Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DISERTAČNÍ PRÁCE

Martin Melcer

Finanční matematika v českých učebnicích od Marchetovy reformy

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí disertační práce: doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph. D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: M 8 Obecné otázky matematiky a informatiky

Praha 2012

Poděkování:

Na tomto místě bych rád poděkoval své školitelce doc. RNDr. Martině Bečvářové, Ph.D. a předsedovi oborové rady doc. RNDr. Jindřichu Bečvářovi, CSc. za podporu, cenné připomínky a odborné rady, kterými přispěli k vypracování této disertační práce. Dále děkuji Národní pedagogické knihovně J. A. Komenského v Praze za poskytnuté materiály. Děkuji také své rodině za velkou trpělivost a milé zázemí.

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 29. 6. 2012 ………………………

podpis

Název práce: Finanční matematika v českých učebnicích od Marchetovy reformy

Autor: Martin Melcer

Katedra: Katedra didaktiky matematiky MFF UK

Vedoucí disertační práce: doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.

Abstrakt: Disertační práce předkládá ucelený pohled na vývoj a pozici finanční matematiky v českých učebnicích a sbírkách, zejména středoškolských, s ohledem na politickou situaci v naší zemi. Analyzované období od roku 1908, tj. od Marchetovy reformy, do současnosti je rozděleno na pět základních etap. V každé jsou vybrány učební texty pokrývající výuku finanční matematiky na všech typech středních škol. Je ukázána úroveň a rozsah výkladu, náročnost předkládaných úloh a problémů a způsob jejich začlenění do učebnic, resp. osnov. Nejprve jsou uvedeny základní všeobecné charakteristiky učebních textů, následuje podrobný popis dílčích studovaných jevů, které jsou potom pečlivě analyzovány a vzájemně porovnány. Na konci disertační práce jsou předloženy závěry, které reflektují současný stav výuky finanční matematiky a nabízejí cesty vedoucí ke zvýšení úrovně finanční gramotnosti našich občanů.

Klíčová slova: finanční matematika, jistina, úrok, dluh, splátka, učebnice, úloha.

Title: Financial Mathematics in Czech textbooks from the Marchet's Reform

Author: Martin Melcer

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D.

Abstract: The PhD thesis presents a comprehensive view of the development and the position of financial mathematics in Czech textbooks and collections particularly those used in high schools with consideration of the political situation in our country. The analysed period from 1908, i.e. from the Marchet's Reform, to the present is divided into five principal stages. In each stage textbooks covering financial mathematics instruction in all types of secondary schools are chosen. This shows the level and extent of the presentation, the complexity of the given tasks and problems and the way in which they are integrated into the textbooks or the syllabus, more precisely. At first the basic general characteristics of the textbooks are presented followed by a detailed description of partial topics of study which are then analysed thoroughly and mutually compared. The conclusions of the PhD thesis reflect the current situation of financial mathematics instruction and offer ways leading to the improvement in the level of financial literacy of our citizens.

Keywords: financial mathematics, principal, interest, debt, annuity, textbook, problem.

Obsah

Úvod ... 1

1. Teoretické minimum finanční matematiky ... 4

1.1 Procentový počet ... 4

1.2 Úročení ... 4

1.3 Jednoduché úročení ... 6

1.4 Složené úročení ... 8

1.5 Spoření ... 10

1.5.1 Krátkodobé spoření ... 10

1.5.2 Dlouhodobé spoření ... 11

1.5.3 Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření ... 12

1.6 Důchod ... 14

1.6.1 Důchod bezprostřední polhůtní ... 14

1.6.2 Důchod bezprostřední předlhůtní ... 16

1.6.3 Důchod odložený ... 17

1.6.4 Důchod věčný ... 17

1.7 Úvěr ... 18

1.8 Umořovací plány ... 19

1.8.1 Splacení úvěru najednou včetně úroků za určitou dobu ... 19

1.8.2 Splácení úvěru stejnými splátkami ... 20

1.8.3 Splácení úvěru stejnými úmory ... 21

1.9 Přehled základních vzorců ... 23

1.10 Shrnutí ... 25

1.11 Seznam literatury a internetových zdrojů ... 27

2. Finanční matematika na středních školách v závěrečném období Rakousko-Uherské Monarchie (udržování vysokého standardu 1908 – 1918) ... 28

2.1 Učebnice pro obecné a měšťanské školy ... 33

2.2 Učebnice pro reálky, gymnázia, reálná gymnázia a střední školy ... 46

2.3 Učebnice pro učitelské ústavy a vyšší obchodní školy ... 66

2.4 Shrnutí ... 94

2.5 Seznam literatury a internetových zdrojů ... 95

3. Finanční matematika na středních školách v období první republiky (rozvoj kvalitního dědictví 1918 – 1939) ... 99

3.1 Učebnice pro obecné a měšťanské školy ... 102

3.2 Učebnice pro reálky, gymnázia, reálná gymnázia a střední školy 107
3.3 Učebnice pro učitelské ústavy 123
3.4 Shrnutí 136
3.5 Seznam literatury a internetových zdrojů 137
4. Finanční matematika na středních školách v období Protektorátu Čechy a Morava (likvidace české inteligence 1939 – 1945) 141
4.1 Učebnice 144
4.2 Shrnutí 160
4.3 Seznam literatury a internetových zdrojů 161
5. Finanční matematika na středních školách v období socialismu (devastace finanční matematiky 1945 – 1989) 163
5.1 První skupina učebnic 168
5.1.1 Příručka kupecké, finanční a pojistné aritmetiky 168
5.1.2 Učebnice, sbírky a přehledy matematiky určené pro střední školy 175
5.2 Druhá skupina učebnic 205
5.3 Třetí skupina učebnic 232
5.4 Shrnutí 235
5.5 Seznam literatury a internetových zdrojů 237
6. Současná pozice finanční matematiky na středních školách (renesance finanční matematiky 1989 – současnost) 244
6.1 Učebnice a sbírky pro střední školy 247
6.2 Učebnice a sbírky pro školy a veřejnost 285
6.3 Učebnice a sbírky pro základní školy 313
6.4 Praktický průvodce 316
6.5 Shrnutí 322
6.6 Seznam literatury a internetových zdrojů 324
Závěr 326

Úvod

Znalosti finanční matematiky by měly být samozřejmou součástí života každého z nás, neboť je uplatníme nejen v bankovních ústavech a při rozhodování o investicích firem, ale také při každodenních úvahách nad rodinnými financemi a zejména v otázkách krátkodobého a dlouhodobého plánování.

Finanční aritmetikou jsem se začal hlouběji zabývat přibližně před patnácti lety. Obrovskou pomoc mi na počátku poskytla učebnice Bohuslava Eichlera *Úvod do finanční matematiky* ([E1]). Zprvu jsem chtěl jen obohatit klasickou výuku matematiky na střední škole o další zajímavou aplikaci, ale s postupem času jsem si uvědomil její důležitost a praktické využití. Také moji studenti nejprve přistupovali k předkládaným úlohám chladně a ani u kolegů jsem neviděl příliš velkou podporu. Pomohl mi denní tisk, v němž jsem stále nacházel další „důkazy“ ukazující nezbytnost dobrých znalostí z finanční matematiky. Během hodin jsem předkládal různé praktické situace, jejichž řešení vyžadovalo znalosti finanční matematiky. Výsledky na sebe nenechaly dlouho čekat. Studenti začali sami tvořit „scénáře“ finančních problémů a jejich zájem o finanční matematiku narůstal. Začlenění této kapitoly do osnov matematiky však nebylo povinné a také vyučující matematiky k tomu přistupovali a dosud přistupují dosti laxně z několika důvodů. Jedním z nich je neochota měnit zaběhnutou rutinu a druhým je obava z neznáma, neboť většina z nich tuto látku, stejně jako já, dříve nestudovala. Tyto zkušenosti mě vedly k dalšímu studiu a ovlivnily výběr tématu disertační práce.

* * *

V práci se pokusím své důvody dále rozvinout a objasnit. Ukážu, jaké mohou být následky neznalostí finanční matematiky a jak tomu lze zabránit. Připomenu úroveň finanční aritmetiky v jednotlivých časových obdobích. Předvedu křehkost vzdělávacích systémů, které podléhají politické moci, a náročnost nápravy nešetrných zásahů do vzdělávacích osnov.

Základní kapitoly finanční matematiky byly nedílnou součástí středoškolské matematiky až do vytvoření Protektorátu Čechy a Morava v roce 1939, během něhož němečtí okupanti systematicky „likvidovali“ českou vzdělanost. Potom svoji pozici ztratily a pokus o návrat přerušil na více než čtyřicet let nástup komunistů k moci.

V současnosti se snažíme navrátit finanční matematice renomé důležitosti a nepostradatelnosti. Řada matematiků, didaktiků a učitelů středních škol během posledních dvaceti let sepsala mnoho kvalitních publikací a studijních materiálů. Velkým problémem však zůstává jejich přijetí vyučujícími a následně studenty, nemluvě o vyčlenění prostoru v již tak naditých učebních osnovách. V předkládané práci si kladu za cíl usnadnit rozhodování školních metodiků o rozsahu výuky finanční matematiky a především podtrhnout důležitost finanční matematiky, která by měla být součástí všeobecné gramotnosti občanů.

V práci analyzuji rozsah, pojetí a náročnost finanční matematiky v učebnicích a sbírkách pro střední školy během více než 100 let. V první kapitole shrnuji minimální potřebné znalosti z finanční matematiky, připomínám důležité pojmy a předkládám základní vzorce. V dalších kapitolách se věnuji učebním textům příslušných období. Jejich rozdělení jsem zvolil podle přímé souvislosti s politickým děním v naší republice. Hranice jednotlivých časových období jsou natolik ostré, že lze kapitoly považovat za téměř samostatné celky:

druhá kapitola: 1908 – 1918;
třetí kapitola: 1918 – 1939;
čtvrtá kapitola: 1939 – 1945;
pátá kapitola: 1945 – 1989;
šestá kapitola: 1989 – současnost.

Každá kapitola nese podtitul vystihující situaci z pohledu pozice finanční matematiky či z pohledu širšího pojetí vzdělání:

druhá kapitola: Udržování vysokého standardu;
třetí kapitola: Rozvoj kvalitního dědictví;
čtvrtá kapitola: Likvidace české inteligence;
pátá kapitola: Devastace finanční matematiky;
šestá kapitola: Renesance finanční matematiky.

V práci se zabývám historií matematiky, především však historií vyučování matematice, didaktikou matematiky a metodikou finanční matematiky. Snažím se reagovat na problémy současného vzdělávacího procesu s důrazem na výuku finanční matematiky.

Uvědomuji si, že i přes prostudování obrovského množství učebnic a dalších publikací, mohou existovat učebnice v práci nezmíněné. Domnívám se však, že všechny stěžejní a důležité texty jsem podrobil důkladné analýze, z níž jsem vyvodil závěry související s jejich přínosem k budování finanční gramotnosti. V závěru práce předkládám náměty na organizaci dodatečného a trvalého začlenění finanční matematiky nejen do školních osnov, ale i do běžného života občanů, kteří již opustili školní lavice.

Úlohy uvedené v práci cituji v úplném znění, tj. s dobovým pravopisem, zachoval jsem také dobové typografické úpravy matematických zápisů. Jedinou výjimkou je umístění desetinné čárky, jež byla v prvních dvou zkoumaných obdobích psána ve výšce jako dnes symbol násobení. Aby nedošlo k omylům, použil jsem dnešní formu zápisu.

1. Teoretické minimum finanční matematiky

Před rozborem učebnic a jejich analýzou z pohledu finanční matematiky je vhodné přehledně uvést základní pravidla a stěžejní myšlenky finančních výpočtů.

1.1 Procentový počet

Procento (per centum) je latinského původu. Označuje setinu celku nebo základu, tedy

$$1\% = \frac{1}{100}.$$

V úlohách s procenty pracujeme se třemi základními veličinami:

- základ z;
- počet procent *p*;
- procentová část je část celku podle počtu procent; její označení není v učebnicích jednotné, nejčastěji se používají písmena *č*, *c* nebo *x*.

Již na základní škole jsme se při prvním seznámení s tímto tématem učili tři základní vzorce:

pro výpočet procentové části $x = z \cdot \frac{p}{100}$;

pro výpočet základu $z = x \cdot \frac{100}{p}$;

pro výpočet počtu procent $p = \frac{x}{z} \cdot 100$.

V dalším průběhu studia většina z nás raději používala úměru neboli trojčlenky, která byla názornější, logičtější a snáze zapamatovatelná.

1.2 Úročení

S úročením se setkáváme v běžném životě při rozhodování v různých finančních otázkách a úlohách. Hodnota peněz je závislá na čase, což je podstatou základní finanční metody sloužící k porovnávání peněžních částek z různých časových období. Mezi základní pojmy úrokového počtu patří úroková míra a úrok. Úrok je částka, kterou získává věřitel od dlužníka jako odměnu za půjčení peněz, tj. *zapůjčí-li jeden subjekt druhému peněžní prostředky, bude požadovat odměnu jako náhradu za dočasnou ztrátu kapitálu, za riziko spojené se změnami tohoto kapitálu (např. s inflací) a za nejistotu, že kapitál nebude splacen v dané lhůtě a výši*. ([K6], str. 24). Úroková míra nebo také úroková sazba je počet procent, které úrok činí ze zapůjčeného kapitálu.

Další užívané pojmy jsou:

- doba splatnosti – doba uložení nebo zapůjčení peněžní částky;
- úrokovací období – období, po jehož uplynutí úročíme daný kapitál. Základním obdobím je jeden rok (roční úroková míra s latinským označením p.a., tj. per annum). Můžeme se setkat s pololetní úrokovou mírou (p.s., t. j. per semestre), se čtvrtletní úrokovou mírou (p.q., t. j. per quartale) a dalšími, avšak málo používanými, časovými úseky, v nichž je kapitál úročen.

V úrokovém počtu rozlišujeme dva základní typy úročení – *jednoduché* a *složené*, které dále dělíme podle okamžiku, kdy dochází k placení úroku.

- Jednoduché úročení – o tomto typu mluvíme v případě, že se vyplácené úroky k původnímu kapitálu nepřičítají a dále neúročí, tj. úroky se počítají jen z původního kapitálu.
- Složené úročení – při tomto typu se úroky připisují k původnímu kapitálu a v dalším období se úročí spolu s ním.
- O polhůtní úročení (dekurzivní úročení) se jedná, jestliže se úroky platí na konci úrokovacího období.
- O předlhůtní úročení (anticipativní úročení) se jedná, jestliže se úroky platí již na začátku úrokovacího období.

Pro výpočet úroku je velmi podstatná doba, za niž se úrok z příslušného kapitálu počítá. Délka roku a délky jednotlivých měsíců, jak je známe z kalendáře, nejsou příliš praktické. To vedlo ke vzniku několika standardů či kódů, s nimiž se můžeme při práci s financemi setkat. Nejčastěji pracujeme s jedním z těchto standardů:

- ACT/365 (anglická metoda) je založen na skutečném počtu dní úrokovacího období a délce roku 365 (resp. 366) dní, započítáváme skutečný počet dní obvykle bez prvního dne;
- ACT/360 (francouzská nebo mezinárodní metoda) je založena na skutečném počtu dní úrokovacího období, ale délku roku počítá jako 360 dní;
- 30E/360 (německá nebo obchodní metoda) je založena na počítání celých měsíců jako 30 dní a délky roku jako 360 dní;
- 30A/360 se liší od předešlé maximálně o jeden den a to pouze v případě, že konec období připadne na 31. den v měsíci a současně začátek období není 30. nebo 31. den v měsíci.

V obvyklých finančních ústavech se většinou aplikuje obchodní metoda, která usnadňuje výpočty. V následujících kapitolách, pokud nebude uvedeno jinak, budeme používat právě ji.

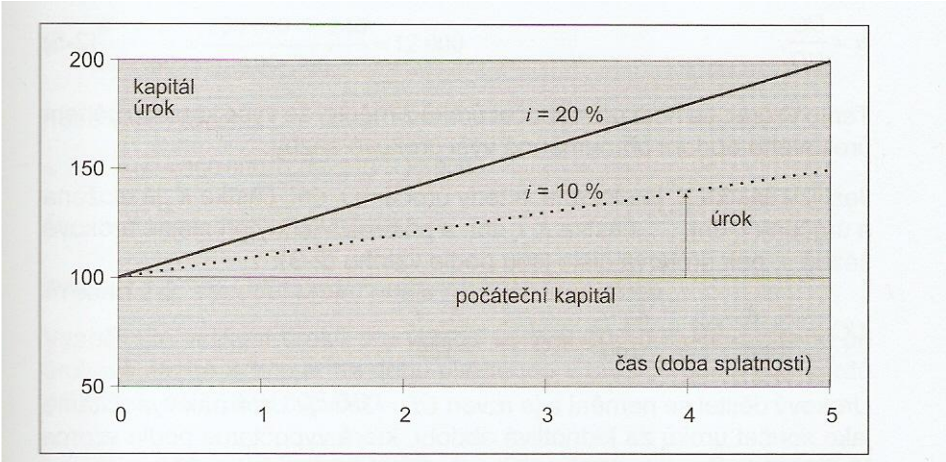
1.3 Jednoduché úročení

Při tomto způsobu úročení počítáme úrok ze stále stejného základu, kterým je počáteční kapitál. Vypočítaný úrok v dalším úrokovacím období neúročíme. Hodnotu celkové částky K_n, která vznikne z vloženého kapitálu K_0 po n úrokovacích obdobích, počítáme podle vzorce

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot n\right),$$

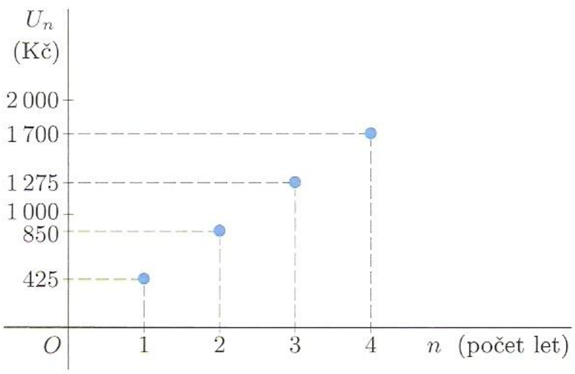
kde k je zdaňovací koeficient, neboť „vydělaný“ úrok je daněn, i je roční úroková míra a t je délka úrokovacího období uvedená ve dnech (toto značení budeme dodržovat v celé kapitole). Při délce úrokovacího období jeden rok dostáváme vzorec $K_n = K_0 \cdot (1 + k \cdot i \cdot n)$.

Proměnnou máme tedy v počtu úrokovacích období; jedná se o lineární funkci, jejíž průběh naznačují následující dva obrázky.



Obrázek 1 ([K6], str. 29)

Na obrázku 1 vidíme graficky zpracovaný příklad počátečního kapitálu 100 jednotek, který je uložen na 5 let s ročním úročením. Graf zobrazený plnou čarou nám ukazuje 20-ti procentní úročení, tečkovanou čarou 10-ti procentní úročení. Výše úroku, který v jednotlivých letech připočítáváme, se nemění.



Obrázek 2 ([O1], str. 51)

Druhý obrázek nám ukazuje jen výši připočítávaného zdaněného 1% úroku z jistiny 50 000 Kč. Z grafu můžeme vyčíst, že úrokovacím obdobím je jeden rok a každý rok přibývá úrok o hodnotě 425 Kč. Pokud nás zajímá jen hodnota úroku, používáme níže uvedené vzorce, v nichž je U_1 úrok za jedno úrokovací období a U_n úrok za n úrokovacích období

$$U_1 = k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot K_0;$$

$$U_n = U_1 \cdot n = k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot K_0 \cdot n.$$

Při délce úrokovacího období jeden rok dostáváme vzorce

$$U_1 = k \cdot i \cdot K_0;$$

$$U_n = U_1 \cdot n = k \cdot i \cdot K_0 \cdot n.$$

Pro vztah počátečního a koncového kapitálu platí vztah:

$$K_n = K_0 + U_n.$$

1.4 Složené úročení

Základní rozdíl mezi jednoduchým a složeným úročením je v chování úroku po připsání k úročenému kapitálu. Při jednoduchém úročení jsme s ním nijak dál nepočítali, kdežto při složeném úročení se připsaný úrok stává nedílnou součástí kapitálu a v dalším období úročíme takto navýšený kapitál, tj. úročíme i připsaný úrok. Důsledkem je, že hodnota úroku v jednotlivých úrokovacích obdobích narůstá a nejedná se o lineární funkci. Zde již vidíme vlastnosti exponenciální funkce, resp. geometrické řady, neboť hodnotu kapitálu v dalším období vypočítáme vynásobením stávajícího kapitálu úročitelem (základem mocniny, kvocientem)

$\left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)$, resp. $(1 + k \cdot i)$ při úrokovacím období jeden rok.

Hodnotu kapitálu K_n vzniklého z kapitálu K_0 po n úrokovacích období vypočítáme podle vzorce, který odpovídá vzorci pro výpočet n-tého členu geometrické posloupnosti s nultým členem K_0

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n.$$

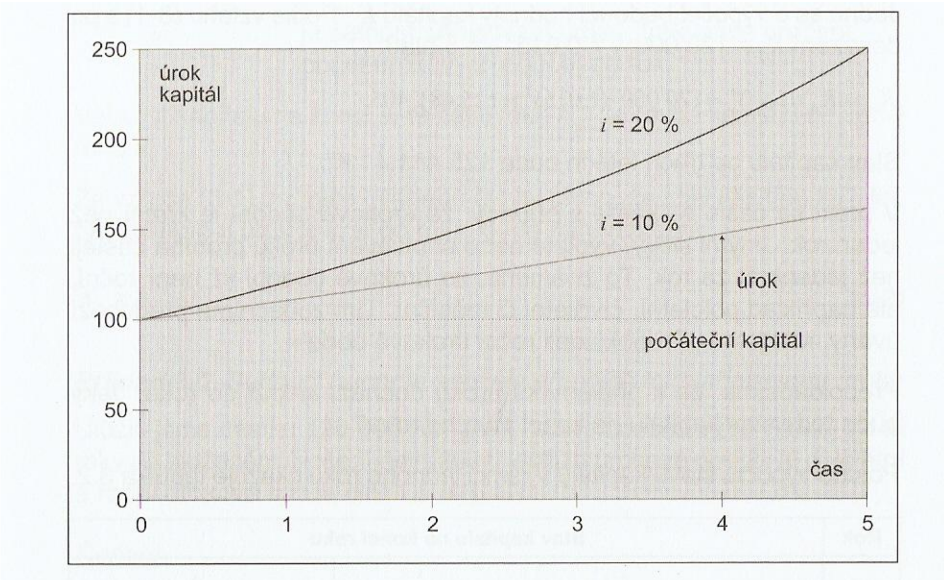
Proměnná t ve vzorci zastupuje délku úrokovacího období ve dnech. Změnou délky úrokovacího období se mění úroková intenzita, tj. skutečná úroková míra při dané roční úrokové míře. Pokud se délka tohoto období blíží k nule, hovoříme o spojitém úročení a získáme maximální úrokovou intenzitu. Více viz například v publikacích [O1] (kapitola 3.6 *Úrokovací období*), [K6] (kapitoly 3.8 *Efektivní úroková míra*; 3.9 *Úroková intenzita – spojité úročení*). V bankách se nejčastěji pracuje s úrokovacím obdobím o délce jednoho roku.

Při délce úrokovacího období jeden rok dostáváme vzorec

$$K_n = K_0 \cdot (1 + k \cdot i)^n.$$

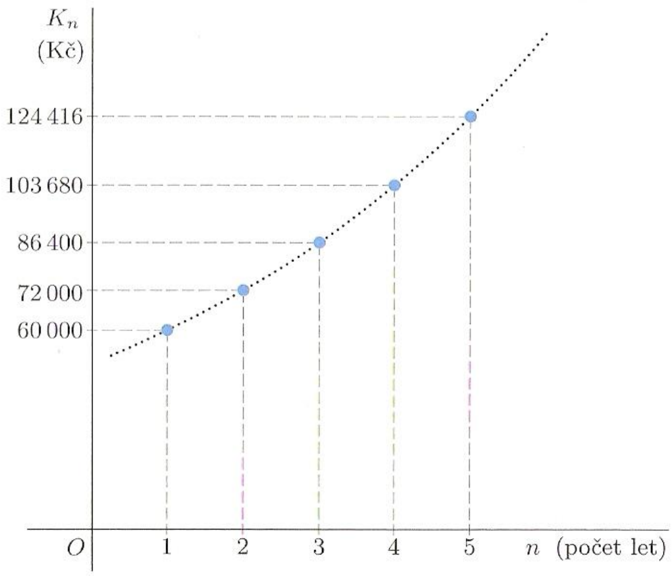
Hodnotu úroku vypočítáme pouhým odečtením kapitálu K_0 od kapitálu K_n.

Proměnnou ve výše uvedeném základním vzorci je počet úrokovacích období, tj. jedná se o již zmiňovanou exponenciální funkci. Názorněji vše můžeme vidět v grafech, které zobrazují některé konkrétní úlohy. Podívejme se na dva z nich.



Obrázek 3 ([K6], str. 47)

Na obrázku 3 je zobrazena úloha: počáteční kapitál má hodnotu 100 jednotek, úročitel má hodnotu 1,1 (graf zobrazený tenkou čarou), resp. 1,2 (graf zobrazený tučnou čarou), zdaňovací koeficient je 1 a úrokovací období má délku jednoho roku.



Obrázek 4 ([O1], str. 97)

Na předcházejícím obrázku 4 vidíme vývoj hodnoty půjčky 50 000 Kč půjčené s roční úrokovou mírou 20 % a s ročním úročením. Vzniklými body grafu jednoduše proložíme exponenciálou.

1.5 Spoření

Spořením označujeme ukládání pevné částky v pravidelných intervalech. Spoření rozdělujeme na dva zkladní typy – krátkodobé a dlouhodobé. Krátkodobým spořením rozumíme spoření, jež svým trváním nepřesáhne jedno úrokovací období, na rozdíl od dlouhodobého, které bude delší než jedno úrokovací období (předpokládejme pro následující text, že úrokovací období má délku jednoho roku).

1.5.1 Krátkodobé spoření

a) Předlhůtní

O tomto typu spoření hovoříme, pokud po dobu maximálně délky jednoho roku budeme v pravidelných intervalech ukládat pevnou částku x ukládáme na počátku každé m-tiny roku. Každý vklad má jinou dobu, po níž je úročen, tj. část roku, po kterou je uložen.

Ukládejme po dobu jednoho roku: první vklad je uložen celý rok, druhý vklad je uložen o jednu m-tinu roku kratší dobu atd. Zapišme úrokovací doby s příslušnou úrokovací mírou i a vypočítejme částku, jež po připsání úroků bude na účtu na konci roku

$$S'_1 = m \cdot x + i \cdot \left(\frac{m}{m} \cdot x + \frac{m-1}{m} \cdot x + \frac{m-2}{m} \cdot x + \cdots + \frac{1}{m} \cdot x\right).$$

Součin $m \cdot x$ se rovná kapitálu, jenž jsme na účet za jeden rok vložili, a zlomky v závorce jsou části roku, po níž je příslušný vklad uložen. Ze závorky můžeme vytknout zlomek $\frac{x}{m}$ a uvnitř nám zůstane součet prvních m přirozených čísel (tj. aritmetická posloupnost), jež vypočítáme, zjednodušíme a dostáváme finální tvar pro stav účtu po zúročení na konci roku

$$S'_1 = m \cdot x + i \cdot \frac{x}{m} \cdot (m + m - 1 + m - 2 + \cdots + 1) \rightarrow$$

$$S'_1 = m \cdot x + i \cdot \frac{x}{m} \cdot \frac{(m+1) \cdot m}{2} \rightarrow$$

$$S'_1 = m \cdot x \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right).$$

S'_1 je hodnota kapitálu na konci roku; apostrof značí předlhůtní vklady. Pokud ukládáme na počátku každého měsíce, má m hodnotu 12.

b) Polhůtní

Tento typ nastane v případě, že za stejných podmínek uvedených výše ukládáme pevnou částku x ne na počátku, ale na konci každé m-tiny roku. To znamená, že každý vklad x je na účtu o jednu m-tinu kratší čas oproti předlhůtnímu spoření. Tato skutečnost nám ovlivní tvar vzorce

$$S_1 = m \cdot x + i \cdot \left(\frac{m-1}{m} \cdot x + \frac{m-2}{m} \cdot x + \frac{m-3}{m} \cdot x + \cdots + \frac{0}{m} \cdot x\right),$$

po úpravách

$$S_1 = m \cdot x + i \cdot \frac{x}{m} \cdot (m - 1 + m - 2 + m - 3 + \cdots + 0) \rightarrow$$

$$S_1 = m \cdot x + i \cdot \frac{x}{m} \cdot \frac{(m-1+0) \cdot m}{2} \rightarrow$$

$$S_1 = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right).$$

S_1 je hodnota kapitálu na konci roku, bez apostrofu značí polhůtní vklady.

1.5.2 Dlouhodobé spoření

O dlouhodobém spoření hovoříme, jestliže délka spoření činí několik úrokovacích období a vklad, nazývaný anuita, připisujeme na účet jedenkrát za úrokovací období.

a) Předlhůtní

V tomto případě ukládáme částku (anuitu) a vždy na počátku úrokovacího období (roku). Zajímají nás úspory na konci n-tého úrokovacího období, tj. po uložení n anuit a. První anuita je úročena n úrokovacích období, druhá (n–1) úrokovacích období atd. Zapišme stav účtu po n úrokovacích obdobích s úrokovou mírou i

$$S' = a \cdot (1+i)^n + a \cdot (1+i)^{n-1} + a \cdot (1+i)^{n-2} + \dots + a \cdot (1+i).$$

Každý člen má hodnotu příslušné anuity po zúročení na konci spoření. Po vytknutí a·(1+i) před závorku vidíme uvnitř prvních n členů geometrické posloupnosti (a_1 = 1, q = 1+i), tzn. že závorku můžeme dále zjednodušit

$$S' = a \cdot (1+i) \cdot [(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \dots + 1] \rightarrow$$

$$S' = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \rightarrow$$

$$S' = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

S' je naspořená částka z anuit a po n úrokovacích obdobích; apostrof ve značení opět znamená předlhůtní ukládání.

b) Polhůtní

Tento typ spoření nastane, ukládáme-li částky vždy na konci úrokovacího období. Spoříme-li takto po dobu n úrokovacích období, počítáme naspořenou částku následovně: první vklad je uložen (n–1) úrokovacích období, druhý (n–2) úrokovacích období atd. Je-li úroková míra i, zapisujeme

$$S = a \cdot (1+i)^{n-1} + a \cdot (1+i)^{n-2} + a \cdot (1+i)^{n-3} + \dots + a.$$

Pomocí stejných kroků jako u předešlého předlhůtního spoření obdržíme finální vzorec pro výpočet naspořené částky

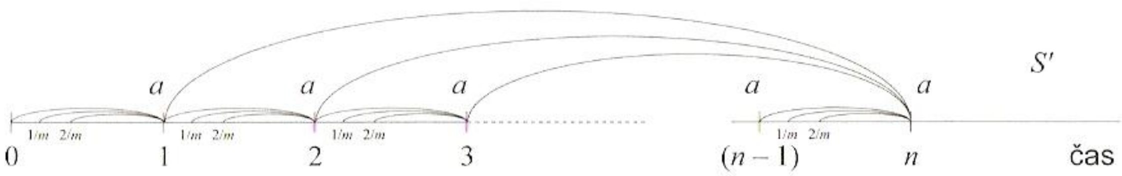
$$S = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

S je naspořená částka z anuit a po n úrokovacích obdobích; bez apostrofu ve značení opět znamená polhůtní ukládání.

Zlomek $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ nazýváme *střadatel* a značíme jej s_n^i.

1.5.3 Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření

V praxi velmi často potřebujeme vypočítat, kolik naspoříme do konce n-tého úrokovacího období, jestliže ukládáme pevnou částku m-krát za úrokovací období. V té chvíli kombinujeme krátkodobé a dlouhodobé spoření. Pomocí vzorců pro krátkodobé spoření (viz výše) vypočítáme naspořenou částku za jedno úrokovací období. Tuto částku máme k dispozici na konci každého úrokovacího období, proto ji dosadíme za anuitu do vzorce pro dlouhodobé polhůtní spoření. Graficky obě situace vidíme na následujících obrázcích.

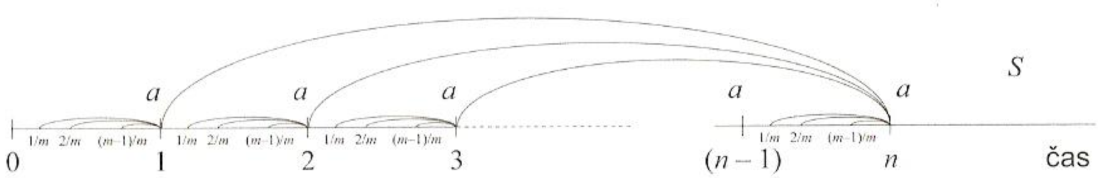


Obrázek 5 ([K6], str. 97)

Obrázek 5 znázorňuje předlhůtní krátkodobé (jedno úrokovací období) spoření podle vzorce

$$S'_1 = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right),$$

kde S'_1 je znázorněné na obrázku jako a, tedy polhůtní anuita dlouhodobého spoření.



Obrázek 6 ([K6], str. 101)

Obdobně obrázek 6 znázorňuje polhůtní krátkodobé spoření podle vzorce

$$S_1 = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right),$$

kde S_1 je znázorněné na obrázku jako a, tedy opět polhůtní anuita dlouhodobého spoření.

Pro výpočet celkové naspořené částky S (značíme S' nebo S podle typu krátkodobého spoření s dolním indexem n značícím počet úrokovacích období) po m vkladech v každém z n úrokovacích období použijeme vzorec

$$S = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

kam za anuitu a dosadíme podle typu krátkodobého spoření buď S'_1 nebo S_1. V obou případech je hodnota námi vloženého kapitálu rovna součinu $n \cdot m \cdot x$, tj. „počet úrokovacích období · počet vkladů za úrokovací období · výše vkladu“.

Uvedené vzorce jsou bez danění úroků. Pokud jsou úroky daněny, musíme úrokovou míru ve všech vzorcích vynásobit zdaňovacím koeficientem k ($k = 1 - d$, d je daň).

1.6 Důchod

Pravidelné výplaty (anuity) ve stejné výši z dané investice nazýváme důchod neboli renta.

Rozlišujeme důchody:

a) podle časového okamžiku výplaty:

- předlhůtní důchod – anuity jsou placeny na počátku daného časového intervalu;
- polhůtní důchod – anuity jsou placeny na konci časového intervalu;

b) podle délky trvání:

- dočasný důchod – tento důchod je vyplácen jen po určitou, pevně stanovenou dobu;
- věčný důchod – tento důchod je vyplácen neomezeně dlouho;

c) podle začátku výplat:

- bezprostřední důchod – s výplatou důchodu začneme ihned po založení;
- odložený důchod – s výplatou důchodu začneme až po uplynutí určité doby.

Základní myšlenkou důchodu je uložení částky do nějakého ústavu, který ji bude spravovat. Tato částka je zde úročena podle pravidel složeného úrokování a je nám z ní vyplácena v určitých časových intervalech pevná částka – renta čili anuita.

1.6.1 Důchod bezprostřední polhůtní

Počáteční (současnou) hodnotu důchodu vypočítáme jako součet všech současných hodnot budoucích vyplacených anuit a důchodu.

Pro názornost si představme, že důchod je vyplácen částkou a jedenkrát na konci úrokového období (roku) při úrokové míře i. První výplata má počáteční hodnotu $a \cdot \frac{1}{1+i}$, druhá výplata $a \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^2$ atd. Výraz $\frac{1}{1+i}$ nazýváme diskontním faktorem a značíme jej *v*. Vše zapíšeme do přehledné rovnice

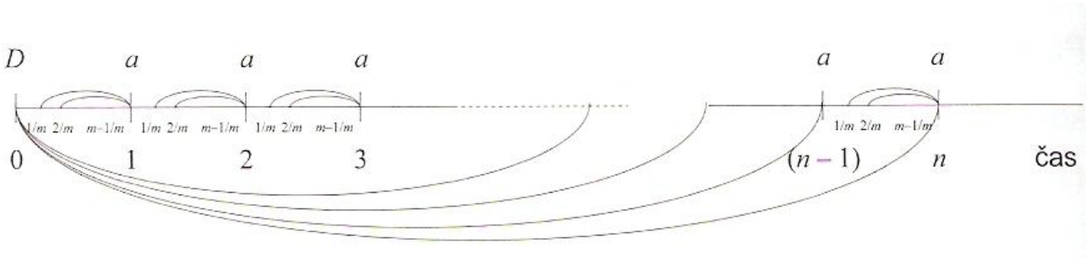
$$D = a \cdot v + a \cdot v^2 + a \cdot v^3 + \cdots + a \cdot v^n,$$

kde *D* je počáteční hodnota důchodu, *a* je výše výplaty, *v* je výše zmíněný diskontní faktor a *n* je počet úrokovacích období. Pravá strana rovnice je součet prvních *n* členů geometrické posloupnosti ($a_1 = a \cdot v,\ q = v$). Rovnici můžeme dále upravovat na tvar

$$D = a \cdot v \cdot \frac{v^n - 1}{v - 1} = a \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{v^n - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} = a \cdot \frac{1 - v^n}{i},$$

kde výraz $\frac{1-v^n}{i}$ se ve finanční matematice nazývá *polhůtní zásobitel* a značí se a_n^i.

Stejně jako u spoření mohou být splátky důchodu vypláceny častěji než jedenkrát za úrokové období. V tom případě je nutno ještě vypočítat za celé úrokové období hodnotu roční anuity a z jednotlivých výplat *x*, jichž je obecně *m* během jednoho úrokovacího období. Názorně vše vidíme na následujícím obrázku 7.



Obrázek 7 ([K6], str. 112)

Do výše odvozeného vzorce $D = a \cdot \frac{1-v^n}{i}$ za anuitu *a* dosadíme vzorec pro výpočet naspořené částky polhůtního krátkodobého spoření $S_1 = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right)$, neboť doba uložení jednotlivých splátek x odpovídá tomuto typu spoření. Výsledný vzorec pro počáteční hodnotu důchodu *D* má tvar

$$D = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i},$$

kde *m* je počet výplat za úrokovací období, *x* je výše výplaty, *i* je úroková míra, *v* je diskontní faktor a *n* je počet úrokovacích období.

1.6.2 Důchod bezprostřední předlhůtní

Mějme důchod, který je vyplácen částkou a vždy na počátku úrokovacího období (roku) po dobu n úrokových období. Hledejme počáteční hodnotu tohoto předlhůtního důchodu D'. Tuto částku vypočítáme jako součet současných hodnot jednotlivých výplat. První výplata má hodnotu a, neboť je vyplacena ihned po založení důchodu, druhá výplata má hodnotu $a \cdot \frac{1}{1+i}$, tj. $a \cdot v$, použijeme-li diskontní faktor, atd.

Zapíšeme-li vše symbolicky, obdržíme rovnici

$$D' = a + a \cdot v + a \cdot v^2 + \cdots + a \cdot v^{n-1},$$

v níž opět vidíme součet prvních n členů geometrické posloupnosti ($a_1 = a,\ q = v$) a upravíme ji na tvar

$$D' = a \cdot \frac{v^n - 1}{v - 1} = a \cdot \frac{v^n - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} = a \cdot (1 + i) \cdot \frac{1 - v^n}{i} = a \cdot \frac{1 - v^n}{i \cdot v},$$

kde výraz $\frac{1-v^n}{i \cdot v}$ se nazývá *předlhůtní zásobitel* a značíme jej a'^{i}_{n}.

Z výše uvedených vzorců odvodíme vztah mezi počáteční hodnotou polhůtního a předlhůtního důchodu a obdržíme rovnici

$$D' = D \cdot (1 + i) \text{ neboli } D = v \cdot D',$$

kde D je současná hodnota polhůtního důchodu, D' je současná hodnota předlhůtního důchodu, i je úroková míra a v je diskontní faktor.

Vzorec pro výpočet současné hodnoty předlhůtního důchodu D', který je vyplácen častěji než jedenkrát za úrokovací období, odvodíme obdobně jako u polhůtního. Nejprve je nutno vypočítat hodnotu roční (za celé úrokovací období) anuity a z jednotlivých výplat x, jichž je obecně m během úrokového období. Uvědomme si, že první anuita a vzniká z jednotlivých výplat x až na konci prvního úrokového období. Využijeme vzorec pro předlhůtní krátkodobé spoření

$$S'_1 = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)$$

a vzorec pro výpočet současné hodnoty polhůtního důchodu (podle okamžiku vzniku první anuity a)

$$D = a \cdot \frac{1 - v^n}{i}.$$

Částku, kterou založíme tento důchod, vypočítáme podle vzorce

$$D = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i},$$

kde *m* je počet výplat za úrokové období, *x* je výše výplaty, *i* je úroková míra, *v* je diskontní faktor a *n* je počet úrokovacích období.

1.6.3 Důchod odložený

Odložení důchodu znamená, že uložená částka určená k výplatám je po nějakou dobu ponechána bez výběrů a k první výplatě dochází až po této době. To znamená, že hodnota důchodu v okamžiku počátku vyplácení je vyšší než uložená částka.

Přestavme si, že uložený kapitál *K* (současná hodnota odloženého důchodu) bude vyplácen až po uplynutí *k* úrokovacích období. Po úrokování v těchto *k* úrokovacích období má kapitál hodnotu bezprostředního, tj. neodloženého, důchodu *D*. Získáváme vztah

$$K \cdot (1 + i)^k = D \text{ neboli } K = D \cdot v^k.$$

Vzorec vyjadřuje, že potřebný kapitál *K* pro založení důchodu *D* při úrokové míře *i* zjistíme tak, že tento důchod *k*-krát diskontujeme diskontním faktorem *v*. Pro hodnotu *D* využijeme vzorce uvedené výše podle daného typu výplat bezprostředního důchodu.

1.6.4 Důchod věčný

V předešlých částech kapitoly jsme hovořili o důchodech, jejichž vyplácení trvalo *n* úrokových období. Nyní se zaměříme na typ důchodu, jehož vyplácení není časově omezeno. To jinými slovy znamená, že se hodnota kapitálu, z něhož jsou výplaty čerpány, v průběhu výplat nezmenšuje. Aby mohla být splněna tato podmínka, lze logicky dojít k jednoznačnému závěru, že vyplácet se mohou pouze úroky (výjimku tvoří pouze první výplata u předlhůtního důchodu). Odvoďme tento závěr z výše uvedených dočasných důchodů pomocí limity, neboť počet úrokovacích období nám neomezeně roste.

a) Věčný polhůtní důchod

$$D = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1 - \nu^n}{i} = a \cdot \frac{1-0}{i} = \frac{a}{i}$$

($\lim_{n\to\infty} \nu^n = 0$, protože $\nu < 1$)

tj. zmiňovaný úrok $u = i \cdot D = a$.

Pro odložený důchod vzniká vztah

$$K = \nu^n \cdot \frac{a}{i}$$

a při frekvenci *m* výplat za úrokovací období použijeme vztah

$$D = \frac{m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right)}{i}.$$

b) Věčný předlhůtní důchod

$$D' = \lim_{n\to\infty} a \cdot (1+i) \cdot \frac{1 - \nu^n}{i} = a \cdot (1+i) \cdot \frac{1-0}{i} = \frac{a}{i} + a$$

tj. zmiňovaný úrok plus první výplata.

Pro odložený důchod vzniká vztah

$$K' = \nu^n \cdot D' = \nu^n \cdot a \cdot \left(1 + \frac{1}{i}\right)$$

a při frekvenci *m* výplat za úrokovací období použijeme vztah

$$D' = \frac{m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)}{i}.$$

1.7 Úvěr

Úvěrem označujeme dluh neboli půjčku a rozumíme jím poskytnutí finančních prostředků na určitou dobu. Za toto poskytnutí platíme poplatek zvaný úrok. Stranu, jež poskytla úvěr, nazýváme věřitel; opačnou stranu dlužník; splácení úvěru umořování; úmor část splátky zmenšená o úroky, tj. zmenšení dluhu.

Rozdělení úvěrů:

a) podle doby splatnosti:

- krátkodobé (doba splatnosti nepřesahuje jeden rok);

- střednědobé (doba splatnosti je do čtyř let);
- dlouhodobé (doba splatnosti je delší než čtyři roky).

b) podle způsobu umořování:

- najednou včetně úroků za určitou dobu;
- od začátku pravidelnými konstantními platbami (anuitami);
- od začátku pravidelnými platbami pro konstantní úmor;
- od začátku pravidelnými platbami, jejichž růst je obvykle charakterizován aritmetickou nebo geometrickou posloupností.

1.8 Umořovací plány

K přehlednému zobrazení stavu úvěru slouží umořovací plán ve tvaru tabulky. Do ní zapisujeme výši jednotlivých plateb, v nichž odlišujeme úmor a úrok. Plán obsahuje vedle plateb zejména výši úroku z úvěru, výši úmoru a zůstatek úvěru po odečtení úmoru. Hodnoty úroku v době splácení obvykle klesají, neboť splátka bývá vyšší než úrok a tento rozdíl je úmor, který snižuje úvěr, tj. v následujících případech předpokládáme kladný úmor.

1.8.1 Splacení úvěru najednou včetně úroků za určitou dobu

Jednorázové splacení úvěru nabízí některé finanční ústavy jako alternativu postupného splácení (viz níže). V tomto případě má banka (věřitel) u fyzické osoby (dlužník) „uloženu“ na počátku částku (úvěr) D_0 při dané úrokové míře i na dobu n úrokovacích období. Během této doby se hodnota úvěru řídí podle pravidel složeného úrokování. Dlužník tedy po uplynutí n úrokovacích období splatí částku D (konečná hodnota úvěru), jejíž výše je stanovena podle vzorce

$$D = D_0 \cdot (1 + i)^n.$$

1.8.2 Splácení úvěru stejnými splátkami

Daný úvěr (dluh) D chceme splatit i s úroky (konstantní úroková míra i) pomocí n stejných splátek (anuit) a, které jsou splatné vždy na konci úrokovacího období.

Pro odvození vzorce vypočítáme současnou hodnotu každé budoucí splátky. První splátku a splatíme za jedno úrokovací období, tj. její současná hodnota je $a \cdot \frac{1}{1+i}$ neboli $a \cdot v$, pokud využijeme zápis s diskontním faktorem. Druhou splátku a splatíme za dvě úrokovací období, tj. její současná hodnota je $a \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^2$ neboli $a \cdot v^2$ atd. Zapíšeme-li všechny tyto diskontované splátky do jedné rovnice, obdržíme

$$D = a \cdot v + a \cdot v^2 + a \cdot v^3 + \cdots + a \cdot v^n,$$

což je rovnice, kterou jsme odvodili v části pojednávající o bezprostředním polhůtním důchodu. Nyní sjednotíme myšlenky vytvoření důchodu a jeho vyplácení s poskytnutím úvěru a jeho splácením. V praxi nejčastěji nastane tato dvojice situací:

1. fyzická osoba uloží do banky částku, z níž banka vyplácí konstantní pravidelnou rentu, tj. fyzická osoba je věřitelem (důvěřuje bance tím, že tam vloží peníze) a banka dlužníkem (u ní jsou uloženy finanční prostředky);
2. fyzická osoba si půjčí od banky částku, kterou splácí konstantními splátkami, tj. fyzická osoba je dlužníkem a banka věřitelem, tj. jen si vymění úlohu.

Z toho plyne, že pokud splácíme úvěr konstantními anuitami, používáme stejné vzorce jako pro tvoření důchodů, tedy

$$D = a \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

a pro výši anuity platí

$$a = D \cdot \frac{i}{1-v^n},$$

kde a je anuita, D je výše úvěru, i je úroková míra, v je diskontní faktor a n je doba splatnosti vyjádřená počtem úrokovacích období.

Zlomek $\frac{i}{1-v^n}$, jenž je převrácenou hodnotou zásobitele, se nazývá *umořovatel*.

k-tá anuita a je v umořovacím plánu rozložena na úrok U_k a úmor M_k podle vzorce

$$a = M_k + U_k = M_k + i \cdot D_{k-1},$$

kde D_{k-1} je výše úvěru převedená z minulého období, tzv. zůstatek úvěru, a i je úroková míra.

Na obrázku 8 si prohlédněme bez dalšího komentáře vše v názorném umořovacím plánu úvěru ve výši 500 000 Kč s dobou splatnosti 10 let s roční úrokovou mírou 6 %, který je splácen ročními polhůtními konstantními anuitami, tj. D = 500 000; n = 10; i = 0,06.

Výši anuity vypočítáme podle výše uvedeného vzorce

$$a = D \cdot \frac{i}{1-v^n} = 500000 \cdot \frac{0{,}06}{1-\left(\frac{1}{1+0{,}06}\right)^{10}} = 67934.$$

Období	Anuita	Úrok	Úmor	Zůstatek úvěru
0				500 000
1	67 934 Kč	30 000 Kč	37 934 Kč	462 066 Kč
2	67 934 Kč	27 724 Kč	40 210 Kč	421 856 Kč
3	67 934 Kč	25 311 Kč	42 623 Kč	379 233 Kč
4	67 934 Kč	22 754 Kč	45 180 Kč	334 053 Kč
5	67 934 Kč	20 043 Kč	47 891 Kč	286 163 Kč
6	67 934 Kč	17 170 Kč	50 764 Kč	235 398 Kč
7	67 934 Kč	14 124 Kč	53 810 Kč	181 588 Kč
8	67 934 Kč	10 895 Kč	57 039 Kč	124 550 Kč
9	67 934 Kč	7 473 Kč	60 461 Kč	64 089 Kč
10	67 934 Kč	3 845 Kč	64 089 Kč	0 Kč

Obrázek 8 ([K6], str. 135)

1.8.3 Splácení úvěru stejnými úmory

Při splácení úvěru stejnými úmory se výše anuity během umořování mění. Výše úmoru M je dána podílem výše úvěru D a počtu úrokovacích období n, tedy

$$M = \frac{D}{n}.$$

Hodnota splátky a_k za k-té období je rovna výši úmoru M a úroku U_k ze zůstatku úvěru D_{k-1} převedeného z minulého období. Při úrokové míře i dostáváme vzorec

$$a_k = M + U_k = M + i \cdot D_{k-1}.$$

Vše si opět prohlédněme (bez dalšího komentáře) v upraveném umořovacím plánu na názorném obrázku 9 výše uvedeného příkladu (D = 500 000; n = 10; i = 0,06).

Období	Splátka	Úrok	Úmor	Zůstatek úvěru
0				500 000
1	80 000	30 000	50 000	450 000
2	77 000	27 000	50 000	400 000
3	74 000	24 000	50 000	350 000
4	71 000	21 000	50 000	300 000
5	68 000	18 000	50 000	250 000
6	65 000	15 000	50 000	200 000
7	62 000	12 000	50 000	150 000
8	59 000	9 000	50 000	100 000
9	56 000	6 000	50 000	50 000
10	53 000	3 000	50 000	0

Obrázek 9 ([K6], str. 142)

Další typy splácení úvěrů nejsou standardní, závisí pouze na nabídce finančního ústavu a akceptaci klienta. Některé z nich lze nalézt ve vysokoškolských učebnicích, např. Tomáše Cipry: *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou* (Ekopress, Praha, 2005) a *Finanční matematika v praxi* (HZ, Praha, 1994).

Existuje množství pěkných publikací i článků určených pro veřejnost (např. [K6]), které mají přispět ke zlepšení finanční gramotnosti obyvatelstva. Velmi podnětný článek o tomto tématu sepsali Oldřich Odvárko a Jarmila Robová *Budování finanční gramotnosti v matematice* (2009); je dostupný na adrese http://clanky.rvp.cz/clanek/c/ZVPD/6787/BUDOVANI-FINANCNI-GRAMOTNOSTI-V-MATEMATICE.html. Na metodickém portálu RVP (tj. rámcově vzdělávací programy) je článek stejné autorské dvojice *Jednoduché a složené úročení*, který je vzorovým příkladem rámcově vzdělávacího programu pro střední školy (viz http://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/8287/jednoduche-a-slozene-uroceni.html).

Pro středoškolské studenty a učitele, kteří si chtějí rozšířit a doplnit finanční gramotnost, jsem sepsal čtyřdílný článek *Možnost uložení a získání finančních prostředků*, jenž vycházel na pokračování v patnáctém ročníku časopisu *Učitel matematiky* (2006/2007).

1.9 Přehled základních vzorců

Přehled nejdůležitějších znaků a symbolů

K_0 – počáteční kapitál (vklad, úvěr);

K – naspořený kapitál po připsání úroku za první úrokovací období;

n – počet let;

m – počet úrokovacích období (počet splátek);

t – počet dní;

K_n, K_m – kapitál po n letech (m úrokovacích obdobích) (po připsání úroku za n-tý rok, resp. za m-té úrokovací období);

U_n, U_m – úrok za n let (m úrokovacích obdobích);

i – úroková míra (nejčastěji roční) vyjádřena desetinným číslem (jestliže je úroková míra p %, potom $i = \frac{p}{100}$);

k – zdaňovací koeficient (úrok bývá daněn, při dani z úroku d % je $k = 1 - \frac{d}{100}$);

S_m – naspořený kapitál po m úrokovacích obdobích (po připsání úroku za m-té úrokovací období);

S' (resp. S) – kapitál naspořený předlhůtním, resp. polhůtním ukládáním;

D – počáteční výše dluhu (důchodu);

s – výše splátky (renty) placené vždy na konci úrokovacího období;

a – pravidelně ukládaná částka, anuita.

Použitá norma: měsíce se počítají po 30 dnech, tj. rok má 360 dní.

Jednoduché úročení

- Kapitál a úrok:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot k \cdot i);$$

$$U_n = n \cdot k \cdot i \cdot K_0 .$$

- Kapitál a úrok po t dnech:

$$K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot k \cdot i\right);$$

$$U = \frac{t}{360} \cdot k \cdot i \cdot K_0 .$$

Složené úročení

- Úrokovací období 1 rok (kapitál a úrok po n letech):

$$K_n = K_0 \cdot (1 + k \cdot i)^n ;$$

$$U_n = K_0 \cdot \left((1 + k \cdot i)^n - 1\right).$$

- Úrokovací období t dní (kapitál a úrok po m úrokovacích obdobích):

$$K_m = K_0 \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot k \cdot i\right)^m ;$$

$$U_m = K_0 \cdot \left(\left(1 + \frac{t}{360} \cdot k \cdot i\right)^m - 1\right).$$

Pravidelné spoření při složeném úročení (úrokovací období t dní)

- Naspořený kapitál S_m pravidelným ukládáním částky a na začátku každého úrokovacího období po dobu m úrokovacích období při roční úrokové míře i a zdaňovacím koeficientu k:

$$S_m = a \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot k \cdot i\right) \cdot \frac{\left(1 + \frac{t}{360} \cdot k \cdot i\right)^m - 1}{\frac{t}{360} \cdot k \cdot i} .$$

- Naspořený kapitál S_m pravidelným ukládáním částky a na konci každého úrokovacího období po dobu m úrokovacích období při roční úrokové míře i a zdaňovacím koeficientu k:

$$S_m = a \cdot \frac{\left(1 + \frac{t}{360} \cdot k \cdot i\right)^m - 1}{\frac{t}{360} \cdot k \cdot i} .$$

Pravidelné splácení dluhu D anuitou s (resp. vyplácení renty s důchodu D) jedenkrát v každém úrokovacím období po dobu m úrokovacích období při roční úrokové míře i (úrokovací období t dní)

$$s = D \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot i\right)^m \cdot \frac{\frac{t}{360} \cdot i}{\left(1 + \frac{t}{360} \cdot i\right)^m - 1} .$$

1.10 Shrnutí

Z předloženého elementárního výkladu vidíme, že základní pravidla pro práci s financemi nejsou nijak složitá, přestože svět financí je velmi pestrý a bohatý, stále se vyvíjí a není příliš přehledný. Pro naši orientaci je třeba výše zmíněná pravidla nejen nastudovat a znát, ale musí nám přejít „do krve“! Bez nich podle mého názoru nelze v současném světě se stále novými nabídkami finančních ústavů – možnostmi spoření či úvěrů – dobře existovat, proto **nepodceňujme studium základů finanční matematiky!**

Žákům by tato pravidla měla být předložena jako jedna z vhodných a praktických aplikací matematiky. Tím by byl rozvoj a zavádění tzv. finanční gramotnosti do základního a středního školství výrazně podpořen a dále upevňován. O krocích a podnětech ze strany naší vlády se může zájemce dozvědět více například ze společného dokumentu Ministerstva financí ČR, Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR a Ministerstva průmyslu a obchodu ČR vypracovaného na základě usnesení vlády č. 1594 ze dne 7. prosince 2005 pod názvem *Systém budování finanční gramotnosti na základních a středních školách*. Jeho aktualizovaná verze z roku 2007 je k dispozici na http://clanky.rvp.cz/wp-content/upload/prilohy/9539/ system_budovani_financni_gramotnosti_na_zakladnich_a_strednich_skolach.pdf. Ministerstvo financí ČR má program nazvaný *Národní strategie finančního vzdělávání*, jenž je uceleným systematickým přístupem k posílení finanční gramotnosti občanů naší republiky (viz http://clanky.rvp.cz/wp-content/ upload/prilohy/9539/narodni_strategie_financniho_vzdelavani.pdf). Užitečný je též článek autorky Mileny Tiché nazvaný *Finanční gramotnost a finanční vzdělávání*, který se také nachází na metodickém portálu RVP (http://clanky.rvp.cz/clanek /s/G/6761/FINANCNI-GRAMOTNOST-A-FINANCNI-VZDELAVANI.html). Seznamuje čtenáře s definicí finanční gramotnosti, zdůrazňuje význam vzdělávání v této oblasti v současné společnosti a ukazuje na možnosti jejího začlenění do výuky na základních a středních školách.

