}$ σ-albegru s.j. invariantních množin Y. Vezměme $A \in \mathcal{J}$. A je i v $\mathcal{I}$, neboť

$$\begin{aligned} P([X \in A] \triangle [X \in T^{-1}A]) &= P(X \in A \triangle T^{-1}A) \\ &= P(Y \in A \triangle T^{-1}A) = P([Y \in A] \triangle [Y \in T^{-1}A]) = 0. \end{aligned}$$

Proto platí $P(Y \in A) = P(X \in A) \in \{0,1\}$ a Y je ergodický.

Nechť je nyní X mixující ve smyslu ergodické teorie. Vezměme $A, B \in \mathbb{B}\big(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\big)$ a počítejme $P(Y \in A \cap T^{-n}B) = P(X \in A \cap T^{-n}B) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Proto je Y mixující ve smyslu ergodické teorie. Q.E.D.

Tvrzení 3.6. *Nechť je $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ silně stacionární náhodný proces. X je mixující ve smyslu ergodické teorie právě tehdy, když pro každou volbu celých čísel $l \le m$ a $r \le s$ a každou volbu množin $A_i \in \mathbb{B}(\mathbb{R}),\ i = l, \dots, m$ a $B_j \in \mathbb{B}(\mathbb{R}),\ j = r, \dots, s$ platí*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} & P(X_i \in A_i, X_{n+j} \in B_j,\ i = l, \dots, m, j = r, \dots, s) \\ &= P(X_i \in A_i,\ i = l, \dots, m)\, P(X_j \in B_j,\ j = r, \dots, s).\end{aligned}$$

(Bradley, 2007, 2.8 Proposition, str. 51)

Oproti Bradleymu doplňujeme řádný přechod k Y s využitím Věty 1.1 na str. 4. Zbytek důkazu doslovně přebíráme (tj. vše kromě první věty druhého odstavce a poslední věty).

Důkaz. Pokud je X mixující ve smyslu ergodické teorie, je zřejmě tvrzení splněno jako speciální případ podmínky (15). Stačí tedy dokázat opačnou implikaci.

Nechť je Y náhodný proces odpovídající procesu X podle Věty 1.1. Zvolme $C, D \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}})$. Podle Poznámky 3.3 musíme dokázat, že $\lim_{n\to\infty} P(C \cap T^{-n}D) = P(C)\, P(D)$. Bude stačit, ukážeme-li, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$\limsup_{n\to\infty} \big|P(C \cap T^{-n}D) - P(C)\, P(D)\big| \le \varepsilon \tag{16}$$

Podle Poznámky E.3 na str. 55 můžeme zvolit $t \le u \in \mathbb{N}$ a $C_1, D_1 \in \mathcal{F}_t^u$ splňující $P(C_1 \bigtriangleup C) \le \frac{\varepsilon}{8}$ a $P(D_1 \bigtriangleup D) \le \frac{\varepsilon}{8}$.

Množinám, které lze vyjádřit jako

$$F = \bigcap_{i=t}^{u} [Y_i \in A_i] = \{y \in \mathbb{B}\big(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\big);\ y_i \in A_i,\ i = t, \dots, u\},$$

kde $A_i \in \mathbb{B}(\mathbb{R}),\ i = t, \dots, u$, budeme dále říkat (t, u)-obdélníky.

Podle Tvrzení E.4 na str. 55 existují čísla $v, w \in \mathbb{N}$ a množiny $C_0 = \bigcup_{i=1}^{v} G_i$ a $D_0 = \bigcup_{j=1}^{w} H_j$ splňující

(i) $G_i,\ i = 1, \dots, v$ jsou po dvou disjunktní (t, u)-obdélníky;

(ii) $H_j,\ j = 1, \dots, w$ jsou po dvou disjunktní (t, u)-obdélníky;

(iii) $P(D_0 \bigtriangleup D_1) \le \frac{\varepsilon}{8}$; $P(C_0 \bigtriangleup C_1) \le \frac{\varepsilon}{8}$;

(iv) pro daná i a j se mohou obdélníky G_i a H_j překrývat;

Podle Věty C.2(ib,iva) na str. 47 je

$$P(C_0 \bigtriangleup C) \le P(C_0 \bigtriangleup C_1) + P(C_1 \bigtriangleup C) \le \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} \le \frac{\varepsilon}{4};$$

podobně $P(D_0 \bigtriangleup D) \le \frac{\varepsilon}{4}$.

Podle Věty C.2(iii) platí pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left|P(C_0 \cap T^{-n} D_0) - P(C \cap T^{-n} D)\right| &\le P((C_0 \cap T^{-n} D_0) \bigtriangleup (C \cap T^{-n} D)) \\ \le P(C \bigtriangleup C_0) + P(T^{-n} D_0 \bigtriangleup T^{-n} D) &= P(C \bigtriangleup C_0) + P(T^{-n}(D_0 \bigtriangleup D)) \\ &= P(C \bigtriangleup C_0) + P(D_0 \bigtriangleup D) \le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{17}$$

Dále platí

$$\begin{aligned} &|P(C_0)\, P(D_0) - P(C)\, P(D)| \\ &\quad = |P(C_0)\, P(D_0) - P(C_0)\, P(D) - [P(C)\, P(D) - P(C_0)\, P(D)]| \\ &\quad \le |P(C_0)\, P(D_0) - P(C_0)\, P(D)| + |P(C)\, P(D) - P(C_0)\, P(D)| \\ &\quad \le P(C_0)\, |P(D_0) - P(D)| + P(D)\, |P(C) - P(C_0)| \\ &\quad \le P(D_0 \bigtriangleup D) + P(C_0 \bigtriangleup C) \le \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{18}$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $T^{-n} D_0 = \bigcup_{j=1}^{w} T^{-n} H_j$. Proto lze psát

$$\begin{aligned} \left|P(C_0 \cap T^{-n} D_0) - P(C_0)\, P(D_0)\right| &= \left| \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} [P(G_i \cap T^{-n} H_j) \right. \\ \left. - P(G_i)\, P(T^{-n} H_j)] \right| &\le \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{w} \left|P(G_i \cap T^{-n} H_j) - P(G_i)\, P(T^{-n} H_j)\right|. \end{aligned} \tag{19}$$

Podle předpokladů platí $|P(G_i \cap T^{-n} H_j) - P(G_i)\, P(T^{-n} H_j)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$, pro každé $i = 1, \dots, v$ a $j = 1, \dots, t$. Podle (19) tedy platí i $|P(C_0 \cap T^{-n} D_0) - P(C_0)\, P(D_0)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$, z čehož díky (17) a (18) plyne (16) a proto je Y mixující ve smyslu ergodické teorie. Protože X má stejné rozdělení jako Y, je podle Tvrzení 3.5 také mixující ve smyslu ergodické teorie. Q.E.D.

Důsledek 3.7. *Nechť je $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ silně stacionární náhodný proces. Pokud je X α-mixující, je i mixující ve smyslu ergodické teorie. (Bradley, 2007, str. 51)*

Podáváme původní důkaz. Bradley důsledek považuje za zřejmý.

Důkaz. Ukáži, že X splňuje podmínku z Tvrzení 3.6. X je α-mixující a tedy platí

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{\substack{A\in\mathcal{F}_{-\infty}^{k} \\ B\in\mathcal{F}_{k+n}^{\infty}}} |P(A\cap B) - P(A)\,P(B)| = 0.$$

To ovšem rovněž znamená, že je splněno

$$\lim_{n\to\infty} |P(A\cap B) - P(A)\,P(B)| = 0, \quad \forall k,\ \forall A \in \mathcal{F}_{-\infty}^{k},\ B \in \mathcal{F}_{k+n}^{\infty}. \tag{20}$$

Zvolme $l \leq m$ a $r \leq s$. Nechť je $l \in \mathbb{N}$ takové, že $m < l + r$. Zvolme množiny $A_i \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$, $i = l, \ldots, m$ a $B_j \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$, $j = r, \ldots, s$. Pak pro $n \in \mathbb{N}$ platí $\bigcap_{i=l}^{m}[X_i \in A_i] \in \mathcal{F}_l^m \subseteq \mathcal{F}_{-\infty}^{m}$ a $\bigcap_{j=r}^{s}[X_{l+n+j} \in B_j] \in \mathcal{F}_{l+n+r}^{n+s} \subseteq \mathcal{F}_{m+n}^{\infty}$. Pro volbu $k = m$ dostáváme jako speciální případ (20)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |P(X_i \in A_i,\ i = l, \ldots, m,\ X_{l+n+j} \in B_j,\ j = r, \ldots, s) \\ - P(X_i \in A_i,\ i = l, \ldots, m)\,P(X_{l+n+j} \in B_j,\ j = r, \ldots, s)| = 0;\end{aligned}$$

ze stacionarity plyne $P(X_{l+n+j} \in B_j,\ j = r, \ldots, s) = P(X_j \in B_j,\ j = r, \ldots, s)$. Proto $P(X_i \in A_i,\ i = l, \ldots, m)\,P(X_{l+n+j} \in B_j,\ j = r, \ldots, s)$ nezávisí na n a existuje tak limita prvního výrazu v absolutní hodnotě, navíc můžeme přejít od limity podle n k posunuté limitě podle $n + l$ a přeznačit $n := n + l$. Máme proto

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P(X_i \in A_i,\ i = l, \ldots, m,\ X_{n+j} \in B_j,\ j = r, \ldots, s) \\ = P(X_i \in A_i,\ i = l, \ldots, m)\,P(X_j \in B_j,\ j = r, \ldots, s),\end{aligned}$$

což už je podmínka Tvrzení 3.6. Q.E.D.

Tvrzení 3.8. *Buďte $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ náhodný proces a $g\colon \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R}$ borelovská funkce. Definujme $Y = (Y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ předpisem složek $Y_k = g(T^k X),\ k \in \mathbb{Z}$.*

(i) Je-li X silně stacionární, je silně stacionární i Y.

(ii) Je-li X silně stacionární a ergodické, je i Y silně stacionární a ergodické.

(iii) Je-li X silně stacionární a mixující ve smyslu ergodické teorie, je i Y silně stacionární a mixující ve smyslu ergodické teorie.

(Bradley, 2007, 2.10 Proposition, str. 54)

Důkaz přebíráme z Bradleyho.

Důkaz. V důkazu budeme používat speciální značení:

$$((\dots, x_{-1}, x_0), (x_1, x_2, \dots)) = x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}},$$

tj. vektor, na jehož k-té pozici je x_k.

Definujme funkci $h\colon \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ předpisem složek $h_k(x) = g(T^k x)$. Snadno se ověří, že h je borelovská funkce. Pro každé $x \in \mathbb{B}\big(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\big)$ a $j \in \mathbb{Z}$ máme

$$\begin{aligned} T^j h(x) &= T^j((\dots, h_0(x)), (h_1(x), \dots)) = ((\dots, h_j(x)), (h_{j+1}(x), \dots)) \\ &= ((\dots, g(T^j x)), (g(TT^j x), g(T^2 T^j x), \dots)) = h(T^j x). \end{aligned}$$

Proto také dále pro každé $B \in \mathbb{B}\big(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\big)$ a $j \in \mathbb{Z}$ platí

$$\begin{aligned} h^{-1}(T^j B) &= \{\omega \in R, T^{-j} h(\omega) \in B\} = \{\omega \in R, h(T^{-j}\omega) \in B\} \\ &= \{\omega \in R, T^{-j}\omega \in h^{-1}B\} = T^j h^{-1}(B). \end{aligned}$$

Uvědomme si ještě, že platí $Y_k = h_k(X)$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$ a proto i $Y = h(X)$. Nyní už můžeme přistoupit k důkazům jednotlivých částí tvrzení.

(i). Nechť je X silně stacionární. Pro $A \in \mathbb{B}\big(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\big)$ počítejme

$$\begin{aligned} P(Y \in T^{-1}A) &= P(h(X) \in T^{-1}A) = P(X \in h^{-1}(T^{-1}A)) \\ &= P(X \in T^{-1}h^{-1}(A)) = P(X \in h^{-1}(A)) = P(Y \in A), \end{aligned}$$

protože $h^{-1}A \in \mathbb{B}\big(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\big)$ díky borelovskosti h. Y je tedy silně stacionární.

(ii). Nechť je X silně stacionární a ergodické. Y je silně stacionární podle (i). Označme $\mathcal{I}$ σ-algebru s.j. invariantních množin X a $\mathcal{J}$ σ-algebru s.j. invariantních množin Y. Uvažujme $A \in \mathcal{J}$. Použitím podobných úprav jako v (i) dostáváme

$$\begin{aligned} 0 = P([Y \in A] \triangle [Y \in T^{-1}A]) &= P([X \in h^{-1}(A)] \triangle [X \in h^{-1}(T^{-1}A)]) \\ &= P([X \in h^{-1}(A)] \triangle [X \in T^{-1}h^{-1}(A)]). \end{aligned}$$

Platí tedy $h^{-1}A \in \mathcal{I}$ a proto je $P(Y \in A) = P(X \in h^{-1}A) \in \{0, 1\}$. Ověřili jsme, že je Y ergodické.

(iii). Nechť je X silně stacionární a mixující ve smyslu ergodické teorie. Podle (i) je Y silně stacionární. Uvažujme $A, B \in \mathbb{B}\big(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\big)$ a počítejme

$$\lim_{n\to\infty} P(Y \in A \cap T^{-n}B) = \lim_{n\to\infty} P(X \in h^{-1}(A \cap T^{-n}B)) = \lim_{n\to\infty} P(X \in h^{-1}(A) \\ \cap h^{-1}(T^{-n}B)) = \lim_{n\to\infty} P(X \in h^{-1}(A) \cap T^{-n}h^{-1}(B)) = 0,$$

neboť díky měřitelnosti h je $h^{-1}(A) \in \mathbb{B}\big(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\big)$ a $h^{-1}(B) \in \mathbb{B}\big(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}\big)$. Ověřili jsme podmínku z Definice 3.2. Y tedy je mixující ve smyslu ergodické teorie. Q.E.D.

4 Procesy se spočetnou množinou stavů

Spočetnou množinou budeme mít na mysli množinu, jejíž mohutnost je menší než, nebo stejná jako mohutnost množiny přirozených čísel. Omezíme-li se na procesy nad spočetnými množinami, umožní nám to podstatně zjednodušit výpočet částečných koeficientů mixingu. Atomy a atomicitu definujeme podle Bradleyho (2007, 0.7 Notations, str. 8).