Každý učitel matematiky, popř. informatiky (např. využití tabulkového procesoru Excel), by si měl dát za cíl nevynechávat finanční matematiku. Ze zpráv, které ze svého okolí mám, se však obávám, že mnoho učitelů nedostatečnou finanční gramotnost svých žáků podceňuje nebo se ze své vlastní nepřipravenosti bojí tuto látku vykládat. Velké procento absolventů stále nemá k dispozici obranný aparát proti hazardním půjčkám a jejich neznalosti později vedou k podnikatelským nezdarům, firemním a hospodářským krachům, osobním i rodinným problémům a tragédiím.

Uveďme nyní v plném znění definici finanční gramotnosti, tak jak ji uvádí metodický portál RVP.

Finanční gramotnost je soubor znalostí, dovedností a hodnotových postojů občana nezbytných k tomu, aby finančně zabezpečil sebe a svou rodinu v současné společnosti a aktivně vystupoval na trhu finančních produktů a služeb. (http://wiki.rvp.cz/knihovna/1.pedagogicky_lexikon/g/gramotnost/finanční_gramotnost)

1.11 Seznam literatury a internetových zdrojů

Učebnice

[K6] Jarmila Radová, Petr Dvořák, Jiří Málek: *Finanční matematika pro každého*, 6. aktualizované vydání, Grada, Praha, 2007, 296 stran.

[MT] Jiří Mikulčák a kolektiv: *Matematické, fyzikální a chemické tabulky & vzorce pro střední školy*, dotisk 1. vydání, Prometheus, Praha, 2007, 280 stran.

[MV] Hans-Jochen Bartsch: *Matematické vzorce*, 2. revidované vydání, Nakladatelství technické literatury, Praha, 1987, 832 stran.

[O1] Oldřich Odvárko: *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy*, 1. vydání, Prometheus, Praha, 2005, 200 stran.

[OR] Oldřich Odvárko, Jarmila Robová: *Finanční matematika s kalkulačkami Casio*, 1. vydání, Prometheus, Praha, 2005, 100 stran.

Odborné články

[MM1] Martin Melcer: *Možnost uložení a získání finančních prostředků*, str. 47–53, Učitel matematiky 15(2006/2007), č. 1, JČMF, Praha, 2006, 256 stran.

[MM2] Martin Melcer: *Možnost uložení a získání finančních prostředků (2)*, str. 107–113, Učitel matematiky 15(2006/2007), č. 2, JČMF, Praha, 2007, 256 stran.

[MM3] Martin Melcer: *Možnost uložení a získání finančních prostředků (3)*, str. 181–190, Učitel matematiky 15(2006/2007), č. 3, JČMF, Praha, 2007, 256 stran.

[MM4] Martin Melcer: *Možnost uložení a získání finančních prostředků (4)*, str. 247–256, Učitel matematiky 15(2006/2007), č. 4, JČMF, Praha, 2007, 256 stran.

Internetové zdroje

[I04] Metodický portál RVP: *http://clanky.rvp.cz*.

[I05] Metodický portál RVP: *http://wiki.rvp.cz*.

2. Finanční matematika na středních školách v závěrečném období Rakousko-Uherské Monarchie (udržování vysokého standardu 1908 – 1918)

Rakousko-Uhersko věnovalo velkou pozornost rozvoji infrastruktury, což se týkalo také školství. Zásadním krokem bylo zavedení povinné školní docházky pro děti od šesti do dvanácti let – tzv. *Všeobecný školní řád*, který vydala roku 1774 císařovna Marie Terezie (1717–1780).

Ekonomické rozdíly mezi rozvinutějším západem a zaostalými východními částmi říše se začaly zmenšovat ve druhé polovině 19. století za vlády císaře Františka Josefa I. (1830–1916). Monarchie se snažila ekonomicky dohnat nejvyspělejší evropské země a od roku 1870 do roku 1913 míra růstu hrubého domácího produktu dokonce převyšovala míru růstu v ostatních evropských státech.

Stát si plně uvědomoval důležitost školství v otázce výchovy a vzdělání moderního občana. Během vlády Františka Josefa I. proběhly celkem tři zásadní školské reformy.

Exner-Bonitzova reforma (1849)

Autory reformy nazvané *Nástin organizace gymnázií a reálek v Rakousku* byli Herman Bonitz (1814–1888), německý filolog a učitel, a Franz Friedrich Exner (1802–1853), německý filozof. Vytvářela systém středního školství, který umožňoval zvýšení úrovně vzdělanosti a postupný nástup technického pokroku. Přinesla také úpravy osnov, jež na všeobecně vzdělávacích školách ustoupily od jednostranného kulturně-historického zaměření k podpoře výuky přírodních věd. Klasická gymnázia ztratila ráz latinské školy. Během druhé poloviny 19. století se vyučovacím jazykem na našem území postupně stala čeština. Výuka v českém jazyce nejprve narazila na nedostatek česky psaných učebnic a na nedostatečnou odbornou terminologii. Vznik nových učebnic a terminologie probíhal postupně a dlouhodobě. Od sedmdesátých let 19. století se patronátu nad tímto procesem ujala Královská česká Společnost nauk, která rozsáhlejší vědecké projekty vydávala vlastním nákladem. Obrození v osnovách středních škol probíhalo souběžně. Již na počátku šedesátých let devatenáctého století se zaváděla reálná gymnázia (první – 1862 v Táboře), jež se na místo řečtiny a latiny věnovala

„reálným“ jazykům – čeština, němčina, francouzština. Dalším významným bodem reformy byla změna délky studia – z šestiletých na osmileté – na standardní čtyřletá nižší gymnázia začala navazovat rozšířená čtyřletá vyšší gymnázia. Spolu s rozšiřováním výuky přírodních věd to vedlo ke zvýšení úrovně a všestrannosti absolventů, kteří mohli být po vykonání maturitní zkoušky přijati na vysokou školu.

Zákon o obecném školství (1869)

Zákon stanovoval povinnou osmiletou školní docházku; schválen byl v roce 1869 moravským sněmem a o pět let později českým sněmem. Vyzdvihl všeobecně vzdělávací charakter reálek s důrazem na matematicko-přírodovědné předměty. Rozšířil je na sedm let a jejich osnovy obohatil o deskriptivní geometrii. Zavedl také povinnou maturitní zkoušku na těchto školách, což vedlo k jejich zrovnoprávnění s reformovanými klasickými a nově vzniklými reálnými gymnázii. Zákon spolu s významným rozšířením obsahu vzdělávání zdůrazňoval důležitost vysokoškolského vzdělávání učitelů měšťanských a obecných škol a uváděl pravidla jejich ekonomického a sociálního zabezpečení. Jeho dalším důležitým bodem bylo omezení úlev od docházky, zesvětštění (ztráta církevního charakteru) a zestátnění škol. Jako jeho dodatek byl o rok později vydán školní vyučovací řád pro obecné školy, který stanovoval základní pravidla chování žáků, povinnosti žáků i učitelů a zákaz tělesných trestů.

Tento zákon byl v roce 1883 na popud konzervativců novelizován. Zásadní změnou byly úlevy v docházce, což ve skutečnosti vedlo ke zkrácení povinné školní docházky na šest let. Kladem bylo praktické zaměření měšťanských škol, jejichž prvořadým úkolem se stala příprava žáků pro průmysl a zemědělství. Tato novela byla u nás zrušena až v roce 1922 tzv. Malým školským zákonem (více viz následující kapitola věnovaná období první republiky).

Dalším významným okamžikem bylo rozdělení pražské univerzity na dvě samostatné školy – českou a německou – v roce 1882 po složitých jednáních profesorského sboru a státních institucí.

Meranský program (1905)

Tento program zasahoval do obsahu i metod výuky matematiky. Autorem byl Felix Christian Klein (1849–1925), německý matematik, který se převážně zabýval ne-eukleidovskou geometrií. Zásadním přínosem programu bylo začlenění funkcí, diferenciálního a integrálního počtu do osnov, podpora logického, funkčního myšlení a prostorové představivosti, „spojení“ algebra–geometrie a metoda problémového vyučování (více viz např. [PJ], [TD]).

Marchetova reforma (1908)

Tato reforma byla poslední úpravou středního školství během existence monarchie. Její autor Gustav Marchet (1846–1916) byl v letech 1906 až 1908 rakouským ministrem kultu a vyučování. Jejím hlavním přínosem bylo zrovnoprávnění maturitních zkoušek na všech typech středních škol, jejichž absolventi se mohli volně ucházet o studium na vysokých školách. Marchetovy zákony byly vzorem všech předpisů českého školství až do roku 1948. Upravovaly osnovy výuky, obsah učebnic i strukturu maturitní zkoušky. Poznamenejme, že hlavní úlohu při tvorbě učebnic matematiky měla *Jednota českých matematiků a fyziků*, jejíž počátky sahají do roku 1862. Již od svého vzniku měla pozitivní vliv na pokrokové školské reformy. Většina nových učebnic, jež se řídily touto reformou, začala vycházet pod jejím odborným dohledem v roce 1910 (více viz např. [PJ]).

Podrobnější informace o vývoji českého školství lze najít v publikacích edice *Dějiny matematiky* (například [BM], [MN]).

V této kapitole analyzuji učebnice, početnice a sbírky určené pro žáky a studenty obecných škol, měšťanských škol, reálek, gymnázií, reálných gymnázií a středních škol, jež vycházely po Marchetově reformě. Většinu publikací jsem vyhledal v Národní pedagogické knihovně Jana Ámose Komenského v Praze, některé v knihovně Katedry didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Karlovy univerzity v Praze či v soukromých knihovnách starších kolegů.

Přehled analyzovaných učebnic, početnic a sbírek jsem rozdělil do tří skupin podle typu škol, pro něž byly určeny. Okrajově zmíním publikace pro obecné a měšťanské školy a pro učitelské ústavy a vyšší obchodní školy. Podrobně se budu věnovat střednímu školství.

Učebnice pro obecné a měšťanské školy:

- rok 1909: *Početnice pro školy obecné, stupeň vyšší* (Fr. Močnik);

- rok 1910: *Počtářství na českých školách měšťanských v úlohách* (L. Fryček);
- rok 1914: *Pátá početnice pro třídy s 6., 7. a 8. školním rokem na školách vícetříd-ních* (J. Kozák);
- rok 1916: *Pátá početnice pro obecné školy vícetřídní, 5. školní rok* (A. Matolín).

Učebnice pro reálky, gymnázia, reálná gymnázia a střední školy:

- rok 1910: *Arithmetika pro I. třídu středních škol* (L. Červenka);
- rok 1910: *Arithmetika pro II. třídu středních škol* (L. Červenka);
- rok 1911: *Arithmetika pro III. třídu středních škol* (L. Červenka);
- rok 1910: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních, díl I.* (R. Bendl, J. Muk);
- rok 1910: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních, díl II.* (R. Bendl, J. Muk);
- rok 1911: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních, díl III.* (R. Bendl, J. Muk);
- rok 1911: *Arithmetika pro VI. a VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií* (B. Bydžovský);
- rok 1911: *Arithmetika pro V. až VII. třídu škol reálných* (B. Bydžovský);
- rok 1912: *Mathematika pro nejvyšší třídu reálek* (B. Bydžovský, J. Vojtěch);
- rok 1912: *Sbírka úloh z mathematiky pro vyšší třídy středních škol* (B. Bydžovský, J. Vojtěch).

Učebnice pro učitelské ústavy a vyšší obchodní školy:

- rok 1911: *Arithmetika v úlohách pro ústavy učitelské* (K. Domin);
- rok 1908: *Arithmetika pro ústavy ku vzdělání učitelů a učitelek*, s přílohou: *Úlohy k arithmetice* (V. Posejpal);
- rok 1905: *Algebra a politická arithmetika pro vyšší školy obchodní. Díl III. Arithmetika finanční* (A. Pižl).

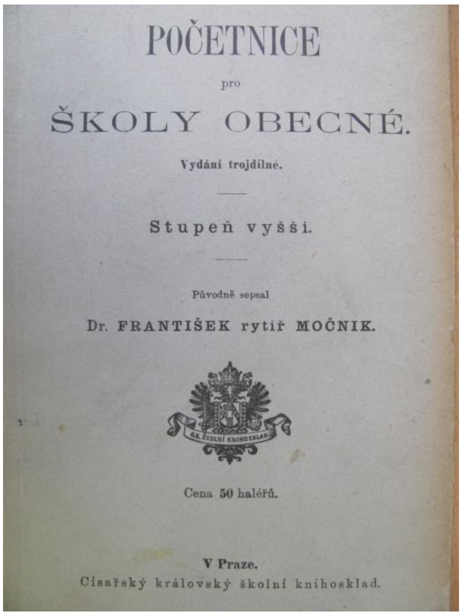
Základní problémy finanční aritmetiky, tj. spoření, půjčka a důchod, patřily neodmyslitelně k běžnému životu občana monarchie. To byl hlavní důvod, proč jsem zařadil vedle středoškolských učebnic také učebnice pro obecné a měšťanské školy, v nichž se podle dobových osnov základy finanční aritmetiky vyučovaly.

Finanční matematika byla standardně zařazena do osnov matematiky. Osnovy aritmetiky pro sedmou a osmou třídu měšťanských škol obsahovaly – jednoduchý počet úrokový, rabatový, lhůtový a výpočet úroku z úroků na jednoduchých příkladech. Osnovy matematiky pro střední školy (7-leté reálky a 8-letá gymnázia) obsahovaly kapitoly z finanční matematiky ve druhé (jednoduché úrokování a diskont) a šesté třídě (složené úrokování a výpočet renty) v sedmiletém studiu, při osmiletém studiu byly základy úrokového počtu ponechány ve druhé třídě a složené úrokování posunuto do sedmé třídy.

2.1 Učebnice pro obecné a měšťanské školy

V početnicích a sbírkách pro obecné a měšťanské školy se žáci poprvé setkávali s problematikou finanční matematiky. Ve většině publikací mohli nalézt pouze jednoduché úrokování a navíc ne vždy podrobně vyložené. Úlohy z oblasti složeného úrokování byly výjimkou a nalezl jsem je jen ve sbírce Ladislava Fryčka nazvané *Počtářství* ([FR]), jež je analyzována níže. V mnoha početnicích jsem našel jen několik triviálních úloh na jednoduché úrokování v kapitolách zabývajících se procenty (viz např. početnice autorů Josefa Horčičky, Jana Nešpora, Josefa Úlehly).

František rytíř Močnik: *Početnice pro školy obecné, vydání trojdílné. Stupeň vyšší*, Císařský královský školní knihosklad, Praha, 1909, 136 stran.



Učebnice patřila mezi velmi oblíbené; vycházela již na konci devatenáctého století. V knihovnách se mi podařilo vyhledat vydání z let 1894, 1895, 1896, 1899, 1903, 1904, 1907, 1909, 1911 a 1913. Rozsah učebnice se neměnil, postupně se zlepšovala grafická úprava obrázků a tabulek. Těchto objektů bylo v učebnici poměrně málo.

Autor František Močnik (1814–1892) byl významným metodikem slovinského původu, jehož učebnice aritmetiky, algebry a geometrie byly užívány na celém území Rakousko-Uherska, byly překládány do národních jazyků, upravovány a modifikovány. Z výše uvedených letopočtů vidíme, že vycházely ještě dlouho po jeho smrti. Vedle vyzdvihovaných a nesporných didaktických kvalit se Močnikovi vytýkalo jen používání malých fontů a tím zhoršená přehlednost při studiu. Mnoho početnic vydaných po Močnikově smrti přepracovali Konrad Kraus a Moritz Habernal.

Početnice, kterou jsem podrobil rozboru, byla rozdělena na tři základní části:

- Oddíl první (rozsah 44 stran): opakovací cvičení, obyčejné zlomky, sousudkové počty (= úměry);
- Oddíl druhý (rozsah 53 stran):
  - Počty procentové (11 stran),
  - Počty úrokové (13 stran),
  - Počty spolkové a směšovací (7 stran),
  - Počty rozličného povolání životního (22 stran);
- Dodatek (35 stran): Vypočítávání útvarů měřických, přehled měr, vah a mincí.

Kapitola *Počty úrokové* obsahovala 99 úloh, z nichž bylo 15 řešených, a byla rozdělena na osm částí označených malými písmeny *a* až *h* podle zaměření. Výklad se soustřeďoval pouze na jednoduché úrokování. Žák byl nejprve seznámen s pojmy *dlužník*, *věřitel*, *jistina* a *úrok*. Mezi úlohami se nacházely užitečné rady, např.

Veškeré vklady chekové zúročují se na 2 % a sice počíná se zúrokování od 1. neb 16., který po vkladu následuje, a končí 15. neb posledního, výplatě nejblíže předcházejícího. Každý měsíc počítá se po 30 dnech. Základní vklad zúrokuje se též po 2 %.

([RM], str. 68)

Kvalitu výkladu a rozboru řešení úlohy můžeme posoudit na základě následující řešené úlohy:

24. *Která jistina dá po 6 % ročně 135 K úroku?*

6 % jistiny = 135 K

1 % „ = 22,5 K („ jako symbol opakování slova *jistina*)

Tedy jistina sama = 22,5 K × 100 = 2250 K.

Anebo:

Na 6 K úroku jest třeba 100 K jistiny; na úrok 135 K, t. j. 22,5 krát 6 K jest třeba 22,5krát větší jistiny nežli dříve, tedy 100 × 22,5 = 2250 K.

([RM], str. 61)

Všechny uvedené úlohy nebyly přehnaně náročné. Autor si uvědomoval, že se jedná o první setkání žáků s touto tématikou a podle toho volil jednoduchý text i vhodná čísla pro výpočet.

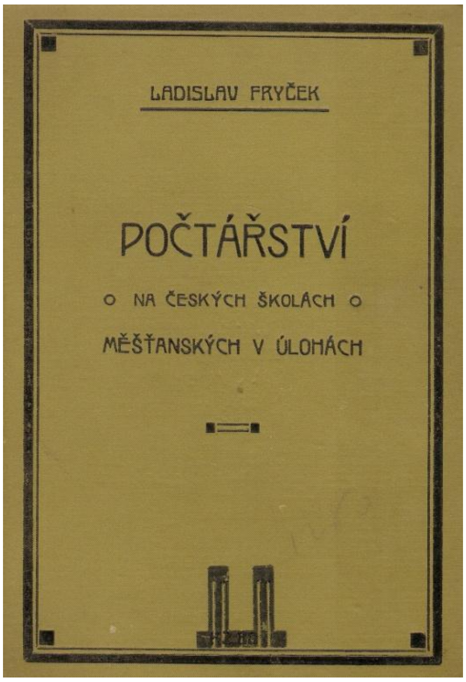
Textovou stránku úloh dobře ilustruje následující ukázka:

78. *Vkladní knížka poštovské spořitelny vykazovala na počátku roku 155 K, 30. června vložil majitel ještě 20 K; kolik úroku mohl by na konci roku vyzdvihnouti?* ([RM], str. 66)

Hodnocení učebnice

Učebnice byla strukturou i náročností vhodná pro vyšší třídy obecných škol. Pravděpodobně nebyla příliš motivující, neboť obsahovala velmi málo obrázků a graficky byla velmi strohá. Pro domácí přípravu mohl žák použít množství řešených příkladů (téměř každý pátý příklad byl vyřešen). Bohužel k neřešeným úlohám nebyly uvedeny výsledky, což však bylo typické pro typ škol, kterým byla početnice určena, i pro časové období, kdy byla používána.

Ladislav Fryček: *Počtářství na českých školách měšťanských v úlohách,* tisk a náklad Karel Šolc, Kutná Hora, 1910, 262 stran.



Učebnice byla určena pro všechny ročníky chlapeckých i dívčích měšťanských škol a byla schválena výnosem č. 3935 c. k. ministerstva kultu a vyučování dne 11. března 1910. Její autor, jenž byl odborným učitelem měšťanské školy v Plzni, využil svých bohatých zkušeností a vytvořil obsáhlou sbírku úloh s výsledky a dodatkem pro převody měr, vah a peněz.

Sbírka byla rozdělena do 25 paragrafů, jež svým obsahem zcela pokrývaly probíranou látku – od počítání s přirozenými čísly, přes trojčlenku a rovnice, po složený úrokový počet. Z pohledu finanční matematiky nás budou zajímat především její tři paragrafy:

§ 13 *Jednoduchý počet úrokový* (rozsah 9 stran);

§ 14 *Počet lhůtový* (rozsah 4 strany);

§ 24 *Složený počet úrokový* (rozsah 7 stran).

Mnoho úloh v dalších paragrafech bylo spojeno s koupí a prodejem. Autor neopominul žádnou oblast života, s níž by se žák v budoucnosti mohl setkat.

Charakteristika vybraných paragrafů

§ 13 *Jednoduchý počet úrokový*

Tato část sbírky obsahovala celkem 70 úloh, po jejichž vypočítání mohl svědomitý žák získat a v budoucnu využít znalost procent při jednoduchém úrokování (ve finanční praxi většinou pro jedno úrokovací období). Na první stránce mu bylo předloženo pět základních způsobů zadání problému s komentářem:

a) *B uložil do záložny 700 K na 4 %; kolik K úroků bylo mu vyplaceno za 2 roky?*

b) *C uložil do záložny 700 K na 4 %; na kolik K vzrostla mu jistina za 2 roky?*

c) *Na kolik % uložil D do záložny 700 K, bylo-li mu za 2 roky vyplaceno 56 K úroků?*

d) *Po kterou dobu měl E uloženou jistinu 700 K, dala-li mu při 4% úrokování 56 K úroků?*

e) *Která jistina dá za 2 roky při 4% úrokování 56 K?* ([FR], str. 120)

Všech pět typů bylo stručně komentováno a vyřešeno. Např. typ *c)*:
Soudíme: Kdyby byl uložil jistinu 700 K na 1 %, byla by mu za rok dala 7 K úroků, za 2 roky 14 K; protože však dala 56 K úroků, tedy byla uložena na tolik %, kolikráte je 14 K v 56 K obsaženo. Byla tedy uložena na 4 %.

V textu byl připomenut způsob úrokování ve spořitelnách a záložnách. Více návodů a poznámek žák již nenašel a byly mu předloženy pouze příklady bez další pomoci ze strany autora.

Úlohy obsahovaly reálné hodnoty a popisovaly reálné situace, do nichž by se mohl žák v budoucnosti dostat. Uveďme ilustrativní příklad:

27. *Lichvář půjčil rolníku, který z nepravého studu nechtěl si vypůjčiti v záložně, na směnku 400 K na ½ roku, z nichž si strhl 30 K na úroky; na kolik % byla tato půjčka uzavřena?* ([FR], str. 123, výsledek: 16,2 %)

Úlohu bychom řešili následovně:

Lichvář ve skutečnosti půjčil jen 370 K a za půl roku bude inkasovat 400 K, tedy úrok za půl roku z částky 370 K byl 30 K.

Půlroční úroková míra byla tedy: $\frac{30}{370}$ = 0,081 = 8,1 %.

Roční úroková míra byla: 2 · 8,1 % = 16,2 %.

§ 14 *Počet lhůtový*

Úlohy v kapitole se zabývaly nezvyklým typem úloh využívajících jednoduché úrokování. Jednalo se o umořování dluhu, jenž měl být jednorázově splacen tak, aby ani věřitel ani dlužník nebyl zkrácen na úroku. Dva ukázkové problémy byly vyloženy s návodem.

a) *B má zaplatit 2.400 K ve 4 stejných čtvrtletních lhůtách; kdy může zaplatiti najednou, aniž by sebe ani věřitele o úrok nezkrátil?*

b) *C má zaplatit 200 K za 2 měsíce, 400 K za 4 měsíce a 900 K za 7 měsíců; kdy může zaplatit najednou, aniž by sebe ani věřitele o úrok zkrátil?*

([FR], str. 129)

Uveďme vzorové řešení příkladu *b)*:

Soudíme: 200 K dá za 2 měsíce tolik úroků jako 400 K za 1 měsíc; 400 K dá za 4 měsíce tolik úroků jako 1.600 K za 1 měsíc; 900 K dá za 7 měsíců tolik úroků jako 6.300 K za 1 měsíc. Provedeme součet: *1.500 K dá za x měsíců tolik úroků jako 8.300 K za 1 měsíc. Má-li 1.500 K dáti tolik úroků jako 8.300 K za 1 měsíc, musí býti úrokovány po tolik měsíců, kolikráte je 1.500 K v 8.300 K obsaženo:* $8300 : 1500 = 5\frac{8}{15}$*. Může tedy zaplatiti najednou za 5 měsíců 16 dní.*

V této kapitole obsahující 25 úloh si žák dále rozvíjel „cit“ pro práci s úroky. Byl nucen pracovat s úroky z více jistin a dále s nimi operovat. Navíc mu byla pokládána otázka spravedlivého splacení, čímž musel projevit hlubší porozumění, než ve třináctém paragrafu. Pro názornost uveďme ještě jeden příklad bez dalšího komentáře:

23. *Velkostatkáři byl nabízen ku koupi velkostatek za 300.000 K s podmínkou, že 90.000 K zaplatí za 4 a zbytek za 6 měsíců, aneb se slevou 1.500 K za hotové; která z nabídek byla proň výhodnější a o kolik K, měl-li peníze ve spořitelně úrokující 3½ %?*
([FR], str. 132, výsledek: Koupě na lhůty byla výhodnější o 3.187,50 K)

§ 24 *Složený počet úrokový*

Nejnáročnější typ úloh z finanční matematiky pro měšťanské školy se nacházel v této kapitole. Žák zde mohl složené úrokování natrénovat na třiceti úlohách. K dispozici měl tabulku úročitelů a odúročitelů, jež se používaly ještě ve druhé polovině dvacátého století pro zjednodušení práce s mocninami.

Z předložených úloh byla jedna velmi podrobně vyřešena. Uveďme její znění:

3. Na kterou sumu vzroste jistina 120.000 K za 3 roky při 4% úrokování, přiráží-li se úrok k jistině jednou za rok? ([FR], str. 196, výsledek: 134.983,68 K)

Úloha byla nejprve řešena úročením po jednotlivých letech, aby žák mohl sledovat postupný nárůst jistiny:

Počáteční jistina: 120.000 K; úrok za první rok: 4.800 K.

Jistina na konci prvního roku: 124.800 K; úrok za druhý rok: 4.992 K.

Jistina na konci druhého roku: 129.792 K; úrok za třetí rok: 5.191,68 K.

Jistina na konci třetího roku: 134.983.68 K.

Ten postup byl označen za velmi pomalý a byl ukázán algoritmus s postupným násobením číslem 1,04. Při vyhledání třetí mocniny tohoto čísla byl žák upozorněn na tabulku úročitelů. Následovala poslední část řešení, které nebylo součástí zadání – porovnání jistin při úrokování ročním a pololetním. Odpovědí bylo, že při pololetním úrokování byl úrok o 155,76 K větší než při ročním úrokování.

U ostatních úloh nebyl uveden ani náznak návodu, ale vzhledem k náročnosti to nebylo třeba. Pro dnešního čtenáře by bylo dobré připomenout, že ve všech úlohách byl předpoklad ročního úrokování, pokud nebylo řečeno jinak. Pro lepší představu ocitujme dvě úlohy bez dalšího komentáře.

13. Občanská záložna v Kutné Hoře úrokuje vklady 4 % a úroky připisuje k jistině pololetně. Na kolik K vzroste v záložně této uložená jistina 9800 K za 14 let?

([FR], str. 198, výsledek: 17.061,80 K, což bylo vypočítáno s použitím tabulky úročitelů; pokud úlohu vyřešíme dnešním postupem pomocí mocniny výsledek je 17.062,04 K)

23. Při založení spořitelny Novo-Bydžovské r. 1863 vložil do této otec svému 18letému synu jistinu, která při 4 % pololetním úrokování vzrostla do plnoletí syna na 19.023 K; kolik K uložil?

([FR], str. 201, výsledek: 14.997,72 K, což bylo vypočítáno s použitím tabulky odúročitelů, plnoletosti dosáhl za šest let, tj. dvanáct období, při 2% úročení, i když by se z textu mohlo zdát, že 4 % se vztahují k pololetí; s použitím mocnin je výsledek 14.999,51 K)

Další tři úlohy z finanční matematiky byly v závěrečném dvacátém pátém paragrafu nazvaném *Opakování*.

Hodnocení sbírky

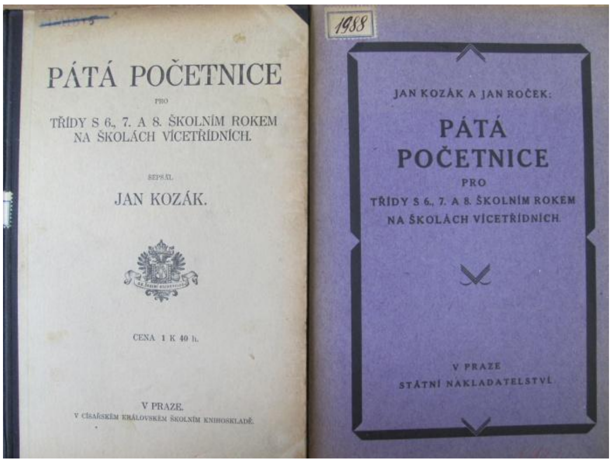
Sbírka svými úlohami pokrývá všechny důležité oblasti praktického života lidí na počátku dvacátého století. Autor především zdůraznil nezbytnou pečlivost a přesnost při práci s penězi.

Celkové množství úloh (více než 2300) podle mého názoru plně postačovalo k dobrému procvičení počtářských dovedností žáků. Slovní úlohy představovaly reálné situace a žáci tak viděli praktické využití, což byl hlavní cíl měšťanských škol.

Sbírka sice neměla teoretické části, ale v každé kapitole se vyskytovalo několik úloh s návody, a tak se společně se samostatným oddílem *Výsledky* jednalo o velmi kvalitní a rozsáhlou pomůcku pro žáka i učitele. Svou strukturou byla publikace vhodná také k domácí přípravě a samostudiu.

Jan Kozák: *Pátá početnice pro třídy s 6., 7. a 8. školním rokem na školách vícetřídních,* Císařský královský školní knihosklad, Praha, 1914, 212 stran.

Tato početnice byla na rozdíl od obvyklých početnic poměrně rozsáhlá a obsahovala také zmínky o finanční aritmetice. Byla rozdělena na 36 krátkých kapitol. O její kvalitě vypovídá druhé, prvorepublikové vydání ve Státním



nakladatelství v Praze z roku 1922; v něm byl jako spoluautor uveden vedle Jana Kozáka ještě Jan Roček. Rozsah početnice byl nezměněn, byly dokonce ponechány tabulky s cenami potravin a zboží z roku 1913. Ani druhé vydání však neobsahovalo výsledky cvičení, což do jisté míry bránilo jejímu užívání při samostudiu.

Z pohledu finanční aritmetiky nás zaujme osm kapitol:

- *Počet lhůtový* (1 strana);
- *Počty procentové* (9 stran);
- *Počty úrokové* (3 strany);
- *Záložny, spořitelny, banky* (1 strana);
- *Směnky, úvěr hypotekární, diskont* (5 stran);
- *Cenné papíry a akcie* (2 strany);
- *Složité úrokování* (6 stran);
- *Promile* (2 strany).

Charakteristika kapitol

S *počtem lhůtovým* se v současné době příliš nesetkáváme. V uváděných úlohách se většinou hledal okamžik stejné hodnoty splátek, jež bylo nutno při výpočtu úročit či odúročit.

Vyřešme jeden konkrétní příklad.

Strojník dal rolníkovi mlátičku a žentour za 840 K s podmínkou, že rolník splatí polovici za 3 měsíce, druhou polovici za 7 měsíců, kdy mu splatil najednou? ([KJ], str. 106)

Jelikož se jedná o stejnou výši splátek, je měsíční úrok z libovolné splátky totožný. První splátka nám „vynáší“ úrok během tří měsíců, druhá během sedmi měsíců, tj. splátky nám vynášejí úrok po dobu deseti měsíců. Splátky jsou dvě, tudíž pět měsíců každá. A to je odpověď: Rolník, aby neošidil sebe ani strojníka, může splatit najednou za 5 měsíců.

Rozsah *lhůtového počtu* byl velmi malý, navíc nezvykle umístěný před procenty a úrokováním, jež jsou při výkladu nutné (více viz např. [FR]). Zde se však jednalo jen o „kuchařku“ řešení úloh splacení dluhu konstantní anuitou.

Počet procentový rozsahem i obsahem odpovídal požadavkům kladeným na tuto látku. Žák nesměl váhat při práci s procenty. Slovní úlohy nebyly ani nijak zákeřné, ani příliš náročné a navíc byly zcela zaměřené na praktické situace za života. Uveďme jeden příklad bez dalšího komentáře.

Obchodník odvedl za čtvrt roku 248,63 K jakožto jednoprocentní daň z tržby; kolik K ve čtvrtletí utržil? ([KJ], str. 117)

Úrokové počty na třech stranách obsahovaly osmnáct různě náročných úloh, na nichž si žák procvičil vše potřebné. Ocitujme jeden typický příklad.

Dva bratři podědili po 67.500 K; prvý koupil za ně továrnu, v které se mu jistina zúročí 14½ %, druhý, aby peníze měl „jisté“, uložil je do záložny na 4½ %; kolik K každému bratru vynesou peníze za 5 roků? ([KJ], str. 124)

Na výše citované úloze bylo cenné především to, že po jejím vyřešení si žák uvědomil rozdíl výnosu investice a v budoucnu mohl tuto znalost využít při svém investičním plánování. Množství a tematické zaměření úloh dostatečně pokrývaly budoucí potřeby běžného občana.

Stručná kapitola *Záložny, spořitelny, banky* nijak nerozšiřovala matematickou teorii kapitoly o úrocích, jen doplnila stručné charakteristiky peněžních ústavů.

Kapitola *Směnky, úvěr hypotekární, diskont* na dvou stranách uváděla základní charakteristiky směnek a úvěrů. Následně předkládala několik neřešených úloh, v nichž se popsané objekty finančních operací vyskytovaly. Uveďme na ukázku jeden příklad.

Zapletal vypůjčil si 640 K na směnku na půl roku; kolik mu záložna vyplatila při 6% diskontu? ([KJ], str. 129)

V této úloze žák musel vypůjčenou částku odúročit, tj. diskontovat. Znamenalo to, že při uvedených hodnotách obdrží jen 97 % zmíněné částky, neboť směnka zněla na půl roku, tj. částka byla snížena o polovinu diskontu.

Další kapitola *Cenné papíry a akcie* neobsahovala žádné úlohy, byly v ní objasněny pojmy spojené s cennými papíry, tj. zejména akcionář, akcie a nominální hodnota akcie.

Kapitola *Složité úrokování* byla naopak plná řešených příkladů a úloh na procvičení. Hlavně však poskytovala základní tabulky pro vyhledávání úročitelů (zde uročitelů), střadatelů a umořitelů. Je zajímavé, že tato kapitola měla být vykládána v 7. a 8. školním roce.

Podívejme se nejprve na zmíněné tabulky, za nimiž vždy uvedeme jednu úlohu s příslušnou tématikou.

I. Tabulka uročitelů,

dle níž lze vypočítati, jak uložené peníze po jisté řadě let vzrostou při složitém úrokování.

	Uložená 1 K vzroste při uročiteli			
	3 %	*4 %*	*4 ½ %*	*5 %*
za 1 rok	*1·03*	*1·04*	*1·045*	*1·05*
za 2 léta	*1·061*	*1·082*	*1·092*	*1·103*
za 3 léta	*1·093*	*1·125*	*1·141*	*1·158*
...	...	...	...	...

([KJ], str. 134)

Tabulka se používá při práci s jednou uloženou částkou po dobu více úrokovacích období.

Která jistina vzroste při 4 % (pak při 4½ %) úrokování za 15, 20, 24 léta na 2 000 (6 500) K)? ([KJ], str. 135)

Žák pouze vyčetl hodnotu z tabulky a vydělil konečnou hodnotou. V některých případech (např. 24 let) musel problém vyřešit po částech, zde 20 let a 4 roky.

II. Tabulka střadatelů

(Pojištění věna dětem, pojištění na dožití, na úmrtí a p.)

	Uložíme-li 1 K, vzroste			
	3 %	*4 %*	*4½ %*	*5 %*
za 1 rok	*1·03*	*1·04*	*1·045*	*1·05*
za 2 léta	*2·091*	*2·122*	*2·137*	*2·152*
za 3 léta	*3·184*	*3·246*	*3·278*	*3·31*
...	...	...	...	...

([KJ], str. 136)

Tabulka se obvykle používala při pravidelném ukládání stejné částky na počátku úrokovacího období po dobu více úrokovacích období.

Kolik musí otec ukládati ročně synovi, aby při 5% úrokování měl za 20 let do závodu 6 000 K? ([KJ], str. 136)

Vzhledem k jednoduchému použití tabulky střadatelů byl postup při řešení této úlohy totožný s postupem uvedeným v předešlé úloze.

III. Tabulka umořitelů

	Abychom oplatili vypůjčenou 1 K, musíme zaplatiti při úrocích			
	3 %	*3½ %*	*4 %*	*4½ %*
za 1 rok	*1·03*	*1·035*	*1·04*	*1·045*
za 2 léta	*0·5226*	*0·5264*	*0·5302*	*0·5340*
za 3 léta	*0·3535*	*0·3569*	*0·3603*	*0·3638*
...	...	...	...	...

([KJ], str. 138)

Kolik musíme splácet, abychom 1 000 K umořili za 12 let při 3½% úrokování? ([KJ], str. 139)

Při použití tabulky umořitelů se kroky postupu řešení úlohy redukovaly jen na vyhledání umořitele v příslušném řádku a sloupci a jeho vynásobení s vypůjčenou částkou.

Práce s tabulkami a řešení typových úloh byly vyloženy v několika řešených příkladech. Žák byl nucen naučit se v tabulkách vyhledávat, ostatní byla jen rutina násobení a dělení.

Poslední kapitolou, kterou má smysl zmínit, byla kapitola nazvaná *Promile*. Autor učebnice si byl vědom, že se s tímto termínem a příslušným symbolem žák v budoucnosti setká, a proto jej neopominul. Na dvou stranách jasně popsal podstatu promile na základě znalosti procenta. Následné úlohy do klasické finanční aritmetiky nepatří, neboť pojem promile se ve finančnictví běžně nepoužíval ani nepoužívá. Uveďme proto jen jednu úlohu.

Komisionář zprostředkoval prodej mouky za 34.680 K, za zprostředkování dostal 6 ‰; kolik si tím vydělal? ([KJ], str. 140)

Hodnocení početnice

Vzhledem k tomu, že učebnice umožňovala první setkání žáků s finanční aritmetikou a ti nebyli ještě vybaveni dostatečným matematickým aparátem, byl autorův přístup ke zpracování a výkladu látky velmi vhodný. Přestože žáci téměř netušili, odkud a jak se vzaly hodnoty v tabulkách, dokázali si jejich používáním uvědomit základní principy, pochopili, že při spoření v peněžních ústavech vložená částka nabývá více než doma pod „matrací" a že při půjčce musí naopak zaplatit více, než si půjčili, a to jako poplatek za to, že peníze měli k dispozici ihned.

Úlohy byly voleny velmi pečlivě. Nebyly přehnaně náročné, použité hodnoty odpovídaly realitě, nebyly zbytečně vyumělkované pro zvýšení náročnosti násobení a dělení. Spojitost s reálnými situacemi také ulehčovala práci učitele při motivaci žáků, kteří si uvědomovali, že se neučí „pro nic za nic". Získali základní návyky, jež je mohly v budoucnosti ochránit před nepředloženými kroky při jednání s bankovními ústavy či lichváři.

Augustin Matolín: *Pátá početnice pro obecné školy vícetřídní, pátý školní rok,* opravené vydání dle osnov z roku 1915, Císařský královský školní knihosklad, Praha, 1916, 72 stran.

Tato učebnice určená pro páté ročníky českých obecných škol sice neobsahovala klasickou finanční aritmetiku, jež by byla pro žáky příliš náročná. Stojí však za zmínku, neboť obsahovala velké množství příkladů procvičujících početní operace. Skládala se ze čtyř samostatných oddílů:

oddíl prvý: *Počítání s čísly celými, desetinnými i vícejmennými;*

oddíl druhý: *Počítání se zlomky obecnými;*

oddíl třetí: *Počet úsudkový;*

oddíl čtvrtý: *Skupinové opakování*

a dodatku, v němž byly přehledy peněz, délkových měr, dutých měr, vah, času atd.

Počet slovních úloh, jejich zaměření a bohatost svědčí o důrazu na praktické využití. Slovní úlohy s peněžní tématikou jsou poměrně časté, klasickými náměty jsou nákup, prodej, stanovení výše nákladů a podobně. Uveďme bez dalšího komentáře dvě z typických úloh.

Kočí koupil ¼ q ovsa; kolik zaplatil, je-li q za 360 K?

([MA], třetí oddíl, str. 51)

Průvodčí elektrické dráhy v Praze prodal za den 586 lístků po 1 K 20 h, 128 lístků po 60 h a 68 lístků po 2 K; kolik K odvedl za ten den?
([MA], čtvrtý oddíl, str. 68)

O její kvalitě a oblibě svědčí další nezměněná (či téměř nezměněná) vydání z let 1918, 1921 a 1922. Vydání před rokem 1915 se mi nepodařilo vyhledat a vzhledem k chybějícímu označení pořadí vydání, ani nemohu rozhodnout, kolik jich celkem bylo. Učebnici lze vytknout pouze absenci obsahu a výsledků.

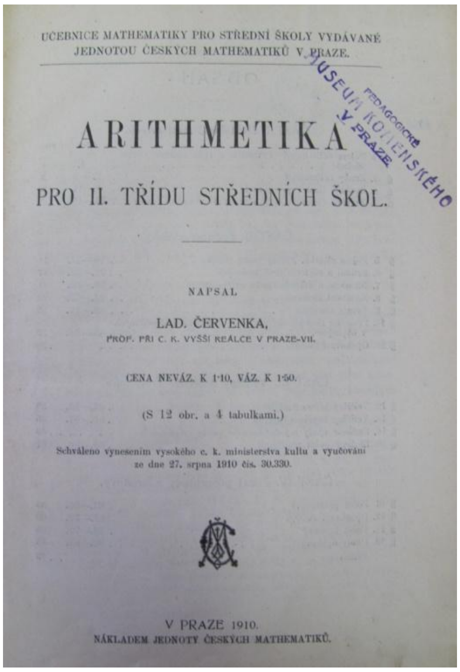
2.2 Učebnice pro reálky, gymnázia, reálná gymnázia a střední školy

Ladislav Červenka: *Arithmetika pro I. třídu středních škol*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1910, 94 stran.

Jednalo se o první díl sady tří učebnic aritmetiky pro nižší ročníky středních škol od téhož autora. První vydání bylo schváleno vynesením č. 11 267 c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 22. dubna 1910. Rozsahem nebyla tato učebnice nijak výjimečná; neobsahovala klasickou finanční matematiku. Pouze ve druhé kapitole nazvané *Míry věcí spojitých. Peníze.* se nacházel osmý paragraf s názvem *Rakouské peníze*. Student zde obdržel přehledný soupis a převodní vztahy existujících mincí a bankovek.

Učebnice byla kvalitní a uznávaná, o čemž svědčila její další vydání z let 1911 (rozsah 92 stran), 1919 (rozsah 92 stran), 1921 (rozsah 92 stran), 1923 (rozsah 92 stran), 1932 (rozsah 100 stran) a 1934 (rozsah 100 stran).

Ladislav Červenka: *Arithmetika pro II. třídu středních škol*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1910, 80 stran.


UČEBNICE MATHEMATIKY PRO STŘEDNÍ ŠKOLY VYDÁVANÉ JEDNOTOU ČESKÝCH MATHEMATIKŮ V PRAZE.

ARITHMETIKA

PRO II. TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL.

NAPSAL

LAD. ČERVENKA,

PROF. PŘI C. K. VYŠŠÍ REÁLCE V PRAZE-VII.

CENA NEVÁZ. K 1·10, VÁZ. K 1·50.

(S 12 obr. a 4 tabulkami.)

Schváleno vynesením vysokého c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 27. srpna 1910 čís. 30.330.

V PRAZE 1910.

NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ.

Jednalo se o druhý díl výše zmíněné sady, který byl stejně úspěšný jako první, neboť se dočkal celkem osmi vydání. První vydání z roku 1910 s 12 obrázky a čtyřmi tabulkami bylo schváleno vynesením č. 30 330 c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 27. srpna 1910.

Obsah byl rozdělen do čtyř základních kapitol, které byly dále členěny na celkem 19 paragrafů, jež byly pro přehlednost upraveny do 85 odstavců.

Student v ní byl seznámen jen se základy finanční matematiky, které byly zpracovány v uceleném osmnáctém paragrafu a rozšířeny posledním devatenáctým paragrafem.

Obsah učebnice

Část I. Dělitelnost čísel celých (10 stran);

Část II. Počítání zlomky (27 stran);

Část III. Veličiny úměrné. Trojčlenka (17 stran);

Část IV. Počet procentový a úrokový (24 stran);

§ 16. *Počet procentový* (5 stran);

§ 17. *Opakovací cvičení* (5 stran);

§ 18. *Počet úrokový* (8 stran);

§ 19. *Úkoly opakovací* (6 stran);

Přídavek (2 strany).

Zaměřme se na analýzu úrovně a náročnosti finanční matematiky ve dvou závěrečných paragrafech.

§ 18. Počet úrokový

Tento paragraf byl rozdělen na osm krátkých odstavců, v nichž byl student postupně seznamován se základními pojmy a postupy finanční matematiky.

V prvním odstavci byly zavedeny pojmy *půjčit*, *vrátit*, *dlužník*, *věřitel* a *úrok*. Ve druhém byl nastíněn postup výpočtů při jednoduchém úrokování a závislost úroku na délce trvání výpůjčky. K vysvětlení byl použit jeden řešený a komentovaný příklad. Třetí odstavec představoval existující peněžní ústavy (např. záložny, spořitelny, banky) a ukazoval možnosti vkladů a půjček. Teprve ve čtvrtém odstavci s názvem *Počítání úroků* byly studentovi ukázány typické úlohy. První příklad byl vyřešen třemi způsoby, v nichž měl student pochopit využití znalostí trojčlenky a procentového počtu. Na základě těchto myšlenek byl odvozen vzorec pro jednoduché úrokování, který byl následně použit při řešení dalších třech příkladů. Uveďme jeden z nich.

3. Jak veliké jsou 4%ní úroky z 280 K za dobu od 12. dubna 1910 do 27. července 1910? ([CL2], str. 67)

Řešení: Student byl nejprve veden k výpočtu počtu dní uložení s poznámkou, že měsíc se počítá za 30 dní a den výpůjčky se nepočítá. Tedy od 12. dubna do 12. července to byly 3 měsíce a do 27. července dalších 15 dní, celkem tedy 105 dní z 360.

Úrok byl pak počítán z odvozeného vzorce:

$$u = \frac{j \cdot p \cdot r}{100} = \frac{280 \cdot 4 \cdot \frac{105}{360}}{100} = 3{,}27 \text{ K.}$$

Po řešených příkladech následovalo jedenáct úloh k procvičení, z nichž některé měly více variant zadání (např. třetí úloha měla varianty od a) po h)). Čtvrtý odstavec byl zaměřen jen na výpočet úroků.

Tématem pátého odstavce byl výpočet jistiny. Struktura byla zachována – první řešený příklad měl dva typy řešení, podle odvozeného vzorce byly vyřešeny další dva příklady a odstavec byl zakončen úlohami 12 až 17 k procvičení. Pro posouzení náročnosti uveďme bez dalšího komentáře jednu úlohu.

16. 4% úroky z jakéhosi dluhu činily za dobu od 16. února do 26. května téhož roku (6. července t. r., 26. ledna násl. roku, 3. února násl. r.) 122,40 K; jak velký byl tento dluh? ([CL2], str. 69)

Stejným výkladovým stylem byly vedeny také následující odstavce. Šestý odstavec byl zaměřen na výpočet úrokové míry (jeden řešený příklad a šest úloh na procvičení), sedmý na počítání času (jeden řešený příklad a pět úloh na procvičení) a úlohy, jež nebyly takto jednoznačně určené byly řešeny v posledním osmém odstavci. Osmý odstavec obsahoval dva řešené příklady a pět úloh na procvičení. Pro lepší představu obsahu osmého odstavce uveďme jednu úlohu.

31. Kolik třeba zaplatiti nyní, abych se zbavil povinnosti platiti za rok 1000 K při úrokování 4½ %? ([CL2], str. 72)

§ 19. Úkoly opakovací

V posledním paragrafu učebnice byly podrobněji popsány peněžní ústavy a cenné papíry. Vše bylo rozděleno do pěti odstavců. Teoretické části byly krátké a hlavní důraz byl kladen na praktické úlohy.

První odstavec obsahoval charakteristiku záložen, spořitelen a bank. Vysvětloval možnosti úrokování vkladů a získání úvěrů. Na šesti neřešených úlohách byly představeny některé situace, které mohly nastat. Uveďme jednu z nich.

4. Kolik (i s úroky) nastřádal si za rok člověk, který 1. lednem 1910 počínaje každého prvního dne v měsíci uložil do městské spořitelny Pražské vždy 10 K? Vypočteme-li tuto úsporu, jak z toho rychle usoudíme, kolik by si byl uspořil, kdyby byl ukládal každého měsíce 20 (25, 24, 22,50) K? ([CL2], str. 72)

Dalších šest úloh obsahoval druhý odstavec, který byl zaměřen na poštovní spořitelnu, jež byla podle textu zaměřena především na spoření (*řízení úsporné*) a vedení účtu (*řízení šekové*). Při vedení účtu bylo vyloženo jak používat složenky k zaplacení hotovosti k účtu a šeky k vyplacení hotovosti z účtu.

Třetí odstavec pojednával o akciích a zaváděl pojmy *akcionář*, *dividenda*, *nominální hodnota* atd. Opět následovalo šest úloh k procvičení. Zmiňme jednu z nich.

16. Akciová společnost Laurin a Klement, továrna automobilů v Ml. Boleslavi, má 17 500 akcií po 200 K; r. 1907 platila dividendu 12 K. Kolik K by stála taková akcie, očekává-li se stejná dividenda, kdyby cena její měla býti úrokována 5 % a jestliže od placení poslední dividendy uplynuly 4 měs. 24 dny? ([CL2], str. 76)

Čtvrtý odstavec zaváděl pojem směnky a s ním spojené směnečné právo a skonto. Opět byla zdůrazněna délka finančního roku, tedy 360 dní. Navíc bylo zmíněno, že úrokovou míru eskonta někdy určuje rakousko-uherská banka. Následovaly tři úlohy k procvičení.

Poslední, pátý odstavec byl věnován dlužním úpisům a uzavíraly jej čtyři procvičující úlohy. V úvodu byl popsán způsob emise částečných dluhopisů, k nimž byl vydáván kuponový arch, ze kterého se odstřihávaly kupony při výplatě úroků. S posledním kuponem byl bance předložen talon a vydán nový kuponový arch. Podstatou dluhopisů bylo poskytnutí půjčky nezadlužené továrně bankou, která ji úročila pěti procenty. Získanou částku rozdělila na dlužní úpisy a na ně si půjčila od jednotlivců. Dlužní úpisy úročila menší úrokovou mírou a úroky vyplácela za kupony, které šlo používat jako peníze. Rozdíl úrokových měr byl ziskem banky. Kromě příslušné kurzovní ceny bylo třeba doplatit ještě část úroků z ní od výplaty posledního kuponu.

Hodnocení učebnice

Učebnice nebyla příliš objemná, ke zmiňovaným tématům obsahovala základní úlohy nízké nebo střední náročnosti. Popis postupů řešení příkladů byl kvalitní a podrobný. Její struktura byla přehledná, k rychlé orientaci pomohlo zařazení obsahu, kde vedle stránek bylo uvedeno číslování odstavců. Učebnice nebyla určena ke samostudiu, o čemž svědčí neuvedení výsledků úloh k procvičení.

Kvalitu a oblíbenost podtrhovala její další vydání, jež vycházela ještě za doby první republiky – 1911 (rozsah 80 stran), 1919 (rozsah 80 stran), 1921 (rozsah 80 stran), 1923 (rozsah 84 stran), 1930 (rozsah 92 stran + 12 stran doplňku), 1932 (rozsah 103 stran), 1934 (rozsah 119 stran). Viditelné změny nastaly až u několika posledních vydáních; finanční matematiky se však téměř nedotýkaly.

Ladislav Červenka: *Arithmetika pro III. třídu středních škol*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1911, 104 stran.

Třetí díl analyzované sady učebnic patřil mezi kvalitní a oblíbené. Dočkal se také vysokého počtu vydání a to v letech – 1918 (rozsah 104 stran), 1920 (rozsah 104 stran), 1922 (rozsah 106 stran), 1925 (rozsah 108 stran), 1933 (rozsah 108 stran), 1934 (rozsah 108 stran). Jednotlivá vydání se jen minimálně odlišovala, zahrnovala obsah a postrádala výsledky úloh.

První vydání z roku 1911 bylo schváleno výnosem č. 13 437 c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 11. května 1911. Základními tématy z aritmetiky pro třetí třídu byly číselné výrazy, algebraické výrazy, druhé a třetí mocniny mnohočlenů. Finanční matematiku tato učebnice neobsahovala, nebudeme ji proto podrobovat analýze.

Červenkovy učebnice často uváděly obecné rady studentům, jak počítat a postupovat při řešení matematických problémů. Jejich smysl se během let neztratil. Byly vždy před první kapitolou a byly umístěny samostatně na celou stranu. Uveďme částečné znění některých z nich.

Pište číslice jasně a čitelně, vyhýbejte se tvarům, které by mohly býti čteny různě! … Čtete-li v knihách nebo v novinách čísla, představujte si množství jimi udaná a uvažujte, co všechno by se z oněch čísel dalo vypočísti a jak by se to počítalo. Hleďte počítati hbitě, ale ovšem správně! ([CL2])

Pište výpočty čistě a přehledně na tabuli i na papír! Každý výpočet buď zapsán tak, aby snadno mohl býti přepočten, zkontrolován! … Máte-li rozřešiti nějakou úlohu, uvažte nejprve, co je v ní dáno, potom, co se žádá; … Na konec hleďte přesvědčiti, vyhovuje-li výsledek opravdu podmínkám úlohy. … Zapisujte si často čas, kterého potřebujete k provedení nějakého výkonu početního. … ([CL3])

Rudolf Bendl, Jindřich Muk: ***Arithmetika pro nižší třídy škol středních, díl I.*****,**
1. vydání, Ústřední spolek českých professorů, Praha, 1910, 88 stran.

Jednalo se o první díl trojdílné učebnice aritmetiky pro nižší třídy středních škol. Tyto učebnice byly rozsahem, obsahem, náročností i didaktickou úrovní obdobné učebnicím analyzovaným výše [CL1], [CL2] a [CL3].

Všechny tři díly aritmetiky autorů Rudolda Bendla a Jindřicha Muka se dočkaly tří vydání. Druhé a třetí vyšla v téměř nezměněné podobě v první polovině dvacátých let dvacátého století, tj. v době samostatného Československa.

První vydání všech tří dílů (1910, 1910, 1911) byla sepsána podle učebních osnov platných v roce 1909, tj. zcela odpovídala požadavkům Marchetovy reformy. Měly přehledný obsah, ale nebyl v nich uveden oddíl s výsledky cvičení.

První díl byl věnován početním operacím, práci s zápisy čísel v dekadické soustavě, římským číslicím a okrajově penězům. Nebyla zde zastoupena žádná finanční matematika. V kapitole *O penězích* s rozsahem čtyř stran byl student seznámen s měnami, mincemi a bankovkami. Měl být schopen převádět hodnotu uvedenou v jedné měně na jinou měnu. Bylo mu vyloženo použití různých kovů a slitin při výrobě mincí nebo šperků. Uveďme bez dalšího komentáře dva typické příklady.

8. Zvažte stříbrnou korunu, pětikorunu a zlatník a vypočítejte skutečnou cenu jejich! (1 g ryzího stříbra má cenu 9 h.) ([BM1], str. 76)

17. Kolik činí 495 K 62 h v penězích ruských, italských a amerických? ([BM1], str. 76)

Protože zde nebyla obsažena klasická finanční matematika, nemá smysl hlouběji analyzovat tento díl.

Rudolf Bendl, Jindřich Muk: ***Arithmetika pro nižší třídy škol středních, díl II.*****,**
1. vydání, Ústřední spolek českých professorů, Praha, 1910, 92 stran.

Druhý díl trojdílné sady, se kterou jsme se seznámili výše, obsahoval finanční matematiku v rozsahu 13 stran. Její výklad byl rozdělen do dvou částí. První část byla označena § 19. *Počet úrokový* a dále se dělila podle typu úloh – výpočet úroků, výpočet procent, výpočet jistiny a výpočet doby. Druhá část nebyla označena paragrafem; nesla název *Smíšené příklady počtu úrokového* a byla rozčleněna na tři podčásti – o půjčkách, o směnkách a o dluhopisech.

§ 19. Počet úrokový

Tato část obsahovala základní myšlenky jednoduchého úrokování a měla rozsah osm stran. V úvodu byly zavedeny pojmy *věřitel, dlužník, jistina* a *úrok*. Ty byly použity k popsání logických postupů, např.

(Podmínka:) Z jistiny 100 K zaplatíme za dobu 1 roku úrok 4 K.

(Otázka:) Z jistiny 3690 K zaplatíme za dobu 3 roků úrok x? ([BM2], str. 81)

Pak následovaly čtyři části s řešenými příklady a úlohami na procvičení rozdělených podle toho, k čemu se vztahovala otázka.

A. Výpočet úroků

Pomocí výše zmíněné trojčlenky byl odvozen vzorec obsahující základní proměnné jednoduchého úrokování. Tyto proměnné byly označeny j = jistina, p = procenta (= úroková míra), $ú$ = úroky a t = dobu v letech (zmíněn termín *tempus*).

Řešení bylo postaveno na trojčlence, která byla stěžejním logickým postupem při řešení vztahů úměrných veličin a byl na ni kladen velký důraz. Student se tedy nemusel bát nové látky, neboť zjistil, že lze uplatňovat dříve nabyté vědomosti. Tímto postupem byl odvozen i vzorec pro výpočet úroků, který nebyl nijak zvláštní oproti jiným učebnicím:

$$ú = \frac{j \cdot p \cdot t}{100}.$$

Dále byly tři řešené příklady a 18 úloh na procvičení. Některé úlohy již skrytě obsahovaly složité úrokování, ale student tímto termínem nebyl „strašen“. Posuďme to podle jedné z úloh.

17. Kolik vynese jistina 1200 K (7000 K) při pololetním úrokování na 4 % (4½ %) uložená za rok (1½ roku)? (Úroky se vždy za půl roku a to 30.VI. a 31.XII. přirážejí k jistině.) ([BM2], str. 83)

Z prostředků, které student měl k dispozici, bylo nevyhnutelné počítat každé úrokovací období, tj. v uvedené úloze půl roku, zvlášť a do dalšího postoupit s novou jistinou. Student tak mohl být schopen při menším počtu úrokovacích období pochopit princip úroků z úroku, což bylo nezbytné pro jeho budoucí život.

B. Výpočet procent

S využitím znalostí z oddělení A autoři usoudili, že postačí jeden řešený příklad, který opět využíval trojčlenku. Podívejme se na něj.

Na kolik procent jest uložiti jistinu 3240 K, aby vynesla za 3 roky úroků 486 K?

Postup:

Za 1 rok vynese jistina 3240 K úroků 162 K.

Ježto 1% úrok z jistiny 3240 K je 32,40 K, obdržíme počet procent měřením

162 K : 32,40 K = 5.

([BM2], str. 83)

Po tomto postupu bylo ještě uvedeno použití vzorce $ú = \frac{j \cdot p \cdot t}{100}$, jenž byl upraven na tvar $p = \frac{100 \cdot ú}{t \cdot j}$. Následovalo 16 úloh, při jejichž řešení student pracoval s reálnými situacemi. Zmíněna byla ještě lichva jako nepoměrné obohacování věřitele při půjčování peněz a zákon proti lichvě vydaný dne 28. května 1881.

C. Výpočet jistiny

Tato část byla pojata stejným způsobem jako dvě předešlé. S využitím trojčlenky byl odvozen vzorec pro výpočet jistiny. Vysvětleny byly dva příklady a studentovi bylo předloženo 17 úloh na procvičení. Úlohy nebyly extrémně náročné a obsahovaly popis reálných situací. Posuďme ze znění jedné z nich.

14. Věřitel měl peníze uloženy v záložně na 4½ %. Když záložna o ¼ % úrok snížila, zmenšily se mu úroky o 13 K ročně; kolik K měl věřitel v záložně?

([BM2], str. 86)

D. Výpočet doby

I pro tento typ úloh byl použit stejný postup, tj. trojčlenka a následné odvození vzorce. Tato část obsahovala kromě jednoho řešeného příkladu dalších jedenáct úloh k procvičení.

Smíšené příklady počtu úrokového

Tato kapitola obsahovala popis základních operací při splácení dluhu a s cennými papíry. Měla rozsah pět stran. Byla rozdělena na tři části, které nebyly pojmenovány, ale byly jen očíslovány.

I.

První část neobsahovala žádný teoretický úvod. Nacházelo se v ní osm úloh, které byly zaměřeny na spoření, splácení, nájem apod. Jednalo se pravděpodobně o rozšíření či doplnění předešlé kapitoly. Uveďme jednu úlohu.

6. *Domkář koupil malý statek za 9600 K, kterýžto měl zaplatiti buď hned, aneb do roka s 5pctním úrokem; zaplatil-li třetinu ihned, polovinu za ½ roku a ostatek za 8 měsíců, kolik celkem úroků připlatil?* ([BM2], str. 88)

II.

Tato druhá část byla věnována směnkám. Byla zde teoretická část se základní definicí a charakteristikou směnky i její vyobrazení. Následovalo osm úloh na procvičení. Žádný řešený příklad nebyl uveden.

III.

Třetí závěrečná část objasňovala státní dluhopisy. Po krátkém teoretickém úvodu, v němž byly stylem přijatelným pro věk studenta vysvětleny pojmy *obligace, zástavní list, akciová společnost, dividenda, los, nominální hodnota, kurzovní lístek* a další. Vše bylo uzavřeno osmi úlohami na procvičení. Uveďme na ukázku jednu z nich.

20. *Dne 1. prosince 1909 prodán cenný papír; jakou měl nominální cenu, činila-li náhrada 4pctního úroku od 1. listopadu za kupon 1,75 K?* ([BM2], str. 92)

Hodnocení učebnice

Učebnice nebyla ničím výjimečná vzhledem k učebnicím této doby. Rozsah i témata zcela odpovídaly příslušnému ročníku střední školy. Po didaktické stránce považuji tuto učebnici za velmi kvalitní, neboť využívala základní pravidla výkladu a procvičení. V každé kapitole byl stručný a srozumitelný teoretický úvod, následovaly řešené komentované příklady. Každá část byla zakončena poměrně velkým počtem úloh na procvičení. Samostudiu a vyčerpávající domácí přípravě pouze bránila absence výsledků ke cvičením, což byl jediný zápor, který bych učebnici vytkl.

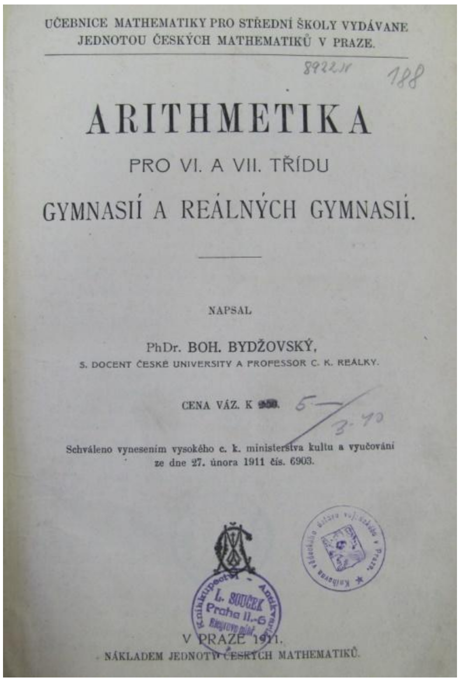
Z pohledu finanční matematiky kniha obsahovala podrobně rozpracované jednoduché úrokování, které bylo a je základním kamenem ve finančnictví. Po jejím prostudování si každý student mohl a měl uvědomit, že při spoření dostane něco navíc a při půjčce zaplatí více, než si půjčil. Osvojení těchto dovedností bylo nezbytné pro každé období.

Rudolf Bendl, Jindřich Muk: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních, díl III.*, 1. vydání, Ústřední spolek českých professorů, Praha, 1911, 138 stran.

Třetí, závěrečný díl analyzované aritmetiky autorů R. Bendla a J. Muka neobsahoval finanční matematiku. Zabývala se číselnými i algebraickými výrazy, operacemi s mnohočleny, druhé a třetí mocnině a odmocnině. Na rozdíl od předešlých dvou dílů však byl schválena výnosem č. 16908 c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 8. června 1911. Vzhledem k absenci finanční matematiky se jí hlouběji zabývat nebudeme.

Velmi podobná sada učebnic aritmetiky pro nižší ročníky středních škol byla sepsána autory Václavem Starým a Josefem Pithardtem. Upravené vydání podle osnov z roku 1909 neslo pořadové číslo deset a vyšlo ve třech dílech v letech 1910 až 1912 ([SP1], [SP2] a [SP3]). Předešlá vydání vycházela jako souborná učebnice pro první až třetí třídu s rozsahem přesahujícím 200 stran již od sedmdesátých let devatenáctého století. Spolu s Václavem Starým byl spoluautorem některých vydání František Machovec či u výše zmíněného desátého Josef Pithardt. Některá vydání byla přímo určena reálkám nebo gymnáziím a reálným gymnáziím či středním školám. Náplň finanční matematiky se od učebnic Rudolfa Bendla a Jindřicha Muka ([BM1]; [BM2]; [BM3]) téměř nelišila. Nebudeme je proto podrobovat samostatné analýze.

Bohumil Bydžovský: *Arithmetika pro VI. a VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1911, 156 stran.


UČEBNICE MATHEMATIKY PRO STŘEDNÍ ŠKOLY VYDÁVANE JEDNOTOU ČESKÝCH MATHEMATIKŮ V PRAZE.

ARITHMETIKA

PRO VI. A VII. TŘÍDU

GYMNASIÍ A REÁLNÝCH GYMNASIÍ.

NAPSAL

PhDr. BOH. BYDŽOVSKÝ,

S. DOCENT ČESKÉ UNIVERSITY A PROFESSOR C. K. REÁLKY.

CENA VÁZ. K 5—

Schváleno vynesením vysokého c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 27. února 1911 čís. 6903.

V PRAZE 1911.

NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ.

Aritmetika autora kvalitních učebnic a sbírek pro různé typy středních škol byla určena studentům vyšších tříd gymnázií a reálných gymnázií. Rozsahem nebyla příliš objemná, přestože ji studenti využívali celé dva roky. Byla schválena vynesením č. 6903 c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 27. února 1911.

Jednalo se o učebnici, která navazovala na *Arithmetiku pro IV. a V. třídu gymnasií a reálných gymnasií* ([B45]) stejného autora, v níž jsem nenalezl žádné zmínky o finanční matematice. Z vypracovaných analýz a učebních osnov lze usuzovat, že jednoduché úrokování bylo námětem druhého ročníku a složité neboli složené úrokování bylo námětem sedmého ročníku středních škol.

Učebnice pro šestou a sedmou třídu byla rozdělena na osm částí a složité úrokování bylo obsahem šesté části. Jednotlivé části byly dále členěny na paragrafy a odstavce.

Obsah učebnice

Část I. Logaritmy (rozsah 22 stran);

Část II. Rovnice druhého stupně o jedné neznámé (rozsah 33 stran);

Část III. Rovnice stupňů vyšších a soustavy rovnic (rozsah 26 stran);

Část IV. Maxima a minima (rozsah 10 stran);

Část V. Řady (rozsah 11 stran);

Část VI. Složité úrokování (rozsah 16 stran);

Část VII. (rozsah 10 stran);

Část VIII. (rozsah 23 stran).

Rozbor části VI. *Složité úrokování*

Tato část byla rozčleněna na šest paragrafů, jež pokrývaly základní témata finanční matematiky. Členění přispívalo k pohodlné a rychlé orientaci studenta. Každý paragraf byl dále rozdělen na odstavce, které nesly stručný a jasný název. Šestá část měla celkem 19 odstavců. Každý odstavec začínal definicemi pojmů s jejich krátkými charakteristikami. Následovaly řešené příklady a úlohy k procvičení.

§ 1. *Vzrůst kapitálu* (3 odstavce – Základní úloha; Úročitel; Mocnitel n lomený)

V tomto paragrafu byl student v prvním odstavci uveden do problematiky úlohou, v níž měl někdo uložen kapitál na roční úrok. Krátce bylo připomenuto jednoduché úrokování a na jednom příkladu uložení kapitálu na více úrokových období bylo provedeno porovnání tohoto typu úrokování s úrokováním složitým. Pro studenta nový typ úrokování byl zaveden přehledným rozpisem vzrůstu kapitálu po jednotlivých úrokovacích období, kde student viděl připisování úroků z úroků. Následovaly dvě úlohy na procvičení.

Ve druhém odstavci byl odvozen vzorec pro výpočet jistiny po n úrokovacích období a zaveden pojem *úročitel*. Vzorec byl nejprve rozepsán jako postupný výpočet jistiny na konci každého období:

$$K_1 = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right);$$

$$K_2 = K_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2;$$

$$K_3 = K_2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3;$$

$$\dots$$

Závorka byla nakonec označena q, aby student poznal, že se výše jistiny chová jako člen geometrické posloupnosti. Mocnina q byla nazvána úročitelem. Pro názornost byl znovu přepočítán příklad z prvního odstavce s porovnáním celoročního a pololetního úrokování. V poznámce bylo uvedeno, že frekvence úrokování může být různá, ale pravidlem bývá úrokování pololetní. Následovalo sedm úloh na procvičení. Uveďme jednu z nich.

7. Jistina 8000 K byla uložena po 5 let na 4 %, pak snížila spořitelna úrokovou míru na 3½ %, kapitál zůstal uložen další 4 léta. Jaký je konečný kapitál (úrokování pololetní)? ([B67], str. 108, výsledek: 11203,84 K)

Poslední odstavec byl zaměřen na výpočet jistiny, která byla uložena na jinou dobu než celočíselný násobek úrokovacího období (např. od 1. října 1901 do 31. března 1909). Na konkrétním příkladu bylo ukázáno spojení jednoduchého a složeného úrokování. K procvičení byly předloženy dvě úlohy.

§ 2. *Úlohy obrácené* (2 odstavce – Diskont; Výpočet procenta, doby)

V prvním odstavci tohoto paragrafu byl řešen příklad s prodejem pohledávky, jež měla být vyrovnána až za čtyři roky. Byl ukázán způsob odúročení finální částky. Použit byl odvozený vzorec složitého úrokování z předešlého paragrafu. Následovaly tři úlohy na procvičení, jež se zabývaly hledáním vstupního kapitálu nebo počáteční hodnoty pohledávky. Uveďme jednu úlohu.

2. Jakou dnešní hodnotu má jistina 12650 K, splatná za 10 let při pololetním úrokování (5 % ročně)? ([B67], str. 109, výsledek: 7719,93 K)

Ve druhém odstavci byl vzorec pro složité úrokování upraven pro výpočet úrokové míry a doby uložení. Obsahoval také jeden podrobně řešený příklad a předloženo bylo pět úloh na procvičení. Student byl veden k využívání tabulek úročitelů a logaritmů. Vyřešme jednu z daných úloh.

4. Za jakou dobu je splatna pohledávka 13788 K, která byla koupena za 10000 K, diskontuje-li se 5½ % (celoročně)? ([B67], str. 110, výsledek: 6 let)

Řešení: Nejprve bylo nutno ze základního vzorce pro složené úrokování

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

vyjádřit počet úrokovacích období

$$n = \frac{\log K_n - \log K}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$$

a pak dosadit dané hodnoty

$$n = \frac{\log 13788 - \log 10000}{\log\left(1 + \frac{5,5}{100}\right)}.$$

Jednotlivé hodnoty dekadických logaritmů byly vyhledány v tabulkách, poté bylo provedeno odčítání a dělení, výsledek byl n = 5,9994. Tato hodnota byla zaokrouhlena na 6 let. Pokud dnes použijeme kalkulačku výsledek s přesností na pět platných číslic je také 5,9994, což hovoří o dostatečné přesnosti logaritmických tabulek (např. [ST], *Kapesní tabulky logarithmické, jakož i jiné důležité tabulky* *pomocné* od Františka Josefa Studničky, jež vycházely od roku 1870, [LT], *Sedmimístné obecné logaritmy* od Františka Macka, které poprvé vyšly roku 1862).

§ 3. *Střádání* (1 odstavec – Vzorec)

Tento paragraf byl věnován pravidelnému střádání. U většiny úloh termíny vkladů byly totožné s termíny připisování úroků. Odvození vzorce bylo postaveno na základě znalosti vlastností geometrické posloupnosti. Při pravidelném ukládání vždy na počátku úrokovacího období trvající *n* úrokovacích období měla rovnice pro konečnou jistinu tvar

$$K = a \cdot q^n + a \cdot q^{n-1} + \cdots + a \cdot q^3 + a \cdot q^2 + a \cdot q,$$

kde *a* byla hodnota vkladu (anuita), $q = 1 + \frac{p}{100}$ při úrokové míře *p* %. Tato rovnice byla převedena na tvar

$$K = a \cdot q \cdot (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1}) = a \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Výraz $q \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$ byl označen Q_n a pojmenován *střadatel*, jehož konkrétní hodnota se opět vyhledávala v tabulkách.

Byly uvedeny a podrobně vyřešeny tři příklady. V poznámce byla vyzdvihnuta role sedmimístných logaritmických tabulek, které se v té době používaly v praxi. Následovalo pět úloh na procvičení. Bez dalšího komentáře, neboť se jednalo jen o využití odvozeného vzorce, uveďme jednu z nich.

4. Po 30letém obchodu měl obchodník nastřádáno 250 000 K. Kolik průměrně ročně uložil? (4 %, úr. celoroční) ([B67], str. 112, výsledek: 4286 K)

§ 4. *Důchod* (3 odstavce – Zásobitel; Důchod stálý; Státní renta)

V tomto paragrafu byla nejprve naznačena myšlenka zakládací jistiny pro důchod. V prvním odstavci byl odvozen vzorec pracující s touto jistinou a diskontovanými výplatami k okamžiku založení. Podívejme se na odvození.

$$K = \frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \cdots + \frac{r}{q^n} = \frac{r}{q^n} \cdot (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = r \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

V uvedeném vzorci bylo *K* hodnota zakládací jistiny, *r* výplata důchodu, $q = 1 + \frac{p}{100}$ při úrokové míře *p* % a výraz $\frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$ byl označen R_n a nazván *zásobitelem*, jehož konkrétní hodnota byla vyhledávána v tabulkách.

Bez řešeného příkladu bylo předloženo sedm úloh na procvičení. Vyřešme jednu společně.

4. Dítě, jež osiřelo v 10. roce, zdědilo po rodičích 10000 K. Kolik smí (průměrně) ročně utratiti, aby vystačilo do 25. roku? (4 %, celoroční)
([B67], str. 113, výsledek: 899,41 K)

Řešení: Důchod byl plánován jako dočasný a bezprostřední, tzn. ihned mohl být využit výše odvozený vzorec. Porovnejme výpočet na kalkulačce s využitím zásobitele.

Výpočet na kalkulačce:

$$r = K \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n-1} = 10000 \cdot 1{,}04^{15} \cdot \frac{1{,}04-1}{1{,}04^{15}-1} = 899{,}41 \text{ K.}$$

Výpočet s vyhledaným zásobitelem (např. v [PA]):

$$r = \frac{K}{R_n} = \frac{10000}{11{,}118387} = 899{,}41 \text{ K.}$$

Opět jsme se přesvědčili, že používané tabulky měly dostatečnou přesnost.

Druhý odstavec se zabýval stálým důchodem; byla představena hlavní myšlenka vyplácení pouze úroků plynoucích z vkladu. V předložené úloze se měl porovnat důchod stálý s důchodem dočasným určeným k výplatám po tři různé doby – 10 let, 50 let a 100 let. Při úrokové míře 4 % se z částky 10000 K důchod stálý od důchodu stoletého lišil pouze 8,09 K.

Ve třetím odstavci byl představen jeden typ státních dluhopisů – *renta*. To byl cenný papír, na který se stát zavázal vyplácet úroky z nominální hodnoty na předložené kupony. Stát nebyl povinen odkupovat tyto cenné papíry, ale šlo s nimi obchodovat na burze či používat je jako peníze podle kurzovního lístku. Stát mohl umořit tento dluh u občanů odkoupením na burze. Roční úroková míra se pohybovala okolo 4 %. K procvičení byly předloženy tři úlohy.

§ 5. *Úmor* (5 odstavců – Umořování dluhu; Úlohy obrácené; Plán umořovací; Procento umořovací; Částečné dluhopisy (obligace))

Samostatný paragraf byl věnován problematice splácení dluhů. Z textu bylo patrno, že si autor plně uvědomoval potřebu znalosti tohoto tématu.

Základní myšlenka umořování dluhu v prvním odstavci byla srovnávána s výplatou důchodu, který považujeme za dluh peněžního ústavu vůči nám. Vzorec odvozený pro výpočet splátky byl vyjádřen ze vztahu pro zakládací jistinu dočasného důchodu, tedy

$$r = \frac{K}{R_n} = \mathrm{K} \cdot \frac{1}{R_n} = \mathrm{K} \cdot U_n,$$

kde převrácená hodnota zásobitele byla označena U_n a nazvána *umořovatel*. Hodnota umořovatele byla také vyhledávána v tabulkách.

Bez řešeného příkladu byly předloženy tři úlohy na procvičení, jež při znalosti problematiky důchodu nečinily podle mého názoru žádné těžkosti.

Druhý odstavec byl zaměřen na výpočet výše dluhu nebo doby jeho splatnosti, k čemuž byl využíván výše uvedený vzorec. Byl zde podrobně vyřešen jeden příklad a dalších pět úloh bylo poskytnuto k procvičení.

Ve třetím odstavci byl student seznámen se sestavováním umořovacích plánů. V řešeném příkladě byla uvedena výše splátky a nebyl znám horizont umoření. Následovaly dvě úlohy na procvičení, z nichž první žádala ověření umořovacího plánu z řešeného příkladu a druhá kladla za úkol sestavení umořovacího plánu při dané výši dluhu, doby splacení a úrokové míře. Uveďme alespoň částečně základní myšlenku umořovacího plánu ze zadaného a vyřešeného příkladu.

Příklad: Obec si vypůjčila 1 000 000 na 4 % celoročních úroků;uplácí annuitami po 50 000 K. Jest sestaviti umořovací plán. ([B67], str. 116)

Rok	Dluh počátkem roku	Úrok	Úmor	Splátka
1.	1 000 000	40 000	10 000	50 000
2.	990 000	39 600	10 400	50 000
3.	979 600	39 184	10 816	50 000
…	…	…	…	…
40.	95 908,49	3 836,34	46 163,66	50 000
41.	49 744,83	1 989,79	48 010,21	50 000
42.	1 734,62	69,38	1 734,62	1 804

Odstavec zaměřený na vyhledávání umořovacího procenta řešil otázky, kolika procenty z původního dluhu byl dluh umořován. Hledal se tedy podíl prvního úmoru a výše dluhu. Byl zde odvozen potřebný vzorec a předloženy dvě úlohy na procvičení. Pro názornost vyřešme jedno zadání z první úlohy.

1. Dluh byl umořen při 4 % a celoročním úrokování za 30 let. Kolika procenty byl umořován? ([B67], str. 118, výsledek: 1,783 %)

Řešení: Nejprve bylo zapotřebí nalézt, jaká část dluhu byla jedna splátka. Použili jsme základní vzorec

$$r = K \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1},$$

z něhož jsme vyjádřili poměr splátky ku dluhu a při využití daných údajů našli jeho hodnotu

$$\frac{r}{K} = q^n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} = 1{,}04^{30} \cdot \frac{1{,}04 - 1}{1{,}04^{30} - 1} = 0{,}05783 = 5{,}783\ \%.$$

Jelikož jsme měli zadáno, že dluh byl úročen 4 %, nalezli jsme rozdíl 1,783 %, který byl nazýván *umořovacím procentem*.

Poslední odstavec pátého paragrafu popisoval nejdůležitější typy obligací (nesplatitelné = státní renta, splatitelné = slosovatelné, premiové = losy, prioritní = akcie). Spolu s jejich charakteristikami byly předloženy dvě úlohy s popisem půjčky pomocí obligací. Potřebný matematický aparát a vzorce byly vyloženy v předešlých odstavcích.

§ 6. *Ústavy peněžní* (5 odstavců – Úvěr; Spořitelny; Záložny; Banky; Poznámky)

V tomto paragrafu se student dozvěděl o nezbytnosti existence možnosti úvěru jako činitele v podnikání. Seznámil se s typy finančních ústavů a dostal jejich základní popis. Také například poznal, že úroková míra pro vklady kolísala kolem 4 %, že úroková míra pro půjčky nebyla zákonem nijak omezena.

Hodnocení učebnice

Jednalo se o velmi kvalitní učebnici matematiky, v níž studenti mohli také nalézt množství praktických rad z reálného života. Matematika byla použita na řešení právě těchto situací, se kterými se v budoucnosti mohl student setkat. Úlohy byly voleny od základních až po velmi náročné. Členění jednotlivých kapitol bylo přehledné a logické. Autor uplatnil své vynikající odborné i didaktické schopnosti. Každá kapitola obsahovala teoretický úvod s odvozením příslušných vzorců. Pokud autor uznal za vhodné, následovaly řešené příklady. Celek byl uzavřen dostatečným množstvím úloh určených k procvičení. U každé úlohy, kde se počítalo s konkrétními čísly, byly uvedeny v hranatých závorkách výsledky. Toto zvyšovalo šíři využití učebnice, neboť při domácí přípravě měl student možnost kontroly a nejinak tomu bylo i při samostudiu například během nemoci.

Bohumil Bydžovský: *Arithmetika pro V. až VII. třídu škol reálných*, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1911, 196 stran.

Obsah a náplň této učebnice se téměř nelišily od učebnice [B67] analyzované výše. Kapitola *Složité úrokování*, v níž byla vyložena finanční matematika byla sedmou částí a zcela se shodovala s šestou částí učebnice [B67].

Bohumil Bydžovský, Jan Vojtěch: *Mathematika pro nejvyšší třídu reálek*, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1912, 176 stran.

Tato učebnice byla určena nejvyšší, tedy osmé třídě reálek. Spolu s Bohumilem Bydžovským ji napsal Jan Vojtěch, který se soustředil na zpracování geometrie.

Obsah učebnice

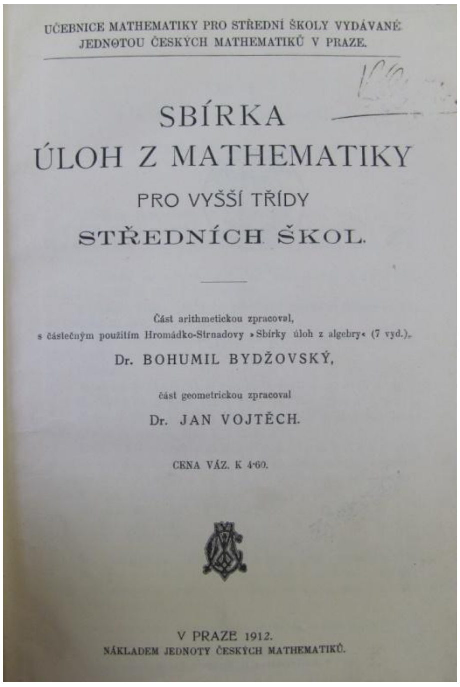
Část I. *Přehled věcný*.
(Číslo, Rovnice, Řady, Funkce, Transformace, Konstrukce, Měření, Souřadnice)
Část II. *Myšlení mathematické*.
(Úvahy logické, Základy mathematiky, Mathematická věda a její význam)
Část III. *Náčrtek historický*.
(Mathematika starověká, Mathematika novodobá)

Učebnice byla zaměřena na ucelení znalostí studentů získaných během předešlých let studia. Neobsahovala kapitolu finanční matematiky, a proto ji nebudeme podrobovat samostatné analýze.

Bohumil Bydžovský, Jan Vojtěch:

Sbírka úloh z mathematiky pro vyšší třídy středních škol,

1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1912, 332 stran.


UČEBNICE MATHEMATIKY PRO STŘEDNÍ ŠKOLY VYDÁVANÉ JEDNOTOU ČESKÝCH MATHEMATIKŮ V PRAZE.

SBÍRKA ÚLOH Z MATHEMATIKY PRO VYŠŠÍ TŘÍDY STŘEDNÍCH ŠKOL.

Část arithmetickou zpracoval, s částečným použitím Hromádko-Strnadovy »Sbírky úloh z algebry« (7 vyd.), Dr. BOHUMIL BYDŽOVSKÝ,

část geometrickou zpracoval Dr. JAN VOJTĚCH.

CENA VÁZ. K 4·60.

V PRAZE 1912. NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ.

Jednalo se o velmi rozsáhlou sbírku úloh využívanou na všech typech středních škol. Ve sbírce si témata rozdělili stejní autoři jako u učebnice matematiky [BV] zmíněné výše. Obsah byl rozdělen do třech základních dílů:

Díl I. Úlohy z arithmetiky (rozsah 169 stran, autorem B. Bydžovský);

Díl II. Úlohy z geometrie (rozsah 107 stran, autorem J. Vojtěch);

Díl III. Výsledky (rozsah 54 stran).

Jednotlivé díly byly rozděleny na tematické celky. První díl byl rozdělen na jedenáct částí, z nichž jsem se zaměřil na devátou.

Část IX. *Řady* (rozsah 13 stran)

§ 41. *Řady arithmetické* (2 strany);

§ 42. *Řady geometrické* (3 strany);

§ 43. *Jiné řady atd.* (1 strana);

§ 44. *Smíšené úlohy* (2 strany);

§ 45. *Složité úrokování* (5 stran).

Analýze podrobíme poslední uvedený paragraf, jenž odkazoval na příslušné odstavce učebnic aritmetiky stejného autora: pro [B67] – Odst. 99. – 117. G. (gymnázia) a pro [B57] – Odst. 144. – 162. R. (reálné školy). Tím usnadňoval práci studenta i učitele při vyhledávání či kontrole postupů.

45. paragraf obsahoval 55 úloh, které byly vodorovnými čarami rozděleny podle témat na čtyři skupiny. Uveďme bez komentáře vždy jednu úlohu z každé skupiny.

První skupina (17 úloh) – uložení jistiny na delší dobu a jednorázové splacení dluhu.

11. Jak dlouho byl uložen kapitál 6000 K, vzrostl-li při celoročním 4% úrokování na 11 000 K? ([BVS], str. 140, výsledek: 15 let 162 dní)

Druhá skupina (13 úloh) – pravidelné střádání a dočasný důchod.

24. Osoba 30-letá uložila 10 000 K na 3 % (celor.). Počínajíc svým 60. rokem, brala z toho roční důchod 1200 K (vždy počátkem roku). Zemřela pak v 75. letech. Kolik zanechala svým dědicům? ([BVS], str. 141, výsledek: 14 827,70 K)

Třetí skupina (11 úloh) – umořování dluhu.

38. Podnikatel staveb vypůjčil si ze záložny 60 000 K na 5 %. Splácel-li koncem každého roku 5000 K, kolik byl ještě dlužen na počátku 16. roku?
([BVS], str. 143, výsledek: 16 843 K)

Čtvrtá skupina (14 úloh) – dluhopisy.

49. V r. 1897 byla vydána t. zv. investiční renta rak. nesplatitelná 3½ % (v obnosu 116 901 mil. K) za takový kurs, že skutečné úrokování bylo 3,804 %. Jaký byl tento kurs? ([BVS], str. 144, výsledek: 92)

Hodnocení sbírky

Sbírka byla vhodným doplňkovým materiálem k výše analyzovaným nebo jen zmíněným učebnicím [BV], [B67] a [B57]. Její přínos jistě ocenil každý učitel např. při hledání dalších vhodných úloh k procvičení či do prověrek. Samostatný oddíl výsledků pomáhal při kontrole učitelům i žákům. Množství úloh, jež přesahovalo jeden tisíc, bylo dostačující také pro přípravu k maturitním zkouškám. Kvality této sbírky byly podtrženy dalšími vydáními v době první republiky. Druhé a třetí vydání z roku 1920, respektive 1924 byla téměř identická. Čtvrté vydání z roku 1936 bylo zcela přepracováno; autorsky se na něm podíleli Bohumil Bydžovský, Stanislav Teplý a František Vyčichlo. Obsah tohoto vydání byl rozčleněn po jednotlivých ročnících a tím zpřehledněn.

2.3 Učebnice pro učitelské ústavy a vyšší obchodní školy

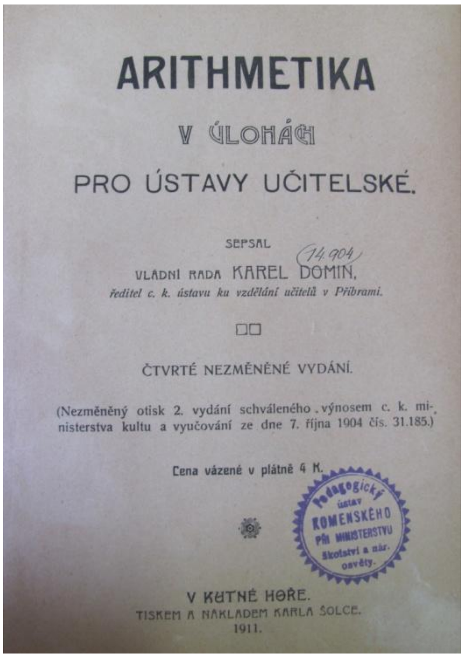
Nutnost kvalifikovaných učitelů nejen na středním, vyšším a vysokém školství vedla ke vzniku učitelských ústavů, které vznikaly na našem území od roku 1869 a zaměřovaly se na výchovu učitelů obecných a měšťanských škol. Jednalo se o tříletou později čtyřletou střední školu, velmi často měly tyto školy k dispozici penzionát pro ubytování posluchačů ze vzdálenějších míst. Například v roce 1904 byl tento typ ústavu založen v Kladně a na západ od Kladna byla obdobná škola jen v Plzni. Ústavy byly postupně rozšířeny o cvičné školy pro praxi posluchačů.

Vyšší obchodní školy zahájily svou existenci z jiného impulsu. Ve druhé polovině devatenáctého století vznikaly odborné střední školy v důsledku požadavků průmyslu. Nás bude zajímat, že mezi ně patřily obchodní školy a obchodní akademie. Původně byly obchodní školy dvouleté a pouze chlapecké. S postupným technickým a ekonomickým pokrokem a vývojem byly obchodní školy tříleté a také dívčí (smíšené třídy byly na těchto školách až na počátku třicátých let dvacátého století). Tyto obchodní školy nesly název vyšší obchodní škola a později obchodní akademie (např. tříletá Vyšší škola obchodní v Plzni se roku 1896 přejmenovala na Obchodní akademii královského města Plzně a od roku 1903 byla čtyřletá). Zavedení povinných maturit nastalo až mnohem později na počátku třicátých let dvacátého století.

Podrobme nyní analýze několik učebnic pro tyto školy.

Karel Domin: *Arithmetika v úlohách pro ústavy učitelské,*
4. nezměněné vydání, tisk a náklad Karel Šolc, Kutná Hora, 1911, 319 stran.

Tato učebnice poprvé vyšla v roce 1899 a během prvních čtyř vydání se neměnila. Námi analyzované čtvrté vydání bylo nezměněnou kopií druhého vydání, které bylo schváleno výnosem č. 31 185 c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 7. října 1904. Kniha byla kvalitně tematicky rozvržena a její úlohy zcela pokrývaly potřebnou látku. Samostatnou částí byl oddíl s výsledky cvičení, který nebyl vždy součástí učebnic, jak jsme se mohli přesvědčit u jiných publikací. Kniha byla rozčleněna na devět částí, z nichž některé se dělily na podčásti a celkem 67 paragrafů.


ARITHMETIKA
V ÚLOHÁCH
PRO ÚSTAVY UČITELSKÉ.
SEPSAL
VLÁDNÍ RADA KAREL DOMIN,
ředitel c. k. ústavu ku vzdělání učitelů v Příbrami.
ČTVRTÉ NEZMĚNĚNÉ VYDÁNÍ.
(Nezměněný otisk 2. vydání schváleného výnosem c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 7. října 1904 čís. 31.185.)
Cena vázené v plátně 4 K.
V KUTNÉ HOŘE.
TISKEM A NÁKLADEM KARLA ŠOLCE.
1911.

Autor Karel Domin (1851–1922), jenž byl od roku profesorem učitelského ústavu v Kutné Hoře, se stal v roce 1892 ředitelem učitelského ústavu v Příbrami a zabýval se převážně geometrií. V současnosti je znám spíše jeho syn Karel – profesor botaniky, jenž byl v letech 1922–23 děkanem Přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy a v letech 1933–34 rektorem Univerzity Karlovy.

Obsah učebnice

Část I: Základní výkony početní s čísly zvláštními a obecnými (29 stran);
Část II: Dělitelnost čísel (7 stran);
Část III: Počítání se zlomky (54 stran);
Část IV: Poměry a srovnalosti (úměry) (27 stran);
Část V: Mocniny a odmocniny (41 stran);
Část VI: Počty občanské a kupecké (64 stran);
Část VII: Rovnice o několika neznámých (23 stran);
Část VIII: Úlohy k opakování (29 stran);
Část IX: Základy jednoduchého účetnictví (12 stran).

Z hlediska finanční matematiky mě zajímala šestá část, jež byla rozdělena na sedm podčástí a paragrafů číslo 47 až 61:

I. Počet procentový;
II. Počet úrokový;
III. Počet lhůtový;
IV. Počet podílný (spolkový);
V. Počet průměrný a směšovací;
VI. Počet řetězový;
VII. Počet mincovní, směnečný a počítání cenných papírů.

Pouze podčásti II. a III. obsahovaly finanční matematiku; jednalo se o čtyři paragrafy o rozsahu 17 stran.

§ 51. Jednoduchý počet úrokový

Tento paragraf obsahoval celkem 97 úloh od nejjednodušších k poměrně náročným.

Ukažme a vyřešme z toho množství dvě úlohy.

14) Který úrok zapraviti jest z 960 K dne 7. května na 4¾ % vypůjčených a dne 5. srpna splacených? ([UD], str. 178)

Řešení: Nejprve je nutno vypočítat přesný počet dní trvání půjčky.

Květen: 31 – 7 dní = 24 dní, červen: 30 dní (celý),

červenec: 31 dní (celý) a srpen: 5 dní.

Celkem tedy: 24 + 30 + 31 + 5 dní = 90 dní. Přestože počítáme skutečný počet dní, celkový počet dní finančního roku se používal a používá 360. Hodnotu úroku tedy vypočítáme:

$$ú = \frac{90}{360} \cdot \frac{4\frac{3}{4}}{100} \cdot 960\ K = 11{,}40\ K.$$

Dne 5. srpna je dlužník povinen k vypůjčené částce doplatit ještě úrok 11,40 K.

96) Ze dvou obnosů, jež činily dohromady 18000 K, uložen jest jeden na 4¼ %, druhý na 4 %. Kdyby úrokoval se druhý % prvého a tento % druhého, byl by roční výnos o 3 K větší. Které jsou to obnosy? ([UD], str. 183)

Řešení: Označíme-li první obnos *x*, druhý bude (18000 – *x*). Nyní zapíšeme rozdílové úroky, tj. jen ¼ % z příslušné částky, do rovnice:

$$\frac{1/4}{100} \cdot x = \frac{1/4}{100} \cdot (18000 - x) - 3,$$

Vynásobíme ji číslem 400 a obdržíme rovnici

$$x = 1 \cdot (18000 - x) - 1200,$$

po roznásobení závorky a převedení neznámé na jednu stranu dostáváme rovnici

$$2x = 18000 - 1200,$$

$$x = 8400.$$

Výsledek interpretujeme, že na vyšší úrok byla uložena částka 8400 K a na nižší zbytek do 18000 K, tj. 9600 K.

§ 52. Počet diskontový

Tento paragraf obsahoval celkem 26 úloh různé náročnosti.

Vyberme vyřešme jednu úlohu tohoto tématu a vyřešme ji.

15) Obnos splatný po 2 letech 6 měsících zapraven byl hotově $^8/_9$ své hodnoty. Kolika procentní bylo diskonto, jež počítalo se a) na sto, b) ze sta? ([UD], str. 185)

Řešení: Nejprve je třeba pochopit, co znamená na sto a ze sta. V obou případech se hovoří o procentech. Na sto procent znamená, že po uběhnutí doby 2,5 let budeme mít 100 %. Ze sta procent znamená, že vycházíme ze 100 %. Názorněji to uvidíme v rovnicích.

Na sto:

$$(zbylá\ hodnota) \cdot \left(1 + \frac{p}{100} \cdot (doba)\right) = 1$$

tj. diskontní hodnotu úročíme na jmenovitou hodnotu, která je 100 %.

Se zadanými hodnotami:

$$\left(\frac{8}{9}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)\right) = 1,$$

z čehož získáváme procentní diskonto p = 5 %.

Ze sta:

$$1 \cdot \left(1 - \frac{p}{100} \cdot (doba)\right) = (zbylá\ hodnota),$$

tj. 100 % postupně snižujeme na diskontní hodnotu.

Se zadanými hodnotami:

$$1 \cdot \left(1 - \frac{p}{100} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)\right) = \left(\frac{8}{9}\right)$$

z čehož získáváme procentní diskonto $p = 4\frac{4}{9}$ %.

§ 53. Složité úrokování

Přestože považuji tuto část finanční matematiky spolu s jednoduchým úrokováním za stěžejní, obsahoval tento paragraf pouze 28 úloh a dvě strany byly věnovány tabulkám – *tabulka úročitelů* a *tabulka odúročitelů* ([UD], str. 188 a 189).

Ne všechny úlohy se věnovaly finanční matematice, dvě z nich pouze využívaly vlastností složitého úrokování známého z geometrických posloupností pro určení počtu obyvatel města či objemu dřeva v lese.

Pro větší názornost ocitujme druhý příklad bez dalšího komentáře.

13) Les má nyní asi 5600 m^3 *dříví; kolik dříví bude míti za 15 let, přibývá-li ho ročně průměrně 2 %?* ([UD], str. 187, výsledek: 7537 m^3)

Ze zbylých dvaceti šesti úloh bylo šest teoretických nebo obecných bez konkrétních hodnot, ke kterým nebyly v závěrečné části knihy uvedeny výsledky.

Ukažme jeden z nich.

5) Ze vzorce $k = j\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = j \cdot ú$ *vyvoď vzorec pro počítání jistiny začáteční, dána-li jest jistina konečná?* ([UD], str. 186)

Celkem dvacet úloh bylo věnováno klasickým finančním otázkám při složitém úrokování. V několika úlohách bylo studentovi předloženo porovnání jednoduchého úrokování s úrokováním složitým s různou frekvencí připisování úroků. Například:

23) Nač vzroste 5420 K při 5% úrokování a) celoročním, b) pololetním za 15 let a který by byl součet jednoduchých 5% úroků za 15 let? ([UD], str. 187)

Řešení:

Řešíme-li úlohu dnešními prostředky bez použití úročitelů, postup bude následující:

Celoroční úrokování: $k = 5420\left(1 + \frac{5}{100}\right)^{15} = 11267{,}79$ K.

Pololetní úrokování: $k = 5420\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100}\right)^{30} = 11368{,}81$ K.

Jednoduché úrokování: $k = 5420\left(1 + 15 \cdot \frac{5}{100}\right) = 9485$ K.

Studenti však byli nuceni při složitém úrokování použít pouze tabulky úročitelů, tj. vyhledat příslušnou hodnotu činitele podle počtu úrokovacích období a úrokové míry:

Celoroční úrokování: 15 úrokovacích období a úroková míra 5 % vedlo k nalezení činitele 2,078928. Hodnota konečné jistiny s přesností na haléře:

$$k = 5420 \cdot 2{,}078928 = 11267{,}79 \text{ K}.$$

Pololetní úrokování: 30 úrokovacích období a úroková míra 2,5 % vedlo k nalezení činitele 2,097568. Hodnota konečné jistiny s přesností na haléře:

$$k = 5420 \cdot 2{,}097568 = 11368{,}81 \text{ K}.$$

Je vidět, že sedm platných číslic byla pro tabulky dostatečná přesnost. Poznamenejme, že výsledek při jednoduchém úrokování nebyl uveden ve výsledcích.

V množství úloh kladl autor důraz na problematiku rozhodování, kdy studentovi byly předloženy nabídky a on musel rozhodnout, která z nich bude výhodnější. Zmiňme typický příklad o rozhodování.

26) Za dům nabízí A 13000 K hotově a 4200 K po 2 letech, B 12000 K hotově, 2000 K po roce a 3000 K po 2 letech. Která nabídka jest pro prodejce výhodnější, počítají-li se 5% úroky z úroků celoročně? ([UD], str. 190)

Řešení: Úlohu studenti řešili pomocí výpočtu hodnoty jistin ke stejnému okamžiku. V knize byli nabádáni k výpočtu nynější hodnoty. Ke stejné odpovědi by se dostali i při výpočtu hodnoty za dva roky, což byl nejzazší termín splátky podle zadání.

Porovnejme obě možnosti:

Nynější A: $j = 13000 + 4200 \cdot (1{,}05)^{-2} = 16809{,}52$ K

(ve výsledcích 16804,4 K).

Nynější B: $j = 12000 + 2000 \cdot (1{,}05)^{-1} + 3000 \cdot (1{,}05)^{-2} = 16625{,}85$ K

(ve výsledcích 16625,84 K).

Budoucí (za 2 roky) A: $j = 13000 \cdot (1{,}05)^{2} + 4200 = 18532{,}50$ K.

Budoucí B: $j = 12000 \cdot (1{,}05)^{2} + 2000 \cdot (1{,}05)^{1} + 3000 = 18330$ K.

Obě možnosti dávají jednoznačnou odpověď, že výhodnější je nabídka A. Chyba výsledku nynější hodnoty A, která přesahovala 5 K, nemohla být způsobena použitím tabulky odúročitelů, neboť to by vedlo ke stejnému výsledku:

$$j = 13000 + 4200 \cdot 0{,}907029 = 16809{,}52 \text{ K}.$$

Neobjevil jsem žádnou jinou alternativu pro tuto chybu kromě numerické či tiskové.

§ 54. Počet lhůtový

Tento paragraf obsahoval čtyřicet úloh, v nichž byly porovnávány úroky ze splátek splacených v různých lhůtách. Z předešlých témat bylo nutné bezchybně ovládat pouze jednoduché úrokování. Ukažme základní myšlenku na konkrétním příkladu.

32) Dluh 1500 K splatný byl ve 3 lhůtách, a to: 200 K po 3, 500 K po 6 a ostatek po 13 měsících. Dlužník však zaplatil první splátku obnosem 1000 K za 8 měsíců; kdy zaplatiti měl ostatek? ([UD], str. 193)

Řešení: Podstatou bylo, jak jsem již zmiňoval, porovnání úroků plánovaného a uskutečněného splacení dluhu. Rozepišme přehledně do tabulky splátky plánované i uskutečněné a z nich plynoucí úroky porovnejme s úroky za 1 měsíc při stejné úrokové míře.

Plán	Stejná hodnota úroku za 1 měsíc	Uskutečněno	Stejná hodnota úroku za 1 měsíc
200 K, 3 měsíce	600 K	1000 K, 8 měsíců	8000 K
500 K, 6 měsíců	3000 K		
Zbytek, 13 měsíců			
Součet musí být: 1500 K	Součet: 14000 K	Součet musí být: 1500 K	Součet musí být: 14000 K
Zbytek: 800 K	10400 K	Chybí: 500 K → 12 měsíců	Chybí: 6000 K

Pro zajímavost uveďme bez řešení a komentáře ještě jednu úlohu tohoto paragrafu.

40) Kdosi koupil les za 9400 K s podmínkou, že zapraví kupní cenu ve 3 splátkách, z nichž je první ke druhé v poměru 3 : 5 a druhá k třetí v poměru 4 : 3. První splátku učiniti má po 2½, druhou po 6, třetí po 9 měsících. Polovičku první splátky složil však po 2 měsících a 2200 K po 3 měsících. Kdy zapraviti má ostatek?

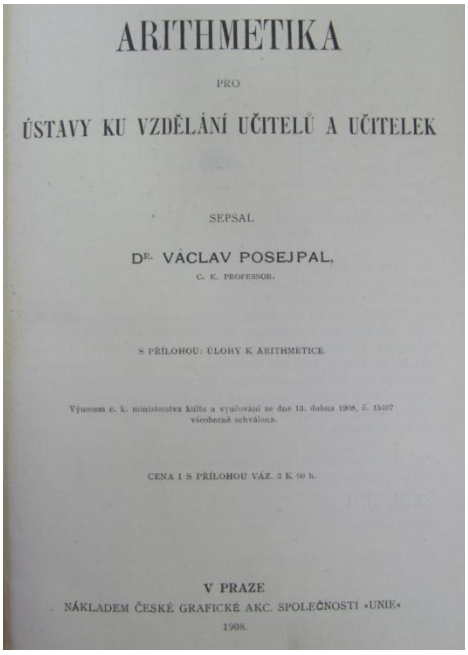
([UD], str. 194, výsledek: 8 měsíců)

Hodnocení sbírky

Jednalo se v pravém slova smyslu o sbírku, jelikož zde nebyla žádná teorie, kterou občas nahrazovaly pouze velmi stručné návody k úlohám. Nenašel jsem zde ani jednu řešenou úlohu, a proto považuji tuto sbírku pouze jako doplňkový materiál ke studiu. Tematické rozvržení a náročnost úloh byla podle mého názoru volena velmi citlivě a kvalitně. Oceňuji publikaci jako kvalitní soubor úloh, které mohl učitel použít do výuky a student k procvičení, protože obsahovala oddíl výsledků. Přestože se mi podařilo objevit chybu ve výsledcích, což se stává velmi často i dnešních učebnicích a sbírkách, v žádném případě bych ji nezavrhoval. Věcí každého učitele bylo a doufám i je, že si novou učebnici či sbírku sám přepočítá a opraví.

Šesté přepracované vydání z roku 1923 bylo značně rozšířeno právě o chybějící teoretické části jednotlivých kapitol, čímž kniha získala na univerzálnosti a byla vhodná i k samostudiu.

Václav Posejpal: *Arithmetika pro ústavy ku vzdělání učitelů a učitelek*, s přílohou: *Úlohy k arithmetice*, 1. vydání, Česká grafická akciová společnost UNIE, Praha, 1908, 206 stran (+ 75 stran přílohy).


ARITHMETIKA

PRO

ÚSTAVY KU VZDĚLÁNÍ UČITELŮ A UČITELEK

SEPSAL

DR. VÁCLAV POSEJPAL,

C. K. PROFESSOR.

S PŘÍLOHOU: ÚLOHY K ARITHMETICE.

Výnosem c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 13. dubna 1908, č. 15407 všeobecně schválena.

CENA I S PŘÍLOHOU VÁZ. 3 K 90 h.

V PRAZE

NÁKLADEM ČESKÉ GRAFICKÉ AKC. SPOLEČNOSTI »UNIE«

1908.

Autor Václav Posejpal (1874–1935) byl od roku 1921 řádným profesorem experimentální fyziky na Přírodovědecké fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Je znám především díky své práci s tehdy známými nejmenšími částicemi hmoty a svébytnou teorií světového éteru složeného nehmotnými neutrony. Byl aktivní ve vědeckých společnostech – např. Jednota československých matematiků a fyziků, Královská česká společnost nauk. Byl také členem Mezinárodního výboru pro míry a váhy v Sèvres a inicioval vznik československého úřadu pro míry a váhy. Na počátku své vědecké kariéry se zabýval zefektivněním výuky fyziky na středních školách s důrazem na aplikace matematiky, což ho vedlo také k sepsání této učebnice.

Jednalo se o učebnici aritmetiky, jejíž základní část (206 stran) byla koncipována jako výkladová doplněná řešenými úlohami. Příloha, která obsahovala úlohy bohužel bez výsledků, byla vytištěna jako brožura samostatně vložená do desek učebnice. *Arithmetika* byla všeobecně schválena výnosem č. 15407 c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 13. dubna 1908. Vedle všeobecného schválení hovořila o její kvalitě další vydání z let 1916 a 1922.

Knihu tvořilo deset částí, které se dále dělily na paragrafy (72), z nichž některé se z důvodu přehlednosti dále členily na odstavce. Sedmá část nazvaná *Arithmetika v životě občanském a kupeckém* (48 stran) byla rozčleněna na pět podkapitol:

I. Počet spolkový, směšovací a řetězový (8 stran);
II. Počet procentový (8 stran);
III. Počet úrokový (14 stran);
IV. mincích a počtu mincovním (7 stran);
V. směnkách a cenných papírech (11 stran).

Analýzu jsem zaměřil na třetí podkapitolu s názvem *Počet úrokový*. Tato část byla rozdělena na čtyři paragrafy s pořadovými čísly 54 až 57. Každý paragraf měl výkladový úvod, který uváděl praktické využití probírané látky a zaváděl nové termíny. Pak následovaly řešené úlohy s komentářem; přitom u většiny bylo předvedeno řešení úsudkem i pomocí vzorce.

§ 54. O jednoduchém počtu úrokovém

V této části s rozsahem čtyř stran byl student seznámen s nezbytnými pojmy – *nájemce, nájemné, jistina, kapitál, věřitel, dlužník, úrok, půjčka* … Některé z těchto pojmů byly označeny jako základní veličiny, aby byl pochopitelný vzorec pro jednoduché úrokování, tj. *jistina* byla označena ***J***, *procento* ***p*** (roční úroková míra), počet roků ***r*** a *jednoduchý úrok* za tuto dobu ***u***. Vzniklý vzorec byl odvozen a pro přehlednost uvedeny všechny jeho nezbytné varianty.

$$u = \frac{J\cdot p\cdot r}{100};\ J = \frac{100\cdot u}{p\cdot r};\ p = \frac{100\cdot u}{J\cdot r};\ r = \frac{100\cdot u}{J\cdot p}.$$

Student byl upozorněn, že vedle těchto vzorců lze používat také složenou trojčlenku. Během výkladu byl stále nabádán k přemýšlení nahlas. Rady byly například tyto:

Řešíce příklady, mluvíme nejlépe takto:

α) Kolikrát jest větší úrok (jistina), tolikrát musí být větší jistina (úrok) při témž procentu a téže době.

β) Kolikrát jest větší úrok (doba), tolikrát musí býti větší doba (úrok) při témž procentu a téže době. ([UP], str. 147)

Po výkladu následovalo pět úloh řešených úsudkem i pomocí vzorce. Pracovalo se v nich s celými roky i pouze se dny a měsíci.

Uveďme znění nejnáročnější úlohy:

Jak velký jest 5% úrok ze 420 K za 3 roky, 5 měsíců a 10 dní?

([UP], str. 149, výsledek: 72,33 K)

§ 55. O počtu diskontovém

V této části o rozsahu pouhých dvou stran byl student seznámen s aplikací jednoduchého úrokování, jejíž podstatou byla „sleva“ při okamžitém vyrovnání, tj. konečná hodnota jistiny musela být přepočítána k současnosti a odpovídajícím způsobem snížena. Tato základní myšlenka byla formulována následovně:

*Je-li někdo dlužen **K** korun, splatných po **r** letech bez úroků, a jedná se o to, aby zaplatil tento dluh teď, ihned, může zajisté věřitel žádati po něm hotově jen takovou summu, která by teprve s připočtením úroků z ní za **r** let vzešlých dala původní dluh **K** korun.* ([UP], str. 150)

Pro rozdíl mezi konečnou a počáteční jistinou se zavedl pojem *diskonto* ***D***. Hlavním úkolem bylo vypočítat jeho hodnotu, a proto byl studentovi předložen komentovaný postup odvození vzorce pro jeho výpočet. Jeho konečný tvar byl

$$D = \frac{K \cdot p \cdot r}{100 + p \cdot r}.$$

Po odvození následovalo řešení jednoho příkladu s komentářem.

§ 56. O počtu lhůtovém

Počet lhůtový byl další aplikací jednoduchého úrokování, jak jsme mohli poznat z dříve prováděných analýz. Rozsah tohoto paragrafu byl opět jen dvě strany. Neobsahoval žádný teoretický úvod, nacházely se zde pouze dva velmi podrobně řešené příklady. Pro představu uveďme znění jednoho z nich.

Kdosi má zaplatiti hotově 500 K, 400 K po 3 měs. a 600 K po 5 měs. Chce však zaplatiti 700 K po 2 měs. a zbytek najednou; kdy se to má státi? ([UP], str. 153)

Na řešení student aplikoval metodu, kterou jsem podrobněji rozepsal v tabulce v analýze sbírky [UD]. Velice snadno tak dospěl k výsledku, že zbylých 800 K mělo být zaplaceno za 3 a půl měsíce.

§ 57. O složeném počtu úrokovém

Toto stěžejní téma finanční matematiky mělo v této učebnici rozsah šesti stran, ale celé dvě strany byly věnovány tabulkám úročitelů a odúročitelů, jež byly pro pohodlné řešení nezbytné. Paragraf obsahoval velmi krátký teoretický úvod, ve kterém student nalezl základní myšlenku, což bylo úrokování úroků. Následovalo podrobné odvození vzorce pro výpočet konečné jistiny po n letech složeného úrokování

$$K = J\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Závorka, kterou vzorec obsahoval, byla pojmenována *úročitel*; jeho mocniny student vyhledával ve zmíněných tabulkách. Vše vedlo k základní poučce složeného úrokování:

Jistina konečná se vypočte, znásobíme-li jistinu počáteční úročitelem umocněným na počet období. ([UP], str. 155)

Po řešeném příkladu se výklad soustředil na složené úrokování, při němž doba uložení nebyla celočíselným násobkem úrokovacího období. Bylo zdůrazněno, že na necelé období je nutno použít metodu jednoduchého úrokování.

Pojem *odúročitele* byl zaveden pouze s odkazem na hledání diskontované hodnoty, tj. ke konečné hodnotě jsme hledali počáteční jistinu. Opět následoval jeden řešený příklad.

Učebnice obsahovala ještě vloženou přílohu, kterou jsem zmínil v úvodu. V ní student mohl nalézt celkem dvanáct úloh z finanční matematiky, které nebyly přehnaně náročné a odpovídaly nárokům předloženým ve výkladové části. Pro dokreslení uveďme jednu úlohu bez dalšího komentáře.