Jev $A \in \mathcal{F}$ splňující $P(A) > 0$ nazveme *atomem*[5], jestliže $\forall B \subseteq A\colon P(B) = 0$, nebo $P(B) = P(A)$. Nechť je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebra nad množinou stavů $\Gamma \subseteq \Omega$. $\mathcal{G}$ nazveme *atomickou*, pokud existuje $M = \{M_1, M_2, \dots\}$ spočetná množina atomů náležejících do $\mathcal{G}$ taková, že atomy z M jsou po dvou skoro jistě disjunktní (tj. $M_i \cap M_j \doteq \emptyset,\ i \neq j$) a dohromady skoro jistě pokrývají celý prostor, tj. $\bigcup M \doteq \Gamma$. Takovou množinu M budeme nazývat *rozkladem* $\mathcal{G}$ *na atomy*.

Pozorování 4.1. Nechť je $\mathcal{G}$ atomická σ-algebra nad Γ s rozkladem na atomy $M = \{M_1, M_2, \dots\}$. Pak platí:

(i) Pro každý jev $C \in \mathcal{G}$ existuje $S \subseteq \mathbb{N}$ tak, že platí $C \doteq \bigcup_{i \in S} M_i$. Stačí položit $S = \{i \in \mathbb{N}\colon M_i \dot{\subseteq} C\}$.

(ii) Platí $\sigma(M) \doteq \mathcal{G}$. Zřejmě je $\sigma(M) \subseteq \mathcal{G}$. Naopak pro každou množinu $A \in \mathcal{G}$ existuje podle předešlého bodu $S \subseteq \mathbb{N}\colon A \doteq \bigcup_{i \in S} M_i \in \sigma(M)$.

(iii) Platí
$$\sigma(M) \doteq \left\{ \bigcup_{i \in S} M_i;\ S \subseteq \mathbb{N} \right\}.$$
Pro všechna $S \subseteq \mathbb{N}$ je $\bigcup_{i \in S} M_i \in \sigma(M)$, neboť $\sigma(M)$ je σ-algebra. Množina na pravé straně rovnosti je σ-algebra, z čehož už pozorování plyne.

(iv) Vždy existuje množina $M' = \{M'_1, M'_2, \dots\}$ stejné mohutnosti jako M tvořící rozklad $\mathcal{G}$ na atomy, tj. M' je tvořena po dvou disjunktními atomy, které pokrývají celé $\mathcal{G}$ (ve smyslu $\mathcal{G} = \bigcup M'$) a navíc splňují $M_i \doteq M'_i$, $\forall i$. Pro každou atomickou σ-algebru tedy existuje disjunktní rozklad na atomy.

[5] Atomicita jevů závisí i na pravděpodobnostním prostoru. Omezujeme se však pouze na jediný dostatečně bohatý pravděpodobnostní prostor, a tak mlčky předpokládáme, že se vždy jedná o atomicitu vzhledem k prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Získáme ho tak, že položíme $M'_2 = M_2 \setminus M_1$, $M'_3 = M_3 \setminus (M_1 \cup M_2), \ldots,$ $M'_n = M_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} M_i, \ldots$; nakonec položíme $M'_1 = M_1 \cup \bigcup \mathcal{G} \setminus \bigcup M$.

(Bradley, 2007, 0.7 Notations, str. 8)

Tvrzení 4.2. *Nechť jsou $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ atomické σ-algebry. Označme A_i disjunktní rozklad $\mathcal{A}$ na atomy a podobně B_j disjunktní rozklad $\mathcal{B}$ na atomy (díky atomicitě je atomů pouze spočetně mnoho), lze počítat*

(i) $$\alpha(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \sup_{S,T\subseteq\mathbb{N}} \left| \sum_{i\in S, j\in T} c_\alpha(A_i, B_j) \right|;$$

(ii) $$\phi(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \sup_{B\in\mathcal{B}} \sup_{i\in\mathbb{N}} |c_\phi(A_i, B)| = \sup_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2} \sum_{j\in\mathbb{N}} |c_\phi(A_i, B_j)|;$$

(iii) $$\psi(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \sup_{i,j\in\mathbb{N}} |c_\psi(A_i, B_j)|.$$

(Bradley, 2007, 3.21 Proposition, str. 88)

Bradleyho důkaz je strohý. Doplňujeme ho.

Důkaz. Z Pozorování 4.1(ii,iii) plyne $\left\{\bigcup_{i\in S} A_i;\ S\subseteq\mathbb{N}\right\} \doteq \mathcal{A}$. Podobně pro $\mathcal{B}$. Proto je podle Definice 2.1 na str. 6 a Tvrzení 2.6(iii) na str. 8

$$\lambda(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \sup_{S\subseteq\mathbb{N}} \sup_{B\in\mathcal{B}} \left| c_\lambda\left(\bigcup_{i\in S} A_i, B\right)\right| \tag{21}$$

$$= \sup_{S,T\subseteq\mathbb{N}} \left| c_\lambda\left(\bigcup_{i\in S} A_i, \bigcup_{j\in T} B_j\right)\right| \tag{22}$$

(i). Podle Pozorování 4.1 (iv) můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že všechny rozklady na atomy jsou disjunktní. Nechť $S\subseteq\mathbb{N}$ a $B\in\mathcal{B}$. Pak

$$c_\alpha\left(\bigcup_{i\in S} A_i, B\right) = P\left(\bigcup_{i\in S} A_i \cap B\right) - P\left(\bigcup_{i\in S} A_i\right) P(B).$$

Rozklad A_i je disjunktní, a proto jsou i množiny $A_i \cap B$ disjunktní; platí tedy

$$P\left(\bigcup_{i\in S} A_i \cap B\right) - P\left(\bigcup_{i\in S} A_i\right) P(B) = \sum_{i\in S} P(A_i\cap B) - \sum_{i\in S} P(A_i)\,P(B)$$
$$= \sum_{i\in S} \left(P(A_i\cap B) - P(A_i)\,P(B)\right) = \sum_{i\in S} c_\alpha(A_i, B).$$

c_α je však symetrická (Poznámka 2.2 na str. 6), a proto je pro $T\subseteq\mathbb{N}$ podle již dokázané části

$$\sum_{i\in S} c_\alpha\left(A_i, \bigcup_{j\in T} B_j\right) = \sum_{i\in S} c_\alpha\left(\bigcup_{j\in T} B_j, A_i\right) = \sum_{\substack{j\in T\\ i\in S}} c_\alpha(B_j, A_i) = \sum_{\substack{i\in S\\ j\in T}} c_\alpha(A_i, B_j).$$

Odtud již tvrzení snadno plyne podle (22).

(ii). Nechť $S \subseteq \mathbb{N}$, $B \in \mathcal{B}$. Zřejmě platí

$$|c_\phi(A_i, B)| \leq \sup_{i' \in S} |c_\phi(A_{i'}, B)|, \ \forall i \in S.$$

Podle Důsledku D.2(iv) na str. 49 platí[6] $\left|c_\phi \left(\bigcup_{i\in S} A_i, B\right)\right| \leq \sup_{i\in S} |c_\phi(A_i, B)|$. Suprema se přitom nabývá např. tehdy, je-li A atom. Podle (21) pišme

$$\phi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{S\subseteq\mathbb{N}} \sup_{B\in\mathcal{B}} \sup_{i\in S} |c_\phi(A_i, B)| = \sup_{B\in\mathcal{B}} \sup_{i\in\mathbb{N}} |c_\phi(A_i, B)|.$$

První rovnost je tak dokázána.

Zbývá ještě dokázat druhou rovnost. Všimněme si, že pro každý jev $B = \bigcup_{j\in T} B_j$ platí podobně jako v důkazu (i) díky tomu, že je rozklad disjunktní $c_\phi(A_i, B) = \sum_{j\in T} c_\phi(A_i, B_j)$. Také platí $\sum_j c_\phi(A_i, B_j) = 0$. Podle Poznámky F.1 na str. 57 platí konečně i druhá rovnost v (ii).

(iii). Nechť $T, S \subseteq \mathbb{N}$. Zřejmě platí

$$|c_\psi(A_i, B_j)| \leq \sup_{i'\in S,\ j'\in T} |c_\psi(A_{i'}, B_{j'})|, \ \forall i \in S, \ j \in T.$$

Podle Věty D.3 (iv) platí[7]

$$\left| c_\psi \left(\bigcup_{i\in A} A_i, \bigcup_{j\in T} B_j \right) \right| \leq \sup_{i\in S,\ j\in T} |c_\psi(A_i, B_j)|.$$

Suprema se přitom nabývá, např. když jsou A a B atomy. Podle (22) pak můžeme psát

$$\psi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{S,T\subseteq\mathbb{N}} \sup_{i\in S,\ j\in T} |c_\psi(A_i, B_j)| = \sup_{i,j\in\mathbb{N}} |c_\psi(A_i, B_j)|.$$

Q.E.D.

Poznámka 4.3. První rovnost (ii) Tvrzení 4.2 platí i v případě, kdy je atomická pouze $\mathcal{A}$. Atomicita $\mathcal{B}$ se v důkazu první nerovnosti (ii) nijak nevyužívá.

(Bradley, 2007, Remark, str. 88)

Poznámka 4.4. Pokud je proces ve Tvrzení 4.2 oboustranný a silně stacionární, lze ve výpočtu $\sup_k$ vypustit a počítat tak koeficient pouze z atomů množin $\mathcal{F}_{-\infty}^0$ a $\mathcal{F}_n^\infty$.

[6] volím $c = \sup_{i'\in S} |c_\phi(A_{i'}, B)|$

[7] volím $c = \sup_{i'\in S,\ j'\in T} |c_\psi(A_{i'}, B_{j'})|$

5 Markovské řetězce

Pro markovské řetězce platí několik klíčových tvrzení. Díky nim je výpočet částečných koeficientů mixingu velice zjednodušen ve smyslu Věty 5.5.

5.1 Markovské trojice

Výklad přebíráme z Bradleyho. Některé vlastnosti tedy vyložíme v náležité obecnosti pro markovské trojice.

Definice 5.1. Nechť jsou $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebry. Řekneme, že $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ je markovská trojice, jestliže platí některá z podmínek

(i) $\forall C \in \mathcal{C} \colon P(C|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \doteq P(C|\mathcal{B})$;

(ii) $\forall A \in \mathcal{A} \colon P(A|\mathcal{C} \vee \mathcal{B}) \doteq P(A|\mathcal{B})$;

(iii) $\forall A \in \mathcal{A}, C \in \mathcal{C} \colon P(A \cap C|\mathcal{B}) \doteq P(A|\mathcal{B})\ P(C|\mathcal{B})$.

(Bradley, 2007, Definition 7.1, str. 205)

Věta 5.2. *Podmínky v Definici 5.1 jsou ekvivalentní.*

(Billingsley, 1995, Excercise 34.11, str. 456)

Podáváme původní důkaz.

Důkaz. Všechny rovnosti v důkazu jsou rovnostmi s.j.

(i)$\Longleftrightarrow$(iii). Upravme

$$P(A \cap C|\mathcal{B}) = \mathsf{E}[\mathbb{1}_{A\cap C}|\mathcal{B}] = \mathsf{E}[\mathsf{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_C|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}]\,|\mathcal{B}] = \mathsf{E}[\mathbb{1}_A \mathsf{E}[\mathbb{1}_C|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}]\,|\mathcal{B}] = \mathsf{E}[\mathbb{1}_A P(C|\mathcal{A} \vee \mathcal{B})|\mathcal{B}]\,,$$

kde jsme ve třetí rovnosti použili, že $\mathbb{1}_A$ je $\mathcal{A}$-měřitelná a tedy je jistě i $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$-měřitelná. Upravme ještě

$$P(A|\mathcal{B})\, P(C|\mathcal{B}) = \mathsf{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{B}]\, \mathsf{E}[\mathbb{1}_C|\mathcal{B}] = \mathsf{E}[\mathbb{1}_A \mathsf{E}[\mathbb{1}_C|\mathcal{B}]\,|\mathcal{B}] = \mathsf{E}[\mathbb{1}_A P(C|\mathcal{B})|\mathcal{B}]\,,$$

kde jsme ve druhé rovnosti použili, že $P(C|\mathcal{B})$ je $\mathcal{B}$-měřitelná. Konečně počítejme

$$\begin{aligned} \mathsf{E}|P(A \cap C|\mathcal{B}) - P(A|\mathcal{B})\, P(C|\mathcal{B})| &= \mathsf{E}|\mathsf{E}[\mathbb{1}_A P(C|\mathcal{A} \vee \mathcal{B})|\mathcal{B}] - \mathsf{E}[\mathbb{1}_A P(C|\mathcal{B})|\mathcal{B}]| \\ &= \mathsf{E}|\mathsf{E}[\mathbb{1}_A [P(C|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) - P(C|\mathcal{B})]|\mathcal{B}]| \le \mathsf{E}\mathsf{E}[|\mathbb{1}_A [P(C|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) - P(C|\mathcal{B})]|\,|\mathcal{B}] \\ &= \mathsf{E}\mathbb{1}_A\, |P(C|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) - P(C|\mathcal{B})| = \int_A |P(C|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) - P(C|\mathcal{B})|\, dP. \end{aligned} \tag{23}$$

Pokud nyní platí (i), jistě $\int_A |P(C|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) - P(C|\mathcal{B})| = 0,\ \forall A \in \mathcal{A}$ a podle (23) rovněž $\mathsf{E}|P(A \cap C|\mathcal{B}) - P(A|\mathcal{B})\,P(C|\mathcal{B})| = 0,\ \forall A \in \mathcal{A}$ což je to samé, jako (iii). Opačně pokud platí (iii), platí podle (23) pro všechna $A \in \mathcal{A}$ také $\int_A |P(C|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) - P(C|\mathcal{B})|\,dP = 0$, položme $A = \Omega$ a obdržíme $\int |P(C|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) - P(C|\mathcal{B})| dP = 0$, což je to samé, jako (i).

(ii)$\Longleftrightarrow$(iii) se dokáže analogicky. Q.E.D.

Věta 5.3. *Nechť je $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ markovská trojice. Pak pro $\lambda \in \{\alpha, \phi, \phi', \psi\}$ platí*

(i) $\lambda(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \lambda(\mathcal{B}, \mathcal{C})$.

(ii) $\lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B} \vee \mathcal{C}) = \lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. *(Bradley, 2007, Theorem 7.2, str. 205)*

Důkaz je původní.

Důkaz. Tvrzení musíme dokázat pro konkrétní koeficienty zvlášť.