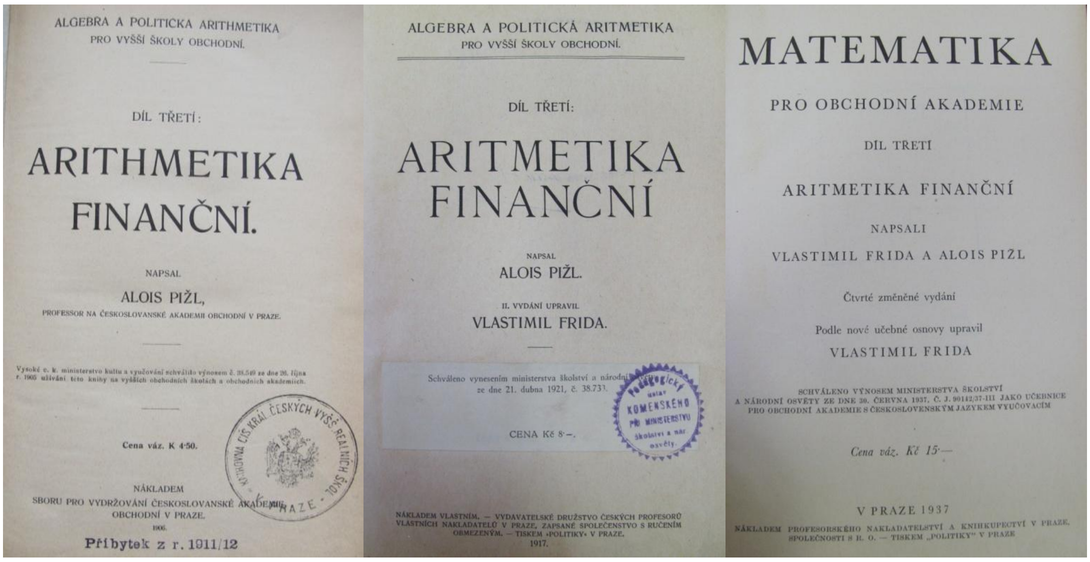
Spořivý dělník ukládá pololetně 100 K do spořitelny, která úrokuje 4 % a to pololetně; a) který obnos nahospodaří za 20 let? b) která jistina vzrostla by za 20 let na týž obnos, jakého dosáhnou jeho úspory? ([UP], příloha str. 70)

Hodnocení učebnice

Učebnice s kvalitním a podrobným výkladem byla vhodná i k samostudiu. Řešené úlohy byly nižší a střední náročnosti, aby se student mohl soustředit na podstatu probírané látky. Ačkoliv řešených úloh nebylo mnoho, přesto pokrývaly veškerou pro absolventy potřebnou látku. Podrobný a přehledný komentář by se v některých částech mohl zdát nadbytečný, ale jako učitel právě tuto preciznost velmi oceňuji.

Další vydání hovoří o kvalitách učebnice. Druhé vydání vyšlo v roce 1916 s velmi malými změnami. Třetí vydání z roku 1922 bylo již více změněné a rozšířené. Hlavní změny se byly způsobeny aktualizací podle nových osnov, vložením dvanácti obrázků a doplněním o další úlohy. Tyto změny sestavil spolu s Václavem Posejpalem jeho kolega Lev Pilz a týkaly se především rozšíření výkladové části. Finanční matematiky se téměř nedotkly. Pro třetí vydání jen bylo nezbytné změnit zkratku měny z K na Kč. Většina úloh zůstala nezměněných, například ve výše citované úloze dělník ukládal na místo 100 K částku 100 Kč.

Alois Pižl: *Algebra a politická arithmetika pro vyšší školy obchodní. Díl III. Arithmetika finanční*, 1. vydání, vydal František Řivnáč nákladem Sboru pro vydržování Československé akademie obchodní v Praze, Praha, 1906, 196 stran.



Jednalo se, podle mého názoru, o nejkvalitnější, nejucelenější, nejpodrobnější, nejpropracovanější a také nejnáročnější učebnici pro střední školy, která se věnovala finanční matematice. První vydání schválilo c. k. ministerstvo kultu a vyučování výnosem č. 38 549 ještě před Marchetovou reformou dne 26. října 1905 k užívání na vyšších obchodních školách a obchodních akademiích.

Druhého vydání se učebnice dočkala v roce 1917. Byla upravena Vlastimilem Fridou. Poznamenejme, že po vzniku samostatného Československa získalo doložku č. 38 733 vynesenou ministerstvem školství a národní osvěty ze dne 21. dubna 1921. Třetí vydání rovněž upravené Vlastimilem Fridou z roku 1923 mělo doložku č. 51 353 vynesenou tímto ministerstvem ze dne 5. května 1923. Poslední, čtvrté vydání z roku 1937 neslo již název *Matematika pro obchodní akademie, díl třetí: Aritmetika finanční* a Vlastimil Frida byl uveden jako spoluautor Aloise Pižla. I ono mělo doložku č. 90142/37-III ministerstva školství a národní osvěty tentokrát ze dne 30. června 1937. Bylo doporučeno jako pro obchodní akademie s československým jazykem vyučovacím.

Změny rozsahu a obsahu jednotlivých vydání byly jen minimální. V rozsahu prvního vydání, jež by se mohlo zdát obsáhlejší, byly zahrnuty tabulky, které čítaly 50 stran. Pořadí kapitol zůstalo zachované, měnila se měna z K na Kč, hodnoty používané v úlohách odpovídaly skutečnosti nebo byly ponechány z předchozího vydání.

Algebra a politická aritmetika se na obchodních akademiích vyučovala od prvního ročníku a třetí ročník byl věnován finanční matematice. První kapitola třetího dílu byla opakovací a jejím obsahem bylo množství úloh z témat: mocniny, odmocniny, kvadratické rovnice, logaritmy a exponenciální rovnice. Druhá kapitola se již výkladovou částí věnovala aritmetickým a geometrickým řadám. Třetí až sedmá kapitola rozdělená na množství podkapitol obsahovala převážně finanční matematiku. Osmou kapitolou byly tabulky nezbytné pro finanční matematiku (tabulka úročitelů předlhůtních i polhůtních, odúročitelů, střadatelů, převrácených hodnot přirozených čísel, částečné součty harmonické řady a logaritmy úročitelů) a závěrečná devátá kapitola byla přehledným seznamem vzorců používaných v jednotlivých kapitolách.

Kapitoly s finanční tématikou

3. *Úrokový počet* (24 stran);
4. *Počet důchodový a umořovací při úrokování polhůtném* (37 stran);
5. *Počet umořovací při úrokování předlhůtném* (17 stran);
6. *Částečné obligace splatitelné* (29 stran);
7. *Půjčky loterní a praemiové a jejich slosovací a výherní plány* (24 stran).

Rozbor jednotlivých kapitol

3. Úrokový počet

Kapitola byla rozdělena celkem na dvanáct částí s rozsahy od jedné do pěti stran.

a) Pojem úrokování

Toto byl krátký úvod, kde se student seznámil se základními pojmy, tj. typy úrokování, úrokovou dobou, kdo je dlužník a kdo je věřitel apod.

b) Převod procenta polhůtného na předlhůtné a naopak

V této části byl odvozen postup převodu základních typů úrokování – před a po úrokovém období – při stejné délce úrokového období. Nahlédněme na základní myšlenku.

Při předlhůtném čili anticipativním úrokování byl zaplacen úrok ihned, při polhůtném čili dekurzívním úrokování byl zaplacen úrok až na konci úrokovacího období. Znamenalo to tedy, že

Předlhůtné úrokování: na začátku roku ze (100 – p) korun bylo p korun úroků.

Pro převod na polhůtné: ze 100 korun bylo x korun úroků.

Vše bylo převedeno do trojčlenky: $\frac{x}{p} = \frac{100}{100-p}$, z níž plyne, že x bylo vždy větší než p.

Polhůtné úrokování: na konci roku ze (100 + p) korun bylo p korun úroků.

Pro převod na předlhůtné: ze 100 korun bylo x korun úroků.

Vše bylo převedeno do trojčlenky: $\frac{x}{p} = \frac{100}{100+p}$.

Převody byly nutné pro rychlou orientaci budoucích klientů finančních institucí nebo v horším případě lichvářů. V závěru byly uvedeny dvě skupiny těchto převodů na procvičení.

c) Úrokování jednoduché

Zde se jednalo spíše o teoretické shrnutí a zopakování znalostí získaných v předcházejícím studiu. Byly odvozeny vzorce pro jednoduché úrokování i při uložení jistiny na méně než rok. Rok byl rozdělen na 12 měsíců a 360 dní s poznámkou, že odchylka výpočtu při použití správného počtu 365 dní je tak nepatrná, že nepadá v úvahu. Zdůrazněno bylo také použití jednoduchého úrokování v praxi pro dobu kratší než rok.

d) Úrokování složité

Tato část byla jen krátkým objasněním, co znamená složité úrokování.

e) Konečná hodnota kapitálu uloženého na úroky z úroků

Až v této části byl zaveden *úročitel* $\left(1+\frac{p}{100}\right)$, který byl pojmenován q, aby složité úrokování nebylo odtrženo od geometrické posloupnosti. Byl odvozen vzorec pro výpočet konečné jistiny s mocninou úročitele. Následoval jeden řešený příklad.

f) Hodnota kapitálu počátečného, doba, po kterou byl kapitál uložen na úroky, a procento, kterým bylo úrokováno

V této části se pracovalo se vzorcem z části e) a postupně se vyjadřovala neznámá podle položené otázky. Student musel pracovat s logaritmy, které si zopakoval z předešlého školního roku v kapitole první.

Součástí kapitoly byly tři řešené příklady – výpočet počáteční jistiny, výpočet doby uložení jistiny a výpočet úrokové míry. Kapitola byla uzavřena poměrně velkým množstvím příkladů, čímž byl dán důraz na důležitost jejího zvládnutí. Byly zde čtyři úlohy zadané jen číselně s mnoha variantami a šest slovních úloh. Ukažme bez dalšího komentáře zástupce.

4. b) Při kolika % p. s. vynese 500,- K za 24 let 1293,54 K?

8. Král. České mělo r. 1857 přibližně 4 780 000 obyvatelův, roku 1900 přibližně 6 320 000 obyvatelův; kolik % jest roční přírůstek v této době? ([PA], str. 24)

Čtyři slovní úlohy této části se netýkaly finanční matematiky, ale využívaly pravidel složitého úrokování, resp. geometrických posloupností.

g) Poměr mezi úrokovou měrou za různá období

V této části bylo studentovi předloženo přehledné porovnání skutečné úrokové míry při úrokování s frekvencí jednoho roku, jednoho pololetí, jednoho čtvrtletí a jednoho měsíce. Vše bylo objasněno ve dvou řešených příkladech, z nichž uveďme první.

1. příklad: Je-li uloženo 1 000 000 K buď na 6 % p. a., nebo 3 % p. s., nebo na 1½ % p. q., nebo na ½ % p. m., vzroste kapitál za rok:

$$k_1 \text{ při } 6\,\%\text{ p. a.} = 1\,000\,000 \cdot 1{,}06 = 1\,060\,000 \text{ K}$$

$$k_1' \text{ při } 3\,\%\text{ p. s.} = 1\,000\,000 \cdot 1{,}03^2 = 1\,060\,900 \text{ K}$$

$$k_1'' \text{ při } 1\tfrac{1}{2}\,\%\text{ p. q.} = 1\,000\,000 \cdot 1{,}015^4 = 1\,061\,363{,}60 \text{ K}$$

$$k_1''' \text{ při } \tfrac{1}{2}\,\%\text{ p. m.} = 1\,000\,000 \cdot 1{,}005^{12} = 1\,061\,677{,}80 \text{ K}$$

Jak patrno, jsou:

3 % p. s. = 6,09 % p. a.

1½ % p. q. = 6,13636 % p. a.

½ % p. m. = 6,16778 % p. a.

Pro vzájemné srovnání p_0 *% p. a.,* p_1 *% p. s.,* p_2 *% p. q. a* p_3 *% p. m. platí následující rovnice:*

$$\left(1+\frac{p_0}{100}\right)=\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^2=\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^4=\left(1+\frac{p_3}{100}\right)^{12}.$$

([PA], str. 25)

V závěru následovaly ještě čtyři soubory jednoduchých úloh podobného typu.

h) Řešení problémů složitého úrokování pomocí tabulek

V této části byla zdůrazněna práce s tabulkami, která měla vést ke zjednodušení a zrychlení práce studenta. Byly popsány jednotlivé tabulky uvedené v osmé části knihy a stručně uvedeno jak je používat, např. tabulka II.

Před 40 lhůtami musilo se na 2 % uložiti K 0,452890, aby se nyní dostala 1 K.

Aby se dostalo K 441,60, musilo býti uloženo 441,60 · 0,452890 = 200,– K.

([PA], str. 27)

Obdobně byly popsány postupy pro ostatní tabulky a vysvětleny kroky jak postupovat, když hledaná hodnota pro dané údaje v tabulkách nebyla uvedena.

ch) Hodnota konečného kapitálu s ohledem na správní výlohy

V této části se student seznámil s realitou poplatků. Správní výlohy se počítaly z celé uložené jistiny a snižovaly tak výslednou hodnotu, tzn. po zúročení byl zaplacen správní poplatek. Např. při uložení na 5 % p. a. a správním poplatku ¼ % se hodnota jistiny na konci prvního roku vypočítala: $K = J \cdot 1{,}05 \cdot 0{,}9975$.

Spolu s jedním řešeným příkladem byly studentovi předloženy tři úlohy na procvičení.

i) Střední lhůta platební

Tato část se věnovala možnosti jednorázového splacení dluhu, který byl předem rozdělen do splátkového kalendáře. V mnoha učebnicích tohoto období bylo toto téma známo jako *Počet lhůtný*. Základním úkolem bylo vypočítat čas a výši splátky či splátek, aby nebyl nikdo ošizen na úroku. Pokud se pracovalo pouze s jednou lhůtou zvanou střední, hledal se jeden konkrétní čas pro splacení celého dluhu. Podívejme se pro názornost na jeden příklad a vyřešme jej.

Příklad 1: Kdosi má platiti 1000,– K hned, 500,– K po 2 letech, 1000,– K po 4 letech a 400,– K po 5 letech. Kdy je splaten celý kapitál při 4 % p. a.?
([PA], str. 32)

Řešení: Hodnotu dluhu musíme přepočítat k jednomu konkrétnímu okamžiku, zde to bude moment vzniku dluhu.

Splátka	Kdy	Současná hodnota
1000,– K	hned	1000,– K
500,– K	za 2 roky	$500/1{,}04^2 = 462{,}28$ K
1000,– K	za 4 roky	$1000/1{,}04^4 = 854{,}80$ K
400,– K	za 5 let	$400/1{,}04^5 = 328{,}77$ K
Celkem: 2900,– K		Celkem: 2645,85 K

Nyní musíme celkovou současnou hodnotu dluhu nechat úročit na součet splátek, tedy

$$2900 = 2645{,}85 \cdot 1{,}04^x.$$

Zde vidíme nezbytnost využití logaritmů pro vyjádření x:

$$x = \frac{\log 2900 - \log 2645{,}85}{\log 1{,}04} = 2{,}3385.$$

Výsledné číslo znamená počet let, za jak dlouho je nutno splatit celý dluh a chceme tuto dobu znát s přesností na dny x = 2 roky 4 měsíce 2 dny (v učebnici o jeden den kratší).

V učebnici byly uvedeny tři podrobně řešené příklady a šest úloh na procvičení. Náročnost úloh byla přibližně stejná jako řešených příkladů.

j) Výsledná hodnota periodických vkladů

Typ úloh počítaných v této části kalkuloval s více vklady k jedné jistině. Tyto vklady měly různou dobu uložení a neměly vždy stejnou výši. Úkolem studenta bylo najít konečnou hodnotu jistiny. Standardně používaným postupem bylo počítat konečnou hodnotu každého vkladu zvlášť a poté je sečíst. Vzhledem k užitečnosti (každý většinou ukládá různou částku v různých časových intervalech) byly předloženy čtyři řešené příklady a šest úloh na procvičení. Pro ukládání stejné částky v pravidelných intervalech se používal a používá pojmů střádání a spoření. Pro orientaci uveďme bez dalšího komentáře jednu úlohu.

1. Kdosi uložil 2000 K, za rok na to 500 K, za 2 roky po tom 2000 K, za rok na to 3000 K, kolik bude míti uloženo koncem 6. roku: a) při 4¼ % p. a., b) při 1¾ % p. a. a c) při 1 % p. q.? ([PA], str. 37)

k) Úrokování předlhůtné

V této závěrečné části třetí kapitoly bylo vyloženo na třech stranách předlhůtné úrokování jako skryté vyšší úrokování polhůtné. Využívalo se zde pravidla z části *b*) této kapitoly. Z důvodu početní a logické náročnosti bylo okomentováno sedm řešených příkladů a dáno pět úloh na procvičení. Hlavní myšlenka postupu byla totožná z části *b*), a proto nebyl nutný obšírný výklad.

4. Počet důchodový a umořovací při úrokování polhůtném.

Kapitola byla rozdělena na šest částí s rozsahy od dvou do deseti stran; největší měla část c) věnující se dočasným důchodům.

a) Důchod stálý a dočasný. Annuity

V této první části čtvrté kapitoly věnované důchodům a dluhům s polhůtným úrokováním byla studentům předložena stručná charakteristika základních pojmů. Důchod byl vyložen jako opakující se výplata z uložených peněz, z nájmu apod. po určité lhůtě a byl srovnán s úroky, jež byly vyloženy v předešlé kapitole. Na konkrétních reálných situacích byl vysvětlen stálý a dočasný důchod, pro dočasný důchod navíc byl sestaven v přehledné tabulce umořovací plán.

Vedle těchto důchodů plynoucích z majetkového vlastnictví byly představeny důchody podmíněné – doživotní, invalidní, nemocenské … – a odkaz na pojišťovací aritmetiku, která se jimi zabývala. Více se o nich v této učebnici student nedozvěděl, neboť nebyly a nejsou součástí finanční matematiky.

b) Bezprostřední a odložený důchod stálý

S teoretickým podkladem z první části zde bylo studentovi předloženo sedm řešených příkladů. Hlavní myšlenkou stálého důchodu, kterou měl student pochopit, byla výplata do výše úroků, aby základní jistina neklesala. U bezprostředních stálých důchodů byl výpočet velmi jednoduchý – zjistila se výše úroků a důchod byl znám.

Příklady věnující se odloženému stálému důchodu byly především, pokud nebyl znám okamžik výplaty prvního důchodu. Uveďme příklad.

Příklad 6. Kdy počne roční důchod 300,– K, který byl založen jistinou 6411,–K. Úroková míra 4 % p. a. ([PA], str. 45)

Řešení: Aby byl důchod stálý, musel 4% úrok pokrývat celou jeho hodnotu.

$$0{,}04 \cdot J = 300$$

Nutná jistina měla hodnotu 7500,– K. Na tuto hodnotu musela narůst zakládající jistina.

$$7500 = 1{,}04^n \cdot 6411$$

Pomocí logaritmů byla nalezeno $n = 4$, tzn. roční důchod 300,– K začal 4 roky po uložení zakládací jistiny.

V učebnici nepracovali s mezivýpočtem 7500,– K, ale oba vzorce spojili dohromady a zlogaritmovali. S obecnými a poté se zadanými hodnotami měl vzorec tvar

$$n = \frac{\log a + 2 - \log H - \log p}{\log q} = \frac{\log 300 + 2 - \log 6411 - \log 4}{\log 1{,}04} = 4.$$

Označení jednotlivých proměnných se, jak víme, v učebnici od učebnice a v období od období lišilo.

Podkapitola byla doplněna sedmi úlohami na procvičení.

c) Bezprostřední a odložený důchod dočasný

V této části student při výpočtech poprvé použil umořování dluhu stejnými pravidelnými splátkami. Při odloženém důchodu musel nejprve nechat jistinu narůst za dobu od založení do první výplaty. Nejtěžší prvek umořování – výpočet výše splátky – byl vyložen jako obvykle pomocí součtu *n* členů geometrické posloupnosti. Odvození bylo pomocí současné hodnoty všech budoucích splátek a výsledný vzorec měl tvar

$$a = H \div \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)},$$

kde a byla výše splátky důchodu, H výše jistiny, n počet splátek a $q = 1 +$ úroková míra. Odložený důchod se lišil pouze úrokováním jistiny H.

Další velmi důležitou informací bylo srovnání výplat dočasného důchodu a splácení dluhu. V příkladech bylo přibližně stejné zastoupení situací s důchody i dluhy. Byly předvedeny čtyři řešené příklady pro bezprostřední splácení a pět pro odložené splácení. Důležitost tématu byla podtržena 39 úlohami na procvičení. Jejich náročnost posuďme uvedením dvou z nich. První navíc vypočítáme.

6. b) Jak velký čtvrtletní důchod bezprostřední, trvající po 45 let, lze si zajistiti při 0,9 % p. q. kapitálem K 6 000,– K? ([PA], str. 53)

Řešení: Jelikož se jedná o bezprostřední důchod, stačí využít výše uvedený vzorec a dosadit do něho zadané hodnoty.

$$a = H \div \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} = 6000 \div \frac{1{,}009^{45\cdot 4} - 1}{1{,}009^{45\cdot 4}(1{,}009-1)} = 67{,}44 \text{ K}$$

29. Kapitál K 6000,– umořuje se půlletními splátkami po K 450,–, kolik je splátek plných a jak velká je poslední splátka neúplná, připadá-li prvá annuita na konec 7. půlletí? Úroková míra 1¾ %. ([PA], str. 55)

d) Řešení problémů o dočasných důchodech pomocí tabulek

V této části byly dále rozvíjeny znalosti předešlé části s důrazem na využití tabulek. Řešené příklady byly převzaty také z předešlé podkapitoly, ale student byl nabádán k využití tabulek IV. V těchto tabulkách se nacházely hodnoty dělitele z výše uvedeného i použitého vzorce. Tento dělitel byl označen $f_{(n)(p)}$, kde n značilo počet splátek a p úrokovou míru. Vyřešením totožných příkladů mohl student porovnat přesnost výpočtů. V závěru bylo přiloženo 41 úloh na procvičení.

e) Důchody dočasné, při nichž je lhůta výplatní jiná než lhůta úrokovací

Tato část byla zaměřena především na případy, kdy k pravidelné výplatě důchodu docházelo několikrát během jednoho úrokovacího období. Nejprve bylo nutno vypočítat souhrnnou hodnotu všech důchodů za jedno úrokovací období ke konci tohoto období. Poté se jednotlivé důchody musely odúročit k okamžiku výplaty. Tyto případy byly blíže realitě než situace, kdy vyplácení důchodů mělo stejný okamžik i frekvenci s úrokováním. Důležitost byla podtržena 8 řešenými a 21 dodatečnými příklady.

Základní myšlenku, kterou měl student pochopit, ukážeme na jednom příkladu.

Příklad 2. Který měsíční důchod lze založiti kapitálem K 20 000,–? Důchod se vyplácí vždy koncem měsíce a trvá 15 let. Úroková míra 3½ % p. a. ([PA], str. 64)

Řešení: Nejprve vypočítáme hodnotu důchodu, který by se vyplácel po dobu 15 let vždy na konci úrokovacího období, zde roku.

$$a = H \div \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} = 20000 \div \frac{1{,}035^{15} - 1}{1{,}035^{15}(1{,}035 - 1)} = 1736{,}50 \text{ K}$$

Ke stejné hodnotě se dobral i student, který používal výše zmíněné tabulky. Hodnotu dělitele pro 15 úrokovacích období s úrokovou mírou 3½ % vyčetl $f_{(15)(3½)}$ = 11,517 411, z níž vyplynula stejná roční anuita s přesností na haléře.

Anuita 1736,50 K oznamovala součet budoucích hodnot všech důchodů vyplacených za jeden rok, jenž by díky úrokování byl ke konci roku. Abychom získali hodnotu jednotlivých důchodů, musíme využít jednoduchého úrokování a důchody podle okamžiku výplaty úročit do konce roku. Podle zadání jsou důchody vypláceny na konci měsíce, tzn. první důchod byl vyplacen 11 měsíců před koncem úrokovacího období, druhý 10 měsíců atd. Získáváme rovnici (*r* bylo označení hodnoty vyplaceného důchodu):

$$12r + \frac{3{,}5}{100} r \cdot \left(\frac{11}{12} + \frac{10}{12} + \frac{9}{12} + \cdots + \frac{1}{12} + \frac{0}{12}\right) = 1736{,}50,$$

z níž vyjádříme a vypočítáme r. Závorka obsahuje části roku pro jednotlivé výplaty, které zbývaly do konce roku a při výplatě shodné s okamžikem úrokování by o tuto část ročního úroku narostla jejich hodnota. Pro zjednodušení můžeme použít k výpočtu jejich součtu pravidel pro částečný součet členů aritmetické posloupnosti (diference –1/12). Výsledek je *r* = 142,42 K.

Na ukázku náročnosti uveďme bez dalšího komentáře ještě jednu úlohu.

18. Kolik jest nutno ukládati vždy počátkem měsíce po 20 let, aby bylo lze po uplynutí této doby bráti po 20 let měsíční důchod K 150,–, splatný vždy koncem měsíce? Úroková míra 1¾ % p. s. ([PA], str. 69)

f) Sestavování umořovacích plánů a vypočítávání *n*-té splátky a zbývajícího dluhu po *n* létech při úrokování dekursivním

V částech o dočasných důchodech se student seznámil s výplatami, jež překračovaly hodnotu úroku a tím postupně snižovaly výši jistiny, ze které byl důchod vyplácen. Jak jsem již zmínil, důchod je typ dluhu a je-li dočasný, je tento dluh umořován. K využití této myšlenky byl student nabádán právě v této části, která mu sloužila k lepšímu pohledu na problematiku splácení dluhu jako jednoduchý návod na sestavení umořovacího plánu mu sloužila. Základním typem úloh byl výpočet výše splátky při známé hodnotě dluhu, úrokové míře a počtu splátek, jejichž frekvence se většinou nelišila od úrokovacího období. Po nalezení její výše bylo studentovi uloženo rozepsat umořovací plán. Podkapitola obsahovala čtyři podrobně řešené příklady se zcela a nebo téměř zcela vypracovanými umořovacími plány. Následovalo deset úloh na procvičení.

Ukažme základní kroky řešení a nástin umořovacího plánu pro jeden příklad.

Příklad 2. Dluh K 2 000 000,– má se umořiti ve 20 letech půlletními splátkami. Úroková míra 2 % p. s. ([PA], str. 72)

Řešení: Dluh měl být splácen po 40 úrokovacích období s úrokovou mírou 2 %. Pro tyto dvě hodnoty student nalezl v tabulkách IV. umořovatel

$$f_{(40)(2)} = 27{,}355\ 479,$$

s jehož pomocí vypočítal výši anuity a = 2 000 000 / 27,355 479 = 73 111,50 K. Její hodnota byla nutnou výší splátky, aby byl dluh podle podmínek splacen.

Nyní sestavíme umořovací plán, jehož podoba se za posledních více než sto let v zásadě neměnila.

rok	pololetí	dluh počátek období	úrok	splátka	úmor
1	I	2 000 000,–	40 000,–	73 111,50	33 111,50
1	II	1 966 888,50	39 337,77	73 111,50	33 773,73
2	I	1 933 114,77	38 662,29	73 111,50	34 449,21
2	II	1 898 665,56	37 973,31	73 111,50	35 138,19

Hodnoty v tabulce se počítaly následovně: úrok byla 2 % z dluhu na počátku období, splátka byla konstantní předem určená, úmor byl rozdíl splátky a úroku. Hodnota dluhu na počátku dalšího období byla snížena o úmor. Vidíme, že v porovnání se současností se opravdu nic podstatného nezměnilo. Nejčastěji v učebnicích kladená otázka směřovala na výše splátek během závěrečných období umořování dluhu. Hodnota dluhu např. šest období před splacením se řešila jako pravidelné ukládání splátky a posun proti proudu času. Student by hledal hodnotu dluhu v okamžiku šesti období do konce splacení následovně:

$$H_6 = a \cdot f_{(6)(2)} = 73111{,}50 \cdot 5{,}601431 = 409529{,}01 \text{ K},$$

což byla hodnota dluhu na počátku prvního pololetí osmnáctého roku splácení a zbytek umořovacího plánu se sestavoval jako výše rozpracovaný úvod.

5. Počet umořovací při úrokování předlhůtném

V této kapitole byly rozpracovány případy užívající předlhůtného úrokování. Zmíněno bylo, že na tento typ úrokování se zpravidla narazí u menších peněžních ústavů. Cílem vyložených postupů bylo navést studenta k myšlence, že mu postačí převod úrokové míry předlhůtného úrokování na úrokovou míru polhůtného úrokování vyloženou ve třetí kapitole a pro výpočty nutnými k úlohám o vyplácení důchodu či splácení dluhu využití algoritmů ze čtvrté kapitoly. Přesto zde byl odvozen základní vzorec pro vztah mezi dluhem či zakládací jistinou, úrokovou mírou, počtem úrokovacích období a splátkou či důchodem i způsob tohoto úrokování, aby byly zdůrazněny odlišnosti od polhůtného úrokování. Vše bylo rozpracováno do dvou částí, z nichž byla stěžejní druhá o rozsahu 13 stran.

a) Dočasný důchod při úrokování a annuitách předlhůtných

Zde byl odvozen základní vzorec pro výpočet anuity:

$$a = D \cdot \frac{p}{100} \div (1 - q^{-n}),$$

kde a byla anuita, D byl dluh, p byla úroková míra (q = 1 + p) a n byl počet úrokovacích období. Pro úplnost ještě jednou zdůrazňuji, že vzorec lze použít pro důchod i dluh. Hodnotu q^{-n} studenti hledali v tabulkách III.

Tato část obsahovala čtyři řešené příklady a dvanáct úloh na procvičení. Uveďme jeden s náznakem řešení.

Příklad 2. Který dluh umoří se 60 půlletními annuitami K 2000,– při 2¼ % p. s. anticip.? ([PA], str. 79)

Řešení: Z výše uvedeného vzorce pouze vyjádříme D a dosadíme zadané hodnoty.

$$D = \frac{100 \cdot 2000}{2{,}25} \cdot (1 - 0{,}9775^{60}) = 66197{,}88 \text{ K}$$

b) Sestavování umořovacích plánů a vypočítávání *n*-té splátky a zbylého dluhu po *n* létech při úrokování a splácení anticipativním

Také v této části zůstaly zachovány základní kroky, které student znal z příkladů s polhůtným úrokováním. Před sestavením umořovacího plánu musel nejprve vypočítat výši splátky pomocí metod vyložených v první podkapitole, a pak byl veden výpočty jednotlivých políček v umořovacím plánu. Upozorněn byl rovněž na skutečnost, že první anuitu platí dlužník teprve počátkem druhé lhůty. Počátkem prvního období platí pouze úrok. Pak mu bylo předloženo šest řešených úloh a osm příkladů na procvičení. Dále byl upozorněn, že ne každý finanční ústav při uvádění předlhůtného úrokování počítá správně. Chyby spočívaly v těchto případech v tom, že se počítal úrok i z té části jistiny, která byla již v tom příslušném úrokovacím období zaplacena, čímž ve skutečnosti narůstala úroková míra. Ukažme správný způsob řešení na konkrétním příkladu.

Příklad 1. Dluh K 10 000,– má se splatiti 20 ročními splátkami. Úroková míra 4 % p. a. anticip. ([PA], str. 82)

Řešení: Zmínil jsem, že při vyplacení dluhu se dlužníkovi srážel jen úrok. Dlužník byl tedy povinen splatit dluh na počátku 21. období.

Nejprve vypočítáme výši anuity podle výše uvedeného vzorce:

$$a = 10000 \cdot 0{,}04 \div (1 - 0{,}96^{20}) = 716{,}85 \text{ K.}$$

Výplata dluhu: 10 000 – úrok 400 = 9 600 K bylo vyplaceno hotově.

Každou anuitu *a* při umořování dluhu *D* standardně rozdělili na úrok *u* a úmor *s* (= splátka dluhu), kde úrok byl počítán jako *p* % z dlužné částky a úmor snižoval výši dluhu pro další období. Pro předlhůtní úrokování býval používán následující postup:

rozložení anuity: $a = s + u$;

výpočet úroku: $u = \frac{p}{100} \cdot (D - s)$;

z obou vzorců plyne pro úmor: $s = \frac{100a - Dp}{100 - p}$.

Poslední z uvedených vzorců použili dosazením zadaných hodnot a získali první úmor ve výši 330,05 K.

Vyplňme zmíněné kroky do umořovacího plánu. Všechny hodnoty byly platné pro každý začátek roku.

rok	dluh	úrok	úmor
1.	10 000,–	400,–	
2.	9 669,95	386,80	330,05
3.	9 326,15	373,05	343,80

Pro každý řádek můžeme zkontrolovat, že:

- *úrok* + *úmor* = *anuita* (kromě prvního řádku);
- *dluh* + *úmor* = *dluh z předešlého roku*;
- *úroková míra z dluhu* = *úrok*.

Tím se ověřila správnost použitého vzorce a mohl se posoudit základní rozdíl od polhůtného úrokování, kde základní výpočet byl: *dluh* + *úrok* – *úmor* = *dluh v následném období*.

Aby byla zachována základní myšlenka předlhůtného úrokování, byly výpočty i struktura kroků náročnější oproti úrokování polhůtném, což také při zápisu čísel do umořovacího plánu vedlo k chybám. Nebylo tedy divu, že některé peněžní ústavy si postup zjednodušovaly, jak autor upozorňoval. Rozdíl byl v neprospěch klienta, což ústavy nenutilo k nápravě.

6. Částečné obligace splatitelné

V této kapitole byl student ve třech podkapitolách seznamován s operacemi, které se prováděly s obligacemi se nominální hodnotou. Úrok z nominální hodnoty se nazýval kuponem a byl vyplácen každému držiteli obligace. Zbytek anuity se použil na vyplacení některých obligací, které byly z toho důvodu slosovávané.

Klasickým příkladem takových obligací čili dluhopisů je, že firma nebo stát potřebuje finanční prostředky vydá (= emituje) tyto cenné papíry a zavazuje se vyplácet úrok a po nějaké době je vykoupí za nominální hodnotu. Losované obligace v současné době nejsou rozšířené.

Analyzujme nyní jednotlivé podkapitoly, v nichž si student dále prohluboval znalosti polhůtného a předlhůtného úrokování z předešlých kapitol. Tyto vědomosti rozšířil o vyplácení vylosovaných obligací. Uveďme v první podkapitole podrobně řešený příklad a v dalších dvou jen příklady pro ilustraci, které typy tam student nalezl. V první podkapitole bylo pět řešených příkladů, ve druhé jeden řešený spolu s devíti na procvičení a ve třetí šest řešených a 17 na procvičení.

a) Splácení částečných obligací při úrokování polhůtném

Příklad 1. Půjčka K 10 000 000,– jest rozdělena na 10 000 obligací po 1000 K a má se splatiti ve 20 létech půlletními annuitami. Úroková míra 2 % p. s. ([PA], str. 95)

Řešení: Nejprve bylo nutno najít výši anuity. Z tabulky IV. student vyčetl hodnotu $f_{(40)(2)} = 27{,}355479$ a výši anuity vypočítal

$$a = 10000000 \div f_{(40)(2)} = 365\,557{,}48 \text{ K}.$$

Nyní musel určit částku, která se využila na výplatu kuponů, tj. 2 % ze jmenovité hodnoty = 20 K. Na počátku bylo 10 000 obligací, na které každou z nich bylo třeba vyplatit 20 K. Zbylá část zaokrouhlena na násobek jmenovité hodnoty (= 165 000 K) byla použita na výplatu vylosovaných obligací. Zbylých 557,48 K bylo uloženo, zúročeno a připočteno v dalším úrokovacím období k anuitě. Postup se poté opakoval s tím, že počet obligací a tedy i částka použitá k výplatě kuponů klesala.

Zapišme základní kroky pro několik prvních úrokovacích období do tabulky.

anuita	365 557,48 K
10 000 kuponů po 20 K	200 000,– K
na úmor (splacení vylosovaných obligací) zbývá	165 557,48 K
vylosuje se 165 obligací	165 000,– K
zbytek se uloží a zúročí 2 %	557,48 K + 11,15 K = 568,63 K
další úrokové období: anuita + převedený zbytek	366 126,11 K
zbývá 9 835 obligací – kuponů po 20 K	196 700,– K
na úmor zbývá	169 426,11 K
vylosuje se 169 obligací	169 000,– K
zbytek se uloží a zúročí 2 %	426,11 K + 8,52 K = 434,63 K
další úrokové období: anuita + převedený zbytek	365 992,11 K
…	…

b) Splácení částečných obligací při úrokování předlhůtném

3. Půjčka K 2 500 000,–, rozdělená na 12 500 obligací po K 200,–, splácí se roční annuitou K 300 000,–. Úroková míra 4¼ % p. a. dekursivně. Sestavte umořovací plán a) s přesným započítáním a zároveň zúročením zbytků, b) se zaokrouhlenými annuitami. ([PA], str. 109)

c) Kurs částečných obligací. Zdánlivé a skutečné zúročení se strany dlužníkovy. Zdánlivá a skutečná výnosnost obligací

Příklad 1. b) Půjčka K 10 000 000,–, zúročitelná 2 % p. s. dekursivně a splatná ve 45 letech, byla upsána po kursu 98,50. Výlohy celkem K 250 000. Jak velké % platí dlužník ve skutečnosti? ([PA], str. 111)

7. Půjčky loterní a praemiové a jejich slosovací a výherní plány

Z pohledu finanční matematiky byla tato kapitola atypická, neboť operovala s penězi trochu z jiného hlediska. Stále se počítalo s úroky, ale ne každý se k nim dostal. Loterní půjčky měly svou nominální hodnotu a většina věřitelů získala pouze tuto částku. Pouze vylosovaní získávali mnohem větší obnos, neboť se k nominální hodnotě vyplácely úroky ze všech obligací. Ukažme jeden příklad s řešením pro ilustraci.

Příklad 1. Půjčka K 10 000 000,– jest rozdělena na 500 000 obligací po 20 K a má býti splacena v 50 létech půlletními splátkami. Dlužník míní platiti asi 1½ % úroků půlletně. ([PA], str. 124)

Řešení: Nejprve bylo třeba vypočítat kolik obligací a jaký obnos bude půlletně vyplácen. Mělo se vyplatit půl milionu obligací za 50 let, tj. na každé pololetí připadá pět tisíc obligací. Z umořování dluhu 10 milionů korun při 100 úrokovacích období a úrokové míře 1½ % se v tabulkách vyčetla hodnota 51,624704. Dnes tuto hodnotu nalezneme pomocí vzorce pro polhůtního zásobitele při umořování dluhu při *n* úrokovacích obdobích a úrokové míře *i*

$$a_n^i = \frac{1-(1+i)^n}{i}$$

a vypočteme

$$a_{100}^{0,015} = \frac{1-(1+0,015)^{100}}{0,015} = 51,624704.$$

Tuto hodnotu použijeme pro výpočet pololetní anuity:

$$a = \frac{10\,000\,000}{51,624704} = 193706 \text{ K}.$$

V dané úloze musel student zaokrouhlit na násobek nominální hodnoty, tj. na obnos dělitelný 20. Částku 193 700 K rozdělil do výherního plánu a přiřadil k ní 5 000 vylosovaných obligací.

Sestavme jeden takový plán. Úkol to nebyl příliš složitý, neboť student znal počet obligací i celkovou vyplácenou částku.

počet výher (5 000)	hodnota výhry	vyplacený obnos (193 700 K)
1	30 000 K	30 000 K
4	5 000 K	20 000 K
25	500 K	12 500 K
100	227 K	22 700 K
370	50 K	18 500 K
4500	20 K	90 000 K

Z každého výherního plánu bylo vidět, že většina věřitelů získala zpět pouze vloženou částku 20 K. Šance na výhru byla poměrně vysoká v porovnání s klasickými loteriemi.

Praemiové či prémiové půjčky měly obdobný systém, jenž však byl díky kuponům na obligacích zaručujících výplatu úroků v pravidelných intervalech náročnější na výpočty. Spolu s vyplacenými úroky na kupony byly výherní plány podobné loterijním. Bez podrobnějšího komentáře uveďme jeden příklad.

Příklad 3. Praemiová půjčka K 10 000 000,–, rozdělená na 50 000 obligací po K 200,–, má se splatiti ve 20 létech (= 40 půlletích). Dlužník jest ochoten platiti 2 % p. s. úroků, na kupony vyplácí se 1½ % půlletně t. j. K 3,– na obligaci.
([PA], str. 128)

Hodnocení učebnice

Tato učebnice byla určena studentům, kteří ve své budoucnosti potřebovali hlubší znalosti finančnictví. Rozsah finanční matematiky zde vysoce překračoval její rozsah na všech ostatních typech středních škol.

Její struktura byla rozpracována do poměrně malých podkapitol, které byly logicky sestavené, zdůrazňovaly spojitost a návaznost jednotlivých tematických celků. Student mohl velmi snadno sledovat základní myšlenky a pravidla, což mu usnadňovalo další studium. V každé kapitole byly odvozeny užívané vzorce, připojeno bylo vhodné množství řešených příkladů s komentářem, postačující počet úloh na procvičení, tabulky a velmi užitečný seznam nejdůležitějších vzorců pro rychlou orientaci.

Mezi náročnější úlohy patřily ty, které se ptaly na výši úrokové míry při zadaných ostatních parametrech. Ne vždy se vystačilo s logaritmy a velmi často se používaly různé aproximační metody. Vzhledem k matematickému aparátu, který studenti ovládali, byl první krok v těchto metodách pouhým odhadem, který byl použit ve vzorci a podle odchylky se odhadovala přesnější hodnota. Ve většině případů byl proveden odhad shora a zdola a využívalo se poměrů.

Některé části, které v současných učebnicích již nenalezneme, bych každému doporučil k prostudování. Vhodné by to bylo například jako náplň několika hodin matematického semináře na střední škole. Z dnešního pohledu bych autorům pouze vytkl, že do učebnice nezahrnuli dodatek s výsledky úloh. Tím učebnice ztrácela na univerzálnosti, např. pro samostudium.

2.4 Shrnutí

Na počátku dvacátého století byla v Rakousko-Uherské monarchii snaha o zkvalitnění výuky na středních školách a umožnění dalšího studia jejich absolventům. Marchetova reforma zrovnoprávnila maturitní zkoušky na jednotlivých středních školách a usnadnila tím absolventům možnost postupu na vysoké školy. Stát měl zájem o vzdělané občany, neboť podporoval drobné podnikatele a obecně samostatnost v rozhodování nejen u živnostníků. Důležitou oblastí, ve které se musel občan vyznat, byly finance. Případné bankroty osobní i firemní by byly zátěží pro celý stát. Z toho nám plyne logický závěr, že na každém typu střední školy i na školách měšťanských bylo probírána témata finanční matematiky. Každý student byl veden k tomu, aby zvládal minimálně základní problematiku finančnictví, tj. *spoření* a *splácení*. Podle výše provedených analýz vidíme, že obrovské procento úloh bylo zadáno a řešeno s hodnotami převzatými z praktického života. Domnívám se, že tato část matematiky patřila k oblíbenějším, neboť student viděl spjatost matematiky se světem a možnost budoucího využití znalostí.

Od druhé poloviny devatenáctého století můžeme sledovat snahy o podporu matematiky a přírodních věd. Po pádu Bachova absolutismu vznikl v roce 1861 *Spolek pro volné přednášky z matematiky a fyziky*, který byl v roce 1869 transformován v *Jednotu českých matematiků*. Největšího rozkvětu dosáhla *Jednota* na přelomu devatenáctého a dvacátého století, kdy pod její hlavičkou vznikaly učebnice matematiky pro většinu škol s českým vyučovacím jazykem (více viz např. [BE], [MN], [I08]). Jednotná koncepce, struktura a tematické členění vedlo k pokroku ve výuce matematiky; byl kladen důraz na šíři, srozumitelnost výkladu i rozmanitost příkladů spjatými s reálným životem. Tuto kvalitu jsme mohli sledovat i ve finanční matematice.

2.5 Seznam literatury a internetových zdrojů

Obecná literatura

[BE] Martina Bečvářová: *Česká matematická komunita v letech 1848 – 1918*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, 1. vydání, Matfyzpress, Praha, 2008, 355 stran.

[MN] Jiří Mikulčák: *Nástin dějin vzdělávání v matematice (a také školy) v českých zemích do roku 1918*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 42, 1. vydání, Matfyzpress, Praha, 2010, 312 stran.

[PV] Jiří Potůček: *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900–1945*, díl 1 a 2, Pedagogické centrum, Pedagogická fakulta Západočeské univerzity, Plzeň, 1992, 1993, 55 stran, 42 stran.

[TD] Dana Trkovská: *Geometrické výsledky a reformní aktivity Felixe Kleina*, str. 106–109, in M. Bečvářová (ed.): 28. mezinárodní konference Historie matematiky, Jevíčko, Matfyzpress, Praha, 2007, 122 stran.

Učebnice

[B45] Bohumil Bydžovský: *Arithmetika pro IV. a V. třídu gymnasií a reálných gymnasií*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1910, 182 stran.
(2. vydání – 1913, 182 stran, 3. vydání – 1917, 182 stran)

[B57] Bohumil Bydžovský: *Arithmetika pro V. až VII. třídu škol reálných*, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1911, 196 stran.

[B67] Bohumil Bydžovský: *Arithmetika pro VI. a VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1911, 156 stran.

[BM1] Rudolf Bendl, Jindřich Muk: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních, díl I.*, 1. vydání, Ústřední spolek českých professorů, Praha, 1910, 88 stran.
(2. změněné vydání – 1921, 130 stran, 3. obsahem podstatně nezměněné vydání – 1923, 128 stran)

[BM2] Rudolf Bendl, Jindřich Muk: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních, díl II.*, 1. vydání, Ústřední spolek českých professorů, Praha, 1910, 92 stran.

(2. změněné vydání – 1921, 107 stran, 3. obsahem podstatně nezměněné vydání – 1924, 111 stran)

[BM3] Rudolf Bendl, Jindřich Muk: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních, díl III.*, 1. vydání, Ústřední spolek českých professorů, Praha, 1911, 138 stran.
(2. změněné vydání – 1921, 149 stran, 3. obsahem podstatně nezměněné vydání – 1925, 148 stran)

[BV] Bohumil Bydžovský, Jan Vojtěch: *Mathematika pro nejvyšší třídu reálek*, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1912, 176 stran.

[BVS] Bohumil Bydžovský, Jan Vojtěch: *Sbírka úloh z mathematiky pro vyšší třídy středních škol*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1912, 332 stran.
(2. vydání – 1920, 332 stran, 3. vydání – 1924, 335 stran, 4. úplně přepracované vydání – 1936, 274 stran)

[CL1] Ladislav Červenka: *Arithmetika pro I. třídu středních škol*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1910, 94 stran.
(2. vydání – 1911, 92 stran, 3. vydání – 1919, 92 stran, 4. vydání – 1921, 92 stran, 5. vydání – 1923, 92 stran, 6. přepracované vydání –1932, 100 stran, 7. přepracované vydání –1934, 100 stran)

[CL2] Ladislav Červenka: *Arithmetika pro II. třídu středních škol*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1910, 80 stran.
(2. nezměněné vydání – 1911, 80 stran, 3. vydání – 1919, 80 stran, 4. upravené vydání – 1921, 80 stran, 5. upravené vydání – 1923, 84 stran, 6. pozměněné vydání – 1930, 92 stran + 12 stran doplňku, 7. rozšířené vydání – 1932, 103 stran, 8. přepracované vydání – 1934, 119 stran)

[CL3] Ladislav Červenka: *Arithmetika pro III. třídu středních škol*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1911, 104 stran.
(2. nezměněné vydání – 1918, 104 stran, 3. vydání – 1920, 104 stran, 4. upravené vydání – 1922, 106 stran, 5. upravené vydání – 1925, 108 stran, 6. přepracované vydání –1933, 108 stran, 7. přepracované vydání –1934, 108 stran)

[FR] Ladislav Fryček: *Počtářství na českých školách měšťanských v úlohách*, tisk a náklad Karel Šolc, Kutná Hora, 1910, 262 stran.

[KJ] Jan Kozák: *Pátá početnice pro třídy s 6., 7. a 8. školním rokem na školách vícetřídních*, Císařský královský školní knihosklad, Praha, 1914, 212 stran.

[LT] Miloslav Valouch, Miloslav A. Valouch: Sedmimístné logaritmy čísel od 1 do 120000, 1. vydání, Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1932, 247 stran.

(2. vydání – 1946, 247 stran, dotisk 2. vydání – 1950, 247 stran, 2. dotisk 2. vydání – 1953, 247 stran, 3. vydání – včetně tabulek goniometrických funkcí, 1956, 487 stran)

[MA] Augustin Matolín: *Pátá početnice pro obecné školy vícetřídní, pátý školní rok*, opravené vydání dle osnov z roku 1915, Císařský královský školní knihosklad, Praha, 1916, 72 stran.

[PA] Alois Pižl: *Algebra a politická arithmetika pro vyšší školy obchodní. Díl III. Arithmetika finanční*, 1. vydání, vydal František Řivnáč nákladem Sboru pro vydržování Československé akademie obchodní v Praze, Praha, 1906, 196 stran.

(2. vydání – 1917, 137 stran, 3. změněné vydání – 1923, 148 stran, 4. změněné vydání – 1937, 138 stran)

[RM] František rytíř Močnik: *Početnice pro školy obecné, vydání trojdílné. Stupeň vyšší*, Císařský královský školní knihosklad, Praha, 1909, 136 stran.

[SP1] Václav Starý, Josef Pithardt: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních I.*, 10. vydání, upravené dle učebních osnov z r. 1909, nákladem České grafické akciové společnosti Unie, Praha, 1910, 52 stran.

(Všechna vydání se mi nepodařilo objevit. 3. přepracované vydání – 1877, 372 stran, 4. opravené vydání – 1882, 279 stran, 5. zkrácené vydání – 1888, 224 stran, 6. opravené vydání – 1893, 284 stran)

[SP2] Václav Starý, Josef Pithardt: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních II.*, 10. vydání, upravené dle učebních osnov z r. 1909, nákladem České grafické akciové společnosti Unie, Praha, 1911, 76 stran.

[SP3] Václav Starý, Josef Pithardt: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních III.*, 10. vydání, upravené dle učebních osnov z r. 1909, nákladem České grafické akciové společnosti Unie, Praha, 1912, 107 stran.

[ST] František Josef Studnička: *Kapesní tabulky logarithmické, jakož i jiné důležité tabulky pomocné*, 9. rozmnožené vydání, J. G. Calvé, Praha, 1905, 160 stran.

(1. vydání – 1870, 143 stran, 2. rozmnožené vydání – 1875, 156 stran, 3. rozmnožené vydání – 1879, 156 stran, 6. skoro nezměněné vydání – 1893,

156 stran, 7. zdokonalené vydání – 1898, 156 stran, 8. nezměněné vydání – 1901, 156 stran, 9. rozmnožené vydání – 1905, 160 stran, 10. nezměněné vydání – 1909, 160 stran, 11. téměř nezměněné vydání – 1913, 160 stran, 14. nezměněné vydání – 1927, 160 stran)

[UD] Karel Domin: *Arithmetika v úlohách pro ústavy učitelské*, 4. nezměněné vydání, tisk a náklad Karel Šolc, Kutná Hora, 1911, 319 stran.
(1. vydání – 1899, 319 stran, 2. nezměněné vydání – 1903, 319 stran, 3. nezměněné vydání – 1908, 319 stran, 5. vydání – nenalezl jsem, 6. přepracované vydání – 1923, 470 stran)

[UP] Václav Posejpal: *Arithmetika pro ústavy ku vzdělání učitelů a učitelek*, s přílohou: *Úlohy k arithmetice*, 1. vydání, Česká grafická akciová společnost UNIE, Praha, 1908, 206 stran (+ 75 stran přílohy).
(2. přepracované vydání – 1916, 208 stran (bez přílohy), 3. přepracované vydání – 1922, 250 stran + 128 stran přílohy)

Internetové zdroje

[I01] Národní pedagogická knihovna J.A. Komenského, Praha: *http://www.npkk.cz*.

[I02] Online katalog Národní knihovny ČR: *http://www.nkp.cz*.

[I03] Jednota českých matematiků a fyziků: *http://www.jcmf.cz*.

[I07] Wikipedia, otevřená encyklopedie: *http://cs.wikipedia.org*.

[I08] Wikipedia, the free encyclopedia: *http://en.wikipedia.org*.

[I09] Akademický bulletin: *http://abicko.avcr.cz*.

3. Finanční matematika na středních školách v období první republiky (rozvoj kvalitního dědictví 1918 – 1939)

Na sklonku první světové války došlo k transformaci politické mapy Evropy. Jednou z těchto změn byl rozpad Rakousko-Uherské monarchie, která byla na straně poražených států. Československo bylo jedním z nově vzniklých států na území monarchie. Po hospodářské stránce patřilo mezi nejsilnější. Nově vzniklý samostatný stát uznal kvalitu řady rakouských zákonů a nařízení, a proto je ponechal v platnosti. To se týkalo také školských zákonů. Podstatná změna byla především v otázce jazykové, kde český, respektive slovenský jazyk se staly vyučovacími jazyky na českých, respektive slovenských školách. Další důležitou událostí byla měnová reforma v roce 1919, která ještě více stabilizovala poválečné hospodářství, jež již v roce 1924 dosáhlo předválečné úrovně.

Ve školství se navázalo na kvalitu z období monarchie. Většina učebnic napsaných v českém jazyce před rokem 1918 byla v nových jen minimálně upravených vydáních používána ve dvacátých i třicátých letech, což je patrné z výčtů vydání učebnic uvedených v předešlé kapitole. Vznikaly také nové učebnice, neboť se objevila snaha zavádět moderní učební metody. Dále byli na školách zrovnoprávněni chlapci a dívky. Pro podporu spolupráce veřejnosti a školy bylo zřízeno rodičovské sdružení. Stabilizaci později ještě více upevnil *Malý školský zákon* z roku 1922, který ustanovil povinnou školní docházku na 8 let, rušil úlevy v docházce (např. děti starší 12 let již nebyly uvolňovány na zemědělské práce), ustanovil zakládání mateřských škol a sjednotil různé typy škol na celém území státu. Struktura školství zůstala zachována, bylo ponecháno členění – obecné školy, měšťanské školy, střední školy, odborné školy a vysoké školy.

Nově vzniklý stát měl zájem na výchově a vzdělaní občanů. Jednou z důležitých oblastí vzdělání byla i finanční matematiky. Občan, který platí své účty včas, dokáže sledovat svou finanční situaci, pečlivě váží objemnější nákupy, svědomitě komunikuje s věřitelem při splácení úvěru, hledá výnos pro své investice a chápe existenci rizika, nebude pro svůj stát zátěží.

Další změnu přinesla školská reforma z roku 1933. Podporovala zejména pokrok a demokratický charakter školství. Jejím cílem bylo přebudování středního školství. Předsedou komise, která tuto reformu vypracovala, byl akademik Bohumil Bydžovský (podrobné zpracování reformy viz [BŠ]). Vyučování nemělo být již pouhé hromadění informací, ale především samostatné myšlení. Žák či student musel vždycky vědět, proč se předloženou látku učil. Nově získané poznatky uplatňoval při řešení problémů z reálného života, přitom se mělo dbát na samostatnost. Dalším cílem reformy měla být jednotná škola, která vešla v život až po roce 1948 (více viz např. [JR], [MŠ]).

Přehled analyzovaných učebnic.

Publikace pro obecné a měšťanské školy:

- rok 1926: *Početnice pro horní stupeň obecných škol* (A. Matolín);
- rok 1923: *Početnice pro pražské školy občanské, díl II.* (K. Jon, A. Maxová);
- rok 1923: *Početnice pro pražské školy občanské, díl III.* (K. Jon, A. Maxová);
- rok 1924: *Početnice pro školy měšťanské, díl IV.* (K. Jon, A. Maxová).

Publikace pro reálky, gymnázia, reálná gymnázia a střední školy:

- rok 1931: *Aritmetika pro nižší třídy škol středních, díl I.* (J. Muk);
- rok 1932: *Aritmetika pro nižší třídy škol středních, díl* II. (J. Muk);
- rok 1933: *Aritmetika pro nižší třídy škol středních, díl* III. (J. Muk);
- rok 1920: *Aritmetika pro IV.–VII. třídu škol středních, díl druhý* (B. Bydžovský);
- rok 1933: *Aritmetika pro IV třídu středních škol* (B. Bydžovský a kol.);
- rok 1935: *Aritmetika pro V.–VII. třídu škol středních* (B. Bydžovský a kol.);
- rok 1936: *Sbírka úloh z* matematiky *pro IV.–VIII. třídu středních škol* (B. Bydžov-ský a kol.);
- rok 1924–6: řada učebnic *Aritmetiky pro třídy reálek* (J. Muk);

- rok 1924–7: řada učebnic *Aritmetiky pro třídy gymnasií a reálných gymnasií* (J. Muk);
- rok 1927: *Aritmetika pro sedmou třídu gymnasií a reálných gymnasií* (J. Muk).

Publikace pro učitelské ústavy a vyšší obchodní školy:

- rok 1935: *Aritmetika pro učitelské ústavy. Díl první* (A. Říha);
- rok 1936: *Aritmetika pro učitelské ústavy. Díl druhý* (A. Říha);
- rok 1937: *Aritmetika pro učitelské ústavy. Díl třetí* (A. Říha);
- rok 1936: *Aritmetika v úlohách ke zkouškám z II. a III. odboru měšťanských škol, pro žactvo střed. škol a učitelských ústavů* (M. Ostrý).

Základní problémy finanční aritmetiky, tj. spoření, půjčka a důchod, stále patřily k běžnému životu občana. To byl důvod, proč jsem opět zařadil vedle středoškolských učebnic také učebnice pro obecné a měšťanské školy, jejichž součástí byly základy finanční aritmetiky včetně složitého úrokování a používání tabulek úročitelů a střadatelů.

3.1 Učebnice pro obecné a měšťanské školy

Augustin Matolín: *Početnice pro horní stupeň obecných škol (čtvrtá početnice pro ménětřídní školy obecné), pro 6., 7. a 8. školní rok,* Státní nakladatelství, Praha, 1926, 175 stran.