(α). Stačí dokázat (i), neboť α je symetrický. Podle Tvrzení 2.9(i) na str. 11 je

$$\alpha(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \sup_{C \in \mathcal{C}} \frac{1}{2} \mathsf{E}\,|P(C|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) - P(C)|$$
$$= \sup_{C \in \mathcal{C}} \frac{1}{2} \mathsf{E}\,|P(C|\mathcal{B}) - P(C)| = \alpha(\mathcal{B}, \mathcal{C}).$$

(ϕ). *(i)* Podle Tvrzení 2.9(ii) je

$$\phi(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \sup_{C \in \mathcal{C}} \operatorname{ess\,sup} |P(C|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) - P(C)|$$
$$= \sup_{C \in \mathcal{C}} \operatorname{ess\,sup} |P(C|\mathcal{B}) - P(C)| = \phi(\mathcal{B}, \mathcal{C}).$$

(ii) Důkaz je komplikovaný a vyžadoval by vyložení další teorie přesahující rozsah práce, proto důkaz nepodáváme. Důkaz podává Bradley (2007, str. 205).

(ψ). Opět stačí dokázat (i), neboť ψ je symetrický. Podle Tvrzení 2.9(iii) je

$$\psi(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \sup_{\substack{C \in \mathcal{C} \\ P(C) > 0}} \operatorname{ess\,sup} \left| \frac{P(C|\mathcal{A} \vee \mathcal{B})}{P(C)} - 1 \right|$$
$$= \sup_{\substack{C \in \mathcal{C} \\ P(C) > 0}} \operatorname{ess\,sup} \left| \frac{P(C|\mathcal{B})}{P(C)} - 1 \right| = \psi(\mathcal{B}, \mathcal{C}).$$

(ϕ'). Protože podle Definice 2.1 na str. 6 platí $\phi'(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \phi(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ bylo tvrzení o ϕ' zřejmě již dokázáno v části (ϕ). Q.E.D.

5.2 Stacionární markovské řetězce

Definice 5.4. Oboustranný markovský řetězec s množinou stavů S, která musí být spočetná, je náhodný proces $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} X_k(\Omega) = S$ s tzv. markovskou vlastností[8]

$$P(X_{k+1} = j|X_k = i, X_{k-1} = i_1, \dots, X_{k-n} = i_n) = P(X_{k+1} = j|X_k = i),$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z},\ i, j, i_1, \dots, i_n \in S$, pro která je splněno

$$P(X_k = i, X_{k-1} = i_1, \dots, X_{k-n} = i_n) > 0.$$

Pro silně stacionární markovský řetězec $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, příp. $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ označme pravděpodobnosti přechodu po n krocích $p_{ij}(n) = P(X_{n+1} = j|X_1 = i)$, $p_{ij} = p_{ij}(1)$ a stacionární rozdělení $\pi_j = P(X_1 = j)$; vše pro $i, j \in S,\ n \in \mathbb{N}$. *Periodu stavu* i definujeme jako

$$d_i = \sup\{d \in \mathbb{N}; p_{ii}(n) = 0,\ \text{pro všechna } n \text{ nedělitelná } d\}.$$

O stavu i řekneme, že je *periodický*, je-li $d_i > 1$. Markovský řetězec nazveme *aperiodickým*, jestliže nemá žádný periodický stav. Markovský řetězec nazveme *nerozložitelným*, jestliže pro všechny stavy i a j splňuje

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0 \colon p_{ij}(n) > 0.$$

Na markovské řetězce se přenášejí vlastnosti markovských trojic. Podle Tvrzení B.2 na str. 44 je totiž $(\mathcal{F}_{-\infty}^{k-1}, \mathcal{F}_k, \mathcal{F}_{k+1}^{\infty})$ markovská trojice pro každé $k \in \mathbb{Z}$.

Věta 5.5. *Nechť je $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ markovský řetězec. Pak pro $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ a $\lambda \in \{\alpha, \phi, \phi', \psi\}$ platí $\lambda(\mathcal{F}_{-\infty}^{k}, \mathcal{F}_{k+n}^{\infty}) = \lambda(\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_{k+n})$. Speciálně je $\lambda_n = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \lambda(\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_{k+n})$.* *(Bradley, 2007, Theorem 7.3, str. 206)*

Důkaz. Nechť nejprve $\lambda \in \{\alpha, \phi, \psi\}$ Podle Tvrzení B.2 na str. 44 a podle Věty 5.3 můžeme psát

$$\begin{aligned}\lambda(\mathcal{F}_{-\infty}^{k}, \mathcal{F}_{k+n}^{\infty}) = \lambda(\mathcal{F}_{-\infty}^{k}, \mathcal{F}_{k+n} \vee \mathcal{F}_{k+n+1}^{\infty}) = \lambda(\mathcal{F}_{-\infty}^{k}, \mathcal{F}_{k+n})& \\ = \lambda(\mathcal{F}_{-\infty}^{k-1} \vee \mathcal{F}_k, \mathcal{F}_{k+n}) = \lambda(\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_{n+k}).&\end{aligned}$$

[8]Pro přesnější a úplnější definici *markovského řetězce* viz Kemeny et al. (1976, denumerable Markov process, str. 79).

Tím je první část tvrzení pro $\lambda \in \{\alpha, \phi, \psi\}$ dokázána. Pro $\lambda = \phi'$ se první část tvrzení dokáže analogicky, pouze se navíc využije Poznámka B.1 na str. 44. Podle Definice 2.1 na str. 6 snadno plyne i druhá část tvrzení. Q.E.D.

Poznámka 5.6. Pro striktně stacionární markovský řetězec $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ lze $\sup_{k\in\mathbb{Z}}$ při výpočtu λ_n ve Větě 5.5 vynechat, tj. platí $\lambda_n = \lambda(\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_{k+n})$, $\lambda \in \{\alpha, \phi, \phi', \psi\}$, kde můžeme $k \in \mathbb{Z}$ zvolit libovolně.

Zvolme $l \in \mathbb{Z}$. Díky stacionaritě mají $T^l X$ a $T^k X$ stejná rozdělení. Podle Poznámky 2.3 na str. 7 a Tvrzení 2.4 na str. 7 platí

$$\lambda(\mathcal{F}_l, \mathcal{F}_{l+n}) = \sup_{C,D\in\mathbb{B}(\mathbb{R})} |c_\lambda(X_l \in C, X_{l+n} \in D)|$$

$$= \sup_{C,D\in\mathbb{B}(\mathbb{R})} |c_\lambda(X_k \in C, X_{k+n} \in D)| = \lambda(\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_{k+n}).$$

Podle Věty 5.5 pak konečně $\lambda_n = \sup_{l\in\mathbb{Z}} \lambda(\mathcal{F}_l, \mathcal{F}_{l+n}) = \lambda(\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_{k+n})$.

Věta 5.7. *V nerozložitelném aperiodickém markovském řetězci X pro každé $i \in S$ platí $\lim_{n\to\infty} |p_{ij}(n) - \pi_j| = 0, \forall j \in S$ a $\lim_{n\to\infty} \sum_{j\in S} |p_{ij}(n) - \pi_j| = 0$.*

(Bradley, 2007, 7.6 Background Theorem, str. 212)

První část je speciálním případem věty Theorem 6-38, Kemeny et al. (1976, str. 153). Druhou část dokazuje Bradley.

Věta 5.8. *Buď $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ silně stacionární markovský řetězec. Pak jsou následující výroky ekvivalentní*

(i) X je nerozložitelný a aperiodický.

(ii) X je mixující ve smyslu ergodické teorie.

(iii) X je α-mixující. *(Bradley, 2007, 7.7 Theorem, str. 212)*

Doplňujeme průhlednější vysvětlení toho, proč lze bez újmy na obecnosti předpkládat, že je splněno $\pi_s > 0$ pro všechna $s \in S$. Důkaz implikace (ii)⇒(i) doslovně přebíráme z Bradleyho. Důkaz implikace (i)⇒(iii) je pozměněním Bradleyho důkazu silnější implikace, kterou jsme z tvrzení vypustili.

Důkaz. Označme $S' = \{s \in S;\ \pi_s > 0\}$ a $S_0 = S \setminus S'$. Zvolme $s_0 \in S$. Definuji

$$Y_n(\omega) = \begin{cases} s_0, & X_n(\omega) \in S_0; \\ X_n(\omega), & \text{jinak.} \end{cases}$$

Platí

$$P(X \neq Y) = P(X_n \in S_0,\ \exists n) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[X_n \in S_0]\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(X_n \in S_0) = 0,$$

podle konstrukce množiny S_0. Proto je $X \doteq Y$. X splňuje (i), resp. (ii), resp. (iii) právě tehdy, když Y splňuje (i), resp. (ii), resp. (iii) (podle Tvrzení 2.6(iii) na str. 8 a Poznámky 3.5 na str. 15). Bez újmy na obecnosti můžeme tedy dále předpokládat, že je splněno $\pi_s > 0$ pro všechna $s \in S$.

Implikace (iii) $\Rightarrow$ (ii) již byla dokázána jako Důsledek 3.7 na str. 18.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Buďte $s, t \in S$. Z (ii) plyne

$$\lim_{n\to\infty} \pi_s p_{st}(n) = \lim_{n\to\infty} P(X_n = t,\ X_0 = s) = \pi_s \pi_t > 0.$$

Pro všechna dostatečně veliká n tedy platí

$$p_{st}(n) > 0. \tag{24}$$

Tento výsledek nezávisí na s a t. Markovský řetězec je tedy nerozložitelný.

Předpokládejme pro spor, že je řetězec periodický s periodou $d > 1$. Nechť je $s \in S$. Stav s má nyní periodu d a proto $p_{ss}(n) = 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ nedělitelná d. To je však spor s (24). Řetězec je tedy aperiodický.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Podle Věty 5.7 pro každé $i \in S$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \pi_i \sum_{j\in S} |p_{ij}(n) - \pi_j| = 0.$$

Pro každé $i \in S$ také platí

$$\pi_i \sum_{j\in S} |p_{ij}(n) - \pi_j| \leq \pi_i \sum_{j\in S} |p_{ij}(n) + \pi_j| = 2\pi_i.$$

Dále platí $\sum_{i\in S} 2\pi_i = 2 < \infty$ a podle Lebesgueovy věty platí

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in S} \pi_i \sum_{j\in S} |p_{ij}(n) - \pi_j| = \sum_{i\in S} \lim_{n\to\infty} \pi_i \sum_{j\in S} |p_{ij}(n) - \pi_j| = 0. \tag{25}$$

Podle Věty 5.5 a Poznámky 5.6 je $\alpha_n = \alpha(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_n)$. $\sigma(X_k)$ je atomická pro všechna $k \in \mathbb{Z}$ a jejími veškerými atomy jsou jevy $[X_k = j],\ j \in S$, proto je podle

Tvrzení 4.2 na str. 22

$$\alpha(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_n) = \sup_{T,R\subseteq S} \left| \sum_{\substack{i\in T\\ j\in R}} c_\alpha(X_0 = i, X_n = j) \right| \le \sup_{T,R\subseteq S} \sum_{\substack{i\in T\\ j\in R}} |c_\alpha(X_0 = i, X_n = j)|$$

$$\le \sum_{i,j\in S} |c_\alpha(X_0 = i, X_n = j)| = \sum_{i,j\in S} |P(X_n = j, X_0 = i) - P(X_n = j)\, P(X_0 = i)|$$

$$= \sum_{i,j\in S} P(X_0 = i)|P(X_n = j|X_0 = i) - P(X_n = j)| = \sum_{i,j\in S} \pi_i\, |p_{ij}(n) - \pi_j| \xrightarrow[(25)]{n\to\infty} 0.$$

Q.E.D.

Tvrzení 5.9. *Buď $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ stacionární markovský řetězec. Pak je X ergodický právě tehdy, když je nerozložitelný.* *(Billingsley, 1965, str. 31)*

Důkaz podává Billingsley.

5.2.1 Stacionární markovské řetězce nad konečnými abecedami

Věta 5.10. *Buď $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ silně stacionární markovský řetězec nad konečnou abecedou S. Je-li X α-mixující, je už i ψ-mixující.*

(Bradley, 2007, 7.14 Theorem, str. 220)

Důkaz doslovně přebíráme z Bradleyho.

Důkaz. Stejně jako v důkazu Věty 5.8 můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\pi_s > 0$, $\forall s \in S$. X je α-mixující a proto pro všechna $s, t \in S$ platí

$$\lim_{n\to\infty} |P(X_0 = s, X_n = t) - \pi_s\pi_t| \le \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0;$$

protože $\pi_s\pi_t > 0$ platí také

$$\left| \frac{P(X_0 = s, X_n = t)}{\pi_s\pi_t} - 1 \right| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Podle Věty 5.5 a Poznámky 5.6 stačí je $\psi_n = \psi(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_n)$. σ-algebra $\mathcal{F}_n$ je navíc atomická pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Jejími atomy jsou $[X_n = s]$, $s \in S$. Podle Tvrzení 4.2 na str. 22 tedy platí $\psi(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_n) = \sup_{s,t\in S} |c_\psi(X_0 = s, X_n = t|$. Jelikož je množina S konečná, suprema se nabývá a platí

$$\psi_n = \sup_{s,t\in S} \left| \frac{P(X_0 = s, X_n = t)}{\pi_s\pi_t} - 1 \right| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Q.E.D.

6 Třídy mixujících procesů

Důsledek 6.1.

(i) ψ-mixing implikuje ϕ-mixing.

(ii) ϕ-mixing implikuje α-mixing.

(iii) α-mixing implikuje mixing ve smyslu ergodické teorie.

(iv) Mixing ve smyslu ergodické teorie implikuje ergodicitu.

Důkaz. Nechť je $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ náhodný proces.

K důkazu (i) a (ii) musíme dokázat

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \phi_n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0. \tag{26}$$

Přepišme Tvrzení 2.7 na str. 10 pro částečné koeficienty mixingu procesu X; přechod k supremu a limitní přechod $n \to \infty$ nerovnosti nezmění a tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $4\lim_{n\to\infty} \alpha_n \le 2\lim_{n\to\infty} \phi_n \le \lim_{n\to\infty} \psi_n$, z čehož plyne (26).

(iii) je Důsledkem 3.7 na str. 18 a (iv) je Tvrzením 3.4 na str. 15. Q.E.D.

Zatím však není zřejmé, zdali jsou implikace, které popisuje Důsledek 6.1 ekvivalencemi, či nikoliv. Tím se dostáváme k jádru práce. Následující příklady vybrané z literatury dohromady s již vyloženým materiálem ukáží, že v případě obecných náhodných procesů jsou ergodicita, mixing ve smyslu ergodické teorie, α-, ϕ- i ψ-mixing po dvou neekvivalentní; pokud uvažujeme markovské řetězce nad nekonečnou množinou stavů, pak začne být mixing ve smyslu ergodické teorie ekvivalentní s α-mixingem; pokud se omezíme na markovské řetězce nad konečnými abecedami jsou mixing ve smyslu ergodické teorie, α-, ϕ- i ψ-mixing ekvivalentní.

6.1 Markovské řetězce nad konečnými abecedami

Pro stacionární markovské řetězce nad konečnými abecedami jsou mixing ve smyslu ergodické teorie, α-, ϕ- a ψ-mixing ekvivalentní. Každý markovský řetězec nad konečnou abecedou, který je mixující ve smyslu ergodické teorie je podle Věty 5.8 na str. 27 α-mixující. Věta 5.10 na str. 29 říká, že α-mixující markovský řetězec nad konečnou abecedou je už i ψ-mixující. Podle Důsledku 6.1 je však také ϕ-mixující. Každý řetězec mixující ve smyslu ergodické teorie je tedy α-, ϕ- i ψ-mixující. Nechť je naopak nějaký markovský řetězec nad konečnou abecedou α-, ϕ-, nebo ψ-mixující. Pak je podle Důsledku 3.7 na str. 18 už mixující ve smyslu ergodické teorie a podle předešlé diskuse je i α-, ϕ- a ψ-mixující.

Následující Příklad 1 ukáže, že široká skupina ergodických markovských řetězců (a tedy i řetězců nad konečnými abecedami) není mixující ve smyslu ergodické teorie. Mixing ve smyslu ergodické teorie tedy není ekvivalentní s ergodicitou.

Příklad 1. Buď $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ nerozložitelný stacionární markovský řetězec splňující (1) na str. 4. Nechť $i \in S$ a $1 < d \in \mathbb{N}$ a nechť $p_{ii}(n) = 0$ pro všechna n nedělitelná d; X má tedy alespoň jeden periodický stav i s periodou alespoň d. Nechť navíc X splňuje technickou podmínku

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}(dn)\pi_i = \theta > 0. \tag{27}$$

Tvrzení 6.2. *X není mixující ve smyslu ergodické teorie.*

Důkaz. Označme $A = \{\omega \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}); \omega_0 = i\}$, $a_n = [Y \in A \cap T^{-n}A]$ a počítejme

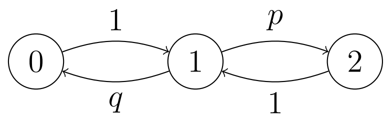
$$a_n = P(Y_0 = i, Y_n = i) = p_{ii}(n)\pi_i.$$

Podle předpokladů platí $\lim_{n\to\infty} a_{dn-1} = 0$, neboť $dn - 1$ není dělitelné d a podobně $\lim_{n\to\infty} a_{dn} = \theta > 0$ díky podmínce (27). Limity vybraných posloupností z a_n se liší a tedy nemůže existovat $\lim_{n\to\infty} a_n$. X tedy nesplňuje podmínku Definice 3.2 na str. 14. Q.E.D.

X je ergodický podle Tvrzení 5.9 na str. 29.

Požadavky Příkladu 1 splňuje např. konkrétní periodický řetězec $Z = (Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ se stavy $\{0, 1, 2\}$ s pravděpodobnostmi přechodu $p_{12} = p$, $p_{10} = 1 - p = q$, $p_{01} = p_{21} = 1$, pro nějaké $0 < p < 1$. Pravděpodobnosti přechodu jsme znázornili na Náčrtu 1.

Řetězec je zřejmě stacionární a nerozložitelný. Stav 1 je jistě periodický s periodou 2, také pro všechna $n \in \mathbb{N}$ splňuje $p_{11}(2n) = 1$, $p_{11}(2n-1) = 0$. Je snadné spočítat stacionární rozdělení: $\pi_0 = \frac{1}{2}q$, $\pi_1 = \frac{1}{2}$, $\pi_2 = \frac{1}{2}p$. Také platí $\lim_{n\to\infty} p_{11}(2n)\pi_1 = \frac{1}{2} > 0$.



Náčrt 1: Pravděpodobnosti přechodu řetězce Z.

◇

6.2 Markovské řetězce nad nekonečnými množinami

Pro stacionární markovské řetězce nad (spočetnými) nekonečnými množinami je situace zajímavější. Podle Věty 5.8 na str. 27 je ekvivalentní mixing ve smyslu ergodické teorie a α-mixing.

Z Příkladu 1 víme, že existují ergodické markovské řetězce, které nejsou mixující ve smyslu ergodické teorie, proto není ergodicita ekvivalentní s mixingem ve smyslu ergodické teorie.

Dále na příkladech ukážeme, že α-mixující markovský řetězec nemusí být ϕ-mixující a také, že ϕ-mixující markovský řetězec nemusí být ψ-mixující. Překvapivě nám postačí příklad jednoho procesu a jeho převrácení.

Pozorování 6.3. Předpokládejme, že $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ je příkladem procesu, který je ϕ-mixující, ale není ϕ'-mixující a že Y je jeho převrácením jako ve (2).

(i) Pak je X příkladem procesu, který je ϕ-mixující, ale není ψ-mixující. Kdyby totiž byl X ψ-mixující, platilo by podle Poznámky 2.2 na str. 6 $\psi_n(X) = \psi_n(Y) \to 0$; Y by tedy byl také ψ-mixující; proto by byl podle Důsledku 6.1 také ϕ-mixující a tedy opět podle Poznámky 2.2 a triviálního pozorování, a sice, že X je převrácením Y, by byl X ϕ'-mixující, což by byl spor s předpokladem.

(ii) Proces Y je příkladem α-mixujícího procesu, který není ϕ-mixující. X je α-mixující díky Důsledku 6.1. Podle Poznámky 2.2 je Y také α-mixující. Y však zřejmě není ϕ-mixující, neboť X není ϕ'-mixující a $\phi'_n(X) = \phi_n(Y)$ opět podle Poznámky 2.2.

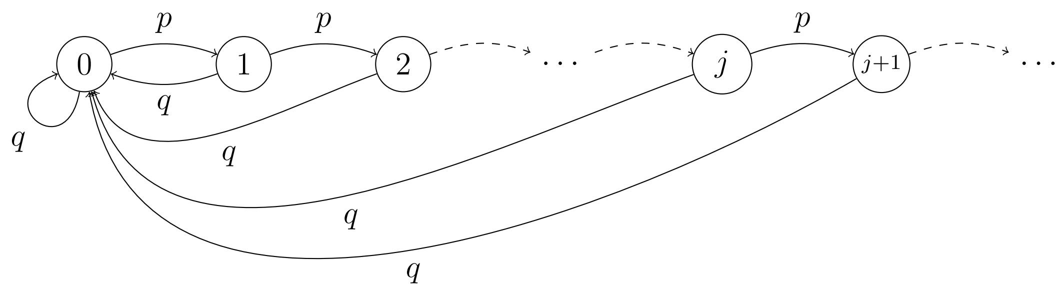
Vyložíme příklad stacionárního markovského řetězce, který je ϕ-mixující a není ϕ'-mixující (Příklad 2).

Příklady různě mixujících markovských řetězců jsou k nalezení např. v článku Kesten & O'Brien (1976). Uvádíme příklad podle Kestena & O'Briena (1976) na str. 414. Příklad opravují po Billingsley (1968, str. 166) tak, jak to udělali Blum et al. (1963). Prakticky stejný příklad také na str. 216 a 217 analyzuje Bradley (2007). Tvrzení, u nichž není uvedeno jinak, jsou původní.

Příklad 2 (The House of Cards[9])**.** Buď $0 < p < 1,\ 0 < q < 1,\ p + q = 1$ a $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ stacionární markovský řetězec s množinou stavů $S = \mathbb{N} \cup \{0\}$, s pravděpodobnostmi přechodu[10]

$$p_{i0} = q,\ p_{i,i+1} = p,\ p_{ij} = 0, j \notin \{0, i+1\},\ \forall i \in S. \tag{28}$$

Proces jsme znázornili na Náčrtu 2.



Náčrt 2: Pravděpodobnosti přechodu markovského řetězce X

Stacionární rozdělení π řetězce X je

$$\pi_i = P(X_k = i) = qp^i, \quad i \in S,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{29}$$

Snadno se ověří, že platí $\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ij} = p\pi_{j-1}$, tj. $\frac{\pi_j}{\pi_{j-1}} = p,\ \forall j > 0$, tj. že $\pi_j = p^j \pi_0$ Navíc z podmínky $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$ ihned plyne, že $\pi_0 = q$, čímž dostáváme (29).

[9]Toto označení Bradley neuvádí, je však běžné (Chazottes & Redig, 2010, 8.2 House of cards, str. 16).

[10]Jak příklad podle Kesten & O'Brien (1976), tak analýza Bradleyho (2007) má pravděpodobnosti přechodu prevně dány $p = q = \frac{1}{2}$ v případě Kesten & O'Brien a $p = \frac{1}{10},\ q = \frac{9}{10}$ v případě Bradley.

Tvrzení 6.4. *Nechť $i \in S$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak platí*

(i) $p_{ij}(n) > 0,\ \forall j < n;$

(ii) $p_{i,i+n}(n) = p^n;$

(iii) $p_{ij}(n) = 0,\ \forall j \geq n,\ j \neq i + n.$

(iv) $p_{i0}(n) = q.$

Důkaz. Představujeme si zde markovský řetězec, jako pohyb po grafu s vrcholy odpovídajícími stavům a hranami vedoucími z každého vrcholu i právě do vrcholů $i+1$ a 0. Zřejmě pak $p_{ij}(n) > 0$ právě tehdy, když z i vede do j nějaký sled délky n.

(i). Počítejme

$$p_{ij}(n) = P(X_n = j|X_0 = i) \geq P(X_n = j|X_{n-1} = j-1, \ldots, X_{n-j+1} = 1,$$
$$X_{n-j} = 0, X_{n-j-1} = 0, \ldots, X_2 = 0, X_1 = 0, X_0 = i)$$
$$= p_{i0} \underbrace{p_{00}\, p_{00} \cdots p_{00}}_{(n-j)\text{-krát}}\, p_{01} \cdots p_{j-1,j} > 0.$$

(ii). Aby se dosáhlo $i+n$ nesmí se ani jednou navštívit nula (vyjma toho, kdy je $i = 0$, pak se navštíví pouze jednou v čase 0). Z toho tvrzení plyne.

(iii). Z i do $j \geq n$ takového, že $j \neq i + n$ nevede sled délky n. Uvědomme si, že v řetězci se lze pohybovat pouze směrem k o jedna větším stavům a nebo k nule. Pokud tedy nevede sled z i do n, pak ani nemůže vést sled z i do $j > n$. Pokud v nějakém okamžiku k navštívíme nulu, jsou dosažitelnými již jenom stavy menší než počet zbývajících kroků $n - k$. $n - k$ je maximalizováno pro $k = 1$, což znamená, že pokud jdeme do nuly v čase 1, můžeme navštívit nejvyšší stavy oproti tomu, kdybychom šli do nuly v nějakém jiném čase. I tak se lze dostat pouze do $n - 1$. n tedy není z i dosažitelný, pokud navštívíme nulu. Pokud naopak nulu nenavštívíme, dostaneme se pouze do $i + n$ a nikam jinam.

(iv). Pro libovolná i a n platí

$$p_{i0}(n) = \sum_{m \in S} p_{im}(n-1)\, p_{m0} = q \sum_{m \in S} p_{im}(n-1) = q.$$

Q.E.D.

Tvrzení 6.5. *Nechť $i \in S$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak platí*

$$\sum_{j=0}^{\infty} |p_{ij}(n) - \pi_j| = \left|p^n - qp^{i+n}\right| - qp^{i+n} + q \sum_{j=n}^{\infty} p^j. \tag{30}$$

Důkaz. Zřejmě je

$$\sum_{j=0}^{\infty} |p_{ij}(n) - \pi_j| = \sum_{j=0}^{n-1} |p_{ij}(n) - \pi_j| + \sum_{j=n}^{\infty} |p_{ij}(n) - \pi_j| \,. \tag{31}$$

Podle Tvrzení 6.4 máme $p_{ij}(n) = 0$, pro $j \geq n$ & $j \neq i+n$. Podle stejného tvrzení je také $p_{i,i+n}(n) = p^n$. Je tedy zřejmě

$$\begin{aligned}\sum_{j=n}^{\infty} |p_{ij}(n) - \pi_j| &= |p_{i,i+n}(n) - \pi_{i+n}| + \sum_{j=n, j\neq i+n}^{\infty} |p_{ij}(n) - \pi_j| \\ &= |p_{i,i+n}(n) - \pi_{i+n}| - \pi_{i+n} + \sum_{j=n}^{\infty} \pi_j = \left|p^n - qp^{i+n}\right| - qp^{i+n} + q\sum_{j=n}^{\infty} p^j. \end{aligned}\tag{32}$$

Dále indukcí podle n dokážeme, že platí

$$\sum_{j=0}^{n-1} |p_{ij}(n) - \pi_j| = 0. \tag{33}$$

Pro $n = 1$ má (33) tvar $|p_{i0} - \pi_0| = |q - q| = 0$ a rovnost platí.

Nechť $n > 1$ a nechť (33) platí pro $n - 1$, tj. platí

$$\sum_{j=0}^{n-2} |p_{ij}(n-1) - \pi_j| = 0 \tag{34}$$

Počítejme užitím (28) a Tvrzení 6.4

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} |p_{ij}(n) - \pi_j| &= |p_{i0}(n) - \pi_0| + \sum_{j=1}^{n-1} |p_{ij}(n) - \pi_j| = |q - q| \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \left| \sum_m p_{im}(n-1)\, p_{mj} - qp^j \right| = \sum_{j=1}^{n-1} \left|p_{i,j-1}(n-1)\, p_{j-1,j} - qp^j\right| \\ &= p\sum_{j=1}^{n-1} \left|p_{i,j-1}(n-1) - qp^{j-1}\right| = p\sum_{j=0}^{n-2} \left|p_{i,j}(n-1) - qp^j\right| \overset{(34)}{=} p0 = 0.\end{aligned}$$

(34) značí použití indukčního předpokladu. Důkaz (33) je dokončen.

Konečně je nyní již snadné použít (31) a spojit (32) a (33) do jediného vzorce a dostat (30). Q.E.D.

Tvrzení 6.6. *X je ϕ-mixující.*

Důkaz. X je stacionární markovský řetězec a proto stačí podle Věty 5.5 a Poznámky 5.6 ověřit, že $\phi_n = \phi(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_n) = \phi(\sigma(X_0), \sigma(X_n)) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Množinou stavů X je S, která je spočetná a proto jsou $\sigma(X_0)$ a $\sigma(X_n)$ atomické s množinou atomů S.