Jednalo se o početnici, jejíž první vydání se datuje do roku 1913. Po roce 1918 se dočkala mnoha vydání a byla vícekrát označena doložkou ministerstva školství a národní osvěty. Byla schválena výnosy č. j. 106.843/2, resp. č. j. 130.557/25 ministerstva školství a národní osvěty ze dne 7. října 1922, resp. 4. listopadu 1925 jako učebnice pro horní stupeň obecných škol. Početnice byla rozdělena do osmi oddílů, z nichž šestý se jmenoval *Úrokový počet, složitý úrokový počet* (rozsah 15 stran).

Úrokový počet byl rozdělen na tři části.

- Vypočítávání úroků (22 úloh);
- Vypočítávání jistiny (15 úloh);
- Vypočítávání úrokové míry (12 úloh).

Teoretická část byla velmi krátká, jak bylo zvykem ve všech učebnicích určených pro obecné školy. Žák byl seznámen s pojmy roční úroková míra, úrok, úvěr, jistina, způsob zaokrouhlování, záložna, vkladatel a lichva. Byl upozorněn, že je dovoleno půjčovat na roční úrokovou míru maximálně 6 %. Vyšší úrok byl již za vlády císaře Rudolfa II. trestný a prohlašován za lichvu. Úlohy obsahovaly základní typy výpočtů a především podporovaly dril. Uveďme jednu úlohu.

Kolik úroku vynesou jistiny:

a) 895 K na 5 % od 7. ledna do 18. dubna; b) 1 364 K na 4 % od 16. února do 24. června; c) 2 627 K na 3 % od 21. července do 29. září; d) … ([MP], str. 119)

Samostatná část *Složitý počet úrokový* obsahovala 28 úloh, vysvětlovala princip vzniku úroku z úroku. Žákovi předkládala tabulky úročitelů a střadatelů. Většina úloh byla velmi jednoduchých, výjimečně se objevovaly náročnější úlohy.

Posuďme vše uvedením dvou úloh.

Na kolik K vzroste jistina 250 K (540 K, 3200 K) při 5% pololetním úrokování za 20 let? ([MP], str. 125)

Dělník koupil si domek za 20 000 K, měl hotově 8800 K a zbytek zůstal dlužen hypoteční bance; kolik splatil za 20 let při 4% úrokování, platí-li 1 % ročně na umořování dluhu? ([MP], str. 129)

Početnice byla určena žákům obecných škol, u nichž se nepředpokládalo vyšší vzdělání. Hlavním cílem proto bylo zvládnutí jednoduchých reálných problémů bez hlubšího teoretického základu a širšího pohledu. Učebnice neobsahovala výsledky, což bránilo kvalitní domácí přípravě nebo samostudiu.

Obdobnou početnicí byla *Početnice pro 6., 7. a 8. školní rok všech škol obecných* autorů Jana Kozáka a Jana Ročka z roku 1917. Nově ji přepracoval František Pátek a kolektiv; vyšla v roce 1927 ([PP]). Kapitoly o úrocích byly velmi podobné rozsahem i obsahem. Zajímavostí byla pozitivní hesla, např. *Přičinlivostí a spořivostí dojdeme k blahobytu!* ([PP], str. 119); nebo úlohy zaměřené na vlastní nápady a potřeby žáků, jejich rodin a města, např. *Kolik Kč by kdo z nás mohl ušetřiti a uložiti měsíčně (a tedy ročně)? Kolik Kč by měl, až mu bude … let (ode dneška za … let)?* ([PP], str. 122).

Karel Jon, Antonie Maxová: *Početnice pro pražské školy občanské, díl II. pro druhou třídu*, Česká grafická unie a. s., Praha, 1923, 116 stran.

Jednalo se o učebnici, jež byla druhým dílem sady početnic (první díl [JM1] neobsahoval finanční matematiku) pro pražské občanské školy, což byla alternativa měšťanských škol pro Prahu. Byla schválena výnosem č. 66 ministerstva školství a národní osvěty ze dne 19. ledna 1923. Všechny díly obsahovaly samostatný oddíl *Vysvětlivky a výsledky*, v nichž se však nenalézaly výsledky ke všem úlohám.

Druhý díl obsahoval 10 kapitol. V páté kapitole nazvané *Počítání procenty* (rozsah 45stran) byly podkapitoly *Počet úrokový* (rozsah 13 stran) zahrnující 75 úloh a *Počet diskontový* (rozsah 3 strany) s 21 úlohami. Všechny úlohy operovaly jen s jednoduchým úrokováním. Uveďme dvě úlohy pro posouzení náročnosti.

Na kolik % by musela býti uložena jistina 250 Kč, aby vynesla za 1 ½ roku 15 Kč úroků? ([JM2], str. 82, výsledek: 4 %)

Dlužník dostal od lichváře hotově 4400 Kč, ale musil prohlásiti písemně, že mu za 2 měsíce zaplatí 4800 Kč. Kolik % diskontu počítal lichvář? ([JM2], str. 86, výsledek: 8,33 %)

Karel Jon, Antonie Maxová: *Početnice pro pražské školy občanské, díl III. pro třetí třídu*, Česká grafická unie a. s., Praha, 1923, 116 stran.

Toto byl třetí díl analyzované sady početnic; byl schválen výnosem č. 12.700 ministerstva školství a národní osvěty ze dne 24. února 1923.

Témata této početnice byla rozdělena do deseti kapitol. Ve čtvrté kapitole s názvem *Složité úrokování; střádání, úmor. Pojišťování* se nacházela poměrně rozsáhlá sbírka (33 stran) úloh s finanční tématikou. Žák navíc mohl v příloze nalézt např. obrázek líce a rubu směnky, státní prémiové půjčky, akcie s talonem a kuponem.

Kapitola obsahovala 125 úloh, z nichž 35 bylo věnováno složitému úrokování, 17 pravidelnému nebo nepravidelnému střádání, 17 umořování dluhu a 56 pojišťovací matematice. Z počtu úloh byl patrný velký důraz kladený na pojišťování životní, nemocenské, úrazové, starobní a majetkové. Žák byl nabádán k tomu, aby měl pro každou důležitou oblast svého života sjednané příslušné pojištění. Tím chránil nejen sebe, ale i výdaje státu.

Všechny části finanční matematiky byly stručně vyložené, úlohy podrobně popisovaly reálné situace a měly se jevit vždy prakticky. Uveďme dvě úlohy, z nichž první vyřešíme.

První úloha:

Živnostník získal od soukromníka půjčku 3500 K na 6 %, z níž neplatil úroků. Když měl jistinu splatiti, žádal soukromník 4964,82 K, protože chtěl míti úroky celoročně kapitalisovány. Obdržel však jenom jednoduchý úrok. O kolik dostal méně? ([JM2], str. 25, o 204,82 K)

Řešení: Žák musel nejprve vydělit částku, kterou soukromník žádal a půjčku.

$$q^n = \frac{4964{,}82}{3500} = 1{,}42852$$

Výsledek nalezl v tabulce úročitelů pro 6% úrokovou míru a nalezl dobu poskytnutí půjčky. Byla šestiletá. Bez tabulky úročitelů bylo nutno využít pro vyhledání exponentu logaritmů. Pro nalezených 6 let vypočítal výši dluhu při jednoduchém úrokování.

$$j = 3500 \cdot \left(1 + 6 \cdot \frac{6}{100}\right) = 4760$$

Rozdíl 4964,82 – 4760 = 204,82 K byl odpovědí.

Zvláštností početnice bylo použití zkratek pro měnu. V některých úlohách byla použita zkratka K (již zastaralé označení dřívější rakousko-uherské koruny; k tomuto značení jsme byli donuceni se vrátit v době druhé republiky – období Protektorátu Čechy a Morava), jinde byla použita správná aktuální zkratka měny samostatného Československa Kč.

Druhá úloha:

Na pozemek si vypůjčil obchodník 10.000 Kč a uvolil se splatiti dluh za 7 let. a) Kolik musí splácet ročně při 5% úroku podle tabulky umořitelů? b) Sestavte jeho umořovací plán! ([JM2], str. 31, 1728,20; zaokrouhlováním vznikne rozdíl 20 h)

Pro poskytování úvěrů byly v textu vyzdvihnuty jen Zemská banka pro obce a Hypoteční banka česká v Praze a v Brně. Nevím, zda to bylo pouze ze subjektivního důvodu autorů, či nějakého sponzorství ze strany zmíněných bank.

Karel Jon, Antonie Maxová: *Početnice pro školy měšťanské, díl IV. pro jednoroční učebné kursy (IV. třídy),* Česká grafická unie a. s., Praha, 1924, 120 stran.

Žáci na občanských, respektive měšťanských školách mohli pokračovat jednoročním učebním kursem, pokud nepostoupili na střední školu nebo na učební obor. Pro tento kurs byl určen čtvrtý díl početnice, jež nesl v názvu *pro školy měšťanské*, tedy nejen pražské občanské. Toto pokračování bylo obecně schváleno výnosem č. 16.565 ministerstvem školství a národní osvěty ze dne 16. února 1924.

Učebnice byla rozdělena na dvě základní části.

- *Počítání veličinami vztažnými a jednoduché rovnice*.
- *Procvičování učiva na příkladech z různých oborů lidského vědění a podnikání*.

Ve druhé části byla podkapitola IX. s názvem *Práce a spoření* (7 stran), v níž se nacházela malá skupina úloh z finanční matematiky. Zaměření úloh bylo přizpůsobeno jen k připomenutí látky, která byla vyložena v předešlém roce ve třetím díle. K žádnému rozšíření nedošlo.

Analyzovaná sada učebnic byla standardem výuky matematiky na občanských, resp. měšťanských školách, se kterými jsme se seznámili již na konci devatenáctého a od počátku dvacátého století (viz předešlá kapitola). Každé téma mělo krátký teoretický úvod, ukázky praktického využití, několik řešených příkladů (ne vždy) a skupinu úloh na procvičení. Uvádění výsledků úloh nebylo vždy pravidlem, a proto ne každá učebnice byla vhodná také k samostudiu.

Existovalo mnoho dalších kvalitních sad učebnic nebo jednotlivých učebnic matematiky pro tento typ škol, v nichž byl žák seznamován se základy finanční matematiky. Ze všech zmiňme alespoň čtyřdílné *Počtářovo dílo* Jana Zlámala z let 1929 až 1931, početnice Františka Kneidla z roku 1886 (tři sešity) přepracované Josefem Martincem v letech 1934 až 1936, třídílná sada početnic Josefa Vlčka z let 1932 až 1936 nebo opět třídílné *Počty na škole měšťanské* Františka Úlehly z let 1933 až 1936.

Základními tématy spolu s jednoduchým a složitým či složeným úrokováním bylo střádání a umořování. Žák byl také pravidelně seznamován se směnkami a částečně také s vedením účetních knih. Vzhledem k mládí samostatného státu byla v učebnicích hesla pro podporu nejen státnosti, ale i hospodářských otázek. Byly rozebírány základní myšlenky celkového pozvednutí společnosti, zdůrazňována koupě nemovitostí, význam soukromých půjček, vkladních knížek a listů, účasti na výdělečných podnicích, nakupování cenných papírů atd. Hlavním mottem k překonání poválečných problémů bylo pracovat a šetřit, k čemuž měl být žák svědomitě veden učiteli, kteří měli v učebnicích vhodný studijní materiál.

3.2 Učebnice pro reálky, gymnázia, reálná gymnázia a střední školy

Jindřich Muk: *Aritmetika pro nižší třídy škol středních,*
***díl I.*, 4. změněné vydání,**
Profesorské nakladatelství a knihkupectví, s. r. o., Praha, 1931, 130 stran;
***díl II.*, 4. změněné vydání,**
Profesorské nakladatelství a knihkupectví, s. r. o., Praha, 1932, 140 stran;
***díl III.*, 4. změněné vydání,**
Profesorské nakladatelství a knihkupectví, s. r. o., Praha, 1933, 146 stran.

V předešlé kapitole jsme analyzovali kvalitní sadu učebnic aritmetiky pro nižší třídy středních škol autorů Rudolfa Bendla a Jindřicha Muka ([BM1], [BM2], [BM3]), jež vycházela v upravených vydáních během dvacátých let dvacátého století. Na počátku třicátých let Jindřich Muk sám, neboť v roce 1922 spoluautor Rudolf Bendl zemřel, upravil učebnice pro čtvrté vydání. Všechny tři díly byly schváleny výnosy ministerstva školství a národní osvěty – první díl: 8. května 1931, č. j. 61.960-31-II, druhý díl: 16. července 1932, č. j. 83.994/32-II/1 a třetí díl: 8. května 1933, č. j. 48.883/33-II/1.

Podíváme-li se na nová vydání z pohledu obsahu finanční matematiky, došlo k několika změnám. V prvním díle již nebyl samostatný paragraf s názvem *O penězích*. Ve druhém díle byl paragraf nazvaný *Počet úrokový* rozšířen ze 13 na 16 stran. Náplň zůstala zachována, rozšíření nastalo po grafických úpravách pro zlepšení přehlednosti. K dalšímu viditelnému vylepšení nedošlo, učebnice například stále neměly oddělení výsledků.

Další, již páté vydání v polovině třicátých let bylo upravováno podle návrhu učebních osnov pro střední školy z roku 1933. V matematice došlo jen k malým změnám. Finanční matematika zůstala zachována, jen byla posunuta do částí o poměrech a úměrách. Jednotlivé paragrafy byly slučovány pro lepší orientaci do větších celků.

Tyto tři díly byly doplněny ještě čtvrtým, který neměl totožný počet vydání. V roce 1934 vyšel potřetí v nezměněném vydání. Byl opatřen výsledky, měl rozsah 185 stran, ale neobsahoval finanční matematiku.

Bohumil Bydžovský: *Aritmetika pro IV. – VII. třídu škol středních, díl druhý,* 1. vydání, Jednota českých matematiků a fysiků, Praha, 1920, 160 stran.

Jednalo se o druhý díl aritmetiky pro vyšší třídy středních škol. Spolu s prvním dílem (viz [B1D]) zcela odpovídaly učebnicím téhož autora z let před rokem 1918 ([B45] a [B67]), které byly analyzovány v předešlé kapitole. Stejně jako [B45] a [B1D] také neobsahoval finanční matematiku. Finanční matematika ve druhém díle, respektive v [B67] byla naprosto totožná. Kompletní výklad, řešené příklady i úlohy k procvičení byly přejaty. Jen jednotka měny se z K změnila na Kč.

Učebnice byly považovány za velmi kvalitní, a proto nebylo třeba je znatelně přepracovávat. V letech 1926 a 1927 vyšly také ve slovenštině, do níž byly přeloženy Michalem Ondrušem.

Bohumil Bydžovský, Stanislav Teplý, František Vyčichlo:
***Aritmetika pro IV. třídu středních škol,* 6. vydání,**
Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1934, 108 stran.

Po školské reformě z roku 1933 vznikala nová přepracovaná vydání starších učebnic. Také učebnice [B1D] a [B2D], které jsem zmínil výše, se dočkaly nového vydání. Bohumil Bydžovský na nich spolupracoval se Stanislavem Teplým a Františkem Vyčichlem. Došlo k novému rozdělení podle osnov nižších a vyšších tříd středních škol. Byla osamostatněna učební látka určená pro čtvrté třídy a zbytek byl umístěn do druhé knihy.

Tato aritmetika určená pro čtvrtou třídu byla schválena výnosem č. 40454/34-II/1 ministerstva školství a národní osvěty ze dne 9. dubna 1934 pro střední školy s československým jazykem vyučovacím ve znění českém. Poznamenáno navíc bylo vyloučení všech předchozích vydání jako zastaralých a nevyhovujících reformě. Tato učebnice obsahovala z pohledu na finanční matematiku jen dvou stránkovou podkapitolu nazvanou *Peněžnictví* zaměřující se na koupi dlužních úpisů nebo ukládání peněz na běžný účet. Nacházelo se v ní sedm úloh na procvičení. Uveďme jednu z nich bez dalšího komentáře.

Kolik Kč vyplatí záložna za směnku na 3 000 Kč, která ji byla prodána 36 dní před dobou splatnosti s 6% diskontem? (bez poplatku)
([B4], str. 62, výsledek: 2 982 Kč)

Bohumil Bydžovský, Stanislav Teplý, František Vyčichlo:
***Aritmetika pro V. – VII. třídu středních škol*, 6. vydání,**
Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1935, 212 stran.

Jednalo se o výše avizované nové vydání přepracovaným podle učebních osnov z roku 1933. Bylo schváleno výnosem č. 97 825/35-II/1 ministerstva školství a národní osvěty ze dne 22. srpna 1935 pro střední školy s československým jazykem vyučovacím v českém znění.

Podobně jako u předešlých vydání byly jednotlivé kapitoly seskupeny do objemnějších částí. Byly seřazeny podle umístění do jednotlivých tříd a student měl přehled, která látka patří do které třídy. Část s názvem *Složené úrokování* byla třetí závěrečnou částí pro šestou třídu, měla rozsah třiceti stran a byla rozdělena do sedmnácti kapitol.

Část III. *Složené úrokování*

11. Základní úloha (1 strana);
12. Vzrůst kapitálu (2 strany);
13. Mocnitel *n* lomený (1 strana);
14. Diskont. Výpočet procenta (2 strany);
15. Výpočet doby (1 strana);
16. Střádání. Základní úlohy (2 strany);
17. Složitější případy střádán. (1 strana);
18. Důchod. Základní úlohy (2 strany);
19. Složitější případy důchodu (3 strany);
20. Úmor. Základní úlohy (2 strany);
21. Umořovací částka (1 strana);
22. Umořovací plán (1 strana);
23. Další úlohy o umořování (3 strany);
24. Částečné dluhopisy (obligace); státní renta (1 strana);
25. Ostatní dluhopisy (2 strany);
26. Směnky a šeky (2 strany);
27. Peněžní ústavy (3 strany).

Členění, náplň a styl výkladu zůstal zachován, porovnáme-li toto vydání s dřívějšími, tj. v předešlé kapitole analyzovaná učebnice [B67] (rok vydání 1911), či v této kapitole připomenutá učebnice [B2D] (rok vydání 1920). Viditelnou změnou bylo nové členění, jež bylo podrobnější – některé odstavce kapitol se staly dokonce samostatnými kapitolami. Také úlohy byly uzpůsobeny praktickým změnám – aktuální úrokové míry, četnost připisování úroků, výše vkladů, atd. Učebnice „šla" s dobou a potvrzovala svou kvalitu. Navíc bylo rozšířeno množství úloh k procvičení ze 49 na 79, tedy nárůst o více než 60 %. Pro jednotlivé části bylo číslování úloh spojité, dříve byly úlohy číslovány od jedné pro každou kapitolu zvlášť. Bohužel však nebyly uváděny jejich výsledky. Nebyly již uváděny tabulky úročitelů, střadatelů a umořovatelů. Student měl předloženy logaritmické tabulky, pomocí nichž všechny výpočty mocnin převáděl na součin a součin na součet. Tuto změnu v postupech výpočtů lze sledovat ve většině publikací studovaného období. Podrobný rozbor jedné úlohy je uveden níže v analýze sbírky [OZ].

Uveďme dvě typické úlohy nového vydání aritmetiky bez dalšího komentáře.

16. Otec vložil 31. prosince 1935 do spořitelny 5 000 Kč; 15. července 1936 vybral z nich však 2 000 Kč. Kolik měl ve spořitelně 31. prosince 1937 při 4% sl. úr.: a) celoročním; b) pololetním? ([B58], str. 138)

51. Měřte čas, který potřebuje nejrychlejší a nejpomalejší počtář ze třídy k správnému vyplnění těchto tabulek:

Důchod koncem	Úrok	K	r	p (%)	n (let)
roku	p. a.		8 400	4	10
roku	p. s.		6 000	$3\frac{1}{2}$	8
roku	p. a.	64 880	8 000	4	
pol.	p. s.		4 800	5	9

Důchod koncem	Úrok	K	r	p (%)	n (let)
roku	p. a.	95227		$3\frac{3}{4}$	12
roku	p. a.	25790	5 000		6
pol.	p. s.	189139		4	12
pol.	p. s.	100000		4	14

([B58], str. 149)

Hodnocení učebnice

Zachováním kvality výkladových částí a předložením studijního materiálu k procvičování byla učebnice vzorovou publikací, jež byla sestavena podle zásad stanovených školskou reformou z roku 1933. Studenti mohli samostatně zpracovat a vyřešit reálné situace s použitím vyložené látky, která tak ztratila nálepku „suché“ teorie. Tato učebnice byla důkazem dalšího pokroku ve vyučování na středních školách. Dotisky šestého vydání vycházely ještě po druhé světové válce do roku 1948. Byly určeny pro pátou až osmou třídu středních škol – látka v šestém vydání určena pro sedmou třídu v nich byla uváděna pro sedmou a osmou třídu. Jedinou další znatelnou změnou bylo vynechání druhé a třetí odmocniny mnohočlenu ve druhé části určené pro pátou třídu.

Bohumil Bydžovský, Stanislav Teplý, František Vyčichlo, Jan Vojtěch: *Sbírka úloh z matematiky pro IV.–VIII. třídu středních škol*, 4., úplně přepracované vydání, Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1936, 274 stran.

Obdobně jako předešlá učebnice [B58] i tato sbírka doznala podobných změn. Látka, v ní obsažená, byla rozdělena podle jednotlivých tříd, což jsme v dřívějších vydáních, jež jsme analyzovali v předešlé kapitole ([BVS]), neviděli. Nové vydání bylo schváleno ministerstvem školství a národní osvěty výnosem č. 118 673/36-II/1 ze dne 16. září 1936 jako pomocná kniha pro střední školy s československým jazykem vyučovacím ve znění českém. Zůstalo základní rozdělení *Úlohy z aritmetiky*, *Výsledky úloh z aritmetiky*, *Úlohy z geometrie* a *Výsledky úloh z geometrie*, ale část věnující se aritmetice byla dále rozdělena na dílčí části pro jednotlivé ročníky. Rozdělení do ročníků zcela odpovídalo členění v učebnici [B58], tzn. složené úrokování bylo třetí částí pro šestou třídu, pak následovalo jen souhrnné opakování. Část nazvaná *Složené úrokování* byla členěna na kapitoly se stejnými názvy a stejným řazením jako v učebnici [B58]. Obsahovala celkem 107 úloh, což byl také nárůst oproti dřívějším vydáním (bývalo 55 úloh) téměř na dvojnásobek. Také závěrečné opakování pro šestou třídu zahrnující 98 úloh obsahovalo 40 úloh z finanční matematiky. Tuto část předešlá vydání neobsahovala.

Uveďme jednu úlohu ze shrnující části a vyřešme ji.

2308. Částka 200 000 Kč má býti zaplacena osmi stejnými splátkami. První splátka bude splacena koncem 4. roku, následující vždy o 2 roky později. Jak velké budou splátky při 4 % p. s.? ([BS], str. 132, výsledek: 55 587,90 Kč)

Řešení: výše dluhu J = 200 000 Kč, splátka (anuita) a, úroková míra i = 4 %, resp. kvocient $q = 1 + i$.

Protože byla dána úroková míra p. s., počítalo se s pololetním úrokováním. Dluh byl tedy do první splátky úročen osmkrát a jeho zbytek mezi jednotlivými splátkami čtyřikrát. Pro splacení byl sestaven následující výraz, jenž zobrazoval splácení dluhu, který byl po celkem 18 letech roven nule.

$$\left(\left(\left(\left(\left(\left((J \cdot q^8 - a) \cdot q^4 - a\right) \cdot q^4 - a\right) \cdot q^4 - a\right) \cdot q^4 - a\right) \cdot q^4 - a\right) \cdot q^4 - a\right) \cdot q^4 - a$$

Po algebraických úpravách student obdržel rovnici:

$$J \cdot q^{36} = a \cdot \frac{(q^4)^8 - 1}{q^4 - 1},$$

z níž vyjádřil výši splátky a, dosadil dané hodnoty

$$a = J \cdot q^{36} \cdot \frac{q^4 - 1}{(q^4)^8 - 1} = 200000 \cdot 1{,}04^{36} \cdot \frac{1{,}04^4 - 1}{(1{,}04^4)^8 - 1}$$

a pomocí logaritmů vypočítal její hodnotu a = 55 587,86 Kč, kterou pak zaokrouhlil na desetihaléře.

Množství úloh uvedených ve sbírce vyžadovalo aktivní přístup studenta. Pouze několik úloh z každé kapitoly bylo zadáno tak, aby stačilo dosadit do základního vzorce. Vše bylo postaveno na základní myšlence vést studenta k samostatnosti.

Jednalo se o další vydání kvalitní sbírky příkladů, jež jistě ocenil každý učitel pro přípravy svých hodin i student pro přípravu na testy nebo závěrečné zkoušky. Student dále kladně pravděpodobně přijal existenci oddělení výsledků, což mu usnadnilo vlastní kontrolu.

Aritmetiky pro reálky, gymnasia a reálná gymnasia **sepsané Jindřichem Mukem.**

Jednalo se o dalšího kvalitního autora a další kvalitní řadu učebnic aritmetiky pro reálky, gymnázia a reálná gymnázia. Zvlášť vycházely učebnice určené pro reálky a zvlášť učebnice určené pro gymnázia a reálná gymnázia. V obou řadách byl zachován stejný pořádek kapitol. Jediným podstatnějším rozdílem bylo, že reálky byly z pohledu matematiky náročnější do páté třídy. Například látka páté třídy na reálkách obsahovala jako první kapitolu s názvem *Mocniny a odmocniny*, což byla pro stejný ročník na gymnáziích poslední kapitola, a většinu látky šestého ročníku gymnázií. Sedmý ročník na reálkách i na gymnáziích byl shodně zakončen kapitolou nazvanou *O počtu pravděpodobnosti*.

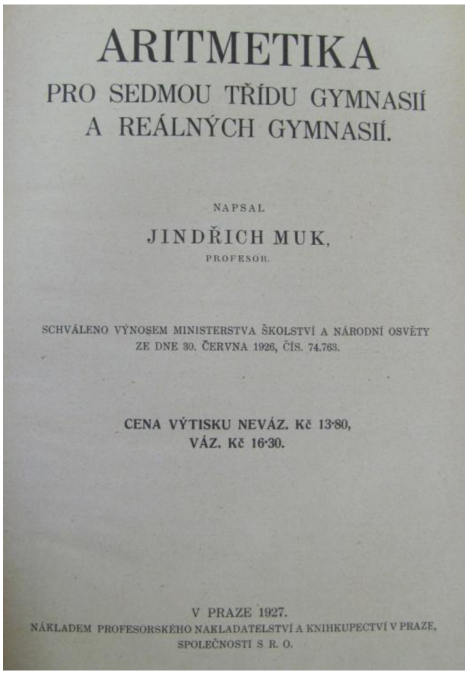
Než se zaměříme na analýzu učebnice aritmetiky pro sedmou třídu, jež obsahovala finanční matematiku v kapitole s názvem *Složité úrokování*, resp. v pozdějších vydáních s názvem *Složené úrokování*, uveďme stručný a přehledný seznam aritmetik autora Jindřicha Muka pro zmiňovaný typ středních škol.

- ***Aritmetika pro čtvrtou třídu reálek***
  (1. vydání – 1924, 209 stran; 2. vydání – 1928, 206 stran);
- ***Aritmetika pro pátou třídu reálek***
  (1. vydání – 1925, 174 stran; 2., v podstatě nezměněné vydání – 1930, 184 stran);
- ***Aritmetika pro šestou a sedmou třídu reálek***
  (1. vydání – 1926, 168 stran; 2., v podstatě nezměněné vydání – 1930, 184 stran);
- ***Aritmetika pro vyšší třídy reálek***
  (1. a 2. vydání dvě výše zmíněné učebnice s názvem obsahujícím „pro pátou", resp. „pro šestou a sedmou třídu"; 3. vydání – 1936, 339 stran).

- ***Aritmetika pro čtvrtou a pátou třídu gymnasií a reálných gymnasií***
  (1. vydání – 1924, 261 stran; 2. vydání – 1928, 260 stran);
- ***Aritmetika pro šestou třídu gymnasií a reálných gymnasií***
  (1. vydání – 1925, 123 stran);
- ***Aritmetika pro sedmou třídu gymnasií a reálných gymnasií***
  (1. vydání – 1927, 148 stran);
- ***Aritmetika pro vyšší třídy gymnasií, reálných gymnasií a reformovaných reálných gymnasií***
  (1. vydání – dvě výše zmíněné učebnice s názvem obsahujícím „pro šestou", resp. „pro sedmou třídu"; 2. upravené vydání – 1935, 303 stran, dotisky 2. upraveného vydání – po druhé světové válce do roku 1948).

Všechny učebnice obou těchto řad vyšly nákladem Profesorského nakladatelství a knihkupectví, spol. s r. o. v Praze. Obsahovaly výnos ministerstva školství a národní osvěty o schválení pro střední školy s československým vyučovacím jazykem v českém znění. Měly jednotnou osvědčenou strukturu a způsob výkladu. Stručná a přehledná teorie byla dále objasněna na nezanedbatelném množství řešených příkladů. Množství úloh k procvičení, jež uzavíraly každou kapitolu, bylo dostačující. Pro rychlejší orientaci studentů byly výsledky uváděny vždy v závěru každé části. Výklad byl doplňován poznámkami. Totéž platilo i u úloh, kde autor používal poznámky pod čarou k upřesnění zadání (například způsob zaokrouhlování).

Jindřich Muk: *Aritmetika pro sedmou třídu gymnasií a reálných gymnasií*, 1. vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, spol. s r. o., Praha, 1927, 148 stran.


ARITMETIKA
PRO SEDMOU TŘÍDU GYMNASIÍ
A REÁLNÝCH GYMNASIÍ.

NAPSAL
JINDŘICH MUK,
PROFESOR.

SCHVÁLENO VÝNOSEM MINISTERSTVA ŠKOLSTVÍ A NÁRODNÍ OSVĚTY
ZE DNE 30. ČERVNA 1926, ČÍS. 74.763.

CENA VÝTISKU NEVÁZ. Kč 13·80,
VÁZ. Kč 16·30.

V PRAZE 1927.
NÁKLADEM PROFESORSKÉHO NAKLADATELSTVÍ A KNIHKUPECTVÍ V PRAZE,
SPOLEČNOSTI S R. O.

Jednalo se o jednu z učebnic aritmetiky výše zmíněné řady určené pro sedmý ročník gymnázií a reálných gymnázií. Byla schválena výnosem ministerstva školství a národní osvěty ze dne 30. června 1926, číslo 74.763. Obsahovala celkem šest tematických celků, jež byly dále děleny na číslované paragrafy. Řazení celků se v průběhu let měnilo. Obvykle byly závěrečnými tématy středoškolské matematiky derivace a integrály, ale ne v každé učebnici tomu tak bylo, například právě v této učebnici byly derivace a integrály vykládány před řadami, kombinatorikou a pravděpodobností. Oblast finanční matematiky se nacházela ve čtvrté části, která logicky navazovala na třetí kapitolu o řadách, jejíž teorii student při řešení problémů finanční matematiky potřeboval.

Obsah učebnice

I. O derivaci a jejím použití (26 stran);
II. O integrálu a jeho použití (17 stran);
III. Řady (16 stran);
IV. Složité úrokování (38 stran);

V. Nauka o skupinách (19 stran);
VI. O počtu pravděpodobnosti (28 stran).

Analýzu jsem zaměřil na zmiňovanou čtvrtou část, kapitola byla rozdělena na čtyři paragrafy a její rozsah byl uspokojivý:
§ 7. *Vzrůst kapitálu uloženého na úroky z úroků* (8 stran);
§ 8. *Úspora* (5 stran);
§ 9. *Důchod a úmor* (11 stran);
§ 10. *O peněžnictví* (14 stran).

§ 7. Vzrůst kapitálu uloženého na úroky z úroků

Tento první paragraf věnovaný základní myšlence finanční matematiky byl rozdělen na pět očíslovaných odstavců. V prvním nazvaném *Základní úvahy* bylo zejména objasněno, že při složitém úrokování nejsou úroky přímo úměrné době, ale vzrůstají rychleji. To bylo předvedeno na příkladu. Další vyložená myšlenka operovala s nestejnou délkou úrokovacího období – představeny byly období rok (p. a.), pololetí (p. s.), čtvrtletí (p. q.) a měsíc (p. m.). Na počátku byl předpoklad, že student již bezpečně ovládal termíny úrok, dlužník a věřitel. V závěru byla poznamenána praxe peněžních ústavů, ze kterých si každý občan mohl při uložení peněz udělat dlužníka. Tyto ústavy úročily 4% nebo 4½% roční úrokovou mírou, pololetně, vždy 30. června a 31. prosince.

Druhý odstavec se věnoval hledání konečné hodnoty jistiny a nesl název *Výpočet konečné hodnoty kapitálu*. Nejprve zde byla vyřešena opakující se obecná úloha, na jakou částku vzroste jistina *K* při složitém úrokování za *n* období při úrokové míře *p* %. Cílem bylo odvodit klasický vzorec

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Zde byla tisková chyba, která byla způsobena příliš rychlými úvahami nad spojitostí s geometrickou řadou, a bylo nesprávně zapsáno $K_n = K \cdot \left(1 + \frac{q}{100}\right)^n$. Tento vzorec byl již správně přepsán do tvaru známého z geometrických řad $K_n = K \cdot q^n$.

Tato chyba byla v pozdějších vydáních odstraněna a kvalita učebnice byla ještě zvýšena použitím značení běžným ve finančnictví: $\frac{p}{100}$ bylo nahrazeno *i* a *q* bylo nahrazeno *r*, což bylo označení pro *úročitel*.

Následovaly dva konkrétní řešené příklady. První byl spolu s klasickým výpočtem vyjádřen také graficky a u výpočtu bylo poznamenáno využití tabulek úročitelů, jež byly s přesností na šest desetinných míst na 50 úrokovacích období. Druhý měl v zadání ne celočíselný počet úrokovacích období a porovnával sloučení složitého a jednoduchého úrokování s neceločíselnou mocninou úročitele. Závěrem druhého odstavce bylo zapsáno, že na procvičení látky této části byly určeny úlohy číslo 1 až 13.

Třetí odstavec byl věnován opačnému úkolu a nesl název *Výpočet počáteční (diskontované) hodnoty kapitálu*. Teorie byla mnohem kratší, neboť bylo využito látky druhého odstavce. Z výše uvedeného vzorce byl pouze odvozen vzorec:

$$K = \frac{K_n}{q^n} = K_n \cdot q^{-n}.$$

Následoval jeden řešený příklad a zápis, že úlohy číslo 14 až 20 byly určeny k hledání diskontované hodnoty jistiny.

Čtvrtý odstavec s názvem *Výpočet doby* měl stejnou strukturu. S využitím logaritmů byl odvozen z výše uvedeného vzorce vzorec pro výpočet n, který měl tvar

$$n = \frac{\log K_n - \log K}{\log q}.$$

Bylo zdůrazněno, že ne vždy byl počet úrokovacích období celočíselný, a tak bylo nutno přepočítat tuto část na dny. Měsíc měl být počítán jako 30 dní.

Využití logaritmických tabulek nebylo vysloveně zdůrazněno, autor jej považoval za samozřejmost. Doporučeny jsou Valouchovy *Tabulky logaritmické*, 5. nebo 6. vydání ([VA]). Byly uvedeny celkem tři řešené příklady s velmi podrobným komentářem a úlohy k procvičení s čísly od 21 do 28.

Poslední, pátý odstavec věnovaný výpočtům procenta, resp. úrokové míry obsahoval odvozený vzorec pro výpočet hodnoty $q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K}}$, jeden řešený příklad a čísla úloh k procvičení (29 až 32).

Uveďme bez dalšího komentáře znění dvou z těchto 32 úloh.

12. *Někdo si vypůjčil 4000 Kč na 5 % p. a. a splatil na dluh za 2 roky 1000 Kč a pak za 2 roky 2000 Kč. Kolik Kč jest dlužen ke konci pátého roku?*

([MJ7], str. 71, výsledek: 1847,50 Kč)

27. *Někdo odkázal 25 000 Kč, které se mají 2 % p. s. úrokovati tak dlouho, až by pololetní úroky stačily na nadání (pololetní) 900 Kč. Za kolik let to bude?*

([MJ7], str. 72, výsledek: 15 let)

§ 8. Úspora

Tento paragraf byl rozdělen pouze na dva odstavce s názvy *Základní úloha*, tedy výpočet úspory a *Obrácená úloha*. Základní úlohu autor uvedl takto:
Který kapitál K nastřádá si do konce n-tého období při p% úrokové míře za období, kdo ukládá počátkem každého období a Kč? ([MJ7], str. 72)

Následoval rozpis konečných hodnot jednotlivých vkladů a závěrem byl vzorec pro součet n členů geometrické posloupnosti s kvocientem q a prvním členem $a \cdot q$, jenž byl sepsán do tvaru s využitím *střadatele* Q_n.

$$K = a \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a \cdot Q_n$$

Byly zpracovány jeden příklad pro představu jen s použitím hodnoty střadatele a tři podrobně řešené příklady. Druhý odstavec obsahoval jen odvození vzorce. U každého odstavce bylo poznamenáno, jaké úlohy na procvičení byly k němu určeny – pro první odstavec úlohy 1 až 15, pro druhý odstavec úlohy 16 až 25.

Uveďme kompletní znění druhého řešeného příkladu a vyřešme jednu z daných úloh.

Příklad 2. Ukládáme-li počátkem roku a = 800 Kč při půlletní úrokové míře (p = 2 % p. s.), pak celková úspora ke konci n = 14. roku má hodnotu:

$$K = 800 \cdot q^{28} + 800 \cdot q^{26} + \cdots + 800 \cdot q^4 + 800 \cdot q^2.$$

$$K = 800 \cdot q^2 \cdot \frac{q^{28} - 1}{q^2 - 1} = 800 \cdot \frac{q}{q+1} \cdot q \cdot \frac{q^{28} - 1}{q - 1},$$

$$K = 800 \cdot \frac{q}{q+1} \cdot Q_{28} = 800 \cdot Q_{28} \cdot \frac{1}{1 + q^{-1}},$$

$$K = 800 \cdot 37{,}792235 \cdot \frac{1}{1{,}980392} = 15266{,}60 \text{ Kč}.$$

([MJ7], str. 74)

18. *Dluh 20 000 Kč, splatný za 5 let, má se zaplatiti předem deseti částkami, splatnými ke konci každého půlletí. Jak velké budou splátky (na Kč) při úrokování 2½ % p. s.?* ([MJ7], str. 76)

Řešení: dluh 20 000 Kč je budoucí hodnota dluhu za 5 let, což znamená, že je postačující tuto částku „naspořit“ splátkami a za danou dobu. Dostáváme rovnici

$$20000 = a \cdot q^9 + a \cdot q^8 + \cdots + a \cdot q + a,$$

kde q má hodnotu 1,025. Pravou stranu rovnice upravíme. Vzniklý zlomek je polhůtním střadatelem, jehož hodnotu můžeme nalézt v tabulkách nebo vypočítat na kalkulačce. Poté jsou kroky již velmi triviální:

$$20000 = a \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = a \cdot 11{,}203382 \Rightarrow a = \frac{20000}{11{,}203382} = 1785{,}175.$$

Výše splátky po daném způsobu zaokrouhlení musela být 1785 Kč.

§ 9. Důchod a úmor

Tento paragraf byl rozdělen na pět odstavců. První odstavec byl nazván *Důchod* a popisoval tento pojem, uváděl, že důchod = renta a že se jedná o pravidelné vyplácení stejné částky z uložené jistiny. Tato základní myšlenka byla opět zasazena do úlohy, která zněla:

Který kapitál K nutno počátkem prvního období uložiti, abychom mohli požívati po n období důchodu r, splatného vždy ke konci období při p% úrokování za období? ([MJ7], str. 77)

Je zřejmé, že je myšlen bezprostřední dočasný důchod. Nejdůležitější bylo zjistit současnou hodnotu budoucích výplat, tzn. jednotlivé výplaty musely být odúročeny, neboli diskontovány k okamžiku založení. Pro výše uvedenou obecnou úlohu byly jednotlivé výplaty rozepsány a odúročeny: první = r/q, druhá = r/q^2, třetí = r/q^3, …, až poslední n-tá = r/q^n. Tyto počáteční hodnoty jednotlivých výplat byly zapsány do součtu, v němž bylo opět využito znalostí geometrických posloupností a z finanční matematiky byl představen pojem *zásobitele*, který byl označen R_n. Uveďme odvození:

$$K = \frac{r}{q^n} + \frac{r}{q^{n-1}} + \cdots + \frac{r}{q^2} + \frac{r}{q} = \frac{r}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot R_n.$$

Po něm následoval řešený příklad a pak byl uveden ještě jeden tvar odvozeného vzorce, který bývá typický pro novější učebnice:

$$K = \frac{100 \cdot r}{p} \cdot \left(1 - \frac{1}{q^n}\right),$$

kde *p* je úroková míra uvedená v procentech.

V závěru bylo zapsáno, že k procvičení byly určeny úlohy číslo 1 až 16.

V dalších čtyřech odstavcích nazvaných *Úmor, Percentuální úmor, Umořovací plán* a *Výpočet počtu období* se uložená jistina, z níž byl vyplácen důchod, nazývala dluh, který musel být splacen neboli umořen.

V prvním zmíněném odstavci byl pozměněn vzorec $K = r \cdot R_n$ na tvar $r = K \cdot U_n$, v němž U_n je převrácená hodnota zásobitele a nazývala se *umořovatel*. Z toho plynulo, že *r* byla nutná výše splátky, aby byl dluh splacen za *n* úrokovacích období. Odstavec byl ukončen jedním vyřešeným příkladem.

Další odstavec popisoval výši splátky v procentech dluhu značenou r_1. Jednou částí byla hodnota procentuálního úmoru u, pro nějž existovaly tabulky, a druhou úroková míra *p*. Obě části byly uváděny v procentech a výše splátky *r* měla hodnotu jejich součtu z výše dluhu. Uveďme příslušné vzorce s odvozeními:

$$r = K \cdot U_n \Rightarrow$$

$$r_1 = 100 \cdot U_n = \frac{100 \cdot q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1} = \frac{p \cdot q^n}{q^n - 1} = p + u \Rightarrow$$

$$u = r_1 - p = \frac{p \cdot q^n}{q^n - 1} - p = \frac{p}{q^n - 1} \Rightarrow$$

$$r = K \cdot U_n = \frac{r_1}{100} \cdot K.$$

Užití konečného vzorce bylo předvedeno na jednom řešeném příkladu.

Další důležitý odstavec byl věnován umořovacím plánům, u nichž byla ukázána důležitost pochopení chování dluhu během splácení. Student by měl být schopen vypočítat hodnotu dluhu, výši úmoru a úroku pro každé úrokovací období během splácení dluhu. Vše bylo ukázáno na řešeném příkladu. K procvičení byly určeny úlohy číslo 17 až 26.

Poslední odstavec tohoto paragrafu byl věnován hledání počtu období nutných ke splacení dluhu. Odvozený vzorec obsahoval logaritmy, neboť neznámá *n* byla v základním vzorci v exponentu.

Základní vzorec

$$r = K \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1}$$

byl zlogaritmován a upraven na tvar

$$n = \frac{\log r - \log[r - K \cdot (q-1)]}{\log q}.$$

Pak byl přepsán do tvaru

$$n = \frac{\log(p+u) - \log u}{\log q},$$

jenž byl při znalosti procentuálního neboli percentuálního úmoru podle autora pohodlnější. S tím lze souhlasit pouze za předpokladu využití finančních tabulek. Následovaly dva řešené příklady a zmíněny byly úlohy na procvičení od 27 do 39.

Uveďme a vyřešme dvě úlohy na procvičení.

14. *Za jak velkou rentu půlletní můžeme vyměniti rentu celoroční 3000 Kč, po 12 let trvající, při úrokování 2½ % p. s., má-li stejně dlouho trvati?* ([MJ7], str. 83)

Řešení: Na úloze je zajímavé, že ne všechny údaje jsou nezbytné. Při podmínce stejné doby trvání, 12 let, není nutno tuto dobu uvádět. Postačí zapsat do rovnosti konečnou nebo počáteční hodnotu výplat během jednoho roku. Do rovnosti dosadíme ihned dané hodnoty a veličinu půlletní renty označíme *a*.

Rovnost počátečních hodnot (jednotlivé výplaty nutno odúročit k počátku roku) má poté tvar:

$$\frac{3000}{1{,}025^2} = \frac{a}{1{,}025} + \frac{a}{1{,}025^2}.$$

Rovnost konečných hodnot (jednotlivé výplaty nutno úročit ke konci roku):

$$3000 = a \cdot 1{,}025 + a.$$

Hodnota půlletní renty měla být podle autora zaokrouhlena na celé koruny. Výsledkem bylo 1481 Kč.

32. *Za kolik let umoří se dluh 200 000 Kč 4 % p. a. úročený, splácí-li se ročně 20 000 Kč na úrok i na úmor, a kolik Kč zbude ještě dluhu koncem následujícího roku?* ([MJ7], str. 85)

Řešení: Nejprve je nutno nalézt, ve kterém roce dojde ke splacení. Podle vzorce

$$n = \frac{\log r - \log[r - K \cdot (q-1)]}{\log q}$$

s použitím daných hodnot r = 20 000 Kč, K = 200 000 Kč, q = 1,04 vychází hodnota n, jež označuje počet úrokovacích období, přibližně 13,02. Z toho plyne, že dluh bude doplacen po čtrnáctém roce, v němž však bude splátka již velmi nízká. Jako první vypočítáme výši dluhu na konci třináctého roku a pak tuto částku zúročíme na hodnotu na konci čtrnáctého roku, čímž odpovíme na druhou část otázky.

Výše dluhu po třinácti letech:

$$D_{13} = K \cdot q^{13} - r \cdot \frac{q^{13}-1}{q-1} = 478 \text{ Kč}.$$

Tuto částku zúročíme, abychom získali hodnotu nutné splátky na konci čtrnáctého roku: 478·1,04 = 497 Kč. Výsledek uvedený v učebnici byl 13 let a 500 Kč. Domnívám se, že výsledek byl zaokrouhlen na desítky Kč, neboť v některých úlohách byl tento způsob zaokrouhlování doporučen.

Po 39 úlohách na procvičení byla v učebnici vložena před paragrafem číslo 10 ještě skupina úloh s titulkem *Smíšené úlohy*. Bylo jich dvacet a tematicky byly zaměřeny na učební látku z předešlých paragrafů, tj. složité úrokování a řady obecně. Uveďme bez dalšího komentáře znění dvou z nich.

12. *Z lesa odhadnutého na 20 000 m^3, jehož roční přírůstek jest 5¾ %, má býti ročně jen tolik poraženo, aby za 20 let měl 30 000 m^3. Kolik m^3 dříví se ročně poraží?* ([MJ7], str. 87, výsledek: 870 m^3)

14. *Někdo má platiti po 6 let koncem roku 2000 Kč a chce se zbaviti povinnosti této dvěma stejnými částkami, splatnými ke konci prvního a čtvrtého roku. Kolik Kč zaplatí při 4 % p. a.?* ([MJ7], str. 87, výsledek: 5772 Kč)

§ 10. O peněžnictví

Poslední paragraf analyzované čtvrté kapitoly popisoval strukturu a charakter peněžnictví a finančnictví u nás s definicemi nejdůležitějších pojmů.

Paragraf byl rozdělen na čtyři části.

A. Peníze a měna (platidla, měna kovová, měna papírová, inflace, deflace, devalvace);
B. Náhražky peněz (šek, směnka);
C. Cenné papíry (dluhopisy, losy, dividendové papíry);
D. Peněžní ústavy (úvěr, spořitelny, záložny, banky).

Studentům zde byl předložen cenný, přehledný a poměrně podrobný pohled na oblast finančnictví. Byly mu představeny nabízené produkty a stručně objasněny jejich vlastnosti, užití a úskalí. Na závěr bylo uvedeno 14 úloh na procvičení. Uveďme bez dalšího komentáře jednu z nich.

8. Někdo koupí komunální dlužní úpisy zemské banky při kursu 87,50 za nomin. 10 000 Kč (půlletní kupon 200 Kč) a 10 000 Kč uloží na vkladní knížku (2¼ % p. s.). Co jest výhodnější? ([MJ7], str. 101, výsledek: dl. úpis 2,28 % p. s.)

Paragraf číslo 10 byl psán menším typem písma, než byly ostatní části učebnice. Autoři tuto látku odlišili od ostatních částí učebnice, neboť ji považovali za nepovinné, rozšiřující učivo.

Hodnocení učebnice

Jednalo se o velmi kvalitní učebnici ucelené řady učebnic. Didaktická stránka byla konstantní a pečlivá od první učebnice až po poslední učebnici. Pokud si na ni student zvykl, byly mu knihy dobrým rádcem i pomocníkem. Jako učitel jsem velmi ocenil uvádění výsledků vždy po jednotlivých částech. Úlohy byly pečlivě propočítány, nenarazil jsem na žádnou hrubou chybu. Výše zmíněný překlep během odvozování byl výjimkou. Rozsahem i podrobnostmi učebnice odpovídala tomu, jaké skupině studentů byla určena. S takovým typem učebnic bych rád pracoval z pozice studenta i učitele.

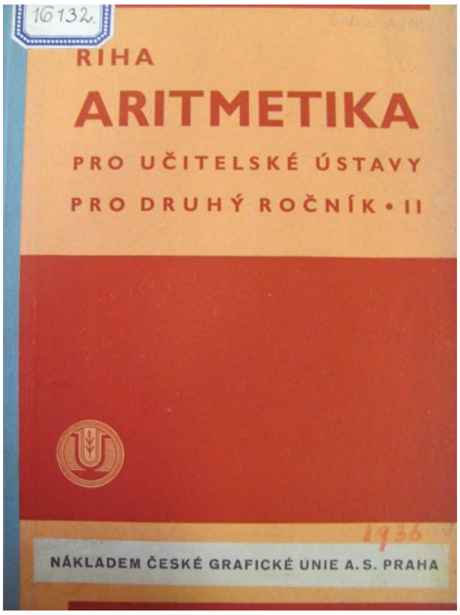
3.3 Učebnice pro učitelské ústavy

Alois Říha: ***Aritmetika pro učitelské ústavy. Díl první. Pro první ročník,*** **1. vydání, Československá grafická Unie a. s., Praha, 1935, 168 stran.**

Jednalo se o první díl kvalitně zpracované sady učebnic aritmetiky pro učitelské ústavy. Díl určený prvním ročníkům byl schválen výnosem č. 56.282/35–II/1 ministerstva školství a národní osvěty ze dne 14. května 1935 pro tyto ústavy s československým vyučovacím jazykem v českém znění. Ve slovenském jazyce vyšel v roce 1937 a přeložil jej Gabriel Čeněk.

Náplní učebnice byly početní úkony s celými čísly, dělitelnost, zlomky, početní úkony s neúplnými čísly, rovnice, poměry, úměry a funkce. Každá kapitola obsahovala přehlednou teorii, k níž byly připojeny řešené příklady a úlohy na procvičení. Celkem bylo otištěno 996 úloh. Učebnice neobsahovala finanční matematiku.

Alois Říha: ***Aritmetika pro učitelské ústavy. Díl druhý. Pro druhý ročník,*** **1. vydání, Československá grafická Unie a. s., Praha, 1936, 116 stran.**



Jednalo se o druhý díl sady učebnic aritmetiky pro učitelské ústavy. Díl pro druhý ročník byl schválen výnosem č. 96.091/35–II/1 ministerstva školství a národní osvěty ze dne 25. srpna 1935 jako učebnice pro učitelské ústavy s československým vyučovacím jazykem v českém znění. Tato formulace byla později pozměněna na tvar: s českým jazykem vyučovacím. Ve slovenském jazyce vyšel v roce 1938, opět v překladu Gabriela Čeňka. Další pozdější změnou, která nezasahovala do matematického obsahu, bylo udělení doložky během období protektorátu: *Ministerstvo školství a národní osvěty svoluje výnosem ze dne 9. března 1942, č. 25.190/42–II/2, aby se mohlo učebnice až na další užívati, a to v úpravě nařízené* *po provedené revisi*. Revize se týkala změny zkratky měny z Kč na K, změn zeměpisných názvů na německé (např. Brno na Brünn) a začernění některých slovních spojení v textu. Obsah matematiky zůstával zachován.

Náplní tohoto dílu byly mocniny, odmocniny, logaritmy, aritmetika občanského a kupeckého života. Kapitola s názvem *Aritmetika občanského a kupeckého života* (rozsah 39 stran) obsahovala:

25. Spolkový počet (5 stran);
26. Počet průměrný (1 strana);
27. Počet směšovací (5 stran);
28. Procentový počet (6 stran);
29. Užití procentového počtu v kupeckém životě (8 stran);
30. Úrokování kapitálu a peněžní ústavy (2 strany);
31. Jednoduchý počet úrokový (5 stran);
32. Počet diskontový (3 strany);
33. Počet lhůtový (4 strany).

Analýzu jsem zaměřil na podkapitoly 30 až 33.

Student byl nejprve seznámen s principem úrokování uložených či půjčených peněz. Dále se dozvěděl základní charakteristiky bank a spořitelen.

V části o jednoduchém úrokování byl odvozen vzorec pro výpočet úroku. Následovalo vyjádření postupně všech dalších veličin, na které se mohla úloha ptát. Žák dostal k dispozici skupinu užitečných vzorců:

$$ú = \frac{K \cdot p \cdot r}{100},$$

$$K = \frac{100 \cdot ú}{p \cdot r},$$

$$p = \frac{100 \cdot ú}{K \cdot r},$$

$$r = \frac{100 \cdot ú}{K \cdot p}.$$

Na užití každého tvaru vzorce, kde *ú* byl úrok, *K* vložený kapitál, *p* úroková míra v procentech a *r* počet roků uložení, byl vyřešen jeden příklad – jednou pomocí vzorce, podruhé pro ověření pomocí úsudku. Číselné hodnoty zvolené v příkladech nebyly náročné na výpočty a student se mohl zaměřit na smysl otázek. Následovalo 21 úloh na procvičení, z nichž některé obsahovaly varianty a) až c). Čtrnáct z nich tvořily slovní úlohy a jedna z nich byla označena puntíkem jako obtížnější. Naznačme její náročnost.

• *660. Někdo má uložen kapitál ve 3 bankách. V první bance má pětinu jmění na 5 %, v druhé má dvě třetiny na 4½ % a ve třetí zbytek na 4¾ %. Kolik má kde uloženo, béře-li celkem ročně na úrocích 1 668 Kč?* ([Ř2], str. 98)

Řešení: V prvním kroku bychom chtěli zjistit celkovou výši uloženého kapitálu. Sestavili bychom rovnici

$$\frac{1}{5}K \cdot \frac{5}{100} + \frac{2}{3}K \cdot \frac{4\frac{1}{2}}{100} + \left(1 - \frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right)K \cdot \frac{4\frac{3}{4}}{100} = 1668,$$

z níž K = 36 000 Kč. Tuto částku bychom již jen rozdělili na pětinu, dvě třetiny a zbytek, tedy: 7 200 Kč, 24 000 Kč a 4 800 Kč.

Další část učebnice byla věnována diskontu. *Diskont* byl definován jako srážka z účtu čili z konta nebo z dluhu. Bylo předvedeno obecné řešení, kde konečná hodnota K' byla složena z diskontované hodnoty K a diskontu. Diskont neměl vlastní označení a byl zaveden jen jako rozdíl $K' - K$. Studentovi bylo předloženo několik tvarů vzorce:

$$K' = K + \frac{K \cdot p \cdot r}{100},$$

$$K = \frac{100 \cdot K'}{100 + p \cdot r},$$

$$diskont = K' - \frac{100 \cdot K'}{100 + p \cdot r} = \frac{K' \cdot p \cdot r}{100 + p \cdot r}.$$

Následoval příklad řešený pomocí vzorce a úsudkem. Vše bylo podrobně komentováno. V poznámce bylo také zdůrazněno, že při delší době než jedno úrokovací období se diskont počítá složitým úrokovým počtem. Tato část byla uzavřena patnácti úlohami na procvičení. Uveďme bez rozboru jednu z nich.

673. Za knihy zaplatil učitel Kč 200 hotově a po dalších 9 měsíců platil po 80 Kč. Která jest cena knih za hotové (5% diskont)? ([Ř2], str. 102, výsledek: 905 Kč)

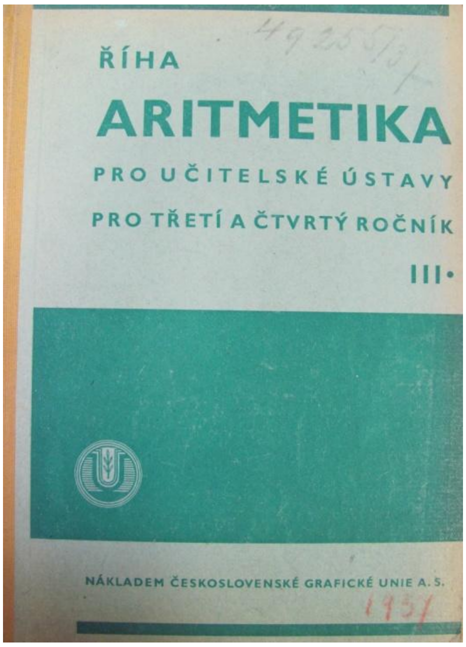
Poslední část věnující se finanční matematice byla také poslední částí učebnice. Ve lhůtném počtu student pracoval s rovnováhou úroků získaných jednoduchým úrokováním. Nebylo to tedy nic podstatně rozšiřujícího. Student pracoval pouze s přeměnou platebních lhůt. Ukažme myšlenku s použitím řešeného příkladu.

Někdo má splatiti 200 Kč hotově, 500 Kč po 4 měsících a 300 Kč po 5 měsících. Zaplatí však po 2 měsících 400 Kč a zbytek chce zaplatiti najednou. Kdy to bude? ([Ř2], str. 104, výsledek: 600 Kč za 4½ měsíce)

Studentovi bylo předloženo jedenáct úloh na procvičení.