Podle Tvrzení 4.2 je tedy

$$\phi_n = \sup_{i\in S} \frac{1}{2} \sum_{j\in S} |P(X_n = j|X_0 = i) - P(X_n = j)| = \sup_{i\in S} \frac{1}{2} \sum_{j\in S} |p_{ij}(n) - \pi_j| \, .$$

Pro přehlednost nejprve odhadneme

$$\left| \sup_{i\in\mathbb{N}} \left|p^n - qp^{i+n}\right| - qp^{i+n} \right| = p^n \sup_{i\in\mathbb{N}} \left|\left|1 - qp^i\right| - qp^i\right| \le p^n$$

Je dobře známo, že pro $p < 1$ řada $\sum_j p^j$ konverguje, je tedy Cauchyovská a proto je $\sum_{j=n}^{\infty} p^j \to 0$. Konečně z Tvrzení 6.5 a již provedených výpočtů plyne

$$\begin{aligned}\phi_n = \sup_i \frac{1}{2} \sum_j |p_{ij}(n) - \pi_j| &= \frac{1}{2} \left(q \sum_{j=n}^{\infty} p^j + \sup_i \left(\left|p^n - qp^{i+n}\right| - qp^{i+n}\right) \right) \\ &\le \frac{1}{2} \left(q \sum_{j=n}^{\infty} p^j + p^n \right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Bradley (2007, 7.10 Example, str. 216-217) uvádí jiný důkaz za použití teorie interpolace. Jeho důkaz je založen na následující Větě

Věta 6.7. *Nechť je X markovský řetězec. Pokud existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že platí $\phi_n < \frac{1}{2}$ pak už $\phi_n \to 0$ alespoň exponenciálně rychle.*

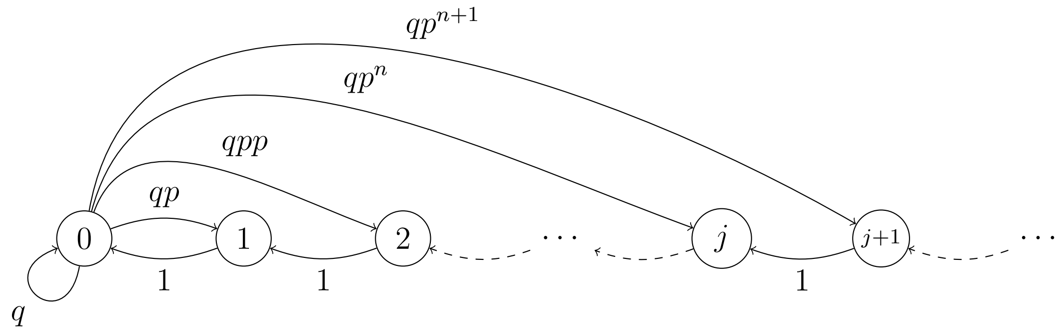
(Bradley, 2007, část 7.5 Theorem, str. 210)

Bradley důkaz Tvrzení 6.6 vede tak, že ukáže, že platí $\phi(1) < \frac{1}{2}$. Vše ukazuje pro speciální případ řetězce s $p = 0.1,\ q = 0.9$. Jeho důkaz se dá lehce zobecnit pro případ, kdy $p < q$. Důkaz, který podáváme, je obecnější, platí pro libovolná p a q. Bradley ovšem vše ukazuje pro speciální případ a obecný důkaz pochopitelně nepotřebuje.

Dále budeme směřovat k důkazu, že X není ϕ'-mixující. Označme Y převrácení markovského řetězce X podle (2). Podle Důsledku B.4 je i Y markovským řetězcem. Označme $q_{ij} = P(X_n = j|X_{n+1} = i)$. Pak q_{ij} nezávisí na n a platí $q_{ij} = 2^{i-j} p_{ji}$. To proto, že pro $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}q_{ij} = P(X_k = j|X_{k+1} = i) = P(X_{k+1} = i|X_k = j)&\frac{P(X_k = j)}{P(X_{k+1} = i)} \\ &= p_{ji}\frac{\pi_j}{\pi_i} = p^{j-i} p_{ji}.\end{aligned}$$

Pro $j \in S$ jsou veškerými nenulovými pravděpodobnostmi přechodu $q_{0j} = qp^j$ a $q_{j,j-1} = 1$. Čísla q_{ij} jsou zřejmě pravděpodobnostmi přechodu markovského řetězce Y. Tento řetězec jsme znázornili na Náčrtu 3.



Náčrt 3: Pravděpodobnosti přechodu markovského řetězce Y

Tvrzení 6.8. *X není ϕ'-mixující.*

Důkaz. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ lze odhadnout

$$\phi'_n = \sup_{k \in \mathbb{N}} \phi(\mathcal{F}_{k+n}^{\infty}, \mathcal{F}_{-\infty}^{k}) \geq \phi(\mathcal{F}_n^{\infty}, \mathcal{F}_{-\infty}^{0})$$

(položili jsme $k = 0$). Protože platí $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_n^{\infty}$ a $\mathcal{F}_{-\infty}^{0} \subseteq \mathcal{F}_0$, můžeme navíc podle Tvrzení 2.6 odhadnout $\phi'_n \geq \phi(\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_0)$. Zřejmě tedy postačí, nalezneme-li pro každé n vhodné atomy příslušných σ-algeber které konvergenci poruší.

Zvolme $n \in \mathbb{N}$. Pohledem na Náčrt 3 je vidět, že pro $i > n$ můžeme psát

$$\begin{aligned} P(X_0 = i-n | X_n = i) &= \sum_{j \in \mathbb{N}} P(X_0 = i-n | X_{n-1} = j) q_{ij} \\ &= P(X_0 = i-n | X_{n-1} = i-1) = \ldots = P(X_0 = i-n | X_0 = i-n) = 1. \end{aligned} \tag{35}$$

Pro $i > n$ proto platí

$$\begin{aligned} \phi'_n \geq \phi(\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_0) &\geq |P(X_n = i-n | X_0 = i) - P(X_n = i-n)| \\ &= |1 - \pi_{i-n}| = 1 - qp^{i-n}. \end{aligned}$$

Protože $i > n$ bylo libovolné a $0 < p < 1$, platí $\phi'_n \geq \sup_{i \in S} 1 - qp^{i-n} = 1$. Protože podle Tvrzení 2.6 na str. 8 je $\phi'_n \leq 1$, platí dokonce $\lim_{n \to \infty} \phi'_n = 1$. X tedy není ϕ'-mixující. Q.E.D.

Bradley (2007) dokazuje Tvrzení 6.8 na str. 217. Důkaz, který jsme podali se od jeho důkazu liší. Zejména podrobně vysvětlujeme celý proces odhadu částečného koeficientu mixingu.

◇

Stacionární markovský řetězec z Příkladu 2 je příkladem ϕ-mixujícího, ale ne ϕ'-mixujícího řetězce, který jsme hledali. Podle Pozorování 6.3 je navíc Y, převrácení procesu X, příkladem stacionárního markovského řetězce, který je α-mixující, ale není ϕ-mixující.

6.3 Obecné procesy

Vyložme ještě příklad stacionárního procesu, který je mixující ve smyslu ergodické teorie a není α-mixující. Příklad přebíráme od Bradleyho (2007, str. 58), který jej přebírá od Rosenblatta (1980, str. 267).

Příklad 3 (Diadický rozvoj)**.** Buďte $W_k, k \in \mathbb{Z}$ nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s rozdělením $P(W_0 = 1) = P(W_0 = 0) = \frac{1}{2}$. Definujme $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ po složkách předpisem

$$X_k = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j-1} W_{k-j}$$

Všimeme si, že veličiny $W_k, W_{k-1}, \dots$ jsou číslicemi diadického rozvoje čísla X_k. *Diadickým zlomkem* nazveme zlomek tvaru $s2^{-r}$ pro nějaké $r \in \mathbb{N},\ s \in \mathbb{Z}$.

Tvrzení 6.9. *X_k má rovnoměrné rozdělení na $[0,1]$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$.*

Důkaz je původní. Bradley důkaz neuvádí.

Důkaz. Definujme $X_k(n) = \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j-1} W_{k-j}$. Je vidět, že $X_k(n)$ je diadickým zlomkem, dokonce platí $X_k(n) = s2^{-n}$ pro nějaké $s \in \{0, 1, \dots, 2^n\}$. Čísla W_k, $W_{k-1}, \dots, W_{k-n+1}$ a číslo $X_k(n)$ si vzájemně jednoznačně odpovídají, jde totiž o konečný diadický rozvoj diadického zlomku a ten je jednoznačný. Platí $p_n = P(X_k(n) = x2^{-n}) = 2^{-n}$ a proto platí také

$$P(a2^{-j} \leq X_k(n) < b2^{-j}) = 2^{n-j}(b-a)2^{-n} = 2^{-j}(b-a),$$

neboť v intervalu $[a2^{-j}, b2^{-j})$ je 2^{n-j} zlomků tvaru $s2^{-n}$, kterých může $X_k(n)$ nabýt s pravděpodobností 2^{-n}.

Zvolme nyní $j \in \mathbb{N},\ a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ taková, že $a \leq b < 2^j$. Označme

$$A_n = [2^{-j}a - 2^{-n} \leq X_k(n) < 2^{-j}b] \quad \text{a} \quad A = [2^{-j}a \leq X_k < 2^{-j}b].$$

Ukážeme, že $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$. Uvažujme $n \in \mathbb{N}$ a počítejme

$$\begin{aligned} A_{n+1} = \big[2^{-j}a - 2^{-n-1} &\leq X_k(n+1) < 2^{-j}b\big] \\ &= \big[2^{-j}a - 2^{-n-1} \leq X_k(n) + 2^{-n-1}W_{k-n} < 2^{-j}b\big] \\ \subseteq \big[2^{-j}a - 22^{-n-1} &\leq X_k(n) < 2^{-j}b\big] \subseteq \big[2^{-j}a - 2^{-n} \leq X_k(n) < 2^{-j}b\big] = A_n, \end{aligned}$$

kde předposlední inkluze plyne z nerovnosti $0 < W_{k-n} < 1$. Zřejmě také platí $A \subseteq A_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a proto je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$. Můžeme proto počítat $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 2^{-j}(b-a)$.

Míra rovnoměrného rozdělení je Lebesgueova. Zatím jsme ukázali, že míra P_X se shoduje s Lebesgueovou mírou na diadických intervalech, tj. intervalech tvaru $[a2^{-j}, b2^{-j}],\ j \in \mathbb{N}$. Je dobře známo, že diadické intervaly generují $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ a tedy i $\mathbb{B}([0,1])$ a že systém diadických intervalů je uzavřený na konečné průniky. Proto je např. podle Billingsley (1995, Theorem 3.3., str. 42) P_X rovna Lebesgueově míře na $[0,1]$. Rozdělení X je tedy rovnoměrné. Q.E.D.

Tvrzení 6.10. *X je stacionární a mixující ve smyslu ergodické teorie.*

(Bradley, 2007, Comment 2, str. 58)

V důkazu podrobně rozepisujeme Bradleyho úvahy.

Důkaz. $(W_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ je stacionírní a mixující ve smyslu ergodické teorie podle Tvrzení 3.6 na str. 16. Funkce g na $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ zadaná předpisem

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} 2^{-j-1} x_{-j}$$

je borelovská, neboť jde o limitu borelovských funkcí. Zřejmě platí $X_k = g(T^k W)$ pro všechna $k \in \mathbb{Z}$. Důkaz tedy plyne z Tvrzení 3.8 na str. 18. Q.E.D.

Tvrzení 6.11. *X není α-mixující.* *(Bradley, 2007, Comment 5, str. 58)*

Důkaz přebíráme z Bradleyho; navíc podrobně vysvětlujeme odhad částečného koeficientu mixingu.

Důkaz. Spočítejme pro $k \in \mathbb{Z}$ (rovnosti jsou rovnostmi s.j.)

$$X_k = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j-1} W_{k-j} = 2 \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j-1} W_{k+1-j} = 2 \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j-1} W_{k+1-j} - W_{k+1}$$
$$= 2X_{k+1} - W_{k+1} = \begin{cases} 2X_{k+1}, & X_{k+1} < \frac{1}{2}; \\ 2X_{k+1} - 1, & X_{k+1} > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

X_k je tedy s.j. borelovskou funkcí X_{k+1}, proto podle Tvrzení A.3 na str. 42 platí $\mathcal{F}_k \dot{\subseteq} \mathcal{F}_{k+1}$. Indukcí lze snadno tento fakt rozšířit na $\mathcal{F}_k \dot{\subseteq} \mathcal{F}_{k+n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ lze odhadnout $\alpha_n = \sup_{k \in \mathbb{N}} \alpha(\mathcal{F}_{-\infty}^k, \mathcal{F}_{k+n}^\infty) \geq \alpha(\mathcal{F}_{-\infty}^0, \mathcal{F}_n^\infty)$ (položili jsme $k = 0$). Protože platí $\mathcal{F}_0 \dot{\subseteq} \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_n^\infty$ a $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_{-\infty}^0$, lze navíc podle Tvrzení 2.6 na str. 8 odhadnout $\alpha(\mathcal{F}_{-\infty}^0, \mathcal{F}_n^\infty) \geq \alpha(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_0)$. Zřejmě stačí, nalezneme-li jev z $\mathcal{F}_0$, který konvergenci poruší. Protože X_0 má podle Tvrzení 6.9 rovnoměrné rozdělení na $[0, 1]$ platí

$$\alpha(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_0) \geq \left| P\left(X_0 < \frac{1}{2}, X_0 < \frac{1}{2}\right) - P\left(X_0 < \frac{1}{2}\right) P\left(X_0 < \frac{1}{2}\right) \right|$$
$$= \left| \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right| = \frac{1}{4}.$$

Podle Tvrzení 2.6 na str. 8 platí dokonce $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \frac{1}{4}$; X proto není α-mixující.

Q.E.D.

◇

Dohromady s Příklady 1 a 2 ukazuje Příklad 3, že pro případ obecných procesů jsou ergodicita, mixing ve smyslu ergodické teorie, α-, ϕ- a ψ-mixing po dvou neekvivalentní.

Závěr

Původním cílem práce, vycházejícím ze zadání, bylo dokázat, že pro případ (obecných) silně stacionárních náhodných procesů nad konečnou abecedou jsou α-, ϕ- a ψ-mixing po dvou neekvivalentní. Inspirací pro toto zkoumání byl zejména fakt, že v případě silně stacionárních markovských řetězců je konečnost množiny stavů pro takovou ekvivalenci α, ϕ- a ψ-mixingu určující: zatímco pro silně stacionární markovské řetězce s nekonečnou množinou stavů jsou α-, ϕ- a ψ-mixing po dvou neekvivalentní, pro silně stacionární řetězce nad konečnou abecedou už ekvivalentní jsou.