Učebnice byla uzavřena skupinou úloh z látky celého ročníku, mezi nimiž se nacházely čtyři úlohy z finanční matematiky. Celkem bylo v knize 736 úloh na procvičení. V závěru byl oddíl s výsledky úloh.

Alois Říha: *Aritmetika pro učitelské ústavy. Díl třetí. Pro třetí a čtvrtý ročník,* 1. vydání, Československá grafická Unie a. s., Praha, 1937, 186 stran.



Toto byl poslední, třetí díl určený pro závěrečné dva ročníky studia. Byl schválen výnosem č. 151.898/36–II/1 ministerstva školství a národní osvěty ze dne 18. listopadu 1936 jako učebnice pro učitelské ústavy s československým vyučovacím jazykem v českém znění. Bylo zdůrazněno, že stať o penězích, směnkách, cenných papírech, jednoduchém účetnictví a pozemkových knihách sepsal František Dokonal. Slovenské vydání se nepodařilo dohledat, pravděpodobně nebylo uskutečněno z důvodu vzniku protektorátu a odtržení Slovenska na počátku druhé světové války.

Obsah látky třetího ročníku byl rozdělen do osmi kapitol, pak následoval dodatek pro čtvrtý ročník rozdělený do dvou částí.

I. Peníze. Směnky. Cenné papíry (23 stran);

II. Soustavy rovnic prvního stupně o dvou a více neznámých (20 stran);

III. Rovnice druhého stupně o jedné neznámé (28 stran);

IV. Rovnice vyššího stupně o jedné neznámé (6 stran);

V. Soustavy rovnic druhého stupně o dvou neznámých (10 stran);

VI. Řady (16 stran);

VII. Složitý počet úrokový (19 stran);

VIII. Úlohy pro opakování celé látky pro IV. ročník (22 stran);

IX. Dodatek pro IV. ročník;

A. Jednoduché účetnictví (21 stran);

B. Pozemkové knihy (4 strany).

Sedmá kapitola s názvem *Složitý počet úrokový* byl závěrečnou kapitolou třetího ročníku. Byl rozdělen na následujících pět částí, z nichž pátá nebyla věnována úrokování, ale byla shrnující skupinou úloh pro celý třetí ročník.

35. *Složité úrokování* (6 stran);

36. *Střádání* (5 stran);

37. *Důchod (renta)* (2 strany);

38. *Úmor dluhu* (3 strany);

39. *Smíšené úlohy z celé látky III. ročníku* (3 strany).

Složité úrokování bylo srovnáno s pojmem kapitalizace, nebo-li přičítání úroků z úroku. Výše kapitálu po jednotlivých úrokovacích obdobích byla porovnána se členem geometrické posloupnosti. Student měl na očích vzorec pro výši kapitálu *K* po *n* úrokovacích obdobích při úrokové míře *p* %

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = K \cdot q^n.$$

Následovaly čtyři podrobně řešené příklady na výpočet zúročené jistiny, jeden na výpočet původní (diskontované) jistiny, příklad na výpočet úrokové míry a jeden na výpočet doby úročení s využitím logaritmů. Na procvičení bylo předloženo 25 úloh. Vyřešme podrobně jednu z nich.

767. Někdo si vypůjčil soukromě 2 000 Kč a podepsal směnku na 2 500 Kč splatnou za 3 roky. Na kolik % si půjčil? ([Ř3], str. 111)

Řešení: Zapsali jsme zadané hodnoty do základního vzorce a obdrželi jsme:

$$2500 = 2000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3.$$

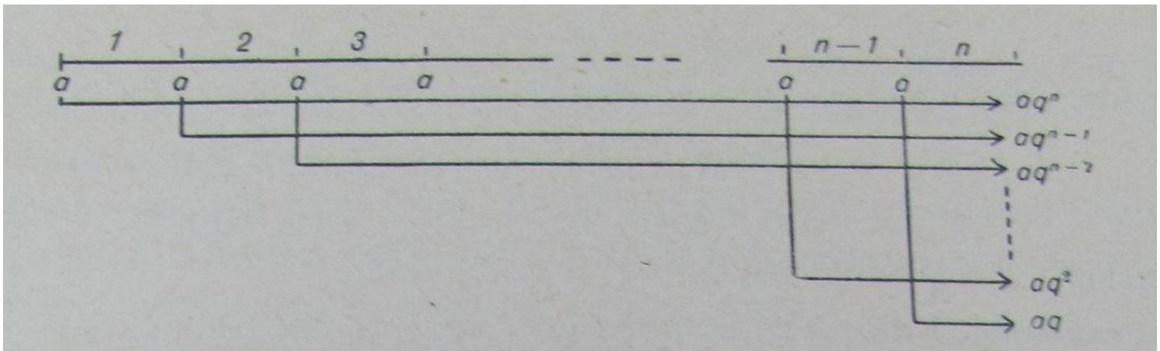
Vyjádřili jsme *p*, postupovali logaritmicky (dnes kalkulačkou):

$$1 + \frac{p}{100} = q = \sqrt[3]{\frac{2500}{2000}} \Longrightarrow \log q = \frac{1}{3} \cdot (\log 2500 - \log 2000);$$

$$1 + \frac{p}{100} = q = 1{,}077 \Longrightarrow p = 7{,}7.$$

Dotyčný si půjčil na roční úrokovou míru 7,7 %.

Další podkapitola byla věnována pravidelnému střádání, tedy ukládání stejné částky v pravidelných intervalech. Byly v ní vyloženy různé typy střádání rozdělené podle okamžiku vkladu – střádání počátkem období, střádání koncem období a střádání, kde ukládací lhůta nebyla totožná s úrokovací lhůtou. Ke každému typu byl po krátkém teoretickém úvodu podrobně vyřešen jeden, pro první typ dva příklady. Autor neopomenul zavést pojem *středatel* se standardním označením Q_n, respektive Q_{n-1} pro ukládání na konci úrokovacího období. Veškeré odvozené vzorce byly postaveny na znalostech geometrické posloupnosti, neboť, jak víme, jedná se o částečný součet následných členů tohoto typu posloupnosti. Vše bylo doprovázeno názornými obrázky. Reprodukujme na ukázku jeden z nich.



Obr. 15.

([Ř3], str. 113)

Obrázek 15. byl věnován střádání počátkem období a zobrazoval u každého vkladu a počet úrokovacích období, tedy exponent kvocientu q. Pod obrázkem byl součet rozepsán a byl odvozen známý vzorec

$$S_n = a \cdot q + a \cdot q^2 + a \cdot q^2 + a \cdot q^2 + \cdots + a \cdot q^{n-1} + a \cdot q^n \Rightarrow$$

$$S_n = a \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = a \cdot Q_n.$$

Studentovi bylo na procvičení předloženo dalších 25 úloh, z nichž některé byly v porovnání s řešenými příklady velmi náročné. Jako „pomoc“ obsahovaly některé úlohy krátký návod. Porovnejme náročnost dvou z nich.

778. Kolik je třeba ukládati vždy počátkem pololetí, aby nastřádaný kapitál vzrostl za 8 let na 10 000 Kč? (4 %, pololetní úrokování.) ([Ř3], str. 115)

Řešení: Vyjádřili jsme výši anuity ze základního vzorce. Hodnotu jmenovatele jsme dohledali v tabulkách. Anuitu jsme vypočítali

$$a = \frac{S_n}{q \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}} = \frac{10000}{1{,}02 \cdot \frac{1{,}02^{16} - 1}{1{,}02 - 1}} = \frac{10000}{19{,}01207} \doteq 526\ Kč.$$

Bylo tedy nutno na počátku každého pololetí uložit 526 Kč.

790. Kolik se nastřádá, ukládá-li se vždy počátkem roku a 1. červencem po 800 Kč při 4% celoročním úrokování za 15 let? (Stanovte jednoduchým úrokováním hodnotu obou vkladů na konci roku! Tím se úloha převede na střádání koncem období.) ([Ř3], str. 116–7)

Řešení: Nejprve jsme nalezli hodnotu dvou vkladů na konci roku přesně podle rady, čímž jsme získali hodnotu myšleného jednorázového vkladu:

$$a = 800 \cdot 1{,}02 + 800 = 1616\ K\text{č}.$$

Tuto hodnotu jsme použili do vzorce $S'_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a \cdot Q'_n$, kam jsme spolu s ní dosadili příslušnou úrokovou míru a počet úrokovacích období:

$$S'_n = 1616 \cdot \frac{1{,}04^{15} - 1}{1{,}04 - 1} = 1616 \cdot 20{,}02359 \doteq 32358\ K\text{č}.$$

Za 15 let jsme tímto způsobem spoření nastřádali 32 358 Kč.

Následující podkapitola byla zaměřena na vyplácení důchodu. Výklad měl stejnou strukturu, jen teorii předcházel příklad pro uvedení do tématu. Byl však vyřešen až po odvození vzorce a zavedení pojmu *zásobitel* s označením R_n, což bylo doplněno o vysvětlení jeho převrácené hodnoty U_n a názvu *umořovatel*.

Při odvozování vzorce pro zakládací výši důchodu D při výplatě renty r na konci úrokovacího období byly odúrokovány jednotlivé výplaty podle počtu úrokovacích období a dospělo se k rovnici:

$$D = \frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \frac{r}{q^3} + \cdots + \frac{r}{q^{n-1}} + \frac{r}{q^n} = \frac{r}{q^n} \cdot (1 + q + \cdots + q^{n-3} + q^{n-2} + q^{n-1}),$$

z níž po algebraických úpravách vznikl obvyklý vzorec:

$$D = \frac{r}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot R_n \Rightarrow r = D \cdot U_n.$$

Se zavedením umořovatele se bezprostředně přešlo bez úloh na procvičení k umořování dluhu, tedy k následující podkapitole. Ve třech řešených příkladech se využívaly vzorce odvozené u důchodů. V poznámce bylo zdůrazněno pochopení odvození.

Poznámka. Není třeba počítati dosazováním do vzorců. Možno si je vždy znovu ve zvláštním případě odvoditi. ([Ř3], str. 121)

Podkapitola byla ukončena sedmnácti úlohami procvičujícími důchody a dluhy. Byly však zaměřeny pouze na základní prvky a nebyly ztěžovány žádnými odchylkami (např. frekvence splátek). Bez dalšího komentáře uveďme znění jedné z úloh.

807. Dluh 100 000 splácela obec ročními anuitami po 10 000 Kč.
Vypočítejte:
a) stav dluhu na počátku 8. roku,
b) za kolik let se dluh splatí a která bude poslední splátka? (5 %, celor.) (Počet let odhadněte z tabulek. Poslední splátku vypočtěte podle návodu v učebnici!)

([Ř3], str. 122, výsledek: a) 59 289,96 Kč, b) 15 let, 2107,20 Kč)

Shrnující část s názvem *Smíšené úlohy z celé látky III. ročníku* obsahovala 51 úloh s pořadovými čísly od 810. do 860.; devět úloh bylo z oblasti finanční matematiky.

Hodnocení sady aritmetik pro učitelské ústavy

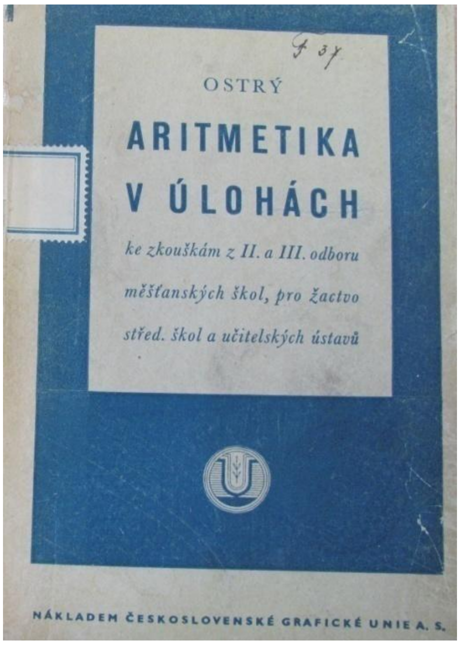
Studenti na učitelských ústavech se nemohli vyhnout závěrečné zkoušce z matematiky, a proto jistě ocenili kvalitu této sady učebnic. Nároky na úroveň matematiky absolventů těchto ústavů byly vysoké, neboť jejich hlavním úkolem bylo pozvednutí nejen profesní, ale především vědomostní úrovně učitelů na všech typech škol (viz např. [MU]).

Analyzovaná sada učebnic obsahovala přehlednou teorii podpořenou řešenými příklady a byla studnicí 2872 úloh na procvičení. Domnívám se, že po pečlivém vyřešení tohoto množství úloh mohl být každý student ke zmíněné zkoušce připraven. Jako doplňující literaturu mohl ještě použít sbírku řešených úloh [OZ], která je analyzována následně.

Zaměřili jsme se na části věnované finanční matematice. Sledovali jsme, jaké její části byly vykládány a procvičovány. Nastíněnou úroveň jsme porovnali s požadavky na jiných školách. Závěrem můžeme říci, že všechny podstatné finanční operace byly vyloženy. Základní zaměření na jednoduché a složité úrokování bylo rozšířeno o aplikace – střádání, důchod a umořování dluhu. Vše bylo doprovázeno dostatečným počtem úloh na procvičení. U některých, kde si autor nebyl jist, zda nejsou příliš náročné, uvedl krátký návod řešení. Každá učebnice obsahovala pro kontrolu samostatný oddíl výsledků. Učebnice tak byly vhodné i během takových situací jakými je dlouhodobá absence či samostudium. Rozsah jednotlivých dílů nebyl přehnaný a neodrazoval tak studenty.

Jednalo se o kvalitní učebnice, které bych svým studentům jistě doporučil. Získání doložek ministerstva pro období protektorátu lze považovat za důkaz, že zaměření bylo čistě matematické. Učebnice se používaly až do roku 1948, kdy se učitelské ústavy transformovaly na střední pedagogické školy.

Metoděj Ostrý: *Aritmetika v úlohách ke zkouškám z II. a III. odboru měšťanských škol, pro žactvo střed. škol a učitelských ústavů*, Československá grafická Unie a. s., Praha, 1936, 290 stran.



Jednalo se o sbírku 569 řešených úloh, kterou Metoděj Ostrý reagoval na výnos ministerstva školství a národní osvěty ze dne 23. ledna 1935, jímž byl vydán nový zkušební řád pro zkoušky učitelské způsobilosti pro měšťanské školy. Požadavky na matematiku byly rozšířeny a tato kniha měla usnadnit přípravu na ni.

Knihu tvořilo pečlivě komentované vzorové řešení úloh. Slovní komentáře byly častým pomocným doplňkem podrobných postupů. Znalost vzorců byla předpokládána a studentům bylo již předkládáno jen minimální nutné odvozování.

Náplň matematiky na učitelských ústavech zde byla rozdělena do 38 paragrafů. Jednotlivé úlohy byly číslovány od první v prvním paragrafu po 569-tou ve 38-ém paragrafu.

Obsah sbírky

§ 1. Rozklad v kmenné činitele (6 stran);

§ 2. Největší společná míra *M* (1 strana);

§ 3. Nejmenší společný násobek *n* (1 strana);

§ 4. Zlomky (4 strany);

§ 5. Limity (3 strany);

§ 6. Rovnice prvního stupně o jedné neznámé (9 stran);

§ 7. Úměry (7 stran);

§ 8. Mocniny (6 stran);

§ 9. Odmocniny (6 stran);

§ 10. Čísla imaginární (6 stran);

§ 11. Rovnice iracionální (9 stran);

§ 12. Logaritmy (11 stran);

§ 13. Logaritmické rovnice (4 strany);

§ 14. Exponenciální rovnice (9 stran);

§ 15. Procentový počet (5 stran);

§ 16. Jednoduché úrokování (2 strany);

§ 17. Lhůtový počet (2 strany);

§ 18. Cenné papíry (2 strany);

§ 19. Směšovací počet (4 strany);

§ 20. Rovnice prvního stupně o dvou neznámých (12 stran);

§ 21. Rovnice prvního stupně o třech a více neznámých (11 stran);

§ 22. Rovnice druhého stupně o jedné neznámé (13 stran);

§ 23. Rovnice třetího stupně o jedné neznámé (7 stran);

§ 24. Rovnice čtvrtého stupně o jedné neznámé (8 stran);

§ 25. Rovnice pátého a vyššího stupně o jedné neznámé (8 stran);

§ 26. Rovnice druhého stupně o dvou neznámých (14 stran);

§ 27. Rovnice vyšších stupňů o dvou neznámých (8 stran);

§ 28. Rovnice vyšších stupňů o více neznámých (6 stran);

§ 29. Aritmetické řady (5 stran);

§ 30. Geometrické řady (10 stran);

§ 31. Řady aritmeticko-geometrické (3 strany);

§ 32. Jiné řady (9 stran);

§ 33. Složité úrokování (25 stran);

§ 34. Skupiny (9 stran);

§ 35. Binomická poučka (4 strany);

§ 36. Počet pravděpodobnosti (11 stran);

§ 37. Pojišťování (10 stran);

§ 38. Derivace a extrémy funkcí (13 stran).

Z hlediska studia úrovně finanční matematiky jsem podrobil analýze následující paragrafy:

§ 16. (obsahoval 5 úloh s pořadovými čísly od 206 do 210);

§ 17. (obsahoval 5 úloh s pořadovými čísly od 211 do 215);

§ 18. (obsahoval 5 úloh s pořadovými čísly od 216 do 220);

§ 33. (obsahoval 44 úloh s pořadovými čísly od 435 do 478).

Paragrafy číslo 16 až 18 se zabývaly jednoduchým úrokováním a jeho využitím v běžném životě. Znalost tohoto úrokování patřila mezi základní dovednosti studentů, proto autor považoval za dostatečné uvedení jen malého množství příkladů. Uveďme pro posouzení náročnosti jednu úlohu včetně kompletního řešení z každého z těchto paragrafů.

§ 16. Jednoduché úrokování – úloha číslo 208

Jest určiti diskonto z 1250 Kč, splatných po 10 měsících, při 5% úrokové míře.

$$1\% = 1250\text{ Kč} : \left(100 + \frac{5\cdot 10}{12}\right) = 12\text{ Kč},$$

$$100\% = 1200\text{ Kč}.$$

Hotové zaplacení činí 1200 Kč, diskonto se rovná 1250 Kč – 1200 Kč = 50 Kč. ([OZ], str. 93)

§ 17. Lhůtový počet – úloha číslo 213

Dlužník má složiti za 6 měsíců 3000 Kč; kolik zaplatí hotově, hodlá-li zapraviti zbytek za 9 měsíců?

Dlužník si může ponechati

$$3000\ \textit{Kč}\ 6\ \textit{měs.} = 18000\ \textit{Kč}\ 1\ \textit{měs.},$$

ponechá si však

$$(3000 - x)\ \textit{Kč}\ 9\ \textit{měs.} = 9\ (3000 - x)\ \textit{Kč}\ 1\ \textit{měs.}$$

takže

$$9\ (3000 - x) = 18000$$

$$x = 1000$$

Dlužník zaplatí hotově 1000 Kč. ([OZ], str. 95)

§ *18. Cenné papíry* – úloha číslo 217

Při kterém kursu byla koupena 6% půjčka, vynáší-li ve skutečnosti 6,4 %?

Kursovní cena je pod pari a rovná se jistině, která při 6,4 % dává ročně 6 Kč úroku.

$$x = \frac{6 \cdot 100}{6{,}4} = 93{,}75$$

Dluhopisy byly koupeny při kursu 93,75 Kč. ([OZ], str. 96)

V těchto třech paragrafech věnujících se finanční matematice bylo studentovi předloženo k opakování celkem 15 úloh zaměřených na jednoduché úrokování a některé jeho aplikace. Při takto malém množství příkladů byla volena jednoduchá témata, aby si student mohl látku pohodlně a rychle zopakovat.

Mnohonásobně větší rozsah měl paragraf číslo 33, jehož příklady operovaly se složitým úrokování. Témata byla standardní jako v jiných sbírkách – růst uložené jistiny, splatnost pohledávky, pravidelné vklady, zakládání důchodů a splácení dluhů. Úlohy nebyly voleny přehnaně složité, protože tento typ úrokování měl více využití. Aby byla pokryta celá škála, autor jich zařadil 44. Uveďme dva příklady s řešením na ukázku.

Úloha číslo 447

Při které úrokové míře lze vyrovnati dluh 820 Kč dvěma splátkami po 441 Kč, a to koncem 1. a 2. roku?

$$820 = \frac{441}{q} + \frac{441}{q^2},$$

$$820q^2 - 441q - 441 = 0,$$

$$q_{1,2} = \frac{441 \pm \sqrt{441(441 + 820 \cdot 4)}}{1640} = \cdots = \frac{441 \pm 1281}{1640} = \frac{21}{20}, -\frac{21}{41}.$$

Záporný kořen nemá významu.

$$1 + \frac{x}{100} = \frac{21}{20},$$

$$100 + x = 105,$$

$x = 5$ %. ([OZ], str. 221)

Úloha číslo 467

Někdo si ukládal po 20 let na počátku roku 1000 Kč, čímž si zajistil po dalších 15 roků rentu. Jest určiti její výši při 4% celoročním složitém úrokování.

Po 20 letech jest

$$aq^{20} + aq^{19} + aq^{18} + \cdots + aq = \frac{x}{q} + \frac{x}{q^2} + \frac{x}{q^3} + \cdots + \frac{x}{q^{15}},$$

$$aq \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1} = \frac{x}{q^{15}} \cdot \frac{q^{15} - 1}{q - 1},$$

$$a \cdot Q_{20} = x \cdot R_{15},$$

$$x = \frac{a \cdot Q_{20}}{R_{15}} = a \cdot Q_{20} \cdot U_{15} = 1000 \cdot 30{,}969202 \cdot 0{,}089941,$$

$$\log 30969 = 4{,}49093, \log 0{,}089941 = 0{,}095396 - 2,$$

$$\log x = 3{,}44489,$$

$x = 2785{,}4$ Kč. ([OZ], str. 233)

Hodnocení sbírky

Jednalo se o kvalitní sbírku řešených příkladů, s jejíž pomocí student mohl velmi rychle projít a zopakovat všechna témata středoškolské matematiky požadovaná při závěrečných zkouškách. Množství příkladů nebylo přehnané, průměrně jich připadalo 15 na jeden paragraf. Jak jsme viděli výše, počty se téma od tématu velmi lišily. To bylo dáno především náročností a rozsahem látky, požadavky ke zkoušce atd. Postoj autora v tom mohl hrát, podle mého názoru, jen vedlejší roli.

Sbírka se bohužel nedala používat zcela osamoceně. Při sledování jednotlivých kroků především právě v paragrafech věnovaných finanční matematice bylo nutné mít k dispozici spolu s logaritmickými tabulkami také tabulky úročitelů, střadatelů a umořovatelů; ty však nebyly součástí sbírky. Autor předpokládal, že sbírka bude používána jako doplňkový studijní materiál zejména pro závěrečná shrnutí a přípravu ke zkouškám.

3.4 Shrnutí

Náš národ byl před rokem 1918 v područí Rakousko-Uherské Monarchie. Mohlo by se zdát, že po osamostatnění by byla logická snaha o zpřetrhání všech pout s minulostí. Naštěstí se to nestalo. Náš nový samostatný stát převzal z minulých let to dobré. Mezi kvalitní části dědictví patřil také vzdělávací systém, který existoval již od osmnáctého století a byl léty zdokonalován. Na jednotlivých vydáních učebnic matematiky jsme sledovali, jak velké procento textů bylo převzato z dob před první světovou válkou. Mnohá vydání doznala jen málo změn a byla vzápětí k dispozici mládeži nového samostatného státu, jenž si byl vědom potřeby vzdělaných lidí, a proto v rozvoji školství nepolevoval.

Zásadní profesionální dohled nad učebnicemi matematiky měla v naší republice *Jednota českých matematiků a fyziků*, jež se významně podílela na vydávání učebnic a garantovala jejich odbornou úroveň.

Nutnost vzdělaných lidí pro řízení infrastruktury státu vedla spolu se zkvalitněním středního školství k zakládání a rozšiřování vysokých škol. Uchazeči o vysokoškolské studium ocenili kvalitu a hloubku učební látky na středních školách. Náročnost středoškolského studia především na reálkách a gymnáziích se nevyhnuly ani oblasti finanční matematiky. Pro svědomitého absolventa střední školy nebyl problém vypracovat umořovací plán či plán spoření a obecně dobře hospodařit s penězi. Domnívám se, že pokud by kvalita vzdělávání neměla tuto úroveň, byl by dopad hospodářské krize na přelomu dvacátých a třicátých let dvacátého století ještě hlubší.

3.5 Seznam literatury a internetových zdrojů

Obecná literatura

[BŠ] Bohumil Bydžovský: *Naše středoškolská reforma*, 1. vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, Praha, 1937, 331 stran.

[JR] Jana Jarošová: *Václav Příhoda a jeho přínos české reformní pedagogice,* bakalářská práce, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Teologická fakulta, katedra pedagogiky, České Budějovice, 2009, 44 stran.

[MŠ] František Morkes: *Kapitoly o školství, o ministerstvu a jeho představitelích (období let 1848–2001)*, 1. vydání, Pedagogické muzeum J. A. Komenského, Praha, 2002, 122 stran.

[MU] František Morkes: *Učitelé a školy v proměnách času (pokus o základní chronologii 1774–1946)*, 1. vydání, Pedagogické muzeum, Plzeň, 1999, 59 stran.

[ŠI] Karel Šindelář: *Vzpomínka na akademika Bohumila Bydžovského*, str. 325–328, Časopis pro pěstování matematiky, ročník 105, číslo 3, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1980.

Učebnice

[B1D] Bohumil Bydžovský: *Aritmetika pro IV. – VII. třídu škol středních, díl první,* 1. vydání, Jednota českých matematiků a fysiků, Praha, 1920, 187 stran.
(druhé až páté vydání – 1921–1924, 176 stran)

[B2D] Bohumil Bydžovský: *Aritmetika pro IV. – VII. třídu škol středních, díl druhý,* 1. vydání, Jednota českých matematiků a fysiků, Praha, 1920, 160 stran.
(2. vydání – 1921, 160 stran, 3. vydání – 1924, 144 stran)

[B4] Bohumil Bydžovský, Stanislav Teplý, František Vyčichlo: *Aritmetika pro IV. třídu středních škol*, 6. vydání, Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1934, 108 stran.
(7., v podstatě nezměněné vydání – 1940, 108 stran, dotisky 7. vydání – 1945–1948)

[B58] Bohumil Bydžovský, Stanislav Teplý, František Vyčichlo: *Aritmetika pro V. – VII. třídu středních škol*, 6. vydání, Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1935, 212 stran.

(dotisk 6. vydání – 1947, 208 stran)

[BS] Bohumil Bydžovský, Stanislav Teplý, František Vyčichlo, Jan Vojtěch: *Sbírka úloh z matematiky pro IV.–VIII. třídu středních škol*, 4., úplně přepracované vydání, Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1936, 274 stran.

(1. vydání – 1912, 332 stran, 2. vydání – 1920, 332 stran, 3. vydání – 1924, 335 stran, 4. přepracované vydání – 1936, 274 stran, dotisky 4. vydání – 1945–1948, 274 stran)

[JM1] Karel Jon, Antonie Maxová: *Početnice pro pražské školy občanské, díl I. pro první třídu*, Česká grafická unie a. s., Praha, 1922, 115 stran.

[JM2] Karel Jon, Antonie Maxová: *Početnice pro pražské školy občanské, díl II. pro druhou třídu*, Česká grafická unie a. s., Praha, 1923, 116 stran.

[JM3] Karel Jon, Antonie Maxová: *Početnice pro pražské školy občanské, díl III. pro třetí třídu*, Česká grafická unie a. s., Praha, 1923, 116 stran.

[JM4] Karel Jon, Antonie Maxová: *Početnice pro školy měšťanské, díl IV. pro jednoroční učebné kursy (IV. třídy)*, Česká grafická unie a. s., Praha, 1924, 120 stran.

[M1] Jindřich Muk: *Aritmetika pro nižší třídy škol středních, díl I.*, 4. změněné vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, s. r. o., Praha, 1931, 130 stran.

(1., 2. a 3. vydání – viz [BM1], 5. celkem nezměněné vydání – 1935, 119 stran)

[M2] Jindřich Muk: *Aritmetika pro nižší třídy škol středních, díl II.*, 4. změněné vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, s. r. o., Praha, 1932, 140 stran.

(1., 2. a 3. vydání – viz [BM2], 5. celkem nezměněné vydání – 1934, 148 stran)

[M3] Jindřich Muk: *Aritmetika pro nižší třídy škol středních, díl III.*, 4. změněné vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, s. r. o., Praha, 1933, 146 stran.

(1., 2. a 3. vydání – viz [BM3], 5. celkem nezměněné vydání – 1934, 122 stran)

[MJ1] Jindřich Muk: *Aritmetika pro čtvrtou třídu reálek*, 1. vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, spol. s r. o., Praha, 1924, 209 stran.

(2. vydání – 1928, 206 stran)

[MJ2] Jindřich Muk: *Aritmetika pro pátou třídu reálek*, 1. vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, spol. s r. o., Praha, 1925, 174 stran.
(2., v podstatě nezměněné vydání – 1930, 184 stran)

[MJ3] Jindřich Muk: *Aritmetika pro šestou a sedmou třídu reálek*, 1. vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, spol. s r. o., Praha, 1926, 168 stran.
(2., v podstatě nezměněné vydání – 1930, 184 stran)

[MJ4] Jindřich Muk: *Aritmetika pro vyšší třídy reálek*, 3. vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, spol. s r. o., Praha, 1936, 339 stran.
(1. a 2. vydání – viz [MJ2] a [MJ3])

[MJ5] Jindřich Muk: *Aritmetika pro čtvrtou a pátou třídu gymnasií a reálných gymnasií*, 1. vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, spol. s r. o., Praha, 1924, 261 stran.
(2. vydání – 1928, 260 stran)

[MJ6] Jindřich Muk: *Aritmetika pro šestou třídu gymnasií a reálných gymnasií*, 1. vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, spol. s r. o., Praha, 1925, 123 stran.

[MJ7] Jindřich Muk: *Aritmetika pro sedmou třídu gymnasií a reálných gymnasií*, 1. vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, spol. s r. o., Praha, 1927, 148 stran.

[MJ8] Jindřich Muk: *Aritmetika pro vyšší třídy gymnasií, reálných gymnasií a reformovaných reálných gymnasií*, 2. upravené vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, spol. s r. o., Praha, 1935, 303 stran.
(1. vydání – viz [MJ6] a [MJ7]; dotisky 2. upraveného vydání – 1945–1948)

[MP] Augustin Matolín: *Početnice pro horní stupeň obecných škol (čtvrtá početnice pro ménětřídní školy obecné), pro 6., 7. a 8. školní rok*, Státní nakladatelství, Praha, 1926, 175 stran.
(1. vydání – 1913, 175 stran, další vydání (bez číslování) – 1924, 175 stran, 1926, 175 stran, nezměněný otisk vydání z roku 1926 – 1927, 175 stran, 6. vydání – 1929, 175 stran, 7. opravené vydání – 1932, 171 stran)

[OZ] Metoděj Ostrý: *Aritmetika v úlohách ke zkouškám z II. a III. odboru měšťanských škol, pro žactvo střed. škol a učitelských ústavů*, Československá grafická Unie a. s., Praha, 1936, 290 stran.

[PP] Jan Kozák, Jan Roček: *Početnice pro 6., 7. a 8. školní rok všech škol obecných*, nově zpracovali: František Pátek a kolektiv, 1. vydání, Státní nakladatelství, Praha, 1927, 228 stran.
(2. pozměněné vydání – 1931, 194 stran)

[Ř1] Alois Říha: *Aritmetika pro učitelské ústavy. Díl první. Pro první ročník*, 1. vydání, Československá grafická Unie a. s., Praha, 1935, 168 stran.

[Ř2] Alois Říha: *Aritmetika pro učitelské ústavy. Díl druhý. Pro druhý ročník*, 1. vydání, Československá grafická Unie a. s., Praha, 1936, 116 stran.

[Ř3] Alois Říha: *Aritmetika pro učitelské ústavy. Díl třetí. Pro třetí a čtvrtý ročník*, 1. vydání, Československá grafická Unie a. s., Praha, 1937, 186 stran.

[VA] Miloslav A. Valouch, Miloslav Valouch: *Tabulky logaritmické*, 10. přepracované vydání, Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1937, 203 stran.
(1. vydání – 1904, 149 stran; 2. vydání – 1913, 168 stran; 3. rozšířené vydání – 1919, 188 stran; 4. vydání – 1921, 188 stran; 5. rozšířené vydání – 1923, 203 stran; 6. vydání – 1926, 203 stran; 7. vydání – 1929, 203 stran; 8. částečně změněné vydání – 1931, 203 stran; 9. vydání – 1935, 203 stran)

Internetové zdroje

[I01] Národní pedagogická knihovna J.A. Komenského, Praha: *http://www.npkk.cz*.

[I02] Online katalog Národní knihovny ČR: *http://www.nkp.cz*.

[I03] Jednota českých matematiků a fyziků: *http://www.jcmf.cz*.

[I07] Wikipedia, otevřená encyklopedie: *http://cs.wikipedia.org*.

[I08] Wikipedia, the free encyclopedia: *http://en.wikipedia.org*.

4. Finanční matematika na středních školách v období Protektorátu Čechy a Morava (likvidace české inteligence 1939 – 1945)

Roku 1939 po zřízení *Protektorátu Čechy a Morava*, který byl vytvořen 16. března na území českých zemí zbylém po odstoupení Sudet, byla sestavena protektorátní česká vláda. Jedinou povolenou politickou stranou se stalo Národní souručenství. Rozhodující moc v naší zemi však drželi představitelé nacistického Německa, kteří brzy vytvořili řídící a represivní orgány a instituce okupační správy.

Česká věda procházela obdobím hluboké stagnace. Po násilném uzavření vysokých škol nacisty v roce 1939 se zastavila výchova a příprava mladé české inteligence. Brzy byla omezena činnost dalších českých vědeckých institucí. Profesoři vysokých škol byli posláni na „dovolenou s čekatelným“, ostatní vědečtí pracovníci museli hledat jiná zaměstnání nebo byli nasazeni do válečné výroby. Omezený prostor zbyl v některých výzkumných ústavech průmyslových podniků, které sloužily válečným potřebám, na lékařských pracovištích, v knihovnách a archívech. Například Eduard Čech (1893–1960) věnující se vědecké práci v oblasti topologie a diferenciální geometrie po uzavření vysokých škol nalezl uplatnění při psaní středoškolských učebnic matematiky, jejichž analýza je uvedena níže. Naše školství však bylo dále výrazně podřizováno jednotným osnovám, které směřovaly ke germanizaci a úplné likvidaci české vzdělanosti. Po likvidaci vysokých škol se okupanti zaměřili na omezování středního školství. Postupně zrušili řadu gymnázií, reálek a odborných škol, snižovali počty přijímaných studentů a absolventů, perzekuovali židovské studenty a učitele apod.

Během demonstrací u příležitosti prvního výročí vzniku samostatné naší republiky v době protektorátu byli smrtelně zraněni dva lidé – dělník Václav Sedláček zemřel na místě, student medicíny Jan Opletal podlehl svým zraněním 11. listopadu. Rozloučení s ním dne 15. listopadu přerostlo v nové protinacistické demonstrace, které byly 17. listopadu, který od té doby slavíme jako Mezinárodní den studentstva, násilně potlačeny. Gestapo dalo popravit devět studentských a vysokoškolských funkcionářů. Byly zatčeny stovky studentů, kteří byli bez soudu posláni do koncentračních táborů. Z nich byli na naléhání protektorátní vlády propuštěni až po třech letech. Třicet pět jich však zahynulo. Následovalo uzavření českých vysokých škol, které odstartovala vyhláška říšského protektora Konstantina von Neuratha (1873–1956) ze dne 17. listopadu 1939. Vysoké školy měly být uzavřeny na dobu tří let, ale s jejich znovuotevřením (v roce 1942) se již dopředu nepočítalo. Také vysokoškolské koleje byly obsazeny. Němci chtěli vymýtit český dějinný mýtus, Čechy převychovat nebo zničit, a proto bylo bez němčiny další vzdělávání či společenský postup nemyslitelný. Okupanti uzavřeli všech deset českých vysokých škol (např. Univerzita Karlova v Praze, Masarykova univerzita v Brně, ČVUT v Praze), čímž zbavili možnosti studia více než 15 tisíc studentů a o práci přišlo téměř jeden tisíc čtyři sta profesorů, docentů a dalších pedagogů. Dne 4. února 1942 (po uplynutí výše zmíněné tříleté lhůty) zastupující říšský protektor Reinhard Heydrich (1904–1942) prohlásil, že česká univerzita už neexistuje a existovat nebude. Návrat k předválečnému stavu nastal až po osvobození roku 1945. Postupně byly obnoveny předválečné české vysoké školy a začaly také vznikat nové vysoké školy (např. Univerzita Palackého v Olomouci byla založena dne 28. března 1946). Většina starých vzdělávacích institucí byla obnovena v předválečné podobě a názvu. Na druhé straně prezidentský dekret ze dne 18. října 1945 rušil trvale německé vysoké školy v Praze a Brně (např. Německou univerzitu v Praze, Německé vysoké učení technické v Praze, Německou techniku v Brně).

V této kapitole ukážu a analyzuji výuku finanční matematiky na českých středních, měšťanských a obecných školách. Snažil jsem se vyhledat co největší množství nově vydaných učebnic a sbírek. Podařilo se mi nalézt jen osm učebnic, z nichž jsem analýze z pohledu finanční matematiky podrobil pět. Tento nízký počet je dán tím, že nacistické Německo nemělo zájem o rozvoj české vzdělanosti a česká protektorátní vláda se nestavěla proti. Všechny níže vyjmenované a analyzované publikace jsem objevil v knihovně Katedry didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Karlovy univerzity a Národní pedagogické knihovně Jana Ámose Komenského v Praze. Kromě již zmiňované Čechovy učebnice jsem pracoval především s početnicemi členů *Početního sdružení* (František Pátek, Josef Trajer, Karel Rakušan, Josef Váňa, Gustav Kníže, Václav Tvrdek, Miloslav Disman, František Holzmann, Bedřich

Krákora, Milada Součková, Rudolf František Šimek, Stanislav Vrána, Jan Kozák, Marie Kühnelová a další). Vzniklo z *Početní sekce* tak zvané *Reformní komise Školy vysokých studií pedagogických* v Praze, jejímž hlavním představitelem byl Václav Příhoda (1889–1979). Tato sekce byla založena pro podporu pedagogického reformismu na přelomu dvacátých a třicátých let dvacátého století (zlomovým rokem byl rok 1933 zmiňovaný v předešlé kapitole).

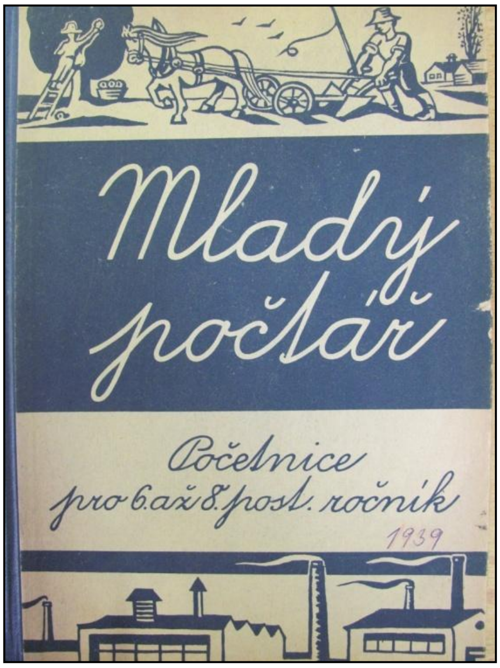
Podrobnosti k vývoji našeho školství můžeme nalézt např. v učebních textech Josefa Cacha (1923–2005), v pracích Otokara Chlupa (1875–1965) (viz např. [CŠ]), Bohuslava Kádnera (1874–1953), Františka Veselého (1903–1977) (viz např. [VJ]) či Jiřího Potůčka (1944–) (viz např. [PŠ]).

Přehled analyzovaných učebnic a sbírek:

- rok 1939: *Mladý počtář – Početnice pro 6. až 8. postupný ročník českých škol obecných* (kolektiv členů Početního sdružení);
- rok 1940: *Z říše čísel – Pracovní kniha počtů pro měšťanské školy, díl III.* (K. Rakušan);
- rok 1943: *Aritmetika pro II. třídu středních škol* (E. Čech);
- rok 1943: *Početnice pro II. třídu měšťanských škol (7. postupný ročník)* (kolektiv členů Početního sdružení);
- rok 1943: *Početnice pro III. třídu měšťanských škol (8. postupný ročník)* (kolektiv členů Početního sdružení).

4.1 Učebnice

František Pátek, Josef Trajer a kolektiv členů Početního sdružení:
Mladý počtář – Početnice pro 6. až 8. postupný ročník českých škol obecných,
1. vydání, Státní nakladatelství, Praha, 1939, 224 stran.



Tato početnice byla koncipována zejména jako sbírka úloh určených k procvičování základních početních dovedností a řešení stěžejních slovních problémů. Byla schválena ministerstvem školství a národní osvěty ze dne 5. listopadu 1938, č. j. 158.899/38-I/1, jako učebnice pro šestý až osmý ročních obecných škol s českým jazykem vyučovacím a vyšla v prvním roce Protektorátu.

Učebnice byla rozdělena na deset oddílů (*Sčítání, Odčítání, Násobení, Dělení, Smíšená čísla, Procentový a úrokový počet, Orientace, Úsudek, Měřičství a Tabulky*) rozčleněných dále na 120 krátkých kapitol, avšak jejich řazení neodpovídalo jednotlivým oddílům. Z toho plynul částečně chaotický způsob zápisu obsahu a také se domnívám, že orientace žáka v učebnici byla problematická.

Uveďme přehled kapitol šestého oddílu včetně stránek, z nichž vidíme umístění a rozsah každé z nich.

VI. Procentový a úrokový počet

22–23. Procentový počet (Pojem %) ... strana 59;

24. Rozumíš značce ‰? (Pojem ‰) ... strana 62;

25–26. V obchodech a u řemeslníků (%) ... strana 65;

27. Zaměstnání obyvatelstva (%) ... strana 67;

50. Vypočítávání (procentového) základu ... strana 103;

51. Pod vlastní střechou (Výpočet základu) ... strana 104;

67–68. Jednoduchý úrokový počet (Výpočet úrokové částky) ... strana 127;

69–70. Myslete na budoucnost! (Složený úrokový počet) ... strana 130;
84–85. Vypočítávání procentové (úrokové) míry ... strana 157;
88–90. Ve všem kupředu! (Výpočet *ú* za *n* měsíců) ... strana 162;
94–97. Obchod na trzích a na bursách ... strana 169;
98–100. Elektrisace (Umořování) ... strana 173.

Jak jsem již zmínil, početnice byla především sbírkou příkladů. Obsahovala jen zadání úloh, z nichž některé byly vyřešené s komentářem. U obtížnějších byl stručně nastíněn postup řešení. Přehledný teoretický základ zde nebyl. Ani u kapitol věnovaných finanční matematice tomu nebylo jinak. Její rozsah nebyl velký, ale několik úloh přece jen stojí za povšimnutí. Vyzdvihnutí si zaslouží také otištění samostatných tabulek úročitelů, střadatelů a umořovatelů v závěru knihy, na jejichž využití byl žák v úlohách odkazován.

Uveďme bez dalšího komentáře jednu obsáhlejší úlohu uvedenou v početnici.

12 a) Aby se výpočty ú při složeném úrokování usnadnily, mají v peněžních ústavech přehledné tabulky, v nichž je již vypočítáno, jak vzroste 1 K uložená na jakýkoli počet let a při kterémkoli obvyklém úrokovacím %. Pokladník si vyhledá v tabulkách potřebné číslo, jemuž se říká úročitel, a znásobí jím vklad.

V této početnici jsou tabulky úročitelů na str. 210 a 211.

b) Zkus na kolik K vzroste počáteční jistina 785 K, uložená na 3 %, při složeném úrokování za 5 let?

Najdi v tabulce 5 let za 3 %! Úročitel = 1,159.274.

Úročitele zaokrouhli na 4 desetinná místa: 1,1593!

Když 1 K vzroste za 5 let na 1,1593 K, 785 K vzroste za 5 let na 1,1593·785 K. ([PT], str. 131)

Hodnocení početnice

Rozsah všech kapitol se pohyboval v rozmezí jedné až tří stran. Početnice neobsahovala téměř žádný výklad, pouze některé úlohy byly komentovány. Nebyla rozhodně určena k samostudiu a pomoc učitele při zvládnutí látky byla nutná, neboť neměla samostatný oddíl s výsledky. Je zajímavé, že u jednotlivých částí kapitol byla uvedena značka A, B, C nebo D. Značka A znamenala, že tato část byla určena pro všechny; část s označením D byla určena jen pro ty nejlepší. V úvodu početnice bylo učiteli doporučeno, aby si podle schopností rozdělil třídu do tří skupin – pro značky A, B, C; ti, co zvládli úlohy s označením C se mohli pokusit o úlohy s označením D.

Při pohledu na úlohy s finanční tématikou se nejednalo o nějaké „převratné dílo“. Úloh bylo málo, byly rozptýlené v celé učebnici, která nijak tyto matematické aplikace nezdůrazňovala. Přesto některé z nich můžeme díky formulaci otázky či podrobnějšímu komentáři a popisu řešení považovat za zdařilé. Připomeňme ještě, že žáci při řešení úloh neužívali žádné obecné vzorce, vystačili jen s tabulkami a základními matematickými operacemi (násobení, dělení, …).

Karel Rakušan: ***Z říše čísel – Pracovní kniha počtů pro měšťanské školy, díl III.*****, 1. vydání, Školní nakladatelství pro Čechy a Moravu, Praha, 1940, 200 stran.**

Jednalo se o zajímavý typ učebnic, jež se pomocí projektů snažily procvičit a zopakovat vědomosti nabyté z klasických učebnic. První dva díly vyšly v letech 1935 a 1936 a byly sepsány stejným autorem. Třetí díl byl schválen výnosem ministerstva školství a národní osvěty ze dne 1. října 1938, č. 136.658/38-I/1, jako učebnice pro třetí třídu měšťanských škol s českým vyučovacím jazykem, tj. ještě před vznikem protektorátu, ale vyšel až v roce 1940 ve Školním nakladatelství pro Čechy a Moravu v Praze. Skládal se ze dvou hlavních částí – *Algebra* (rozsah 59 stran) a *Občanské počty* (rozsah 80 stran); další části se věnovaly jednoduchému účetnictví, na konci byly vysvětlivky cizích slov a odborných výrazů, tabulky pro složené úrokování, výpočty. Část *Občanské počty* čítající 14 projektů obsahovala také finanční aritmetiku.

Autor si uvědomoval, kde najdou uplatnění absolventi měšťanských škol. V úvodu zdůraznil, kdo si kterých částí pracovní knihy má více všímat. Těm, kteří budou pokračovat na středních školách, doporučil věnovat pozornost algebře a článkům v této kapitole označeným písmeny A i B, v kapitole občanských počtů zejména článkům s označením A. Ostatním, kteří půjdou na odborné ústavy nebo do života, poradil, aby si z algebry vybírali články s označením A a z občanských počtů A i B.

Obsah kapitoly **II.** ***Občanské počty***

1. Peníze a drahé kovy (12 stran, 3 projekty: V mincovně, U zlatníka, Národní banka);

2. Valuty (5 stran, 1 projekt: Do ciziny);

3. Cenné papíry (27 stran, 3 projekty: Jak si lidé ukládají peníze, Bursy + Slovník bursovních výrazů, O směnkách);

4. Složité úrokování (8 stran, 1 projekt: Ze života Jana Skály, sedláka);

5. Pojišťování (16 stran, 3 projekty: Lepší hrst jistoty jako pytel naděje, Z úřadovny okres. nemoc. a úrazové pojišťovny, U zástupce pojišťovny);

6. Rozečty a rozpočty (7 stran, 1 projekt: Jak kalkuloval Jan Novák, maj. správkárny aut);

7. Ze života (10 stran, 2 projekty: Něco z novin, Něco o statistice).

Zaměřme se na podkapitolu *4. Složité úrokování*; rozdělena byla na dvě základní části. První část s označením A v rozsahu šest a půl strany obsahovala základní teorii, řešené příklady a úlohy na procvičování. Druhá část *Projekt 8. Ze života Jana Skály, sedláka*, v rozsahu dvou stran s označením B byla čistě praktická. Projekt zobrazoval sedlákův život z pohledu finanční situace.

Část A

První část se shodovala s klasickou strukturou učebnice. Žák se zde seznámil s úrokováním peněz uložených v bance. Na jednoduchém příkladě uložení jedné koruny na dobu pěti let byl vyložen rozdíl jednoduchého a složeného úrokování. U složeného úrokování byla zdůrazněna důležitost frekvence úrokování. Dalším přínosem učebnice bylo vysvětlení užívání tabulek v kapitole V. *Tabulky pro složité úrokování*.

Ukažme část výkladu a poznamenejme, že v učebnici byl neobvykle používán pojem *uročitel* na místo *úročitel* a pojem *zasobitel* na místo *zásobitel*.

Jak využíváme tabulek uročitelů?

Na kolik K vzroste 4600 K za 16 roků při 6% složitém úrokování?

Postup:

a) Vyhledejte si sloupec 6 % (svisle)!

b) Vyhledejte si řádek 16. období!

c) Příslušný uročitel je ... 2,540352.

d) Na tolik by vzrostla 1 K.

e) 4600 K vzrostlo na 4600 K · 2,540352.

Obecně: ***jistina konečná = jistina počáteční · uročitel***. ([RP], str. 110)

Následovalo vysvětlení pro pololetní úrokování, tj. poloviční úroková míra a dvojnásobný počet úrokovacích období, a dvě skupiny úloh na procvičení, celkem osm. V dalším výkladu byla otázka výpočtu výše počáteční jistiny, známe-li konečnou jistinu, a obdobným způsobem, jako je výše uvedený, bylo vyloženo vyhledání a použití odúročitele následované pěti neřešenými úlohami.

Další oddíl výkladové části pojednával o úsporách, tj. pravidelném ukládání konstantních vkladů (spoření). Výpočet naspořené částky byl ukázán na řešeném příkladu s ukládáním částky 100 K vždy na počátku roku po dobu dvanácti let při celoročním úrokování 3½ %. Součet zúročených jednotlivých vkladů na konci spoření měl žák porovnat s tabulkou spořitelů. Dospěl ke vztahu:

úspora = vklad + spořitel,

který byl uveden takto nesprávně, neboť na místo součtu mělo být násobení. V dalším úkolu se žák sám přesvědčil, že spořitel vznikl součtem příslušného počtu úročitelů.

Třetí, předposlední, oddíl části A nesl název *Zásoba*, tj. tvorba důchodu a využití tabulky zásobitelů. Podstata problému byla vyložena na řešeném příkladu z praxe. Podívejme se na jeho znění a řešení.

Kolik peněž nutno míti, abyste z nich po 5 let mohli bráti 1000 K ročního důchodu při 5 %?

Povězte si úkol takto:

a) Kolik musím uložiti dnes, abych za 1 rok dostal 1000 K?

b) Kolik musím uložiti dnes, abych za 2 leta dostal 1000 K?

c) Kolik musím uložiti dnes, abych za 3 leta dostal 1000 K?

d) Kolik musím uložiti dnes, abych za 4 leta dostal 1000 K?

e) Kolik musím uložiti dnes, abych za 5 let dostal 1000 K?

Odpovíte:

a) Dnes nutno uložiti 1000 x 0,952381 = 952,381 K.

b) Dnes nutno uložiti 1000 x 0,907029 = 907,029 K.

c) Dnes nutno uložiti 1000 x 0,863838 = 863,838 K.

d) Dnes nutno uložiti 1000 x 0,822702 = 822,702 K.

e) Dnes nutno uložiti 1000 x 0,783526 = 783,526 K.

Dnes nutno uložiti (zásoba peněz) 4329,476 K. ([RP], str. 113)

Po tomto názorně vyřešeném příkladě byl žák odkázán na vyhledávání v tabulce zásobitelů, tj. použití vzorce:

$$zásoba = důchod \cdot zasobitel.$$

Poslední oddíl se věnoval umořování. Využití znalostí o důchodu bylo obsaženo v prvním řešeném příkladě, kdy nějaký soused měl 50 000 K a chtěl z nich jejich uložením získat pravidelný důchod po dobu deseti let. Výše uvedený vzorec byl upraven na tvar

$$důchod = zásoba : zasobitelem.$$

Druhý soused mu nabídl, že si peníze od něj půjčí a bude mu každoročně vyplácet právě tolik jako banka, tj. splácet dluh, a vzorec se změnil na tvar

$$roční\ splátka = dluh : zasobitelem.$$

Poté, aby se docílilo stejného tvaru všech vzorců a možnosti využití finančních tabulek, byl zaveden pojem umořovatel, který je roven převrácené hodnotě zásobitele, tzn. konečný vzorec byl

$$roční\ splátka = dluh \cdot umořovatel.$$

Následovala ukázka umořovacího plánu a skupina pěti úloh na procvičení. Celá část A byla shrnuta do devíti otázek typů: *Co znamená ..., Jak se vypočítá ...*

Část B

Jednotlivé podkapitoly části B obsahovaly praktické aplikace matematických dovedností. V námi analyzované podkapitole se v této části nachází osmý projekt pojednávající o Janu Skálovi. Finanční transakce, jež ho v životě potkaly, byly přehledně zapsány. Každá část byla zakončena úkolem, který žák musel vyřešit.

Podívejme se na první úkol.

Když se narodil, daroval mu kmotr vkladní knížku s vkladem 50 zlatých 50 krejcarů. (Stará rakousko-uherská měna.) Roku 1892, když mu bylo 17 let, změnilo Rakousko-Uhersko svou měnu na korunovou. Na kolik korun zatím vzrostl kmotrův dar při 5% složitém pololetním úrokování? (1 zlatý = 1 zlatka = 100 krejcarů = 2 K.) ([RP], str. 115)

Nyní jej vyřešme stejně jako tehdejší žák, tj. podle dříve předloženého výkladu.

Nejprve provedeme přepočet peněz:

50 zlatých + 50 krejcarů = 50 · 2 K + 1 K = 101 K.

Tato částka byla úrokována po dobu sedmnácti let pololetně při 5% roční úrokové míře, tj. dostáváme 34 úrokovacích období s úrokovou mírou 2½ %. Pro tyto hodnoty nalezneme v tabulce příslušný úročitel 2,315322, který spolu s vkladem dosadíme do výše uvedeného vzorce, tedy

$$\textit{jistina konečná} = \textit{jistina počáteční} \cdot \textit{uročitel},$$

po dosazení

$$\textit{jistina konečná} = 101\text{ K} \cdot 2{,}315322,$$

po vynásobení

$$\textit{jistina konečná} = 233{,}847522\text{ K},$$

což bylo pravděpodobně zaokrouhleno na pětihaléře směrem dolů na

$$\textit{jistina konečná} = 233{,}80\text{ K}.$$

Dodejme, že při použití výrazu $101 \cdot (1{,}025)^{34}$, je výsledek totožný na čtyři desetinná místa, což je více než dostačující.

Celý projekt obsahoval jedenáct obdobně formulovaných úkolů, o tom, jak sedlák spořil, půjčoval si, sám půjčoval, daroval atd. Projekt byl ucelenou prací, v níž si žák ověřil, zda porozuměl a ovládal příslušnou oblast.

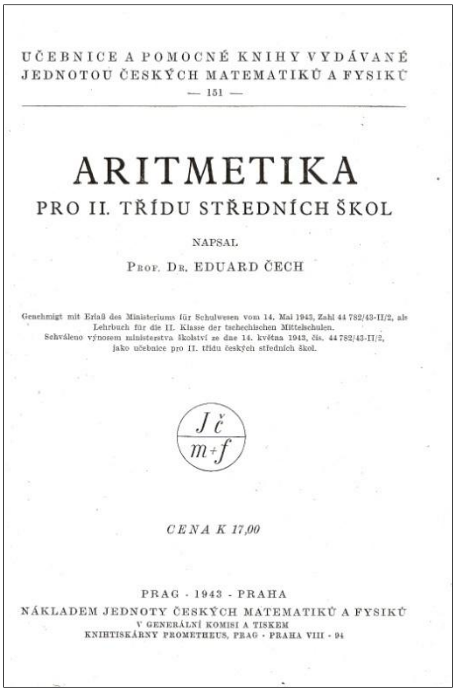
Hodnocení pracovní knihy

Podobně jako u ostatních učebnic určených pro obecné školy i v této knize byl kladen důraz na praktické využití matematických dovedností. Navíc obsahovala přehledné rozlišení částí teoretických a praktických, tj. vedle „kuchařky“ na praktické problémy zde žák nalezl teoretický podklad a byl mu tak usnadněn případný postup na střední školu.

V podkapitole o složitém úrokovaní mne nejvíce zaujalo označení některých pojmů finanční matematiky, např. úročitel a zásobovatel jsou bez čárky, spořitel na místo střadatele (viz výše), s čímž jsem se v jiných učebnicích studovaných období nesetkal. Také mě překvapila chyba ve finálním vzorci, která jistě potrápila mnoho žáků i učitelů při jejím odstraňování.

Vyzdvihuji však možnost použít pracovní knihu pro samostudium, neboť postupy byly vyloženy velmi podrobně a srozumitelně i pro průměrného žáka. Netradiční projekty byly komplexní životní příběhy, v nichž byl žák postupně postaven před řešení řady problémů. Aby zvládl další kroky, musel využívat odpovědí na předešlé otázky a případná chyba tak narůstala. Domnívám se, že opětovné používání vlastních výsledků, na jejichž přesnosti závisí další postup, vede žáka k větší pečlivosti.

Eduard Čech: *Aritmetika pro II. třídu středních škol,*
1. vydání, Knihtiskárny Prometheus, Praha, 1943, 86 stran.



UČEBNICE A POMOCNÉ KNIHY VYDÁVANÉ JEDNOTOU ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
— 151 —

ARITMETIKA
PRO II. TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

NAPSAL
PROF. DR. EDUARD ČECH

Genehmigt mit Erlaß des Ministeriums für Schulwesen vom 14. Mai 1943, Zahl 44 782/43-II/2, als Lehrbuch für die II. Klasse der tschechischen Mittelschulen.
Schváleno výnosem ministerstva školství ze dne 14. května 1943, čís. 44 782/43-II/2, jako učebnice pro II. třídu českých středních škol.

Jč / m+f

CENA K 17,00

PRAG · 1943 · PRAHA
NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
V GENERÁLNÍ KOMISI A TISKEM
KNIHTISKÁRNY PROMETHEUS, PRAG · PRAHA VIII · 94

Druhá kniha třídílné řady *Aritmetik pro střední školy* napsaná Eduardem Čechem a vydaná knihtiskárnami Prometheus nákladem Jednoty českých matematiků a fyziků v edici Učebnice a pomocné knihy byla schválena výnosem ministerstva školství ze dne 14. května 1943, čís. 44 782/43-II/2, jako učebnice pro II. třídu českých středních škol. Jednalo se o klasické učebnice, takové jaké známe, tj. každá kapitola či podkapitola obsahovala definice pojmů, výkladovou část, řešené příklady a úlohy na procvičení. Tím se lišila od výše analyzované početnice či pracovní knihy s projekty. V následujícím roce 1944 autor ještě sepsal *Poznámky k učebnicím aritmetiky pro 1.–3. třídu středních škol*, jež sloužily jako pomůcka učitelů; obsahovaly zejména návody a výsledky cvičení uvedených v učebnicích.

Přestože se jednalo o učebnice, které vznikly v době Protektorátu, o jejich kvalitě nemůže být pochyb. Hovoří o ní také poválečné dotisky, jež byly jen částečně pozměněné. Změny se týkaly především zadání slovních úloh, aby odpovídal politické a hospodářské situaci. Dotisky vycházely každoročně pro školní roky 1945/46 až 1949/50. Až v roce 1950 se objevila nová vydání, jež jsou analyzována v následující kapitole.

V analýze Čechových protektorátních učebnic se zaměříme právě na zmiňovaný druhý díl, jenž obsahoval počítání s úroky.

Obsah *Aritmetiky pro II. ročník středních škol*

§ 1. Počítání s desetinnými čísly;

§ 2. Míry hromadné, časové a úhlové;

§ 3. Zlomky;

§ 4. Poměry a trojčlenka;

§ 5. Procenta. Úroky;

§ 6. Opakování a doplňky.

Pátá část učebnice *Procenta. Úroky.* měla rozsah osmnácti stran a byla rozdělena na osm podkapitol, z nichž se první čtyři věnovaly procentům (28. *Procenta*, 29. *Procenta a zlomky*, 30. *Změny v procentech*, 31. *Zisk a ztráta v procentech*). Poslední čtyři podkapitoly o rozsahu deseti stran se zabývaly úroky.

32. *Úrok*

V této podkapitole, v níž nebyly ještě uvedeny žádné početní příklady, se žák seznámil s pojmem úrok. Na příkladu domácí x nájemník x byt x činže mu byly objasněny základní pojmy, tj. věřitel x dlužník x jistina x úrok. Byl obeznámen s vyjádřením ročního úroku v procentech jistiny tedy úrokovou mírou, s operací úrokování, s dvojím typem úrokování (jednoduchém a složeném) a s peněžními ústavy, které přijímají vklady a poskytují půjčky. Vše bylo podáno velmi stručně (2 strany), jasně a pochopitelně.

33. *Výpočet úroku úsudkem*

Žák se zde seznámil s principem jednoduchého úrokování, při němž je výše úroku přímo úměrná době uložení, tj. kolikrát větší doba, tolikrát větší úrok. Dále mu bylo zdůrazněno zaokrouhlování na dvě desetinná místa při výpočtech a na pětihaléře pro slovní odpovědi. Byl mu vyložen pojem *standardní finanční měsíc*, tj. každý měsíc má 30 dní, a s výpočtem doby uložení.

Vedle dvou řešených příkladů s podrobným komentářem obsahovala podkapitola celkem 33 příkladů uspořádaných do tří skupin a jednu slovní úlohu na procvičení. Uveďme dva z těchto příkladů.

300. Vypočtěte zpaměti úrok, bylo-li půjčeno m) 200 K na 4 roky při 2½ %.
([CE2], str. 70)
303. Vypočtěte úrok c) Ze 3678,90 K od 23. srpna do 8. září při 5¼ %.
([CE2], str. 72)

34. *Výpočet úroku vzorcem*

Podle mého názoru to byla nejdůležitější část věnovaná se finanční aritmetice. Žák se v ní seznámil s obecným značením jistiny – j, úrokové míry – p (počet procent), doby – r (počet roků) a úroku – $ú$. Značení ještě neodpovídalo používanému značení ve finančních ústavech, ale žák začal pracovat se symboly na místo čísel a vzorcem

$$100 \cdot ú = j \cdot p \cdot r\,,$$

jenž byl vyjádřen slovy: *když úrok násobíme stem, dostaneme totéž, jako když znásobíme mezi sebou tři čísla, jistinu, úrokovou míru a počet roků*. ([CE2], str. 73)

Po odvození a vysvětlení vzorce následovaly dva řešené příklady s komentářem a skupina jedenácti úloh na procvičení. Jako ukázku podrobnosti a kvality komentáře uveďme druhý z řešených příkladů.

Příklad 2. Vypočtěte úrok z jistiny 4768 K za dobu od 14. ledna do 7. února při 3½% úrokové míře.

Víme, že do vzorce máme dosaditi: za j číslo 4768, za p číslo 3½. Co máme dosaditi za r? Ani 14. leden ani 7. únor nepočítáme. Tedy máme 16 dní v lednu (počítáme, jakoby měl leden 30 dní) a 6 dní v únoru; celkem 22 dní. Rok počítáme v úrokovém počtu za 360 dní. Tedy 22 dní považujeme za $\frac{22}{360}$ *roku a do vzorce*

$$100 \cdot ú = j \cdot p \cdot r$$

dosadíme za r číslo $\frac{22}{360}$. *To nám dá*

$$100 \cdot ú = 4768 \cdot 3\tfrac{1}{2} \cdot \frac{22}{360}\,,$$

tedy

$$ú = \frac{4768 \cdot 3\frac{1}{2} \cdot \frac{22}{360}}{100} = \frac{4768 \cdot 7 \cdot 22}{100 \cdot 2 \cdot 360} = \frac{4768 \cdot 7 \cdot 11}{100 \cdot 360} = \frac{1192 \cdot 7 \cdot 11}{100 \cdot 90} = \frac{91784}{9000} =$$
$$= 91{,}784 : 9 = 10{,}19.$$

Úrok je 10,20 K. ([CE2], str. 73–74)

35. *Obrácené úlohy úrokového počtu*

V této podkapitole se žák seznámil s alternativami otázek, při nichž se používá výše zmíněný vzorec, tj.

a) výpočet jistiny, známe-li úrok, úrokovou míru a dobu;

b) výpočet úrokové míry, známe-li jistinu, úrok a dobu;

c) výpočet doby, známe-li jistinu, úrok a úrokovou míru.

Za tímto výčtem typů následovaly tři řešené příklady a celou podkapitolu uzavírala skupina třinácti cvičení zapsaná v přehledné tabulce se sloupci pojmenovanými jistina, úrok, doba, úroková míra, kdy v každém řádku jedna hodnota chyběla.

Hodnocení učebnice

Jednalo se o standardní učebnici s výkladem, řešenými komentovanými příklady a úlohami na procvičení. Výklad i komentáře řešení hovoří o autorových matematických a pedagogických kvalitách; nezřídka jsou připojeny praktické poznámky typu *Snadno se přesvědčíme, že nalezená odpověď je správná, neboť ...* ([CE2], str. 75).

Ačkoli učebnice měla malý rozsah, obsahovala dostatečné množství informací doplněných jejich vysvětleními a praktickými aplikacemi. Byla určena pro nižší ročníky středních škol, tudíž v ní nenalezneme složené úrokování a složitější pasáže finanční aritmetiky.

Celou sadu tří učebnic aritmetiky pro první až třetí třídu středních škol cením velmi vysoko. Dodatečně vydané poznámky [CEP] jejich kvalitu ještě umocňují. Na této sadě jasně vidíme, že není rozhodující počet stránek, ale jejich obsah. To, co jiný autor nezvládne ani na desítkách stran, jiný dokáže přehledně a kvalitně vyložit na několika málo stránkách.

Kolektiv členů Početního sdružení:
Početnice pro II. třídu měšťanských škol (7. postupný ročník),
1. vydání, Školní nakladatelství pro Čechy a Moravu, Praha, 1943, 120 stran.

Tento druhý díl sady početnic poměrně malého rozsahu byl další tradiční „kuchařkou“ pro žáky měšťanských škol. Učebnice byla schválena výnosem č. 104.810/43-I/2 K ministerstva školství ze dne 1. prosince 1943 jako učebnice pro školy s českým jazykem vyučovacím. Po válce se celá sada roku 1946 dočkala dalšího dotisku ve Státním nakladatelství v Praze.

Početnice byla rozdělena do čtyřiceti malých kapitol. Byla to, jak jsem zmínil výše, „kuchařka“ pro průměrné žáky. Stručný výklad byl jen součástí řešených úloh a vše bylo zaměřeno na praktické využití. Učebnice nebyla určena ke samostudiu, o čemž hovoří chybějící výsledky cvičení a příliš stručné komentáře.

S procenty se žáci poprvé setkali v prvním dílu ([PS1]) v kapitolách 31 až 34. Na klasickou finanční aritmetiku ještě nenarazili.

Ve druhém dílu se několik kapitol s řešenými příklady a komentáři věnuje i finanční aritmetice:

č. 5 Slevy na ceně zboží. Procentový počet;

č. 6 Úrokový počet. Výpočet úroku;

č. 7 Spořitelna. Úrokový počet. Výpočet úroku;

č. 8 Výpočet jistiny;

č. 15 Výpočet úrokové míry;

č. 16 Výpočet doby;

č. 22 Opakování procentového počtu. Přehled úrokového počtu;

č. 23 Opakování úrokového počtu. Přehled zlomků;

č. 37 Spořitelny a záložny;

č. 40 Kdo šetří, má za tři. Opakování.

Přesto, že se jedná o deset kapitol z celkových čtyřiceti, tj. čtvrtinu, rozsahem zaujímají necelou pětinu učebnice.

Vzhledem k cílové skupině žáků nemůžeme najít náročné úlohy. I ty, které naznačují složené úrokování, jsou zadány otázkou, jež tuto znalost nevyžaduje. Kapitola číslo 37 obsahovala jen charakteristiky peněžních ústavů bez příkladů, tj. co to je za ústavy a jaké produkty a služby nabízejí.

Posuďme náročnost učebnice na dvou vybraných úlohách.

Zahradník Kopeček zaplatil z půjčky 4 560 K úrok za 2 měsíce částkou 45,60 K. Na kolik % měl peníze vypůjčeny? ([PS2], str. 64)

Snadno nahlédneme, že za dva měsíce zaplatil jedno procento, tudíž za rok zaplatil šestkrát více, tj. 6 %. Odpověď tedy zněla: Zahradník měl peníze vypůjčeny na 6 % p. a. Při řešení jsme využili znalosti procentového počtu a jednoduché úrokování.

Kdo začne spořiti v desíti letech a ukládá měsíčně 26 K 40 h na 4 % a vytrvá do 60 let, vzrostou mu úspory připsanými úroky na 50 000 K. Kolik K uloží, kolik K je úroků? ([PS2], str. 117)

Z textu je jasné, že během zmiňovaných padesáti let docházelo k složenému úrokování vkladů, úkolem je nalézt jen výši vložené částky a úroků. Žák vynásobil měsíčně ukládanou částku počtem měsíců za rok a celkovým počtem roků, tj. 26,40·12·50 = 15 840. Odpověď na druhou část otázky získal odečtením prvního výsledku od koncové hodnoty úspor, tj. 50 000 – 15 840 = 34 160. Údaj o výši úrokové míry byl jen pro dokreslení reálné situace. Odpověď tedy zněla: Občan uložil celkem 15 840 K a na úrocích získal 34 160 K.

Pro zajímavost můžeme zkontrolovat koncovou částku získanou kombinací dlouhodobého a krátkodobého spoření. Máme dáno

x = 26,40 K (výše měsíčního vkladu); m = 12 (počet vkladů za úrokovací období);

n = 50 (počet úrokovacích období); i = 0,04 (úroková míra).

Při ukládání na počátku měsíce (předlhůtní spoření) využijeme známého vzorce

$$S' = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 12 \cdot 26{,}40 \cdot \left(1 + \frac{13}{24} \cdot 0{,}04\right) \cdot \frac{1{,}04^{50} - 1}{0{,}04} = 49413.$$

Rozdíl od požadovaných 50 000 K je pravděpodobně způsoben zaokrouhlením úrokové míry.

Hodnocení početnice

Početnice byla prakticky zaměřená. Každá vykládaná část matematiky byla vyjádřena praktickou aplikací. Žák nemusel zvládat ani definice ani obecné vzorce. Z pohledu finanční matematiky se zde objevilo jen jednoduché úrokování; vedle řešených příkladů byl žák například nabádán k vedení vlastního peněžního deníku a byl motivován si spořit do budoucna. Celkově bych vyzdvihnul vedení žáka k rozumnému zacházení s financemi.

Kolektiv členů Početního sdružení:

Početnice pro III. třídu měšťanských škol (8. postupný ročník),

1. vydání, Školní nakladatelství pro Čechy a Moravu, Praha, 1943, 127 stran.

Tento třetí díl výše zmíněné sady početnic poměrně malého rozsahu byl pokračováním tradiční „kuchařky“ pro žáky měšťanských škol; byl schválen výnosem č. 11.173/43-I/2 K ministerstva školství ze dne 17. února 1943 jako učebnice pro měšťanské školy.

Početnice byla rozdělena do čtyřiceti malých kapitol. Minimalizovaný výklad byl součástí řešených úloh a vše bylo zaměřeno na praktické využití. Chyběly také výsledky cvičení.

Autoři cíleně pokračovali v rozvíjení znalostí a dovedností žáků použitelných v praxi. Týkalo se to také oblasti finanční aritmetiky, tj. stručně zopakovali látku z minulého roku a dále ji rozvíjeli.

S finanční tématikou bylo ve třetím dílu spojeno poměrně velké množství kapitol, jež rozsahem dosahovaly třetiny početnice. Uveďme jejich názvy:

č. 4 Úrokový počet;

č. 10 Daně;

č. 11 Rozečty a rozpočty;

č. 12 Přirážky, dávky a poplatky. Zkrácené násobení;

č. 18 až 20 Pojišťovnictví, povinné pojištění;

č. 24 Složené úrokování;

č. 25 Úspory;

č. 28 Úvěr;

č. 31 a 33 Cenné papíry;

č. 32 Dobrý hospodář i občan;

č. 35 Poštovní spořitelna;

č. 39 a 40 U obchodníka.

Klasická finanční aritmetika se nalézala zejména ve čtyřech (č. 4, č. 24, č. 25, č. 28) z výše zmíněných kapitol. Ostatní vyjmenované kapitoly sloužily k dalšímu praktickému využití těchto dovedností.

Náročnost úloh byla větší, jejich zadání pestřejší a tématika bohatší. U náročnějších byl v závorce uveden odkaz na předešlou úlohu či stručný návod.

Podívejme se pro ilustraci na dvě úlohy.

J. Svoboda se rozhodl podle přísloví: Lepší vrabec v hrsti než holub na střeše. Dluh 70 000 K, který mu měl býti bezúročně splacen za 5 roků, zaplatil Číž již po 3 letech při 4% úrokování pololetním. Kolik K zaplatil?

(Usuzuj podobně jako v předešlém údaji! Číž měl podle kupní smlouvy ještě 2 roky právo na užitek z jistiny 70 000 K. Dá tedy Svobodovi takovou jistinu, která uložena na 4% pol. úr. za 2 roky vzroste právě na 70 000 K.) ([PS3], str. 78)

Návod uvedený v závorce nám kromě odkazu na dřívější příklad či úvahu dává jasný pokyn o diskontování dluhu za následující dva roky. Tudíž tento příklad bychom počítali podle vzorce o složeném úrokování následovně. Je-li dáno

$D = 70\,000$ (dluh); $i = 0{,}02$ (úroková míra na jedno úrokovací období);

$n = 4$ (počet úrokovacích období = počet pololetí), pak

$$D' = D \cdot \frac{1}{(1+i)^n} = 70000 \cdot \frac{1}{1{,}02^4} = 64669$$

Odpověď tedy zní: Číž zaplatil 64 669 K. Nutno poznamenat, že hodnotu (0,923845) zlomku $\frac{1}{1{,}02^4}$ žák nepočítal, ale vyhledával v tabulce odúročitelů, tj. diskontních faktorů.

M. Suk již jako učeň myslil na budoucí svůj závod. Proto od doby, kdy dostával mzdu, ukládal pravidelně začátkem roku 250 K do záložny, která úrokuje vklady 3 % celoročně. Kolik K měl úspor za 8 roků? Kolik K by musel při prvním vkladu uložiti najednou, aby ve stejné době měl v záložně tutéž částku? ([PS3], str. 80–81)

První otázka hovoří o dlouhodobém spoření, tj. při $a = 250$ K (anuita = vklad); $i = 0{,}03$ (úroková míra); $n = 8$ (počet úrokovacích období) a předlhůtních vkladech (začátkem roku) se dostáváme ke vzorci, který vznikne z částečného součtu členů geometrické posloupnosti

$$S' = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 250 \cdot 1{,}03 \cdot \frac{1{,}03^8 - 1}{0{,}03} = 2290,$$

tzn. po osmi letech pravidelného ukládání bude mít střádající při složeném úrokování na účtu částku 2 290 K. Hodnotu (9,159106) výrazu $1{,}03 \cdot \frac{1{,}03^8 - 1}{0{,}03}$, kterým byl vynásoben vklad 250 K, žák opět podle daných podmínek vyhledal v tabulce. Tentokrát se jednalo o tabulku předlhůtních střadatelů.

Druhá otázka se ptá na jednorázový vklad se stejným efektem, tj. po osmi letech chce mít k dispozici částku 2 290 K. Hodnotu tohoto jednorázového vkladu zjistíme opět pomocí diskontování, jako tomu bylo v předešlém příkladě s dluhem pana Číže, tj. při

K = 2 290 K (konečný kapitál);

i = 0,03 (úroková míra); n = 8 (počet úrokovacích období)

nalezneme počáteční vklad K_0 podle vzorce

$$K_0 = K \cdot \frac{1}{(1+i)^n} = 2290 \cdot \frac{1}{1{,}03^8} = 1808\,.$$

Použitý zlomek je odúročitel, jehož hodnotu (0,789409) při dané frekvenci úročení a úrokové míře žák pohodlně nalezl v tabulce odúročitelů.

Přesnost hodnot uvedených v tabulkách se nejčastěji pohybovala v rozmezí od šesti do osmi desetinných míst.

Hodnocení početnice

Hlavní důraz byl opět kladen na praktické aplikace získaných dovedností. Navíc však téměř každá kapitola kromě čistého opakování krátký teoretický úvod otištěný menším typem písma. Tento úvod byl velmi šikovný při domácí přípravě žáka, neboť byl jasně odlišen od řešených příkladů, navíc byl stručný a přehledný.

Celkově konstatuji, že rozsah finanční aritmetiky v této sadě početnic byl uspokojivý a dával žákům možnost připravit se na budoucnost, kdy budou jednat s finančními ústavy, a vyvarovat se lichvářů či jiných nebezpečných nabídek. Rady autorů je také vedly k šetrnosti a spoření, tj. přemýšlení do příštích let.

Zajímavostí je, že se při úrokování vkladů nepracovalo se zdaňovacím koeficientem.

4.2 Shrnutí

V tomto, pro náš národ a celý svět, smutném a těžkém období nemůžeme čekat pokroky ve školství národa, jehož inteligence měla být zcela zlikvidována. Okupace a válečné události negativně zasáhly do všech oblastí tehdejšího života.

Z nalezených učebnic a početnic vydaných během války, jež jsou výše zmíněny, byly první dvě schváleny ještě před příchodem nacistů. Zbylé tři, v nichž jsem objevil různě rozsáhlé kapitoly finanční matematiky, však byly psány v nejpesimističtějším čase a při jejich vydání v roce 1943 bylo jasné, že české vysoké školy nebudou za okupační správy otevřeny. Je tedy malý zázrak, že nové učebnice vůbec vznikly. Je nutno dodat, že byly určeny pouze pro měšťanské školy, respektive pro nižší ročníky středních škol. Někteří autoři se dokonce snížili k tomu, že ve slovních úlohách vyzdvihovali až opěvovali okupanty.

Rozsah finanční matematiky na měšťanských a středních školách však nebyl okupační mocí cílevědomě upravován. Vzhledem k malému počtu vydaných učebnic však nemůžeme svědomitě a spravedlivě ohodnotit jejich vliv na úroveň výuky finanční matematiky na školách, pro něž byly určeny.

4.3 Seznam literatury a internetových zdrojů

Obecná literatura

[CŠ] Otokar Chlup: *Cesta k socialistické škole*, výbor z díla uspořádali Karel Galla, Jaroslav Doležal a Richard Sedlář, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1965, 345 stran.

[PŠ] Jiří Potůček: *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900–1945, I. díl, Vznik a vývoj jednotlivých typů škol a jejich osnov matematiky*, 1. vydání, Pedagogické centrum, Plzeň, 1998, 50 stran.

[VJ] František Veselý: *100 let Jednoty československých matematiků a fyziků: 1862–1962*, předmluvu sepsal František Kahuda, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1962, 127 stran.

Učebnice

[CE1] Eduard Čech: *Aritmetika pro I. třídu středních škol*, 1. vydání, Knihtiskárny Prometheus, Praha, 1943, 114 stran.

[CE2] Eduard Čech: *Aritmetika pro II. třídu středních škol*, 1. vydání, Knihtiskárny Prometheus, Praha, 1943, 86 stran.

[CE3] Eduard Čech: *Aritmetika pro III. třídu středních škol*, 1. vydání, Knihtiskárny Prometheus, Praha, 1943, 91 stran.

[CEP] Eduard Čech: *Poznámky k učebnicím aritmetiky pro 1. – 3. třídu středních škol*, 1. vydání, Knihtiskárny Prometheus, Praha, 1944, 32 stran.

[PS1] kolektiv členů Početního sdružení: *Početnice pro I. třídu měšťanských škol (6. postupný ročník)*, 1. vydání, Školní nakladatelství pro Čechy a Moravu, Praha, 1943, 119 stran.

[PS2] kolektiv členů Početního sdružení: *Početnice pro II. třídu měšťanských škol (7. postupný ročník)*, 1. vydání, Školní nakladatelství pro Čechy a Moravu, Praha, 1943, 120 stran.

[PS3] kolektiv členů Početního sdružení: *Početnice pro III. třídu měšťanských škol (8. postupný ročník)*, 1. vydání, Školní nakladatelství pro Čechy a Moravu, Praha, 1943, 127 stran.

[PT] František Pátek, Josef Trajer a kolektiv členů Početního sdružení: *Mladý počtář – Početnice pro 6. až 8. postupný ročník českých škol obecných*, 1. vydání, Státní nakladatelství, Praha, 1939, 224 stran.

[RP] Karel Rakušan: *Z říše čísel – Pracovní kniha počtů pro měšťanské školy, díl III.*, 1. vydání, Školní nakladatelství pro Čechy a Moravu, Praha, 1940, 200 stran.

Internetové zdroje

[I01] Národní pedagogická knihovna J.A. Komenského, Praha: *http://www.npkk.cz*.

[I02] Online katalog Národní knihovny ČR: *http://www.nkp.cz*.

[I07] Wikipedia, otevřená encyklopedie: *http://cs.wikipedia.org*.

[I08] Wikipedia, the free encyclopedia: *http://en.wikipedia.org*.

5. Finanční matematika na středních školách v období socialismu (devastace finanční matematiky 1945 – 1989)

V roce 1945 skončila druhá světová válka a lidé ve zdevastovaném světě začali vzhlížet k budoucnosti. Zejména v Evropě bylo zničeno nebo značně poškozeno vše – od dopravních tepen po ekonomiku. Bylo třeba začít plnohodnotně žít, a proto se lidstvo zaměřilo na obnovu, která se týkala všech odvětví, vzdělávání nevyjímaje.

Druhá světová válka zcela změnila politickou situaci ve světě. Svoje postavení ztratily Německo, Itálie a Japonsko. Novými supervelmocemi se staly Spojené státy americké a Sovětský svaz. Svět byl unavený válkou. Na podporu a zabezpečení míru byla v červnu roku 1945 založena Organizace spojených národů. Chápání bezpečnosti však bylo v Sovětském svazu a Spojených státech odlišné. Sovětský svaz rozšiřoval svůj vliv ve východní Evropě a ovlivňoval vlády těchto států k prosovětské orientaci. USA reagovaly antikomunistickou politikou, jejíž směr upřesnil Marshallův plán – program obnovy pro hospodářsky oslabenou Evropu, která se kloní k Západu. Odpovědí bylo rozdělení Německa. Tento politický a ideologický konflikt byl dominantou světové politiky dalších více než čtyř desetiletí.

Naše republika se dostala do vlivu Východu. Vše vyvrcholilo komunistickým pučem 25. února 1948, o němž jsme se kdysi učili jako o vítězství pracujícího lidu nad buržoazií. Nová politická situace začala ovlivňovat všechna odvětví republiky, která se ještě zcela nevzpamatovala z poválečného utrpení. Některé oblasti byly zasaženy bezprostředně (politika, podnikání), v jiných docházelo k postupným proměnám (např. školství). V roce 1948 vstoupil v platnost zákon o jednotné škole, který určoval jednotné základní vzdělání pro všechny děti, odstranil dualistický školský systém a poskytl pokračování ve vzdělání na různých typech středních škol (více viz např. [VK]). Ne všechny vyučovací předměty byly zasaženy stejně intenzivně a stejně rychle. U předmětů s obsahem náchylným na změny došlo k reformám téměř okamžitě – občanská výchova, dějepis, politický zeměpis. Další předměty byly ovlivněny méně, či jejich úpravy byly postupné – mateřský jazyk, přírodní vědy a matematika.

Hlavní změny v matematice se týkaly v první řadě témat používaných ve slovních úlohách. Další tlaky nastaly na některé oblasti matematiky, které nebyly podle vládnoucí komunistické strany potřebné. Rozšiřoval se okruh úloh s brannou tématikou a úlohy operující v duchu minulé doby, například otázky podnikání a financí, byly vytlačovány úlohami o růstu produktivity práce, růstu výnosů s vidinou komunistické budoucnosti bez potřeby peněz. Nejvíce postiženou částí matematiky byla proto matematika finanční. Velkou měrou se na tom podílela také třetí Československá měnová reforma, která proběhla 1. června 1953. Jejím cílem bylo zabránit znehodnocení měny, odstranění přídělového systému a černého trhu. Reforma však poškodila velké množství drobných i velkých střadatelů, zbylých živnostníků a obchodníků. Rozhořčení obyvatelstva naší republiky podnítilo také tvrzení prezidenta Antonína Zápotockého, který ještě 36 hodin před vyhlášením reformy hlásal, že koruna je pevná a o reformě se neuvažuje. Poměr přepočítávání hotovosti a vkladů, který se pohyboval od 5:1 do 30:1, chápala veřejnost jako krádež. Důsledkem byl další pokles životní úrovně a kupní síly obyvatelstva. Musel se také změnit postoj finančních ústavů, například vklady ve státní spořitelně se snížily z předreformních 9 000 000 Kčs na 930 000 Kčs. Vrcholem všeho byla skutečnost, že měnová reforma byla provedena bez předchozího souhlasu Mezinárodního měnového fondu, což mělo v následujícím roce za následek ukončení členství našeho státu v MMF.

V této kapitole ukážu a analyzuji „vývoj“ výuky finanční matematiky, který odrážejí dobové učebnice matematiky a sbírky úloh. Lze je rozdělit do dvou skupin. Do první skupiny patří publikace, jež vyšly do roku 1960 a obsahují ještě rozumné, v některých případech s prvorepublikovými učebnicemi srovnatelné procento úloh s finanční tématikou, i když třeba již s přepracovaným zněním. To již nelze tvrdit o publikacích ze druhé skupiny, tj. ze šedesátých až osmdesátých let. Hodnocení této skupiny lze shrnout do jediné věty: ***Matematika zůstává, ale peníze mizí.*** To znamená, že většina typů úloh zůstává stále součástí středoškolské matematiky, ale kapitál je v nich nahrazen lesem, řepou, traktory apod. Zřídka narazíme alespoň na úlohy, kdy jednotné zemědělské družstvo splácí půjčku. Zcela výjimečně objevíme úlohu o pravidelném střádání, důchodech, anuitách a podobně.

Vybral jsem učebnice a sbírky tak, abych pokryl všechny typy a úrovně zejména našich středních škol. Většinu knih jsem objevil v knihovně Katedry didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Karlovy univerzity a Národní pedagogické knihovně Jana Ámose Komenského v Praze. Na další jsem narazil v antikvariátech, některé mi byly doporučeny staršími kolegy z osobních knihoven.

Paralelně s výběrem učebnic je nutno sledovat strukturální změny vzdělávacího systému. K hlavním změnám došlo u škol všeobecného zaměření. V letech bezprostředně následujících po druhé světové válce byl zachován předválečný systém. Začátkem padesátých let byly založeny jedenáctiletky, jejichž třetí, poslední, tříletý stupeň nahradil gymnázia. Začátkem šedesátých let byla místo něho zavedena střední všeobecně vzdělávací škola se zkratkou SVVŠ. Komunistická strana Československa na svém sjezdu v roce 1958 konstatovala neuspokojivý stav našeho školství. Stěžejním požadavkem bylo prodloužení základního vzdělávání a spojení školy se životem. SVVŠ měly žáka vzdělat teoreticky (základy věd) i prakticky (základy výroby). Vše bylo uzákoněno v roce 1960, kdy byl vydán nový školský zákon – zákon o soustavě výchovy a vzdělávání. Koncem šedesátých let SVVŠ nahradila čtyřletá gymnázia navazující na druhý stupeň základního vzdělání, která existují dodnes (viz [VK]).

První skupina:

- rok 1947: *Příručka kupecké, finanční a pojistné aritmetiky, II. část* (J. Ježek);
- rok 1948: *Sbírka příkladů z matematiky pro střední školy* (J. Vlček);
- rok 1948: *Matematika III. (Učební text pro III. ročník obchodních akademií)* (V. Seliger);
- rok 1949: *Aritmetika pro II. třídu středních škol* (E. Čech);
- rok 1951: *Matematika pro třetí třídu gymnasií* (E. Čech a kolektiv);
- rok 1951: *Aritmetika pre III. triedu gymnázií* (E. Čech a kolektiv);
- rok 1951: *Přehled matematiky* (O. Maška);
- rok 1951: *Aritmetika pro druhou třídu středních škol* (E. Čech a kolektiv);
- rok 1952: *Učební texty pro aritmetiku, III. část* (R. Zelinka);
- rok 1953: *Matematika pro I. ročník strojnických škol* (J. Huka, V. Jozífek);
- rok 1954: *Matematika pro šestý postupný ročník* (J. Kroupa, K. Rakušan, A. Rakušanová, J. Vyšín);
- rok 1954: *Algebra pro devátý až jedenáctý postupný ročník* (J. Holubář a kolektiv);

- rok 1954: *Matematika, II. díl, Učební text pro průmyslové školy (čtyřleté studium),* (J. Kabele a kolektiv);
- rok 1954: *Matematika pro zemědělské technické školy, II. díl* (O. Hruška, V. Pelant);
- rok 1956: *Algebra pro jedenáctý postupný ročník* (J. Holubář, F. Hradecký, K. Hruša);
- rok 1957: *Algebra pre 9. – 11. postupný ročník všeobecnovzdelávacích škôl* (J. Holubář a kolektiv);
- rok 1957: *Matematika pro mimořádné způsoby studia na průmyslových školách (dvouleté studium)* (V. Jozífek, F. Hradecký, J. Huka);
- rok 1958: *Matematika pro odborná učiliště a učňovské školy I* (V. Hladovec, V. Jozífek, A. Kunc).

Druhá skupina:

- rok 1962: *Matematika pro studium pracujících na SPŠ* (V. Jozífek, F. Hradecký, J. Huka);
- rok 1963: *Opakování středoškolské matematiky* (T. Gál, A. Kamarýt);
- rok 1964: *Algebra pro střední školy pro pracující* (M. Jelínek);
- rok 1964: *Přehled elementární matematiky* (K. Hruša a kolektiv);
- rok 1965: *Matematika pro II. ročník SVVŠ – větev přírodovědná*, doplněk k základní učebnici (E. Kraemer a kolektiv);
- rok 1965: *Matematika pro III. ročník SVVŠ* (E. Kraemer a kolektiv);
- rok 1965: *Matematika – příručka pro přípravu na VŠ* (V. Bruthans, A. Kejzlar);
- rok 1965: *Úlohy z elementární matematiky* (V. B. Lidskij a kolektiv);
- rok 1966: *Sbírka úloh z matematiky pro SPŠ a SZTŠ* (E. Kriegelstein a kolektiv);
- rok 1968: *Sbírka maturitních příkladů z matematiky* (P. Benda, B. Daňková, J. Skála);
- rok 1969: *Sbírka úloh z matematiky pro SVVŠ (gymnasia)* (F. Vejsada, F. Talafous);
- rok 1970: *Matematika pro I. a II. ročník SEŠ* (F. Nimrichter a kolektiv);

- rok 1970: *Programovaná učebnice matematiky (aritmetika a algebra)* (Z. Opava);
- rok 1971: *Matematika pro I. a II. ročník studia absolventů SVVŠ (gymnázií) na středních ekonomických školách* (J. Zahradník);
- rok 1971: *Matematika pro II. ročník SPŠ a SZTŠ* (A. Pospíšil a kolektiv);
- rok 1978: *Matematika pro střední zdravotnické školy, II. díl* (V. Melicher, J. Ivanič, I. Lečko);
- rok 1978: *Sbírka úloh z matematiky pro střední ekonomické školy* (F. Nimrichter, L. Schramm, V. Topinka);
- rok 1979: *Matematika pro střední pedagogické školy, III. díl* (J. Müllerová, V. Sýkora, O. Šedivý);
- rok 1979: *Matematika pro gymnázia, sešit 6 – část 2* (V. Sýkora a kolektiv);
- rok 1980: *Matematika pro gymnázia, sešit 8* (J. Šedivý a kolektiv);
- rok 1980: *Matematika pro II. ročník gymnázia* (J. Smida a kolektiv);
- rok 1981: *Zbierka úloh z matematiky pre 2. ročník experimentálnych gymnázií* (L. Boček a kolektív);
- rok 1983: *Zbierka úloh z matematiky pre 3. a 4. ročník experimentálnych gymnázií* (J. Smida, J. Šedivý);
- rok 1986: *Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU, 8. část* (E. Porubská a kolektiv);
- rok 1987: *Matematika pre SOŠ a študijné obory SOU, 6. časť* (O. Odvárko a kolektiv);
- rok 1989: *Matematika pro III. ročník gymnázií* (J. Smida);
- rok 1989: *Repetitorium elementární matematiky* (R. Muzikář).

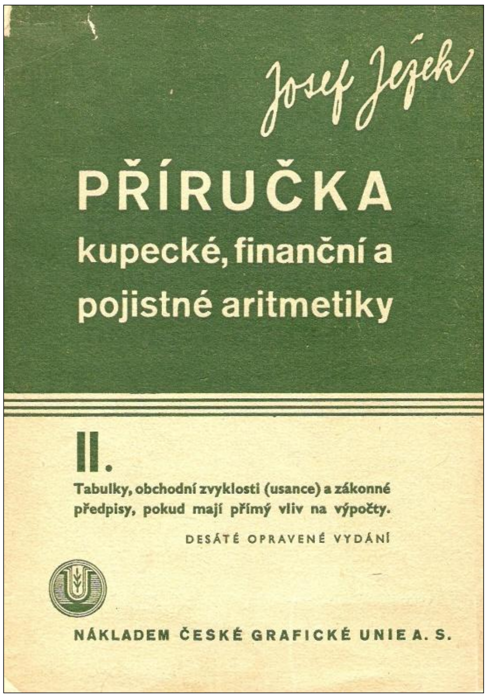
Třetí skupina (základní škola):

- rok 1962 – 1980: *Aritmetika pro sedmý ročník* (J. Taišl, J. Vojáček);
- rok 1958 – 1988: *Sbírka úloh z aritmetiky pro 5. až 7. ročník* (K. Kindl).

5.1 První skupina učebnic

5.1.1 Příručka kupecké, finanční a pojistné aritmetiky

Josef Ježek: ***Příručka kupecké, finanční a pojistné aritmetiky,***
část II., 10. opravené vydání, Česká grafická unie a. s., Praha, 1947, 256 stran.



Tato dvojdílná příručka byla ve svých ranějších vydáních koncipována jako studijní text pro obchodní učiliště. Její první vydání vyšlo již v roce 1911. Postupně byla rozšiřována, aktualizována a zdokonalována. Během dvacátých a třicátých let dvacátého století „povýšila" až na praktického pomocníka pro každého, kdo byl nějak spojen s obchodem, peněžnictvím, pojišťovnictvím. V současnosti bychom ji mohli položit na úroveň publikace *Finanční matematika pro každého* autorů Jarmily Radové, Petra Dvořáka a Jiřího Málka (zatím poslední sedmé vydání roku 2009 v nakladatelství Grada publishing v Praze).

V prvním dílu (třetí vydání v roce 1947) byly zpracovány a přehledně probrány všechny druhy výpočtů, které se vyskytovaly v hospodářské praxi. Byla to látka dobře známá z příslušných prvorepublikových učebnic finanční aritmetiky. Výklad byl rozdělen do dvou hlavních kapitol. V první se nacházely hospodářské výpočty (tj. kupecká aritmetika) a ve druhé politická aritmetika (tj. finanční a pojistná aritmetika). Rozsah a náročnost odpovídaly standardu předválečných učebnic.

Zaměříme se na druhý díl, který svým rozsahem pokrýval nejen vše potřebné ke kupecké praxi, orientaci ve finančnictví a pojišťovnictví, ale obsahoval také základy stěžejních témat klasické středoškolské matematiky a důležité tabulky.

Uveďme obsah, který přehledně vystihuje náplň příručky.

Obsah příručky

A. Tabulky k aritmetice kupecké (12 stran);
B. Tabulky k finanční aritmetice (24 stran);
C. Tabulky k aritmetice pojistné (12 stran);
D. Tabulky logaritmické pětimístné (26 stran);
I. Míry a váhy (16 stran);
II. Peněžní jednotky (24 stran);
III. Drahé kovy (4 strany);
IV. Mince (2 strany);
V. Cizozemská platidla (1 strana);
VI. Eskont směnek (8 stran);
VII. Devisy (8 stran);
VIII. Cenné papíry (11 stran);
IX. Zboží světového obchodu (21 stran);
X. Námořní dopravné (2 strany);
XI. Počet procentový (1 strana);
XII. Počet úrokový (5 stran);
XIII. Počet lhůtný (2 strany);
XIV. Úroky z vkladů na knížky (1 strana);
XV. Kontokorenty (18 stran);
XVI. Algebra (15 stran);
XVII. Finanční aritmetika (15 stran);
XVIII. Pojistná aritmetika (3 strany);
XIX. Planimetrie (3 strany);
XX. Stereometrie (2 strany);
XXI. Základy trigonometrie (5 stran);
XXII. Základy analytické geometrie v rovině (4 strany).

Veškerá látka byla zpracována ve formě velmi přehledných tabulek a souborů vzorců. Jednotlivé kapitoly umožňovaly rychlou a snadnou orientaci v dané oblasti a vyhledání potřebné teorie i vzorců, které člověk při delším nepoužívání mohl zapomenout. V této přehledné a stručné příručce mohl každý čtenář pohodlně nalézt potřebné informace.

Základní charakteristiky kapitol

První čtyři kapitoly obsahovaly tabulky, s nimiž se setkáváme běžně v učebnicích a sbírkách matematiky již ve druhé polovině devatenáctého století. Zde byly všechny pohromadě. V kapitole A nalezneme převodní tabulky metrických i anglických měr a vah, převody cen zboží podle obchodních vah (např. převod ceny zboží v librách sterlingů v šilincích a pencích za hundredweight (= 50,802 kg) na cenu v librách sterlingů za 100 kg). Kapitola B, jež byla zaměřena na finanční aritmetiku, obsahuje tabulky úročitelů, odúročitelů, střadatelů, zásobitelů a umořovatelů při dekursivním (polhůtním) a anticipativním (předlhůtním) úročení. Tyto tabulky dnes čtenář příliš neocení, neboť využívá k výpočtům kalkulačky nebo tabulkového procesoru. V kapitole C se nacházela úmrtnostní tabulka z meziválečného období (1929 až 1932) a tabulka charakteristických čísel (např. hodnota jednotkového aktivního důchodu, doživotního důchodu, počet aktivních osob). V kapitole D byly tabulky logaritmů známých jako Briggsovy pětimístné logaritmy a logaritmy některých důležitých čísel (např. e, π, $\sqrt{2}$).

V úvodu každé kapitoly byl vždy vysvětlen význam značek, zkratek a číselných hodnot následně užitých v tabulkách. V kapitole A nalezneme názvy a zkratky všech používaných jednotek, což postrádám u jiných publikací. Mnoho autorů to vzhledem k frekvenci užívání považovali za samozřejmost.

Kapitola B v úvodu obsahovala i motivační příklady, což podtrhuje důraz, který autor na tuto oblast kladl. Podívejme se na jeden z nich.

Dlužník si vypůjčil Kčs 30.000,– a zavázal se, že po 40 let koncem každého pololetí bude platiti Kčs 900,– na úrok a úmor, čímž se celý dluh zaplatí. Kolik % úroků platil? n = 80

Dlužník zaplatí celkem 80 · 900 = 72.000,–; za 1 Kčs dluhu tedy zaplatí 2,4.

Z tab. VII. (str. 38) nalezneme, že 2,4 při 2% je mezi n = 104 a 105, při 4% mezi n = 52 a 53. Prokladem tabulky pro 2% nalezneme n_2*:*

104	....	2,3840
n_2	....	2,4000
105	....	2,4001

$(n_2 - 104):(105 - 104) = (2{,}4 - 2{,}3840):(2{,}4001 - 2{,}3840)$; *odtud* $n_2 = 104{,}994$.

Podobně prokladem tabulky pro 4% nalezneme n_4*:*

52	....	2,3911

$$n_4 \quad .... \quad 2{,}4000$$

$$53 \quad .... \quad 2{,}4231$$

$(n_4 - 52):(53 - 52) = (2{,}4 - 2{,}3911):(2{,}4231 - 2{,}3911)$*; odtud* $n_4 = 52{,}309$.

$$p = \frac{4(n_2 - n_4)}{n + n_2 - 2n_4} = \frac{4(104{,}994 - 52{,}309)}{80 + 104{,}994 - 104{,}618} = 2{,}6219\,\%.$$

Dlužník platil 2,6219 % úroků pololetně. ([JJ], str. 17)

Vidíme, že se jednalo téměř o „kuchařku“, v níž nebyla předpokládána žádná matematická úroveň uživatele. V uvedeném příkladu se využívala Achardova tabulka, která obsahovala pro daný počet splátek od jedné do dvou set příslušné sloupce pro 2 % a 4 %, jež použijeme v *prokládacím postupu*.

VII. Achardova tabulka.

n	$n : a_{\overline{n}\vert}$ 2%	$n : a_{\overline{n}\vert}$ 4%	n	$n : a_{\overline{n}\vert}$ 2%	$n : a_{\overline{n}\vert}$ 4%	n	$n : a_{\overline{n}\vert}$ 2%	n	$n : a_{\overline{n}\vert}$ 2%
1	1,0200	1,0400	51	1,6044	2,3592	101	2,3362	151	3,1799
2	1,0301	1,0604	2	1,6177	2,3911	2	2,3521	2	3,1976
3	1,0403	1,0810	3	1,6310	2,4231	3	2,3680	3	3,2154
4	1,0505	1,1020	4	1,6444	2,4553	4	2,3840	4	3,2332
5	1,0608	1,1231	5	1,6579	2,4877	5	2,4001	5	3,2510
6	1,0712	1,1446	6	1,6714	2,5203	6	2,4161	6	3,2689
7	1,0816	1,1663	7	1,6850	2,5530	7	2,4323	7	3,2867
8	1,0921	1,1882	8	1,6986	2,5859	8	2,4484	8	3,3046
9	1,1026	1,2104	9	1,7123	2,6189	9	2,4647	9	3,3226
10	1,1133	1,2329	60	1,7261	2,6521	110	2,4809	160	3,3405
1	1,1240	1,2556	1	1,7399	2,6855	1	2,4972	1	3,3585
2	1,1347	1,2786	2	1,7538	2,7190	2	2,5136	2	3,3765
3	1,1455	1,3019	3	1,7677	2,7526	3	2,5300	3	3,3946
4	1,1564	1,3254	4	1,7817	2,7864	4	2,5464	4	3,4126
5	1,1674	1,3491	5	1,7957	2,8204	5	2,5629	5	3,4307
6	1,1784	1,3731	6	1,8098	2,8544	6	2,5793	6	3,4488
7	1,1895	1,3974	7	1,8240	2,8887	7	2,5959	7	3,4670
8	1,2006	1,4219	8	1,8382	2.9230	8	2,6125	8	3,4851
9	1,2119	1,4466	9	1,8524	2,9575	9	2,6291	9	3,5033
20	1,2231	1,4716	70	1,8667	2,9922	120	2,6458	170	3,5215

([JJ], str. 38)

V současnosti řešíme tuto úlohu aproximací použitím standardního vzorce:

$$a = D \cdot \frac{i}{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n} \quad \Rightarrow \quad 900 = 30000 \cdot \frac{i}{1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^{80}}.$$

Při požadované přesnosti pěti platných číslic dostáváme: i = 0,026215 = 2,6215 %. Vzhledem k rozsahu Achardovy tabulky, byla jejich přesnost nad očekávání vysoká. Využití tabulek bylo spolu s matematickým aparátem podrobněji popsáno v kapitole XVII. (viz níže).

V kapitole C nacházíme základní charakteristiky pojistné matematiky, mezi něž patřil počet x-letých osob žijících z původního počtu 100 000 narozených osob; pravděpodobná hodnota 1 Kčs, která bude vyplacena dědicům osoby nyní x-leté koncem toho roku, ve kterém zemře; pravděpodobnost, že *x*-letý aktivní člověk do roka zemře jako aktivní; počet osob *x*-letých invalidních; hodnota nároku *x*-leté osoby na rentu 1 Kčs předem splatnou od nastoupení invalidity do smrti.

Kapitola D obsahovala stručný popis Briggsových logaritmů, definici logaritmu a způsob výpočtu a oprav hodnot logaritmu čísla. Pak následovaly tabulky logaritmů od čísla 1 do 9 999 při využití oprav s krokem 0,1. Dále byly přiloženy logaritmy dekursivních úročitelů a anticipativních odúročitelů, což jsou logaritmy $\log(1 + p/100)$ a $\log(1 - p/100)$ pro potřeby finanční matematiky, jež v současné době kalkulátorů a počítačů již neoceníme.

Další kapitoly byly již číslovány. Celkem bylo uvedeno dvacet dva kapitol, které můžeme podle zaměření rozdělit do třech skupin: kupecká, finanční a čistě matematická.

Do kupecké části lze zahrnout kapitoly I. až X. V nich byly rozepsány převody jednotek délky, plochy, objemu, hmotnosti a některých dalších fyzikálních jednotek. Vzhledem k tomu, že v polovině dvacátého století nebyla ještě všeobecným standardem metrická soustava, byly uvedeny jednotky více než sedmdesáti států. Podrobně byly popsány jednotky užívané ve Velké Británii, Číně, bývalé Rakousko-Uherské monarchii, Spojených státech amerických a Sovětském svazu. Obdobný rozsah měl výklad o peněžních jednotkách; u hlavních měn byl uveden kurs podle stavu k 15. březnu 1947. V dalších kapitolách následovala charakteristika drahých kovů a především objasnění ryzosti. Navíc bylo poznamenáno, že směnitelnost bankovek za zlato byla již ve všech státech zrušena a drahé kovy (především zlato) jsou soustřeďovány ve státních bankách jednotlivých států. Velmi podrobně byly popsány zlaté mince některých států. Zvláštní pozornost byla věnována eskontu směnek a popisu standardů výpočtu doby, jež zbývá do vyplacení, v jednotlivých státech (pro Československo se měsíce počítají podle kalendáře, rok má 360 dní, banky si počítají 2 ‰ na provizi a pokrytí výdajů). Vysvětleny byly také základní funkce deviz a cenných papírů.

Pro obchodníky byl neocenitelný rozpis zboží světového obchodu, kde byla uvedena jednotka měny za jednotku míry (např. pence za libru netto). Mezi zboží světového obchodu byla zahrnuta bavlna, cukr, káva, kovy, líh, obílí a mouka, petrolej, příze, vlna. Na tuto kapitolu navazovalo námořní dopravné, které se počítalo v závislosti na rychlosti lodí a míry (tj. objemu) nebo váhy zboží.

Kapitoly XI. až XV. a kapitola XVII. byly věnovány finanční matematice. Nejprve byly zopakovány základy procentového počtu (tj. procentový základ, procentová míra, procentová část a všechny tvary vzorců), které byly v následující kapitole aplikovány na úrokování. Připomenuty byly pojmy základní kapitál, úroková míra, úrok, počet roků, měsíců a dnů. Byly probrány všechny základní výpočty (např. výpočet úroků za určitý počet dní). Navíc byly zdůrazněny anglické metody výpočtu úroků pomocí úrokových čísel a dělitelů či pomocí úroku vypočítaného za finanční rok (360 dní). Od tohoto úroku musela být odečtena 1/73, abychom dostali úrok pro rok s 365 dny. V kapitole *Počet lhůtný* byly objasněny zejména výpočty střední platební lhůty několika kapitálů s různou splatností.

Jako základní vzorec byl použit

$$x = \frac{K_1 d_1 p_1 + K_2 d_2 p_2 + K_3 d_3 p_3 + \ldots}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + \ldots},$$

kde K_n byly jednotlivé kapitály, d_n doby splatnosti a p_n úrokové míry.

Další dvě kapitoly byly věnovány výpočtům úroků na nejčastějších produktech bank – vkladních knížkách a účtech. Vklady na knížkách se úročily podle stanovené úrokovací míry a úrokovací doby. Čtenář zde nalezl jednoduchý postup pro výpočet úrokovací doby. Dalším popisovaným produktem bank byl účet s možností kontokorentu, neboli účet s povolenou možností jeho přečerpání. Přečerpání bylo vlastně druhem úvěru a jeho vlastník byl povinen zaplatit příslušné úroky z přečerpané částky. Na účtech se tedy počítal kreditní úrok z prostředků vložených (nejčastěji 1 % per annum s obratovou provizí 1 ‰). Při přečerpání účtu se musel vypočítat debetní úrok, který si banka z účtu odebrala (nejčastěji $4^3/_8$ % per annum včetně úvěrové provize, obratová provize činila opět 1 ‰). Výše úroku byla vázána na typ účtu. Obvykle závisela na tom, zda byl účet veden ve volných či vázaných korunách.

V kapitole XVII. nazvané *Finanční matematika* bylo hlavním tématem složené úrokování a dlouhodobé střádání. Jednotlivé podkapitoly *Počet úrokový složený*, *Porovnávání úrokových měr*, *Dlouhodobé střádání*, *Počet důchodový a umořovací*, *Umořovací plány* a *Skutečná úroková míra při obligátních půjčkách* obsahovaly základní pravidla a zákonitosti spoření a úvěrů spojených s bankovními ústavy. Byly vyloženy užívané symboly a základní vzorce, pro polhůtní i předlhůtní úrokování, porovnání úrokových měr na základě intenzity úrokování (tj. podle frekvence připisování úroků). Výklad dlouhodobého střádání, tvorby důchodů a umořování dluhu byl přehledný, nenáročný na výpočty (autor se odvolával na využívání tabulek v kapitole A) a dával každému čtenáři nástroje k vlastnímu plánování finančních operací. Za velmi cenné považuji návody na tvorbu umořovacích plánů pro úvěry úročené předlhůtně i polhůtně. Podívejme se na jeden z nich.

Pololetí	*Zbytek dluhu počátkem pololetí*	*p% úrok do konce pololetí*	*Splátka koncem pololetí*	*Řádka do konce*
1	D_n	$u_n = D_n \cdot i$	$\sigma_n = \alpha - u_n$	n
2	D_{n-1}	$u_{n-1} = D_{n-1} \cdot i$	$\sigma_{n-1} = \alpha - u_{n-1}$	$n - 1$
...	...	...	...	...
n	$D_1 = \alpha \cdot r^{-1}$	$u_1 = D_1 \cdot i$	$\sigma_1 = D_1$	1

([JJ], str. 226)

V tabulce vidíme umořování dluhu D_n v n pololetích při dekurzívním úročení. Splátka koncem pololetí σ_n byla vlastním úmorem dluhu, α – anuita, u_n – úrok za dané pololetí, i znamenalo p% úrok zapsaný desetinným číslem a $r = (1 + i)^{-1}$.

Samostatná osmnáctá kapitola se vztahovala ke kapitole C, která obsahovala tabulky z pojistné matematiky. Byly v ní vyloženy koeficienty využívané při pojištění – tj. pojištění kapitálu na dožití, pojištění kapitálu splatného po smrti pojištěné osoby a pojištění renty.

Ostatní kapitoly (XVI., XIX., XX., XXI. a XXII.) obsahovaly základní vzorce příslušných matematických témat (viz obsah této příručky) a není nutné je podrobněji rozebírat.

Hodnocení příručky

Jsem přesvědčen, že tato publikace byla velmi hojně využívána. Hovoří o tom i počet jejích vydání. Měla ucelený charakter a zahrnovala látku z více oblastí, které spolu souvisely – obchod, finance, pojištění a nutná matematika. Spousta lidí dnes ve finančních transakcích nevidí a nechce nevidět matematiku a z toho pak vzniká řada fatálních problémů.

Pro mě jako člověka, který se nevěnuje obchodu, obsahuje příručka obrovské množství nových informací z této oblasti. Navíc uvádí spoustu zajímavostí z nedávné historie peněžnictví. Zákonitosti finanční matematiky jsou platné i přes časový odstup. Její jednotlivé části jsou vyloženy přehledně s důrazem na možné praktické aplikace. Teorii a matematické vědomosti čtenáře staví autor do méně významné pozice. Většina zpracovaných témat je stále aktuálních či po listopadové revoluci 1989 nabyly znovu na významu. Změny způsobené časovým odstupem nebrání pochopení podstaty problému a následnému použití v současném světě financí.

Osobně mohu tuto příručku doporučit k prostudování každému zájemci o finanční tématiku. Budoucí zaměstnanci bankovních ústavů by se s jejím obsahem měli seznámit v rámci rozšiřování znalostí dějin finančnictví.

V této době se již nejedná o tradiční školní učebnici, ale o učební pomůcku pro veřejnost. Z prostudovaných vydání je možné vyzdvihnout v pořadí sedmé z roku 1928 (rozsah 234 stran). Poznamenejme, že v roce 1938 vyšlo druhé rozšířené vydání první části nazvané *Soustavný přehled* (rozsah 557 stran). Tento přehled shrnoval, jak jsem již zmínil, veškeré vzorce používané v kupecké, finanční a pojistné aritmetice.

5.1.2 Učebnice, sbírky a přehledy matematiky určené pro střední školy

Československý stát od svého vzniku velmi dbal na vzdělávání. V prvních poválečných letech se matematika na našich školách vyučovala převážně podle upravených učebnic, které vyšly ještě před válkou nebo v jejím průběhu. Některé učebnice byly převzaty beze změn tak, jak se používaly ve třicátých letech. Nové učebnice matematiky se začaly pomalu objevovat již od konce roku 1945; jednalo se především o aritmetiky, sbírky úloh a matematické přehledy pro obecné, měšťanské a střední školy. Od roku 1945 do roku 1952 vyšlo několik desítek nově upravených či zcela nových učebnic a sbírek. České verze sepsali Jan Bílek (1907–1972), Bohumil Bydžovský (1880–1969), Eduard Čech (1893–1960), Otokar Maška (1886–1977) a Metoděj Ostrý (1888–1974); slovenské publikovali Anton Dubec (1906–1975), Josef Kroupa (1910–1975) a Ján Štalmašek (1905–1965).

Autoři většinou pracovali v týmech pod patronací výzkumných ústavů, mnoho učebnic bylo přeloženo z českého jazyka do slovenského nebo naopak.

Josef Vlček: *Sbírka příkladů z matematiky pro střední školy*,

2. vydání, Komenium, učitelské nakladatelství, Brno, 1948, 72 stran.

Byl to devatenáctý svazek příručky ke zkouškám „dospělých osob“ z učiva střední školy a k opakování učiva pro žáky. První vydání z roku 1947 neslo název *Sbírka příkladů z matematiky pro měšťanské školy*. Příručka obsahovala základní typy příkladů bez uvedení výsledků. Rozdělena byla na čtyři kapitoly: *Aritmetika (Nácvik a Užití)*; *Algebra*; *Smíšené příklady*; *Geometrie (Nácvik a Užití)*.

V první kapitole v části *Nácvik* jsou dvě stručné podkapitoly každá o rozsahu jedné strany věnující se úrokování: XXII. A *Počet úrokový jednoduchý*; XXII. B *Počet diskontový*. Uveďme jeden typický příklad.