Zkonstruovat příklad, který by dokázal, že α-, ϕ- a ψ-mixing ekvivalentní nejsou, se nám nepodařilo. Práce tedy nakonec byla především ucelenou rešerší vybraných koeficientů mixingu, která vznikla při snaze naplnit původní záměr práce.

V práci jsme vyložili teorii mixingu. Ve výkladu jsme doplnili některé důkazy, které v literatuře nebyly podány; příp. jsme doplnili nejasná místa, jejichž doplnění nechávají autoři na čtenářích. Každé takové doplnění jsme v textu řádně vyznačili. Hlavní původní přínos práce spočíval zřejmě v tvrzeních Příkladu 2 na str. 33.

Dále jsme na základě výkladu z literatury popsali vztahy α- ϕ- a ψ-mixingu pro obecné silně stacionární procesy, silně stacionární markovské řetězce a silně stacionární markovské řetězce nad konečnými abecedami.

Pro obecné silně stacionární procesy jsou ergodicita, mixing ve smyslu ergodické teorie, α-, ϕ- a ψ-mixing po dvou neekvivalentní.

Pro silně stacionární markovské řetězce s nekonečnou množinou stavů jsou řetězce mixující ve smyslu ergodické teorie rovněž α-mixující. Ostatní mixingy jsou stále po dvou neekvivalentní jako v předešlém případě.

V případě silně stacionárních markovských řetězců nad konečnou abecedou jsou řetězce mixující ve smyslu ergodické teorie rovněž ψ-mixující, tím pádem jsou ovšem i ϕ- a α-mixující. Mixing ve smyslu ergodické teorie, α-, ϕ- a ψ-mixing jsou tedy v tomto případě ekvivalentní. Ergodicita a mixing ve smyslu ergodické teorie jsou i v tomto případě neekvivalentní.

A σ-algebry

Používáme Značení 1.

Tvrzení A.1 (Trik zdisjunktnění)**.** *Buďte $\mathcal{F}$ σ-algebra a $A_k \in \mathcal{F}$ množiny. Pak existují po dvou disjunktní množiny $B_k \in \mathcal{F}$ splňující $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ pro všechna $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

Důkaz. Položme $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots, B_k = A_k \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} A_l, \ldots$

Ihned je vidět, že

$$\bigcup_{k=1}^{n} B_k = A_1 \cup [A_2 \setminus A_1] \cup [A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)] \cup \ldots \cup [A_n \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})] = \bigcup_{k=1}^{n} A_k,$$

neboť pro množiny C a D platí $C \cup (D \setminus C) = C \cup D$.

Pro množiny C a D platí $C \setminus D = \emptyset$, pokud $C \subseteq D$. Proto platí

$$B_1 \cap B_j = (A_1 \cap A_j) \setminus (A_1 \cap \ldots \cap A_{j-1}) = \emptyset;$$

podobně pro $i < j$ je

$$B_i \cap B_j = A_i \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{i-1}) \cap A_j \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_i \cup \ldots \cup A_{j-1}) = \emptyset;$$

tím je tvrzení dokázáno. Q.E.D.

Poznámka A.2. Buďte $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pravděpodobnostní prostor, I neprázdná množina indexů a $\mathcal{A}_i$ a $\mathcal{B}_i$ σ-algebry pro každé $i \in I$. Pak platí

(i) Je-li $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{B}_i$ pro všechna $i \in I$, pak $\bigvee_{i \in I} \mathcal{A}_i \dot{\subseteq} \bigvee_{i \in I} \mathcal{B}_i$. ($\mathcal{H} = \{H \in \bigvee_{i \in I} \mathcal{A}_i;\ H \dot{\in} \bigvee_{i \in I} \mathcal{B}_i\}$ je σ-algebra a zároveň platí $\forall i \in I \colon \mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{H}$. Platí tedy i $\bigvee_{i \in I} \mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{H}$ a tedy také $\forall H \in \bigvee_{i \in I} \mathcal{A}_i \colon H \dot{\in} \bigvee_{i \in I} \mathcal{B}_i$, což je to samé, jako $\bigvee_{i \in I} \mathcal{A}_i \dot{\subseteq} \bigvee_{i \in I} \mathcal{B}_i$.)

(ii) Je-li $\mathcal{A}_i \doteq \mathcal{B}_i$, $\forall i \in I$, pak $\bigvee_{i \in I} \mathcal{A}_i \doteq \bigvee_{i \in I} \mathcal{B}_i$. (Snadno plyne z (i).)

(Bradley, 2007, A033 Remark, s. 444)

Tvrzení A.3. *Buďte $X \doteq Y$ náhodné veličiny. Pak platí $\sigma(X) \doteq \sigma(Y)$. Speciálně pokud je f borelovská funkce a $X \doteq f(Y)$, pak $\sigma(X) \dot{\subseteq} \sigma(Y)$.*

Důkaz. Nechť je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pravděpodobnostní prostor, na kterém jsou definovány veličiny X a Y. Označme $M \in \mathcal{F}$ splňující $P(M) = 1$ a $X(\omega) = Y(\omega),\ \forall \omega \in M$. Uvažujme $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ a označme $X_A = [X \in A]$ a $Y_A = [Y \in A]$. Nejprve si uvědomme, že platí

$$X_A \cap M = \{\omega \in M; X(\omega) \in A\} = \{\omega \in M; Y(\omega) \in A\} = Y_A \cap M.$$

Užitím Věty C.2 počítejme

$$\begin{aligned} P(X_A \triangle Y_A) &\leq P((X_A \cap M) \triangle Y_A) + P(X_A \triangle (Y_A \cap M)) \\ &+ P((X_A \cap M) \triangle (Y_A \cap M)) = P((Y_A \cap M) \triangle Y_A) + P((X_A \cap M) \triangle X_A) \\ &+ P((X_A \cap M) \triangle (X_A \cap M)) = P(X_A \setminus M) + P(Y_A \setminus M) + 0 \leq 2P(M^c) = 0. \end{aligned}$$

Pro všechna $A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ tedy platí $X_A \doteq Y_A$. Proto také platí

$$\sigma(X) = \{X_A; A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})\} \doteq \{Y_A; A \in \mathbb{B}(\mathbb{R})\} = \sigma(Y).$$

Speciální část tvrzení plyne z dokázané části a z dobře známého faktu, že platí

$$\sigma(f(Y)) \subseteq \sigma(Y).$$

Q.E.D.

B Markovské trojice a Markovské řetězce

Připomeňme, že uspořádaná trojice σ-algeber $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ je markovská trojice, jestliže splňuje některou z ekvivalentních podmínek Definice 5.1 na str. 24.

Poznámka B.1.

(i) Je-li $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ markovská trojice, je i $(\mathcal{C}, \mathcal{B}, \mathcal{A})$ markovská trojice.

(ii) Je-li $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ markovská trojice, je i $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ markovská trojice. Pro každé $A \in \mathcal{A}$ totiž platí $P(A|\mathcal{B} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})) = P(A|\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \doteq P(A|\mathcal{B})$.

(iii) Je-li $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ markovská trojice, je i $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ markovská trojice. Dostane se spojením (i) a (ii).

(iv) Je-li $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ markovská trojice a $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ jsou σ-algebry, pak $(\mathcal{A}_0, \mathcal{B}, \mathcal{C}_0)$ je markovská trojice.

(Bradley, 2007, A701 Background, s. 481)

Tvrzení B.2. *Nechť je $X = (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ markovský řetězec. Buďte $a \leq b \in \mathbb{Z}$ a S_1, S_2, S_3 neprázdné množiny takové, že $S_1 \subseteq \{\dots, a\}$, $S_2 \subseteq \{a, \dots, b\}$ a $S_3 \subseteq \{b, \dots\}$. $(\sigma(X_k; k \in S_1), \sigma(X_k; k \in S_2), \sigma(X_k; k \in S_3))$ je pak markovská trojice.*

(Bradley, 2007, A702 Proposition, s. 482)

Důkaz přebíráme z Bradleyho téměř doslovně. Mírně upravujeme značení.

Důkaz. Pro množinu $M \subseteq \mathbb{Z}$ označíme $\mathcal{S}(M) = \sigma(X_k; k \in M)$. Pro množiny $A, B, C \subseteq \mathbb{Z}$ řekneme, že (A, B, C) je markovská trojice, jestliže $(\mathcal{S}(A), \mathcal{S}(B), \mathcal{S}(C))$ je markovská trojice.

Označme nejmenší prvek S_2 jako j. Podle předpokladů je $(\{k \in \mathbb{Z};\ k \leq j - 1\}, \{j\}, \{k \in \mathbb{Z};\ k \geq j + 1\})$ markovská trojice. Stejně tak je podle Poznámek B.1 (iii) a A.2 (ii) i $(\{k \in \mathbb{Z};\ k \leq j\}, \{j\}, \{k \in \mathbb{Z};\ k \geq j\})$ markovská trojice. Podle Poznámky B.1 (iv) jsou dále i $(S_1 \cup S_2, \{j\}, S_3)$ a $(S_2, \{j\}, S_3)$ markovské trojice. Proto podle Poznámky A.2 (ii) pro každé $F \in \mathcal{S}(S_3)$ skoro jistě platí $P(F|\mathcal{S}(S_1) \vee \mathcal{S}(S_2)) = P(F|\mathcal{S}(S_1 \cup S_2) \vee \mathcal{F}_j) = P(F|\mathcal{F}_j) = P(F|\mathcal{S}(S_2) \vee \mathcal{F}_j) = P(F|\mathcal{S}(S_2))$ a proto je (S_1, S_2, S_3) markovská trojice. Q.E.D.

Tvrzení B.3. *Náhodný proces $X = (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ je markovským řetězecem právě tehdy, když je $(\mathcal{F}_{-\infty}^{k-1}, \mathcal{F}_k, \mathcal{F}_{k+1}^{\infty})$ markovská trojice pro všechna $k \in \mathbb{Z}$.*

Důkaz. Pokud je $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ markovský řetězec, je podmínka splněna podle Tvrzení B.2. Dokážeme opačnou implikaci. Nechť je $(\mathcal{F}_{-\infty}^{k-1}, \mathcal{F}_k, \mathcal{F}_{k+1}^{\infty})$ markovská trojice pro každé $k \in \mathbb{Z}$. Pro všechna $z \in \mathbb{N}$ platí

$$[X_{k-z} = x_0, X_{k-z+1} = x_1, \ldots, X_{k-1} = x_{z-1}] \in \mathcal{F}_{-\infty}^{k-1},$$
$$[X_k = x_z] \in \mathcal{F}_k,\ [X_{k+1} = y] \in \mathcal{F}_{k+1}^{\infty}.$$

To však podle definice markovské trojice znamená, že platí

$$P(X_{k+1} = y | X_{k-z} = x_0, X_{k-z+1} = x_1, \ldots, X_{k-1} = x_{z-1}, X_k = x_z)$$
$$= P(X_{k+1} = y | X_k = x_z),$$

pro nějaké stavy $x_0, \ldots, x_z \in S$ čímž jsme ověřili markovskou vlastnost z Definice 5.4 na str. 26. Q.E.D.

Důsledek B.4. *Buď $X = (X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ markovský řetězec s množinou stavů S. Nechť je $Y = (Y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ převrácením X, tj. $Y_n = X_{-n}$. Pak je Y markovským řetězcem.*

Důkaz. Ověříme podmínku Tvrzení B.3. Zvolme $k \in \mathbb{Z}$. Podle předpokladů a Tvrzení B.3 je $(\mathcal{F}_{-\infty}^{k-1}, \mathcal{F}_k, \mathcal{F}_{k+1}^{\infty})$ markovská trojice. Zřejmě platí $\mathcal{F}_i^j = \mathcal{G}_{-j}^{-i}$. Podle Poznámky B.1 (i) je i $(\mathcal{F}_{k+1}^{\infty}, \mathcal{F}_k, \mathcal{F}_{-\infty}^{k-1}) = (\mathcal{G}_{-\infty}^{-k-1}, \mathcal{G}_{-k}, \mathcal{G}_{-k+1}^{\infty})$ markovská trojice. Protože bylo $k \in \mathbb{Z}$ libovolné ověřili jsme podmínku z Tvrzení B.3 a proto je Y markovským řetězecem. Q.E.D.

C Symetrická diference

Věty o symetrické diferenci přebíráme z Bradley (2007, A053, s. 449-451); většinu podle Bradleyho triviálních věcí, které ve svých důkazech neuvádí, doplňujeme. Připomeňme, že symetrickou diferenci množin A a B definujeme jako $A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Věta C.1 (Vlastnosti symetrické diference)**.** *Nechť je $\mathfrak{U}$ abstraktní množina.*[11] *Pro množiny $A, B \in \mathfrak{U}$ platí*

(i) $(A \bigtriangleup B)^{\mathrm{c}} = A^{\mathrm{c}} \bigtriangleup B$;

(ii) $A \bigtriangleup B = A^{\mathrm{c}} \bigtriangleup B^{\mathrm{c}}$;

(iii) $\mathbb{1}_{A \bigtriangleup B} = \left|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B\right|$.

Důkaz je původní. Bradley důkaz nepodává.

Důkaz. **(i).** Počítejme

$$\begin{aligned}(A \bigtriangleup B)^{\mathrm{c}} &= ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))^{\mathrm{c}} = (A \setminus B)^{\mathrm{c}} \cap (B \setminus A)^{\mathrm{c}} \\ &= (A^{\mathrm{c}} \cup B) \cap (B^{\mathrm{c}} \cup A) = (A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}}) \cup (A^{\mathrm{c}} \cap A) \cup (B \cap B^{\mathrm{c}}) \cup (B \cap A) \\ &= (A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}}) \cup (B \cap A) = (A^{\mathrm{c}} \setminus B) \cup (B \setminus A^{\mathrm{c}}) = A^{\mathrm{c}} \bigtriangleup B;\end{aligned}$$

(i) je dokázáno.

(ii). Protože je symetrická diference symetrická, máme s použitím již dokázaného bodu (i)

$$A^{\mathrm{c}} \bigtriangleup B^{\mathrm{c}} = (A \bigtriangleup B^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = (B^{\mathrm{c}} \bigtriangleup A)^{\mathrm{c}} = ((B \bigtriangleup A)^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = A \bigtriangleup B;$$

tím jsem dokázal (ii).

(iii). Nechť je $x \in A$. Pak platí

$$\mathbb{1}_{A \bigtriangleup B} = 1 \iff x \notin B \iff \left|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B\right| = 1.$$

Případ, kdy $x \notin A$ se ukáže obdobně. Protože obě strany rovnice nabývají pouze dvou hodnot, je (iii) dokázáno. Q.E.D.

[11] Doplněk je pak definován vzhledem k $\mathfrak{U}$, tj. pro $A \subseteq \mathfrak{U}$ máme $A^{\mathrm{c}} = \mathfrak{U} \setminus A$.

Věta C.2 (Pravděpodobnost symetrické diference).

(i) Pro jevy A a B platí

(a) $\mathsf{E}\,|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B| = P(A \triangle B)$,

(b) $|P(A) - P(B)| \le P(A \triangle B)$.

(ii) Pro jevy A, B a C platí $P(A \triangle C) \le P(A \triangle B) + P(B \triangle C)$.

(iii) Pro jevy $A_0, A_1, \ldots, A_n$ platí, že $P(A_0 \triangle A_n) \le \sum_{k=1}^{n} P(A_{k-1} \triangle A_k)$.

(iv) Pro jevy A, B a C platí

(a) $P((A \cap C) \triangle (B \cap C)) \le P(A \triangle B)$,

(b) $P((A \cup C) \triangle (B \cup C)) \le P(A \triangle B)$.

(v) Pro jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ platí obdoba (iv) a sice

(a) $P((A_1 \cap \ldots \cap A_n) \triangle (B_1 \cap \ldots \cap B_n)) \le \sum_{k=1}^{n} P(A_k \triangle B_k)$,

(b) $P((A_1 \cup \ldots \cup A_n) \triangle (B_1 \cup \ldots \cup B_n)) \le \sum_{k=1}^{n} P(A_k \triangle B_k)$.

(vi) Pro jevy A, B, F a G platí $P((A \setminus F) \triangle (B \setminus G)) \le P(A \triangle B) + P(F \triangle G)$.

Důkaz přebíráme z Bradleyho. Oproti jeho důkazu doplňujeme důkazy vedené indukcí a důkaz (ivb) a (vb).

Důkaz. **(i).** (ia) se dostane aplikací střední hodnoty na rovnici (iii) Věty C.1. Abychom dokázali (ib) počítejme

$$|P(A) - P(B)| = |\mathsf{E}\mathbb{1}_A - \mathsf{E}\mathbb{1}_B| \le \mathsf{E}\,|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B| = P(A \triangle B);$$

(i) je dokázáno.

(ii). Počítejme

$$P(A \triangle C) = \mathsf{E}\,|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_C| \le \mathsf{E}\,|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B| + \mathsf{E}\,|\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C| = P(A \triangle B) + P(B \triangle C)$$

a (ii) je dokázáno.

(iii). Dostane se indukcí z (ii). Pro $n = 1$ tvrzení platí (bylo dokázáno jako (ii)). Nechť tvrzení platí pro $n > 1$ a jevy $A_0, \ldots, A_n$. Pak s využitím (ia) platí

$$P(A_0 \triangle A_{n+1}) = \mathsf{E}\left|\mathbb{1}_{A_0} - \mathbb{1}_{A_{n+1}}\right| \leq \mathsf{E}\left|\mathbb{1}_{A_0} - \mathbb{1}_{A_n}\right| + \mathsf{E}\left|\mathbb{1}_{A_n} - \mathbb{1}_{A_{n+1}}\right|$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} P(A_{k-1} \triangle A_k)\right) + P(A_n \triangle A_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} P(A_{k-1} \triangle A_k).$$

tvrzení tedy platí i pro $n+1$, čímž je důkaz (iii) dokončen.

(iv). Dokažme nejprve bod (a). Počítejme s užitím (ia)

$$P((A \cap C) \triangle (B \cap C)) = \mathsf{E}\left|\mathbb{1}_{A\cap C} - \mathbb{1}_{B\cap C}\right| = \mathsf{E}\left|\mathbb{1}_A \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C\right|$$
$$= \mathsf{E}\mathbb{1}_C\left|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B\right| \leq \mathsf{E}\left|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B\right| = P(A \triangle B).$$

K důkazu bodu (b) si nejprve uvědomme, že podle Věty C.1 (ii) a základních vlastností symetrické diference platí

$$P((A \cup C) \triangle (B \cup C)) = P((A \cap C)^{\mathrm{c}} \triangle (B \cap C)^{\mathrm{c}}) = P((A^{\mathrm{c}} \cup C^{\mathrm{c}}) \triangle (B^{\mathrm{c}} \cup C^{\mathrm{c}})).$$

Podle tvrzení (iv) pak (opět podle Věty C.1 (ii)) platí

$$P((A^{\mathrm{c}} \cup C^{\mathrm{c}}) \triangle (B^{\mathrm{c}} \cup C^{\mathrm{c}})) \leq P(A^{\mathrm{c}} \triangle B^{\mathrm{c}}) = P(A \triangle B).$$

(v). Pro $n = 1$ tvrzení jistě platí, neboť jsou obě strany nerovnosti stejné a sice $P(A \triangle B)$. Nechť tvrzení platí pro $n > 1$ a jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Označíme $C = A_1 \cap \ldots \cap A_n$ a $D = B_1 \cap \ldots \cap B_n$. Podle (iva) pak platí

$$P((C \cap A_{n+1}) \triangle (D \cap B_{n+1})) \leq P(A_{n+1} \triangle B_{n+1}) + P(C \triangle D) = \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k \triangle B_k).$$

Tvrzení tedy platí i pro $n+1$, čímž je důkaz (va) dokončen.

Tvrzení (vb) plyne z (va) analogicky jako v důkazu (iv):

$$P((A_1 \cup \ldots \cup A_n) \triangle (B_1 \cup \ldots \cup B_n)) = P((A_1 \cup \ldots \cup A_n)^{\mathrm{c}} \triangle (B_1 \cup \ldots \cup B_n)^{\mathrm{c}})$$
$$= P((A_1^{\mathrm{c}} \cap \ldots \cap A_n^{\mathrm{c}}) \triangle (B_1^{\mathrm{c}} \cap \ldots \cap B_n^{\mathrm{c}})) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k^{\mathrm{c}} \triangle B_k^{\mathrm{c}}) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k \triangle B_k).$$

(vi). Počítejme

$$P((A \setminus F) \triangle (B \setminus G)) = P((A \cap F^{\mathrm{c}}) \triangle (B \cap G^{\mathrm{c}}))$$
$$\leq P(A \triangle B) + P(F^{\mathrm{c}} \triangle G^{\mathrm{c}}) = P(A \triangle B) + P(F \triangle G).$$

Q.E.D.

D Vlastnosti pravděpodobnosti

Buď $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pravděpodobnostní prostor.

Věta D.1. *Nechť $B \in \mathcal{F}$ je jev a $A \in \mathcal{F}$ je jev s kladnou pravděpodobností. Nechť je I nejvýše spočetná indexová množina a nechť $\{A_i\}_{i \in I}$ je dělení*[12] *jevu A. Pak platí*

$$P(B|A) = \sum_{i \in I} P(B|A_i) \frac{P(A_i)}{P(A)}$$

To jest $P(B|A)$ je váženým průměrem čísel $P(B|A_i)$, $i \in I$.

Váhy u členů $P(B|A_i)$, pro které platí $P(A_i) = 0$ jsou nulové, váhy u členů, pro které platí $P(A_i) > 0$ jsou kladné.

Důkaz.

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B \cap \bigcup_{i \in I} A_i)}{P(A)} = \frac{P\big(\bigcup_{i \in I}(B \cap A_i)\big)}{P(A)} \\ &= \sum_{i \in I} \frac{P(B \cap A_i)}{P(A)} = \sum_{i \in I} \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \frac{P(A_i)}{P(A)} = \sum_{i \in I} P(B|A_i) \frac{P(A_i)}{P(A)}, \end{aligned}$$

kde jsme použili, že pokud jsou A_i po dvou disjunktní, jsou po dvou disjunktní i $B \cap A_i$. Jde o vážený průměr, neboť váhy splňují $\sum_{i \in I} \frac{P(A_i)}{P(A)} = 1$.

Dodatkové tvrzení o nulovosti, resp. kladnosti vah snadno plyne z tvaru vah ukázaného ve výpočtu výše. Q.E.D.

Důsledek D.2. *Nechť $c \geq 0$. Nechť B je jev a nechť A je jev s kladnou pravděpodobností. Nechť je I nejvýše spočetná indexová množina a nechť $\{A_i\}_{i \in I}$ je dělení jevu A. Pak platí*

(i) Pokud $P(B|A_i) \geq c$ pro všechna $i \in I$ splňující $P(A_i) > 0$, pak $P(B|A) \geq c$.

(ii) Pokud $P(B|A_i) \leq c$ pro všechna $i \in I$ splňující $P(A_i) > 0$, pak $P(B|A) \leq c$.

(iii) Pokud $P(B|A_i) = c$ pro všechna $i \in I$ splňující $P(A_i) > 0$, pak $P(B|A) = c$.

(iv) Pokud $|P(B|A_i) - P(B)| \leq c$ pro všechna $i \in I$ splňující $P(A_i) > 0$, pak $|P(B|A) - P(B)| \leq c$.

(Bradley, 2007, A022 Proposition, s. 439)

[12] $\{A_i\}_{i \in I}$ je dělení A, jestliže platí $\bigcup_{i \in I} A_i = A$ a A_i jsou po dvou disjunktní.

Důkaz je původní. Bradleyho důkaz není založen na Větě D.1.

Důkaz. Podle Věty D.1 platí $P(B|A) = \sum_{i\in I} P(B|A_i)w_i$, pro nějakou sadu vah w_i. Váhy u členů $P(B|A_i)$, kde $P(A_i) = 0$ jsou podle zmíněné věty nulové a tedy je možné sčítat pouze přes $i \in I$ splňující $P(A_i) > 0$.

(i). Snadno se nahlédne, že při splnění předpokladů je

$$P(B|A) = \sum_i P(B|A_i)w_i \geq \sum_i cw_i = c,$$

kde se sčítá přes $i \in I$ splňující $P(A_i) > 0$. Tvrzení je dokázáno.

(ii) a (iii) se dokáží obdobně.

(iv). Podle předpokladů pro všechna $i \in I$, pro která platí $P(A_i) > 0$, platí $P(B) - c \leq P(B|A_i) \leq P(B) + c$. Podle již dokázaného platí také $P(B) - c \leq P(B|A) \leq P(B) + c$ odkud již (iv) bezprostředně plyne. Q.E.D.

Věta D.3. *Nechť $c \geq 0$. Nechť A a B jsou jevy s kladnou pravděpodobností. Nechť jsou I a J nejvýše spočetné indexové množiny a nechť $\{A_i\}_{i\in I}$ je dělení jevu A a $\{B_j\}_{j\in J}$ je dělení jevu B. Označme*

$$Q(C, D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)\,P(D)}, \quad \text{pro libovolné jevy, } P(C) > 0,\ P(D) > 0.$$

(i) Pokud $Q(A_i, B_j) \geq c\ \ \forall i, j\colon P(A_i) > 0, P(B_j) > 0$, pak $Q(A, B) \geq c$.

(ii) Pokud $Q(A_i, B_j) \leq c\ \ \forall i, j\colon P(A_i) > 0, P(B_j) > 0$, pak $Q(A, B) \leq c$.

(iii) Pokud $Q(A_i, B_j) = c\ \ \forall i, j\colon P(A_i) > 0, P(B_j) > 0$, pak $Q(A, B) = c$.

(iv) Pokud $|Q(A_i, B_j) - 1| \leq c\ \ \forall i, j\colon P(A_i) > 0, P(B_j) > 0$, pak $|Q(A, B) - 1| \leq c$.

(Bradley, 2007, A023 Proposition, s. 439)

Důkaz přebíráme z Bradleyho.

Důkaz. Nejprve si uvědomíme, že díky disjunktnosti rozkladů platí

$$P(A \cap B) = \sum_{ij} P(A_i \cap B_j) \quad \text{a} \quad P(A)\,P(B) = \sum_{ij} P(A_i)\,P(B_j). \tag{36}$$

(i). Podle předpokladů platí

$$Q(A_i, B_j) \geq c \iff \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(A_i)\,P(B_j)} \geq c \iff P(A_i \cap B_j) \geq c\,P(A_i)\,P(B_j).$$

S použitím (36) máme

$$P(A \cap B) = \sum_{ij} P(A_i \cap B_j) \geq \sum_{ij} c\, P(A_i)\, P(B_j) = c\, P(A)\, P(B),$$

což už je to samé, jako $Q(A, B) \geq c$. (i) je tím dokázáno.

Tvrzení (ii) a (iii) se dokáží obdobně.

(iv). Důkaz je analogický důkazu v Důsledku D.2. Q.E.D.

Tvrzení D.4. *Pro náhodný jev $B \in \mathcal{F}$ a σ-algebru $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ platí*

(i) $$\sup_{A \in \mathcal{A}, P(A)>0} P(B|A) = \operatorname{ess\,sup} P(B|\mathcal{A}),$$

(ii) $$\inf_{A \in \mathcal{A}, P(A)>0} P(B|A) = \operatorname{ess\,inf} P(B|\mathcal{A}).$$

(Bradley, 2007, A301 Proposition, s. 465)

Důkaz doslovně přebíráme z Bradleyho.

Důkaz. Důkazy (i) a (ii) jsou analogické a proto podáme pouze důkaz (i).

Buď $M = \operatorname{ess\,sup} P(B|\mathcal{A})$. Pro každé $A \in \mathcal{A}$ splňující $P(A) > 0$ platí

$$P(B|A) = \frac{1}{P(A)} \int_A P(B|\mathcal{A})\, dP \leq \frac{1}{P(A)} \int_A M\, dP = M.$$

Aplikujeme-li nyní supremum na obě strany dostaneme

$$\sup_{A \in \mathcal{A}, P(A)>0} P(B|A) \leq \operatorname{ess\,sup} P(B|\mathcal{A}). \tag{37}$$

Nechť je dále $\varepsilon > 0$. Definujme jev $C = \{M - \varepsilon \leq P(B|A) \leq M\}$. Pak platí $C \in \mathcal{A}$ a $P(C) > 0$ a také

$$P(B|C) = \frac{1}{P(C)} \int_C P(B|\mathcal{A})\, dP \geq \frac{1}{P(C)} \int_C (M - \varepsilon)\, dP = M - \varepsilon$$

Aplikací suprema na obě strany obdržíme

$$\sup_{A \in \mathcal{A}, P(A)>0} P(B|A) \geq \operatorname{ess\,sup} P(B|\mathcal{A}) - \varepsilon.$$

Jelikož ε bylo libovolné, máme také

$$\sup_{A \in \mathcal{A}, P(A)>0} P(B|A) \geq \operatorname{ess\,sup} P(B|\mathcal{A}),$$

což ve spojení s (37) dává dokončení důkazu tvrzení (i). Q.E.D.

Tvrzení D.5. *Nechť $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je konvexní funkce a $m \leq M \in \mathbb{R}$.*

(i) Pro každé $m \leq x \leq M$ platí $f(x) \leq \max\{f(m), f(M)\}$.

(ii) Buď X náhodná veličina na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ splňující $m \dot{\leq} X \dot{\leq} M$ Pak $f(X) \dot{\leq} \max\{f(m), f(M)\}$. Pokud je navíc $m = \operatorname{ess\,inf} X$ a $M = \operatorname{ess\,sup} X$, pak platí $\operatorname{ess\,sup} f(X) = \max\{f(m), f(M)\}$.

(Bradley, 2007, A302 Proposition, s. 466)

Důkaz doslovně přebíráme z Bradleyho.

Důkaz. Pokud je $m = M$ je důkaz triviální (je totiž $X \doteq m \doteq M$). Předpokládejme proto, že $m < M$.

(i). Nechť je $L\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ přímka procházející body $(m, f(m))$ a $(M, f(M))$. Pak pro každé $x \in [m, M]$ platí

$$f(x) \leq L(x) \leq \max\{L(m), L(M)\} \leq \max\{f(m), f(M)\}.$$

(ii). Definujme jev $\Omega_0 = [m \leq X \leq M]$. Pak $P(\Omega_0) = 1$ a navíc podle (i) pro všechna $\omega \in \Omega_0$ platí $f(X(\omega)) \leq \max\{f(m), f(M)\}$. Proto platí první část tvrzení (ii).

Nechť je dále $\varepsilon > 0$. Protože je f konvexní, je i spojitá (viz např. Theorem 3.2, Rudin, 1974). Nalezněme $\delta > 0$ takové, že $|f(x) - f(m)| \leq \varepsilon,\ \forall x \in [m, m+\delta]$. Definujme jev $C = [m \leq X \leq m + \delta]$. Pak $P(C) > 0$ a pro všechna $\omega \in C$ platí $|f(X(\omega)) - f(m)| \leq \varepsilon$ a proto je $f(X(\omega)) \geq f(m) - \varepsilon$. Proto je $\operatorname{ess\,sup} f(X) \geq f(m) - \varepsilon$. Protože ε bylo libovolné, je $\operatorname{ess\,sup} f(X) \geq f(m)$. Analogicky se ještě dokáže, že $\operatorname{ess\,sup} f(X) \geq f(M)$. a důkaz je dokončen. Q.E.D.

Poznámka D.6. Pro jevy A a B zřejmě platí

$$P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = P(B) = P(A)\,P(B) + P(A^c)\,P(B).$$

Proto platí také

$$P(A \cap B) - P(A)\,P(B) = -[P(A^c \cap B) - P(A^c)\,P(B)].$$

Vydělením obou stran výrazem $P(A)$ je vidět, že pro $P(A) > 0$ platí navíc i

$$P(B|A) - P(B) = -[P(B|A^c) - P(B)].$$

(Bradley, 2007, 3.14 Remark, s. 79)

E Vlastnosti pravděpodobnostního prostoru

Tvrzení E.1. *Buď $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebra. Nechť je dále $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$ algebra generující $\mathcal{A}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak pro každé $A \in \mathcal{A}$ existuje $D \in \mathcal{D}$ tak, že $P(A \bigtriangleup D) \leq \varepsilon$.*

(Bradley, 2007, Remark A054(I), s. 451)

Důkaz je původní. Bradley uvádí pouze náznak důkazu.

Důkaz. Označme

$$\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{A};\ \forall \varepsilon > 0\ \exists D \in \mathcal{D} \colon P(A \bigtriangleup D) \leq \varepsilon\}.$$

Protože je $\mathcal{D}$ algebra je jistě $\Omega \in \mathcal{D}$. Jistě je i $\Omega \in \mathcal{A}$. Mohu volit $A = D = \Omega$ a z toho, že $P(\Omega \bigtriangleup \Omega) = P(\emptyset) = 0 \leq \varepsilon$ plyne, že $\Omega \in \mathcal{H}$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nechť je $A \in \mathcal{H}$. Nalezněme $D \in \mathcal{D}$ tak, že $P(A \bigtriangleup D) \leq \varepsilon$. $D^{\mathrm{c}} \in \mathcal{D}$, neboť $\mathcal{D}$ je algebra. S využitím bodu (ii) Věty C.1 na str. 46 pak snadno plyne

$$\varepsilon \geq P(A \bigtriangleup D) = P(A^{\mathrm{c}} \bigtriangleup D^{\mathrm{c}})$$

a A^{c} tedy splňuje podmínku s D^{c} a proto $D^{\mathrm{c}} \in \mathcal{H}$; $\mathcal{H}$ je tedy uzavřený na doplněk.

Nechť je $A_k \in \mathcal{H}$, $k \in \mathbb{N}$. Podle Tvrzení A.1 na str. 42 existují po dvou disjunktní množiny $B_k \in \mathcal{H}$ splňující $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ pro všechna $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ nalezněme $D_k \in \mathcal{D}$ tak, že $P(A_k \bigtriangleup D_k) \leq \frac{1}{2} 2^{-k} \varepsilon$. Protože B_k jsou po dvou disjunktní, platí

$$P\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P(B_k) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Nalezněme tedy takové n, jenž splňuje $P\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k\right) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pak platí

$$P\left[\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \bigtriangleup \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)\right] = P\left[\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k\right) \cup \emptyset\right] \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zřejmě platí $\bigcup_{k=1}^{n} D_k \in \mathcal{D}$, neboť $\mathcal{D}$ je algebra. S využitím bodu (vb) Věty C.2 na str. 47 odhadněme

$$P\left[\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \bigtriangleup \left(\bigcup_{k=1}^{n} D_k\right)\right] \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k \bigtriangleup D_k) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odhadujme dále užitím Věty C.2(ii) na str. 47

$$
\begin{aligned}
&P\left[\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \triangle \left(\bigcup_{k=1}^{n} D_k\right)\right] \\
&\qquad \le P\left[\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \triangle \left(\bigcup_{k=1}^{n} D_k\right)\right] + P\left[\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \triangle \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)\right] \\
&\qquad \le P\left[\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \triangle \left(\bigcup_{k=1}^{n} D_k\right)\right] + P\left[\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \triangle \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)\right] \\
&\qquad + P\left[\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \triangle \left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)\right] + P\left[\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) \triangle \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)\right] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \le \frac{\varepsilon}{2} + 0 + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Proto $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ splňuje podmínku s $\bigcup_{k=1}^{n} D_k$; $\mathcal{H}$ je uzavřená na spočetná sjednocení.

Proto je $\mathcal{H}$ σ-algebra. Dále zřejmě platí $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{A}$ a proto také $\mathcal{H} = \mathcal{A}$.

Q.E.D.

Tvrzení E.2. *Buďte $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebry. Nechť jsou $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{B}$ jevy, $\mathcal{D}$ a $\mathcal{E}$ jsou algebry po řadě generující $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Pro každé $\varepsilon > 0$ nechť jsou $A_\varepsilon \in \mathcal{D}$ a $B_\varepsilon \in \mathcal{E}$ jevy splňující $P(A_\varepsilon \triangle A) \le \varepsilon$ a $P(B_\varepsilon \triangle B) \le \varepsilon$ (takové jevy existují podle Tvrzení E.1). Pak platí následující tvrzení.*

(i) $P(A_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} P(A), \quad P(B_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} P(B).$
(Dokonce platí i $P(A_\varepsilon \cap F) \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} P(A \cap F)$ pro libovolný jev $F \in \mathcal{F}$; pro B analogicky.)

(ii) $P(A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} P(A \cap B).$

(iii) $P(A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) - P(A_\varepsilon)\,P(B_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} P(A \cap B) - P(A)\,P(B).$

(iv) Pokud je $P(A) > 0$, pak $P(B_\varepsilon|A_\varepsilon) - P(B_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} P(B|A) - P(B)$.

(v) Pokud je $P(A)$, $P(B) > 0$, pak je

$$\frac{P(A_\varepsilon \cap B_\varepsilon)}{P(A_\varepsilon)\,P(B_\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} \frac{P(A \cap B)}{P(A)\,P(B)}.$$

(Bradley, 2007, Remark A055, s. 452-453)

U tohoto tvrzení Bradley důkazy vůbec neuvádí. Důkazy jsou tedy původní.

Důkaz. **(i).** Zvolme $\xi > 0$. Chceme nalézt $\delta > 0$ tak, aby pro $|\varepsilon| < \delta$ bylo splněno $|P(A_\varepsilon) - P(A)| < \xi$. Pro $\xi > |\varepsilon|$ však podle bodu (iib) Věty C.2 a podle předpokladů platí

$$|P(A_\varepsilon) - P(A)| \leq P(A \bigtriangleup A_\varepsilon) \leq \xi < \varepsilon;$$

hledaným δ je tedy ξ a (i) je dokázáno. (Poznámka v závorce pak triviálně plyne z bodu (iva) Věty C.2.)

(ii). Zvolme $\xi > 0$. Chceme nalézt $\delta > 0$ tak, aby pro $|\varepsilon| < \delta$ bylo splněno $|P(A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) - P(A \cap B)| < \xi$. Pro $\frac{1}{2}\xi < |\varepsilon|$ platí podle bodu (ii) a (va) Věty C.2

$$\begin{aligned} |P(A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) - P(A \cap B)| &\leq P((A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) \bigtriangleup (A \cap B)) \\ &\leq P(A_\varepsilon \bigtriangleup A) + P(B_\varepsilon \bigtriangleup B) \leq 2\varepsilon < \xi. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $P(A)$ a $P(B)$ jsou seshora omezené a v případech, kdy je to nutné, jsou podle předpokladů odraženy od nuly, plynou další tvrzení triviálně z již dokázaných bodů použitím základních vět o aritmetice limit. Q.E.D.

Poznámka E.3. Buď $X = (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ náhodný proces. Připomeňme značení: Pro $i < j \in \mathbb{Z}$ označme $\mathcal{F}_i^j = \sigma(X_k, k = i, \ldots, j)$, $\mathcal{F}_{-\infty}^j = \sigma(X_k, k = \ldots, j)$, $\mathcal{F}_i^\infty = \sigma(X_k, k = i, \ldots)$. Pro každé $j \in \mathbb{Z}$ platí:

(a) $\sigma\left(\bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{F}_{j-n}^j\right) = \mathcal{F}_{-\infty}^j$;

(b) $\sigma\left(\bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{F}_j^{j+n}\right) = \mathcal{F}_j^\infty$;

(c) $\sigma\left(\bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{F}_{-n}^n\right) = \mathcal{F}_{-\infty}^\infty = \sigma(X)$.

Nechť jsou $j \in \mathbb{Z}$ a $\varepsilon > 0$. Pak podle Tvrzení E.1 platí:

(i) Je-li $A \in \mathcal{F}_{-\infty}^j$ pak existují $n \geq 0$ a $B \in \mathcal{F}_{j-n}^j$ splňující $P(A \bigtriangleup B) \leq \varepsilon$;

(ii) Je-li $A \in \mathcal{F}_j^\infty$ pak existují $n \geq 0$ a $B \in \mathcal{F}_j^{j+n}$ splňující $P(A \bigtriangleup B) \leq \varepsilon$;

(iii) Je-li $A \in \sigma(X)$ pak existují $n \geq 0$ a $B \in \mathcal{F}_{-n}^n$ splňující $P(A \bigtriangleup B) \leq \varepsilon$.

(Bradley, 2007, A201 Remarks, s. 464)

Tvrzení E.4. *Buďte $X = (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ náhodný proces, $t \leq u \in \mathbb{Z}$ a $A \in \mathcal{F}_t^u$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje jev B tak, že splňuje* *(i)* $P(A \triangle B) \leq \varepsilon$.

(ii) B *je sjednocením konečně mnoha po dvou disjunktních* (t, u)*-obdélníků.*

Připomeňme, že jev F *nazýváme* (t, u)*-obdélníkem, jestliže je tvaru*

$$F = \bigcap_{k=t}^{u} [X_k \in S_k],$$

kde $S_k \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ *a* $k = t, \ldots, u$. *(Bradley, 2007, A202 Proposition, s. 465)*

Důkaz je zdlouhavý a překračoval by rozsah práce, proto jej nepodáme.

F Řady

Poznámka F.1. Buď I spočetná množina indexů a buďte $h_i,\ i \in I$ reálná čísla. Nechť platí $\sum_{i \in I} |h_i| < \infty$.

(i) Buď $D \in \mathcal{F}$ množina splňující buď $h_i \leq 0,\ \forall i \in D$ nebo $h_i \geq 0,\ \forall i \in D$. Pak $\left|\sum_{i \in D} h_i\right| = \sum_{i \in D} |h_i|$.

(ii) Nechť navíc ještě platí $\sum_{i \in I} h_i = 0$. Pak $\sup_{F \subseteq I} \left|\sum_{i \in F} h_i\right| = \frac{1}{2} \sum_{i \in I} |h_i|$. (Důkaz viz Bradley.)

(Bradley, 2007, A312 Remark, s. 467)

Literatura

Billingsley, Patrick (1965). *Ergodic Theory and Information*, New York: John Willey & Sons.

——— (1968). *Convergence of Probability Measures*, New York: John Wiley and Sons.

——— (1995). *Probability and Measure*, New York: John Wiley and Sons, 3rd edition.

Blum, J. R., D. L. Hanson, and L. H. Koopmans (1963). On the strong law of large numbers for a class of stochastic processes, *Z. Wahrscheinlichketstheorie und verw.*, Vol. 2, s. 1–11. Nepřístupné.

Bradley, Richard C. (2007). *Introduction to Strong Mixing Conditions, Volume I*, Heber City, Utah, USA: Kendrick Press, 1st edition.

Chazottes, J. R. & F. Redig (2010). Concentration inequalities for Markov processes via coupling,: Cornell University Library. [online] `http://arxiv.org/abs/0810.0097`. Přístup 8.10.2013.

Kemeny, John G., J. Laurie Snell, and Anthony W. Knapp (1976). *Denumerable Markov Chains*, New York: Sprinder-Verlag, 2nd edition.

Kesten, H. & G. L. O'Brien (1976). Examples of mixing Sequences, *Duke Mathematical Journal*, Vol. 43, No. 2, s. 405–415.

Rosenblatt, M. (1980). Linear processes and bispectra, *Journal of Applied Probability*, Israel: Applied Probability Trust, Vol. 17, s. 265–270.

Rudin, W. (1974). *Real and Complex Analysis*, New York: McGraw-Hill, 2nd edition.