Živnostník má na svém běžném účtu tyto záznamy: 15/7 vloženo 3500 Kčs; 1/9 vybráno 900 Kčs; 15/9 vloženo 2000 Kčs; 4/10 vybráno 1500 Kčs; 10/12 vloženo 4000 Kčs. Vypočítejte zůstatek vyúčtovaný k 31/12 při 4½% úrokování při srážce 7 Kčs 20 h zúčtovaných výloh! ([VL], str. 17, výsledek: 64,60 Kčs)

Z uvedeného příkladu je zřejmé, že sbírka rozvoj finanční gramotnosti příliš neovlivnila.

Václav Seliger: *Matematika III.*

***(Učební text pro III.ročník obchodních akademií)*,**

1. vydání, Státní nakladatelství, Praha, 1948, 57 stran.

Jednalo se o třetí díl třídílné sady učebnic matematiky určených pro obchodní akademie. Jednotlivé díly nebyly rozsáhlé, nepřekročily rozsah sta stran. Učebnice byla schválena výnosem ministerstva školství a osvěty ze dne 16. srpna 1948 č. A-171668/48-IV/2 a byla zcela věnována finanční aritmetice. Při poměrně malém rozsahu (pouhých 57 stran) obsahovala 22 typových příkladů (ve většině kapitol se jednalo o skupinu příkladů) s podrobným řešením, komentářem i zkouškou a 245 příkladů na procvičení, bohužel bez uvedení výsledků.

Přibližme nyní obsah učebnice (u každé významnější kapitoly uvedu pro názornost jeden příklad).

Část I. Opakování.

Část II. Složené úrokování polhůtné.

3. Úrokování jednoduché a složené.

6. Úrokování za celá úrokovací období.

116. Jak vzroste dluh Kčs 50 000 za 15 let a) při $6^1/_2$ % p. a., b) při $3^1/_8$ % p. s.? ([SE], str. 9)

7. Úrokování za část úrokovacího období.

125. Nač vzroste jistina Kčs 24 765 za 6 let, 10 měsíců a 20 dní a) při 1 % p. q., b) při 2% p. s., c) při 4% p. a.? ([SE], str. 10)

8. Odúrokování za celá úrokovací období.

127. Vypočtěte počáteční hodnotu kapitálu Kčs 64 639,80 spl. za 10 let při $1^3/_4$ % p. s.! ([SE], str. 11)

9. Odúrokování za část úrokovacího období.

10. Výpočet doby

145. Dlužník má zaplatiti Kčs 24 765 hotově a Kčs 25 000 za 5 let; kdy může zaplatiti celou částku najednou při $1^1/_2$ % p. q.? ([SE], str. 15)

11. Výpočet úrokové míry.

159. Pohledávka se za 20 let ztrojnásobila; při které úrokové míře a) pololetní, b) čtvrtletní se to stalo? ([SE], str. 17)

12. Rovnomocná míra úroková.

160. K úrokové míře $2^1/_2$ % p. s. vypočtěte rovnomocnou úrokovou míru a) roční, b) čtvrtletní! ([SE], str. 18)

13. Dlouhodobé střádání.

14. Výpočet úspory a vkladu.

179. Kolik si nastřádáme za 5 let měsíčními počátečními vklady po Kčs 100 při 1 % p. q.? ([SE], str. 21)

15. Výpočet doby při střádání.

16. Výpočet úrokové míry při střádání.

202. Při které úrokové míře roční vznikla za 10 let úspora Kčs 89 156,32 měsíčními polhůtnými vklady po Kčs 600? ([SE], str. 24)

Část III. Počet důchodový při úrokování polhůtném.

17. Důchod stálý.

18. Stálý důchod odložený.

212. Vypočtěte čtvrtletní stálý o 5 let odložený důchod založený jistinou Kčs 74 300 při 1 % p. q.! ([SE], str. 27)

19. Důchod dočasný.

236. Při které úrokové míře roční byl vyplácen z jistiny Kčs 400 000 bezprostřední roční 25letý důchod Kčs 30 000? ([SE], str. 31)

20. Dočasný důchod odložený.

Část IV. Počet umořovací při úrokování polhůtném.

21. Umořování půjček anuitních.

266. Dlužník si vypůjčil hotově Kčs 200 000 na 3¼ % p. s.; jak velké pololetní anuity platí, chce-li dluh umořiti za 19 let? ([SE], str. 35)

22. Umořovací plány.

23. Umořovací plány s neúplnou anuitou.

280. Za kolik let byl umořen dluh Kčs 300 000 ročními 6% anuitami při úrokové míře 5 % p. a.? Vypočtěte neúplnou anuitu a sestavte umořovací plán za prvé a poslední 3 roky! ([SE], str. 40)

24. Umořování dílčích úpisů.

286. Dluh Kčs 100 000 rozdělený na 500 stejných dluhopisů má býti umořen v 5 letech ročními anuitami při 6 % p. a.; sestavte umořovací plán (celý!) a) s propočítáním zbytků, b) se zaokrouhlenými anuitami! ([SE], str. 44)

Část V. Složené úrokování předlhůtné.

25. Základní rovnice.

290. Nač vzroste dluh hotově vyplacený a) Kčs 5 542 za 7 let při 1,75 % p. s. ant., b) Kčs 16 932,45 za 32 roky při 4 % p. a. ant.? ([SE], str. 47)

26. Rovnomocné míry úrokové.

Část VI. Počet umořovací při úrokování předlhůtném.

27. Základní rovnice.

311. Jak velký dluh byl umořen za 25 let ročními polhůtnými anuitami Kčs 22 869,05 při 6 % p. a. ant.? ([SE], str. 53)

28. Umořovací plány; kontrolní výpočty.

29. Umořovací plány s anuitami úplnými.

325. Dluh Kčs 400 000 jmenovité hodnoty má býti úplně umořen za 25 let při 6 % p. a. ant.; vypočtěte roční anuitu a sestavte umořovací plán za poslední 3 roky splácení! ([SE], str. 56)

30. Umořovací plány s neúplnou anuitou.

Z výčtu témat a znění úloh se domnívám, že dnešní absolvent gymnázia by měl s řešením většiny z nich nepřekonatelné problémy. Dokud by si správně neuvědomil okamžiky úrokování a diskontování, nemohl by se vůbec dobrat ke správnému řešení.

Hodnocení učebnice

Z obsahu učebnice je patrné její odborné zaměření. Absolvent obchodní akademie měl být zběhlý při práci s finančními problémy a měl ovládat všechny drobné rozdíly způsobů úrokování. Učebnice nebyla určena běžnému občanovi a nebyla tedy pro střední školy všeobecně vzdělávacího charakteru. Pokrývala všechny standardní varianty spoření, vyplácení a splácení. Zmatek při číslování podkapitol 3 a 6 lze připsat tiskové chybě.

Student v učebnici nalezl definice všech základních pojmů, standardní značení veličin, odvození vzorců i ukázky jejich použití před předložením množství neřešených příkladů, které více než dostatečně pokrývaly základní témata finanční aritmetiky (zejména pokud hovoříme o předlhůtním a polhůtním úrokování).

Konstatuji, že se jednalo o velmi kvalitní a podrobně rozpracovaný průvodce finanční aritmetikou s velkou základnou úloh na procvičení.

Eduard Čech: *Aritmetika pro II. třídu středních škol,* částečně změněný dotisk 1. vydání, Státní nakladatelství, Praha, 1949, 98 stran.

První vydání této učebnice vyšlo v roce 1943 a bylo schváleno výnosem ministerstva školství ze dne 14. května 1943 (čís. 44 782/43-II/2) jako učebnice pro II. třídu českých středních škol (podrobně viz [CE2] v předešlé kapitole). Učebnice byla rozdělena do šesti základních paragrafů. Z hlediska finanční matematiky nás zajímá jen předposlední paragraf s názvem *Procenta. Úroky* (rozsah 18 stran).

Částečně změněný poválečný dotisk prvního vydání byl povolen pro školní rok 1949/50 výnosem ministerstva školství, věd a umění ze dne 13. ledna 1949, č. 111010/49-I/1. V té době již byla týmem autorů vedeným Eduardem Čechem z Výzkumného ústavu J. A. Komenského připravována zcela nová třídílná řada učebnic *Aritmetika pro střední školy*. Její příslušný díl pro druhou třídu je analyzován níže (viz [BC]).

Tento poválečný dotisk se na našich školách používal jen jeden rok. Jeho struktura byla velmi podobná válečnému vydání; pouze první opakovací paragraf byl rozdělen na dvě části – *Procvičování učiva I. třídy* a *Dělitelnost*.

Výše zmíněný paragraf *Procenta. Úroky* byl rozšířen pouze o část *Procvičování počtu procentového* (rozsah 21 stran). Nejvíce změn bylo provedeno v textu úloh, neboť autor vynechal a nahradil úlohy poplatné době německé okupace.

Rozbor podkapitol pracujících s úroky

Počítání úroků se týkaly čtyři podkapitoly v rozsahu deseti stran:

- Úrok;
- Výpočet úroku úsudkem;
- Výpočet úroku vzorcem;
- Obrácené úlohy úrokového počtu.

Jednalo se o první ucelenější seznámení žáků s problematikou úroků; tomu odpovídala úroveň a náročnost úloh. Prvořadým cílem bylo představit žákům nové téma a seznámit je se základními pojmy – jistina, úrokování, úrok. Vyložená teorie byla objasněna v sedmi řešených příkladech, vedle nichž bylo na procvičení uvedeno šest úloh s mnoha variantami zadání. Úlohy nebyly příliš náročné. Uveďme pro představu dvě z nich.

Příklad 1. Vypočtěte úrok z jistiny 4 758 Kčs za 7 měsíců při úrokové míře 5¾ %. ([EC], str. 81, výsledek: 159,60 Kčs)

311. Pomocí vzorce vypočtěte úrok j) Ze 21 734 Kčs za dobu od 17. června do 5. září při 5 %. ([EC], str. 84, výsledek: 232,40 Kčs)

Množství variant nabízených na samostatné procvičení obvykle přesahovalo deset. Tento počet vedl ke zmechanizování postupu výpočtů a tím k snazšímu pochopení témat v dalších školních letech, kdy se žáci setkávali s náročnějšími úlohami zahrnutými do kapitol o posloupnostech – dlouhodobé střádání, vyplácení důchodu, splácení dluhu, apod. Učebnice jako celek byla žákům dobrou pomůckou.

Eduard Čech a kolektiv: *Matematika pro III. třídu gymnasií*, 1. vydání, Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1951, 177 stran.

Učebnice se skládala ze dvou základních částí – *Aritmetika* (podkapitoly: *Posloupnosti, Limity, Kombinatorika, Počet pravděpodobnosti*) a *Geometrie* (podkapitoly: *Základy analytické geometrie, Užití analytické geometrie, Trigonometrie*). Byla schválena výnosem č. 65 499/50-I/1 ministerstva školství, věd a umění ze dne 26. října 1950 jako učebnice pro gymnasia.

Autoři zdůraznili její nové pojetí i způsob zpracování. Zejména v aritmetické části kladli důraz na úvahy, neuváděli výsledky úloh sloužících k procvičení, neboť kontrolu správnosti řešení považovali za součást celé úlohy. Domnívali se, že takové pojetí aritmetiky přispěje nejen k lepšímu a rychlejšímu pochopení významu matematiky, ale také přírodních jevů a společenského dění.

Finanční matematice byla věnována pouze čtvrtá podkapitola první kapitoly *Posloupnosti* nadepsaná *Užití geometrických posloupností*.

Rozbor a hodnocení podkapitoly *Užití geometrických posloupností*

Celá podkapitola měla rozsah pouhých šest stran z celkových dvaceti dvou stran kapitoly *Posloupnosti*. Navíc uvedené úlohy nebyly věnovány pouze „penězům“. Ty byly ukázány jen jako jedna z možností aplikace aritmetické posloupnosti při jednoduchém úrokování a geometrické posloupnosti při složeném úrokování. Hlavním cílem „peněžních“ úloh bylo objasnit, kdy se jistina chová jako člen aritmetické, resp. geometrické posloupnosti.

Teoretický výklad byl veden nejprve zcela obecně bez číselných hodnot. Procento vzrůstu nebylo spojeno s finančnictvím, ale jeho spjatost s dobou jednoho roku byla zdůrazněna. Rovněž byla zmíněna důležitost znalosti práce s logaritmy, bez kterých se student při vyjadřování neznámých ze základního vzorce pro časový horizont větší než jeden rok neobešel.

Byly předvedeny pouze dva řešené příklady. První se věnoval pravidelnému zvyšování hodnoty výroby dílny. Po rozboru a vyřešení příkladu následoval odstavec připomínající finanční aplikace posloupností:

Nejčastěji se vyskytující úlohy tohoto druhu jsou úlohy peněžní. Je-li nějaká jistina a_0 uložena na p %, vynese za každý rok úrok, který, není-li vyzvednut, se připočítá k jistině, a za druhý rok už máme vedle úroku z původní jistiny také ještě úrok z úroku. Po n letech ... ([CP], str. 19)

Následovalo zavedení pojmů úročitel, odúročitel a velmi podrobně vyřešený příklad dlouhodobého střádání (pravidelné ukládání stejné částky počátkem roku po dobu dvaceti let). Teorie byla ukončena otázkou, jež žákům dělala, dělá a pravděpodobně bude dělat velké problémy:

Jestliže číslo b vznikne z čísla a zmenšením o p procent, vznikne číslo a z čísla b zvětšením. O kolik procent? ([CP], str. 20)

Celá úvaha byla zapsána symbolicky pomocí vzorců, hledaný počet procent byl označen x:

$$b = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right); \; a = b \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right).$$

Porovnáním ekvivalentních výrazů pro b a pomocí algebraických úprav bylo vyjádřeno x:

$$x = \frac{100 \cdot p}{100 - p}.$$

Hodnota tohoto výrazu je evidentně větší než hodnota p. Což byl závěr, jenž žákům činil největší problémy.

V závěru podkapitoly bylo uvedeno 20 úloh k procvičení. Finanční problematice se věnovala přesně polovina. Jednalo se o běžné úlohy o spoření, o splácení dluhu, o výpočtu ceny pohledávky, o zajištění fondu či důchodu. Jedna úloha se však značně lišila nejen od ostatních v této učebnici, ale i od ostatních ve většině učebnic tohoto období. Posuďte sami:

55. Je-li nějaký obnos uložen ve spořitelně pouze po část roku, počítá se úrok jen za tu část roku, po kterou byl obnos uložen (a to zaokrouhlenou sestupně na poloviny měsíců). Uložím-li kapitál K na p % uprostřed roku, počítá se úrok do konce roku za zbývajících m měsíců takto: Nejprve vypočteme, jaký kapitál x třeba uložiti počátkem roku, aby za 12 – m měsíců od počátku roku vzrostl (jednoduchým úrokováním) na hodnotu K. Potom vypočteme hodnotu y, na kterou vzroste kapitál x za jeden rok. Rozdíl y – K je hledaný úrok. Proveďte výpočet a stanovte vzorec, podle něhož se vypočte úrok z vkladu vloženého uprostřed roku do konce roku za zbývajících m měsíců. (Poznámka: *Kdyby nebylo tohoto opatření, mohl bych zvýšit úrok nad zákonem stanovenou míru. Kdybych totiž uložil na počátku roku třeba 10 000 Kčs na 2 % a vklad vyzvedl koncem pololetí, dostal bych i s úrokem 10 100 Kčs. Kdybych* *vyzvednuté peníze ihned zase vložil jako nový vklad, dostal bych do konce roku 101 Kčs úroků. Úroky by tedy činily celkem 100 + 101 = 201 Kčs, t. j. o 1 Kčs více než stanovená 2 %.*) ([CP], str. 21)

Tato úloha není dnes příliš aktuální, neboť současné finanční instituce se brání řadou poplatků, které při nedodržení výběrových podmínek mohou překročit i hodnotu úroku, jenž je navíc zdaněný.

Podívejme se na matematickou podstatu úlohy. Necháme-li stranou změnu úrokovacího období, kterou obsahovala, lze dané podmínky poměrně snadno zapsat do vzorců.

- úročení do okamžiku vkladu *K*: $K = x \cdot \left(1 + \frac{12 - m}{12} \cdot \frac{p}{100}\right)$;
- úročení do konce roku: $y = x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

V popisu řešení jsem zachoval původní značení.

Hodnotu hledaného úroku ($y - K$) pomocí známých hodnot K, m a p vypočteme ze vzorce, který získáme z výše uvedených vztahů pomocí ekvivalentních úprav rovnic a algebraických úprav výrazů. Obdržíme vzorec:

$$y - K = K \cdot \frac{1 + \frac{p}{100}}{1 + \frac{12 - m}{12} \cdot \frac{p}{100}} - K = K \cdot \frac{m \cdot p}{12 \cdot 100 + 12 \cdot p - m \cdot p},$$

jenž udává hodnotu úroku, kterou podle pravidel zmíněných v úloze můžeme nárokovat, jestliže dosadíme hodnotu vkládaného kapitálu K, úrokové míry p a počet měsíců zbývajících do konce roku m.

Citovaná úloha by v dnešní době mohla být zajímavým zpestřením např. výběrového matematického semináře. Uvedená poznámka nemá v dnešní době význam, neboť již neodpovídá platným skutečnostem.

Učebnice nebyla svým rozsahem příliš objemná. Postrádal jsem větší množství řešených příkladů. Teorie byla zpracována dobře a přehledně. Množství úloh k procvičení bylo dostatečné, ale některé z nich musel, podle mého názoru, řešit žák s výraznou pomocí učitele, proto tato učebnice nebyla vhodná k samostudiu.

Neřešené úlohy pokrývaly všechny základní problémy finanční matematiky, s nimiž se mohl tehdejší žák v praxi setkat. Avšak úlohy se žákům mohly zdát uměle vytvořené a spojení s praxí zůstalo skryto. Příspěvek této učebnice ke vzdělanosti v oblasti finančnictví proto nebyl příliš významný.

Eduard Čech a kolektív: *Aritmetika pre III. triedu gymnázií,* 1. vydání, Štátne nakladateľstvo, Bratislava, 1951, 79 stran.

Jednalo se o slovenský překlad první části nazvané *Aritmetika* výše zmíněné učebnice Eduarda Čecha [CP], který provedl Vojtech Illenčík. Schválilo jej Povereníctvo školstva, vied a umení výnosem č. 4236/1951-II/2 ze dne 6. února 1951 jako učebnici pro třetí třídu gymnázií.

Nebyl to však obvyklý zcela doslovný překlad. V podkapitole nazvané *Použitie geometrických postupností* (v české verzi *Užití geometrických posloupností*) jsem nalezl tři zajímavé rozdíly.

Prvním rozdílem bylo umístění poznámky, která uzavírala výkladovou část v české verzi. Ve slovenské verzi se tato poznámka nacházela před prvním řešeným příkladem. Důvodem mohla být snaha po ucelené teorii „nerušené“ konkrétními příklady.

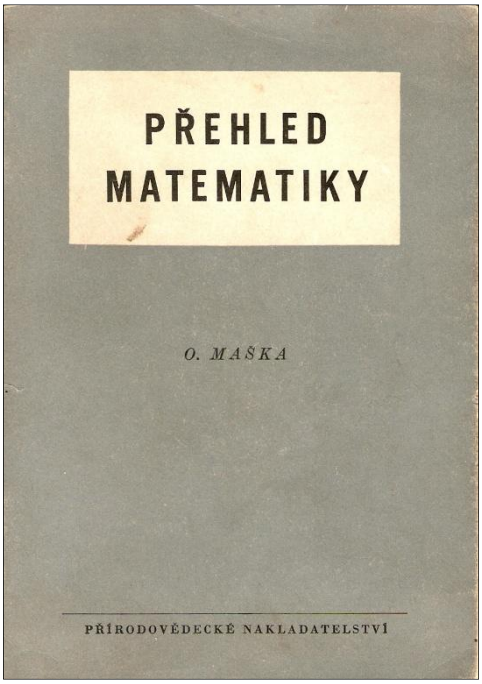
Druhým rozdílem bylo znění prvního řešeného příkladu. V české verzi se hledal procentuální nárůst výroby, zatímco ve slovenské rostl počet obyvatel města. Číselně se příklady lišily jen v počtu obyvatel města a hodnotě výroby dílny. Počet procent i další číselné hodnoty uvedené v otázkách byly shodné.

Třetím rozdílem bylo vynechání vysvětlující poznámky v úloze číslo 55, jejíž znění je uvedeno a komentováno výše.

Na hodnocení obsahu finanční matematiky, která se nacházela v této podkapitole a které je uvedeno výše, tyto odlišnosti vliv nemají.

Otokar Maška: *Přehled matematiky,* Nové vydání upravené Borisem Gruberem Jednota československých matematiků a fysiků, Přírodovědecké nakladatelství, Praha, 1951, 232 stran.

Jak je z názvu patrné, jednalo se o přehled středoškolské matematiky sepsaný Otokarem Maškou. Jeho nové vydání v roce 1951 upravil asistent ČVUT Boris Gruber podle dřívějších dvojdílných přehledů matematiky tohoto autora, které byly



vydávány v Brně již ve dvacátých a třicátých letech. První díl – *Algebra a aritmetika*, první vydání 1925, druhý díl – *Geometrie*, první vydání 1926, vyšly v nakladatelství Dědictví Havlíčkovo, Brno. Původní rozdělení publikace na dva díly bylo zachováno. První nazvaný *Aritmetika a algebra* obsahoval pět kapitol dále členěných na padesát jedna paragrafů, druhý *Geometrie* obsahoval padesát paragrafů v šesti kapitolách, z nichž jedna byla věnována základům infinitezimálního počtu.

Pro orientaci krátce nahlédněme do obsahu.

Obsah publikace

Díl první

Aritmetika a algebra

I. Základní početní výkony (44 strany);
II. Rovnice (22 stran);
III. Řady a úrokování (9 stran);
IV. Kombinatorika (10 stran);
V. Základy statistiky (6 stran).

Díl druhý

Geometrie

I. Planimetrie (38 stran);
II. Stereometrie (11 stran);
III. Rovinná trigonometrie (25 stran);
IV. Sférická trigonometrie (9 stran);
V. Analytická geometrie v rovině (27 stran);
VI. Základy infinitezimálního počtu (17 stran).

Z pohledu finanční matematiky byla tato publikace zajímavá především tím, že přehledně uváděla pravidla úrokování. V porovnání s pozdějšími publikacemi zde byl znatelný rozdíl – pravidla úrokování byla zařazena do obecného přehledu středoškolské matematiky. Nahlédneme-li do knihy autora Josefa Poláka *Přehled středoškolské matematiky*, v současné době nejrozšířenější ekvivalentní publikace, a sledujeme-li výskyt finanční matematiky u jednotlivých vydání, zjistíme zásadní rozdíl až mezi čtvrtým vydáním z roku 1983 (viz [PJ4]) a pátým vydáním z roku 1991, tj. vydání nejblíže předcházejícím a vydání nejblíže následujícím revolučnímu roku 1989. Od pátého přepracovaného vydání z roku 1991 (rozsah 608 stran), jež vychází beze změn až do osmého vydání v roce 2005 (viz [PJ]) nacházíme na straně 277 v kapitole o posloupnostech a řadách jeden řešený příklad na složené úrokování. V prvním vydání Polákova *Přehledu* z roku 1972 (rozsah 627 stran) až zmiňovaném čtvrtém vydání tento či podobný příklad nenalezneme.

Zcela odlišná situace je však u Maškova přehledu, v němž se zaměříme jen na třetí kapitolu prvního dílu nazvanou *Řady a úrokování*. Tato kapitola je rozdělena do pěti paragrafů:

§ 33. *Aritmetické řady*;

§ 34. *Geometrické řady*;

§ 35. *Složená řada*;

§ 36. *Úrokový počet*;

§ 37. *Střádání, důchod, úmor*.

Charakteristika jednotlivých paragrafů

Veškeré definice, pravidla a vlastnosti pojmů autor zapsal a vysvětlil nejprve s maximálním využitím symbolů a teprve pak popsal slovně. Pro názornost připojil také jednoduché příklady, čímž značně usnadnil studium a pozdější použití získaných vědomostí. Příklady pomáhaly čtenáři hlouběji pochopit smysl jednotlivých pouček.

V § 33. *Aritmetické řady* a § 34. *Geometrické řady* byly uvedeny a objasněny základní vlastnosti příslušných číselných řad. Zvláštní symboly byly následně pojmenovány a popsány v poznámkách pod čarou. Uveďme jednu z nich.

Σ (sigma) je velké S řecké abecedy. ([OM], str. 75)

Třicátý pátý paragraf byl věnován speciálním složeným řadám. Byly popsány aritmeticko-geometrické řady, které vznikají násobením stejnolehlých členů aritmetické a geometrické řady, tj. *n*-tý člen složené řady vznikne jako součin *n*-tého členu aritmetické a *n*-tého členu geometrické řady.

Následující dva paragrafy byly již věnovány finanční matematice.

Ve třicátém šestém paragrafu byly zdůrazněny stěžejní pojmy finanční matematiky a bylo uvedeno jejich značení: *jistina* čili *kapitál* (*J*), *úroková míra* čili *procento* (*p*), *úrok* za určitou dobu (*u*) a *doba* v letech (*t*). Bylo vyzdviženo základní rozdělení úloh podle typu úrokování. Pro oba typy úrokování byly uvedeny a vysvětleny základní vzorce.

U jednoduchého úrokování byla zdůrazněna konstantní výše kapitálu a jednorázové přičtení úroků. Pro výpočet těchto úroků byly uvedeny dva vzorce, které se liší časovou jednotkou; bylo zdůrazněno, že se otázka nemusí vždy týkat jen úroků, ale i ostatních veličin. Pro úplnost uveďme oba vzorce:

$$u = \frac{J \cdot p \cdot t}{100} \text{ za t let nebo } u = \frac{J \cdot p \cdot \frac{d}{360}}{100} = \frac{J \cdot p \cdot d}{36000} \text{ za d dní.}$$

([OM], str. 79)

U výkladu složeného úrokování byly zdůrazněny dvě základní otázky. První, která se ptala na budoucí hodnotu současného kapitálu, pracovala s úročitelem r^n, a druhá, která se ptala na současnou hodnotu budoucího kapitálu, pracovala s odúročitelem r^{-n}. Veličina *r* byla v těchto příkladech desetinné číslo (1 + *p*/100) a *n* byl počet úrokovacích období. Hodnota úročitele i odúročitele byla nalezena v tabulkách a po vynásobení danou veličinou byl získán výsledek, tj. hledaný kapitál. Vše bylo ukázáno na třech řešených příkladech. Ve třetím příkladu byla uvedena i možnost změny doby připisování úroků, jednalo se tedy o „zdvojený“ příklad. Zatímco ve třicátém šestém paragrafu byly vyloženy a popsány základní veličiny a vzorce finanční matematiky, v závěrečném, třicátém sedmém paragrafu se nacházely řešené úlohy vztahující se k dlouhodobému střádání, důchodu a úmoru. Ve výkladu byly zdůrazněny zákonitosti geometrické řady, navíc nebylo opominuto ani uvedení příslušných pojmů z finančnictví v souvislosti s danou situací – tj. střadatel při dlouhodobém střádání, zásobitel při zakládání důchodu a umořovatel při splácení čili umořování dluhu, jejichž tabulky byly studentům k dispozici.

Uveďme znění řešených příkladů, na kterých autor objasňoval základy finanční matematiky.

I. *Úředník ukládá po 10 let vždy počátkem roku 500 Kčs při 4% celoročním úrokování. Kolik nastřádá do konce 11. roku?*

II. Jaký obnos musíme dnes uložiti, aby nám vždy koncem roku po 20 let byla vyplacena renta 10 000 Kčs (při 4% celoročním úrokování)?

III. 1. Dluh 50 000 Kčs má býti splacen dvaceti splátkami začátkem každého pololetí. Jaké budou tyto splátky při 5% pololetním úrokování (první splátka za půl roku)?

III. 2. Jak dlouho se bude spláceti 100 000 Kčs ročními splátkami 6 000 Kčs koncem roku a jak velká bude poslední splátka? (4½ % celoročně.)

([OM], str. 80–83)

Hodnocení publikace

Tento přehled matematiky považuji za cenný především proto, že ukazuje možnost vyložení podstaty finanční matematiky na velmi malém prostoru devíti stránek malého formátu (12 cm x 17 cm).

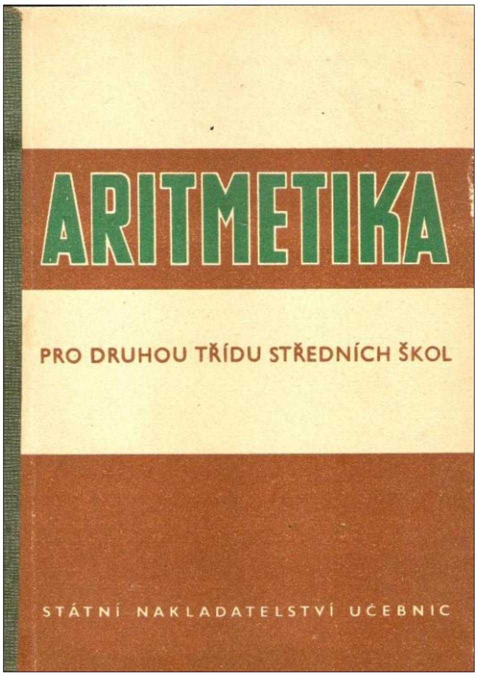
Je nepopiratelné, že publikace není postačující ke studiu celého spektra finanční matematiky, což ovšem nebylo jejím cílem. Jedná se totiž o přehled matematiky a jako takový slouží k opakování či oživení již dříve nastudované látky. Napadá mě přirovnání, že jde o záchranný kruh na lodi vědění, po kterém může každý v okamžiku nouze sáhnout, pokud se ovšem již dříve naučil, jak s ním zacházet.

Jan Bílek, Eduard Čech, Karel Hruša, Vítězslav Jozífek, Karel Prášil, Karel Rakušan: *Aritmetika pro druhou třídu středních škol,* 2. vydání, Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1951, 132 stran.

Cílem autorů bylo sepsat matematickou učebnici, kterou by mohli využívat učitelé všech typů středních škol. *Aritmetiku* schválilo svým výnosem č. 16 781/51-I/1 ministerstvo školství, věd a umění dne 21. března 1951 jako učebnici pro střední školy.

Druhé vydání se nijak neodlišovalo od prvního, pouze jeden rok starého vydání (schváleno výnosem č. 57 897/50-I/1 ministerstva školství, věd a umění ze dne 5. května 1950 jako učebnice pro střední školy).

Jednalo se o celorepublikově rozšířenou a užívanou středoškolskou učebnici ze čtyřdílné sady – *Aritmetika pro první, druhou, třetí a čtvrtou třídu středních škol*, které vycházely beze změn až do roku 1953. Velké procento budoucích maturantů z ní mohlo studovat; její obsah patřil do základního okruhu maturitního učiva. Za jistý nedostatek učebnice lze považovat, že neobsahovala složeného úrokování. Jednoduché úrokování bylo naopak vyloženo do nejniternějších detailů ve čtvrté podkapitole nazvané *Úrok*, která byla součástí šesté kapitoly *Procenta. Úrok*.



Charakteristika podkapitoly *Úrok*

Dvanácti stránková podkapitola spolu se základní teorií obsahovala řadu řešených příkladů a neřešených úloh. Teorie byla popsána velmi podrobně a také komentáře řešených úloh byly poměrně rozsáhlé.

V úvodu byl student seznámen s pojmem *úrok* a s jeho vztahem k základní dvojici finanční matematiky *věřitel – dlužník*. Pojednáno bylo o výhodách vkladů do peněžních ústavů a o výhodách i nevýhodách půjček, které tyto ústavy poskytovaly.

Byla vyzdvižena společenská důležitost vkladů, které peněžní ústav dále investoval do budování veřejného hospodářství. Vkladateli bylo zdůrazněno, že jeho vklad přispívá k výstavbě továren, divadel, škol, bytů apod., za který mu peněžní ústav vyplácí poplatek za tuto možnost investování a ten byl nazván *úrokem*. Povinnost placení úroků byla vysvětlena pro obě možnosti, tedy jak pro případ, že občan peníze do ústavu vložil, tak pro případ, že si je od ústavu půjčil. Citujme předložený výklad:

Vložíte-li peníze do peněžního ústavu, dáváte mu tím právo hospodařiti s vašimi penězi a za toto právo vám peněžní ústav vyplácí poplatek, zvaný ***úrok****. Peněžní ústav použije vašich peněz na budování veřejného hospodářství. ... Vklad u peněžního ústavu zůstává vaším majetkem, ústav vám jej na vaše přání vrátí. Vy jste peníze jen půjčili peněžnímu ústavu, jste tedy jeho* ***věřitelem*** *a ústav je vaším* ***dlužníkem*** *...*

Peněžní ústavy nejen přijímají vklady, ale též poskytují ***půjčky****. Vypůjčíte-*li *si u peněžního ústavu peníze, potom je ústav vaším věřitelem a vy jste dlužníky ústavu. Za právo hospodařiti s penězi ústavu platíte ústavu úrok zase vy ...*

Úroková míra pro vklady je vždy nižší, nežli je úroková míra pro půjčky. Proč? Má-li peněžní ústav zisk, je ho použito v prospěch veřejného zřízení ...
([BC], str. 101–102)

V podkapitole rozdělené podle náročnosti výpočtu do dvou částí se objevovalo jen jednoduché úrokování. Složené úrokování bylo připomenuto pouze v jednom odstavci s poznámkou, že úroky vkladů nebylo nutno vždy vybírat, ústav je připočetl na konci roku ke vkladu a v dalším roce úročil takto navýšenou částku.

Výklad učiva předpokládal jen znalost počítání s procenty a znalost kalendáře pro zjištění počtu dnů uložení vkladu.

a) *Výpočet úroku úsudkem*

Znění řešených úloh nám ukáže jejich nenáročnost. Na ukázku plně stačí dvě úlohy.

1. úloha Kolik Kčs úroku dá jistina 3 600 Kčs při úrokové míře 3 %: a) za jeden rok? b) za 4 roky? c) za půl roku? d) za čtvrt roku? e) za měsíc? ([BC], str. 102, výsledky: a) 108 Kčs, b) 432 Kčs, c) 54 Kčs, d) 27 Kčs, e) 9 Kčs)

3. úloha Vypočtěte úrok z jistiny *7 264,65 Kčs při úrokové míře 4½ % za dobu od 14. března do 12. října.* ([BC], str. 103, výsledek: za 207 dnů činí úrok po zaokrouhlení 188 Kčs)

K samostatnému procvičení bylo předloženo dalších dvacet devět úloh s jednoduchým zadáním, které navíc nebyly ani textově příliš bohaté. Základní úkol zněl: *vypočtěte úrok*. U některých úloh se měl výpočet provést zpaměti, u jiných písemně.

b) *Výpočet úroku vzorcem*

Ve druhé části bylo zavedeno symbolické označení jednotlivých veličin, tj. jistina j, úroková míra p, počet roků r a úrok $ú$. V neobvykle podrobném postupu s bohatým komentářem byl odvozen vzorec

$$100 \cdot ú = j \cdot p \cdot r\,,$$

který byl studentům intuitivně znám již z řešení úloh v části a). Hlavní význam této části spočíval právě v jeho odvození a obecném vyjádření.

V řešených úlohách byly zdůrazněny dva základní kroky postupu, tj. dosazení do vzorce a provedení výpočtu. Jedna řešená úloha náročnosti z části a) doplněná komentářem zabírala celou jednu stránku. Ve druhé části byly jen dva řešené příklady a devět neřešených úloh na procvičení.

Následující čtyři stránky byly psány písmem menší velikosti; pravděpodobně se jednalo o rozšiřující učivo. Popsány byly další možnosti využití výše uvedeného vzorce. Do této chvíle se v každé úloze počítal úrok, nyní byly vyloženy zbylé tři možnosti, tj. výpočet jistiny, výpočet úrokové míry a výpočet doby, pokud byly známy ostatní tři veličiny. Pro každou možnost byly uvedeny dva řešené příklady s podrobným komentářem.

Na závěr bylo dáno cvičení, v němž se doplňuje tabulka (třináct obměn zadání – řádků a čtyři sloupce). Každý sloupec zastupuje jednu finanční veličinu, tj. jistina, úrok, doba a úroková míra, v jednotlivých řádcích jsou uvedeny hodnoty tří veličin a hodnota čtvrté veličiny se dopočítává.

Hodnocení učebnice

Jednalo se o středoškolskou učebnici matematiky, která finanční matematiku postavila na okraj zájmu a zredukovala ji jen na nejjednodušší problémy, na nichž si studenti mohli pouze procvičit svou zručnost při práci s procenty.

Poznamenejme, že jednoduché úlohy věnující se procentům mají bohatší text, reagují na aktuální události, daleko více odrážejí politické a hospodářské změny. Podívejme se na dvě z nich.

563. JZD mělo na skladě 384 q pšenice, žita a ječmene. Žita bylo 20% váhy všeho obilí, ječmene 140% váhy žita. Kolik bylo žita a ječmene celkem?

565. Alexander Stachanov, slavný sovětský úderník, narubal za směnu 321 t uhlí, při čemž normální výkon byl 14 t. Na kolik procent splnil normu? ([BC], str. 100, výsledky: 563. 184,32 q; 565. 2 292$^{6}/_{7}$ %)

Přínos této učebnice v oblasti finanční matematiky byl naprosto nepatrný. Student by po prostudování textu měl chápat smysl úroků, půjčky a dluhu, ale výpočty zahrnující složené úrokování by byly pravděpodobně nad jeho síly. Pokud autoři mínili vložit podkapitolu *Úrok* s cílem procvičení procentového počtu, množství základních početních úkonů mohlo vést u studentů ke zmechanizování výpočtů a k excelentním výkonům při práci s procenty.

Vidíme, že s příchodem komunistů k moci a jejich představě společnosti bez potřeby finančních prostředků jako kapitalistického přežitku se velmi rychle měnil obsah úloh s původně finanční tématikou. Týkalo se to nejen aplikací vlastností aritmetické a geometrické posloupnosti, které se textově zcela přesunuly do výroby, ale také základního procentového počtu. Finanční úlohy se proto objevovaly jen zcela výjimečně.

Rudolf Zelinka: *Učební texty pro aritmetiku, III. část,* 2. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1952, 190 stran.

Tyto texty byly sepsány pro státní kurzy, které byly „přípravnami" pracujících ke studiu na vysokých školách a na školách důstojnického dorostu. Jednalo se o třídílnou sadu učebnic aritmetiky, jež zcela pokrývala rozsah středoškolského učiva a v této podobě vycházely od roku 1951 do roku 1953. Přestože třetí část obsahovala témata vhodná pro zařazení úloh s finanční tématikou, na nichž by se dala ukázat další oblast praktického využití matematických dovedností, nebyla zařazena ani jediná.

Josef Huka, Vítězslav Jozífek: *Matematika pro I. ročník strojnických škol,* 2. přepracované vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1953, 280 stran.

Tato učebnice matematiky byla schválena výnosem č. 16 637/52-IV/6 ministerstva školství, věd a umění ze dne 28. července 1952 jako učební text pro první ročník strojnických škol a večerních škol pro pracující.

Její autoři označovali matematiku na strojnické škole za průpravný předmět, který měl poskytnout studentům takové vědomosti, aby mohli řešit úlohy v odborných předmětech a pozdější praxi. Předpokládali, že se studenti s většinou uvedeného učiva již dříve setkali. Vzhledem k charakteru večerních škol pro pracující ovšem nepředpokládali dobrou znalost vykládané látky. Důraz kladli na praktické úlohy se zaměřením na budoucí povolání absolventů. Autoři zdůrazňovali:

Rozsah učiva je takový, že se dají s pomocí odborných nauk řešit všechny úlohy, které strojnická praxe denně přináší jak v provozu, tak i v jednodušší konstrukci. Bude mít tedy každý příležitost, až se vrátí do výroby jako dělník, rýsovač, postupář, plánovač, úkolář, konstruktér, vedoucí výroby atd., aby využil vědomosti z matematiky ku prospěchu nejen svému, ale i svého národního podniku a tím prospěl mírovému úsilí všech pracujících. ([HJS], str. 3)

Procentům a úrokům byla věnována patnáctá, pouze třístránková kapitola. Procenta a jednoduché úrokování byla vyložena na čtrnácti řádcích! Byl zaveden pojem *procento* a *promile*, byl popsán postup výpočtu hodnoty hledané veličiny přes jedno procento. Jednoduchý úrokový počet byl vyložen jako speciální typ procentového počtu závislého na čase. Student byl nabádán k přepočtu každého časového období na roky, což plynulo z pravidla udávat úrokovou míru per annum. Na závěr byly vyřešeny dva jednoduché názorné příklady; jejich komentář byl velmi podrobný.

Kapitola byla uzavřena 25 nenáročnými úlohami, z nichž 13 operovala s financemi. Uveďme dvě z nich. První byla standardem, tj. textově velmi chudá, druhá byla výjimkou jak v délce textu, tak v počtu výpočtů, které měly být provedeny.

254. 6½% úrok z kapitálu byl 292,50 Kčs. Jaký byl kapitál?

267. Počátkem roku bylo uloženo Kčs 18 200, 5. ledna bylo vloženo Kčs 1 800, 16. února vybráno Kčs 2 200, 1. dubna vloženo Kčs 1 600, 25. dubna vybráno Kč 900, 19. května vybráno Kčs 2 500 a 20. června vloženo Kčs 1 200. Jaký byl stav vkladu i s úroky koncem června při 2% úrokování? (Vypočtěte nejprve úroky ze všech vkladů ode dne vložení do konce června a od nich odečtěte úroky ze všech výplat ode dne vybrání do konce června!) ([HJS], str. 36, výsledky: 254. 4 500 Kčs; 267. 17 382,80 Kčs)

Hodnocení učebnice

V úvodu autoři zmiňovali široké spektrum absolventů ve strojnické praxi od dělníka přes plánovače až po vedoucího výroby, kteří by měli získané znalosti využívat v každodenním praktickém životě, proto byla tato učebnice hodně prakticky zaměřená. Veškerá vyložená teorie byla ihned podpořena praktickým využitím, které čtenář nalezl ve slovních úlohách.

Zaměřím-li se na finanční matematiku, považuji za cenné, že si absolvent dokázal spočítat úrok z vkladu nebo půjčky i když jen do konce příslušného kalendářního roku. To bylo však pro běžného občana využívajícího legální finanční operace v padesátých letech dvacátého století podstatné. Když opomineme nelegálně provozovanou lichvu, celá nabídka produktů peněžních ústavů se sestávala jen z konkrétních účelových půjček a z vkladů uložených na vkladních knížkách.

Jozef Kroupa, Karel Rakušan, Anna Rakušanová, Jan Vyšín:
Matematika pro šestý postupný ročník,
1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1954, 274 stran.

Publikace z řady učebnic matematiky pro všeobecně vzdělávací školy vyšla za redakce Rudolfa Zelinky, Karla Hruši, Antona Dubce s historickými poznámkami Františka Balady a Karla Koutského. Schválena byla výnosem č. 20 809-1954-A I-1 ministerstva školství ze dne 22. března 1954.

Učebnice byla rozdělena na dvě základní části – aritmetika a geometrie. Kapitola *V. Desetinné zlomky* uvedená v první části obsahovala podkapitolu *10. Úrok* v rozsahu čtyř stran. Úrok byl zde vysvětlen jen s odkazy na práci s procenty; nebyl doplněný teoretickou částí. Student se dozvěděl, že roční úrok se vyjadřuje v procentech jistiny, peněžní ústavy poskytují z vkladů 2 % úroku a z půjčky platíme 4% úrok. Před úlohami na procvičení byly vyřešené a komentované tři jednoduché příklady. Jejich náročnost odpovídala prvnímu seznámení s úroky a celému rozsahu věnovanému finanční matematice. Velmi snadno posoudíme podle následujících úloh.

209. Vypočtěte zpaměti úrok, bylo-li půjčeno: g) 200 Kčs na 1 rok při 4 %.

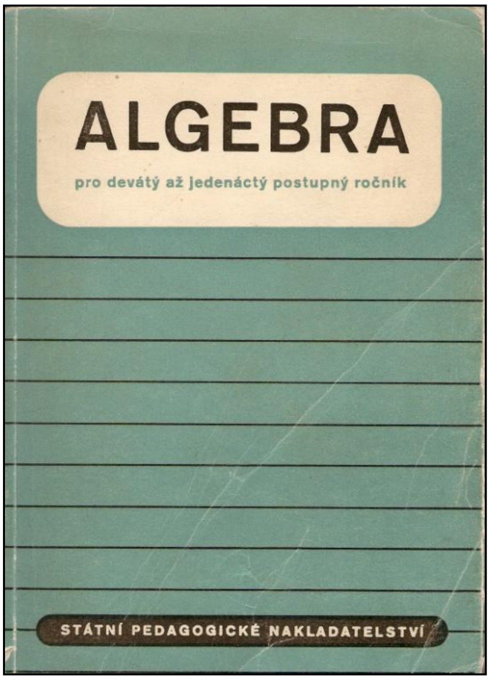
211. Vypočtěte úrok: e) z 236 Kčs od 17. května do 8. listopadu při 5 %.

([RR], str. 168, výsledky: 209 g) 8 Kčs, 211 e) 5,63 Kčs)

Hodnocení učebnice

Učebnice patřila ke standardům učebnic studovaného období. Ačkoli byla kvalitní ve většině částí, finanční aritmetiku příliš nepodporovala. Rozsah věnovaný finanční části byl malý, ale ne zanedbatelný. Student se alespoň seznámil se základními pojmy jako byly *úrok, vklad* a *půjčka*. Dále ocenil stručný rejstřík s nejdůležitějšími matematickými pojmy. V učebnici avšak postrádám oddíl s výsledky a také avizované historické poznámky byly malého rozsahu (jen pět stran z celkového rozsahu 274 stran).

Josef Holubář, František Hradecký, Karel Hruša, Ema Kasková, Milan Kolibiar, František Krňan: *Algebra pro devátý až jedenáctý postupný ročník*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1954, 372 stran.



Souhrnnou učebnici matematiky pro poslední tři ročníky středních všeobecně vzdělávacích škol schválilo ministerstvo školství výnosem č. 28 721/54, A I/1 ze dne 21. dubna 1954 jako učebnici pro výše uvedený typ škol. Recenzována byla například komisí pro učebnice zřízenou při Československé akademii věd, akademikem Otakarem Chlupem, a Výzkumným ústavem pedagogickým v Praze.

Po jejím prostudování měl být student připraven ke složení maturitní zkoušky. Úloh s finanční tématikou nenalezneme mnoho. V části pro jedenáctý ročník v kapitole o posloupnostech a řadách byla otištěna čtvrtá podkapitola nazvaná *Užití geometrických posloupností*, v níž byly na šesti stranách představeny teoretické základy finanční aritmetiky doplněné výčtem základních pěti typů úloh.

Člen po n změnách je $a_n = a_0 \cdot r^n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ (2)

Úlohy užívající vzorce (2) *můžeme rozdělit do několika skupin:*

a) *Výpočet konečné hodnoty* a_n,

b) *výpočet počáteční hodnoty* a_0,

c) *výpočet procenta růstu (poklesu) p,*

d) *výpočet čísla n, t. j. počtu změn, jindy počtu období (roků),*

e) *složitější úlohy o růstu (poklesu), které vedou ke geometrickým posloupnostem.* ([HH], str. 280)

Následovalo pět řešených příkladů, které byly postaveny jen na znalosti vlastností geometrických posloupností a řad. „Čisté“ finanční matematice se věnoval pouze příklad pátý, který je uveden níže.

Charakteristika podkapitoly

Autoři nejprve zmínili důležitost geometrických posloupností. Uvedli, že se v praxi můžeme často setkat se vzrůstem a poklesem číselných údajů, které tvoří geometrickou posloupnost. Vyzdvihli nárůst a pokles o určitý počet procent *p* během jednoho roku a odvodili základní vzorce.

Při vzrůstu po *n* změnách zapisovali vztah mezi počáteční hodnotou a_0 a konečnou hodnotou a_n

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n;$$

při poklesu po *n* změnách zapisovali vztah počáteční hodnoty b_0 a konečné hodnoty b_n

$$b_n = b_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n.$$

Připomněli, že se vlastnosti geometrických posloupností využívají k výpočtu složených úroků. Příslušné číslo $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ označili r_n a nazvali *úročitel* a jeho převrácenou hodnotu *odúročitel*. Zmínili i další využití vzorců, což ukázali v prvním řešeném příkladu, který pojednával o růstu počtu obyvatel ve městě během několika let při konstantním procentuálním ročním nárůstu.

Úlohy týkající se financí autoři rozdělili do pěti skupin: výpočet konečné hodnoty, výpočet počáteční hodnoty, výpočet procenta růstu, výpočet počtu změn čili období a složitější úlohy. Ke složitějším úlohám neuvedli žádné speciální vzorce a odkazovali studenta na jeho znalosti vlastností geometrických posloupností.

Po teoretickém úvodu následovalo pět řešených příkladů; první tři pojednávali o již zmiňovaném růstu počtu obyvatelstva, odpisování ceny stroje a růstu sklizně. Zajímavé bylo uvedení fyzikální úlohy, v níž se měla vypočítat ztráta intenzity světla při průchodu skleněnou deskou. Pátý příklad ocitujeme v úplném znění:

Jestliže uložím počátkem každého roku 1 000 Kčs, kolik budu mít při 2%ním úrokování (složeném) po dvaceti letech? ([HH], str. 284, výsledek: 24 781 Kčs)

Úročitel r^{20} potřebný k výpočtu nalezli studenti v tabulce úročitelů. Symbolicky vypadá výpočet takto:

$$s_{20} = a \cdot r^{20} + a \cdot r^{19} + \ldots + a \cdot r = a \cdot r \cdot (1 + r + \ldots + r^{19}),$$

$$s_{20} = a \cdot r \cdot \frac{r^{20} - 1}{r - 1} = 1000 \cdot 1{,}02 \cdot \frac{1{,}4859 - 1}{0{,}02} = 51000 \cdot 0{,}4859 = 24780{,}90.$$

Podkapitolu autoři uzavřeli osmi neřešenými úlohami, z nichž se čtyři vztahovaly k financím a jejichž zaměření a náročnost korespondovala s vyloženou teorií.

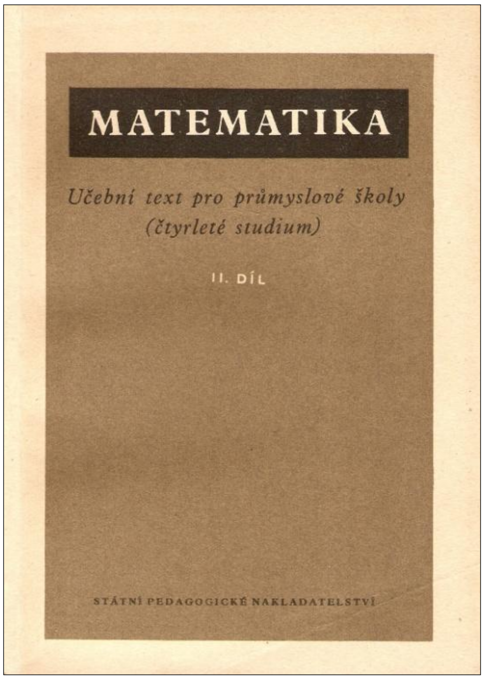
Hodnocení učebnice

V každé kapitole autoři svědomitě vykládali teorii, kterou doplnili řešenými příklady s komentářem. Uzavřeli je rozumným množstvím neřešených úloh různé náročnosti. Jejich cílem bylo, aby byl každý student připraven k maturitní zkoušce z matematiky a přijímacím zkouškám na vysokou školu.

Rád bych vyzdvihl dvě úlohy s finanční tématikou, jež podtrhují praktické využití vlastností geometrických posloupností. V první se jednalo o měsíční důchod pobíraný po deset let a otázkou byla výše původně uložené částky. Ve druhé se umořoval dluh po dobu patnácti let stejnou částkou splácenou koncem roku a otázkou byla výše této splátky čili anuity. Z mého pohledu se jedná o úlohy pro současného studenta velmi náročné. Ověřují totiž hloubku porozumění vlastnostem geometrických posloupností, případně přímo znalosti finanční matematiky. Student z dob Rakousko-Uherské monarchie či první republiky byl na takový typ úloh zvyklý, ale jednalo se u něho více o početní rutinu z oblasti finančnictví než o hlubší znalost geometrických posloupností.

Vzhledem k náročnosti výpočtů považuji výše citované úlohy za hlavní přínos této učebnice k výkladu finanční problematiky na středních školách v tomto období.

Jiří Kabele, Jan Kotík, Eduard Kriegelstein, Antonín Pospíšil:
Matematika, II. díl, Učební text pro průmyslové školy (čtyřleté studium),
1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1954, 236 stran.



Druhý díl třídílné sady učebnic matematiky, který byl určen pro strojnické, stavební, chemické a elektrotechnické průmyslové školy a vycházel do konce padesátých let, schválilo ministerstvo školství výnosem č. 23 801/54-B II/1 ze dne 3. dubna 1954 jako učební text pro obory čtyřletého studia na výše uvedených školách.

Autoři v úvodu zdůraznili význam deduktivního myšlení a výjimečné postavení matematiky v rozvoji technických věd a pokroku vůbec. Petitem odlišili rozšiřující učivo a historické výchovné poznámky od povinného základního učiva. Každou teoretickou část objasňovali na komentovaných řešených příkladech a kapitoly uzavírali větším množstvím neřešených úloh, které uspořádali podle obtížnosti.

V první kapitole se věnovali posloupnostem. V její šesté podkapitole nazvané *Užití geometrických posloupností* se zabývali mimo jiné také základy finanční matematiky.

Charakteristika podkapitoly

Celá podkapitola zaujímala necelých osm stran a finanční oblasti autoři věnovali pět z nich. V teoretickém úvodu podkapitoly vyzdvihli praktické využití geometrických posloupností v některých typech úloh, kde daná či hledaná veličina vzrůstala nebo klesala ve stále stejném poměru, který býval obvykle zadán v procentech. Přednost dávali úlohám spojeným s růstem produktivity výroby, výnosu sklizně, počtu obyvatelstva apod. Finanční aritmetiku představili pomocí úloh, jež pojednávali o úrokování vkladu, střádání, umořování dluhu atd.

Teorii doplněnou odvozováním vztahů podporovali graficky, zavedli pojmy *úročitel* a *odúročitel*. Ze tří řešených příkladů byly dva s finanční tématikou.

V prvním z nich byla však použita téměř nereálná hodnota úrokování vkladu ve výši 22½ %.

Zaujal mne druhý příklad věnovaný spoření, jenž byl v pořadí třetí řešený, a proto se na něj podívejme podrobně.

Jakou částku musíme ukládat na počátku každého roku po 20 let při 2% úrokování, abychom tak zajistili fond, který bude možno v dalších deseti letech vyčerpat částkami a' = 10 000 Kčs, splatnými na konci roku. ([KK], str. 33–34, výsledek: 3 624,20 Kčs)

Vklady neboli střádané částky označené a a vybírané částky neboli renty označené a' autoři převedli na jejich budoucí, respektive minulou hodnotu úrokováním, respektive odúrokováním na konec 20. roku, což byla celková doba spoření. Dostali rovnici:

$$a \cdot q^{20} + a \cdot q^{19} + \ldots + a \cdot q^{2} + a \cdot q = a' \cdot q^{-1} + a' \cdot q^{-2} + \ldots + a' \cdot q^{-9} + a' \cdot q^{-10},$$

kterou upravili na tvar:

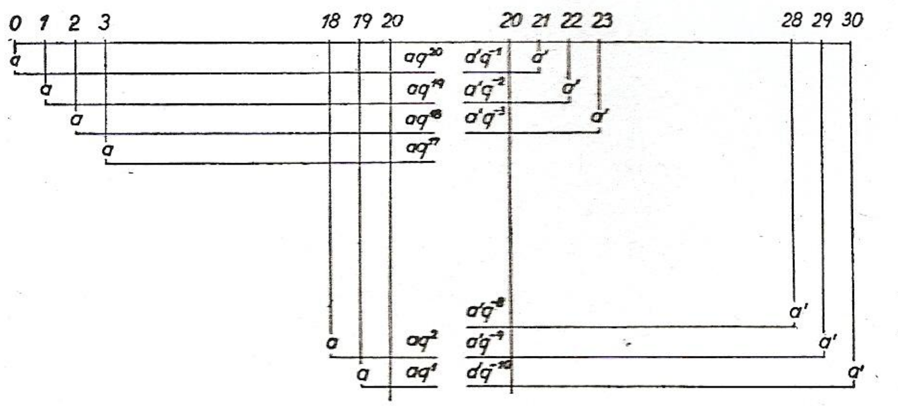
$$a \cdot q \cdot \frac{q^{20}-1}{q-1} = a' \cdot q^{-10} \cdot \frac{q^{10}-1}{q-1},$$

do něhož dosadili známé hodnoty a', q, hodnoty q^{20}, q^{10} a q^{-10} nalezli v tabulkách úročitelů a odúročitelů. Po dosazení získali rovnici

$$a \cdot 1{,}02 \cdot \frac{0{,}48595}{0{,}02} = 10000 \cdot 0{,}82035 \cdot \frac{0{,}21899}{0{,}02}.$$

Z ní jednoduchými úpravami vypočetli hodnotu vkladu a, který bylo třeba na počátku každého roku ukládat.

Úlohu jsem vybral ze dvou důvodů. Prvním důvodem bylo, že v ní můžeme nalézt prvky dlouhodobého střádání, důchodu i umořování dluhu zároveň. Druhým důvodem byla zajímavá a neobvyklá grafická podpora. Situace byla zobrazena graficky a užitý vzorec byl z grafu „vyčten“. Podívejme se na obrázek.



([KK], str. 34, obr. 15)

V levé části obrázku vidíme v řádcích nalevo vklady a napravo jejich hodnoty na konci dvacátého roku. V pravé části vidíme v řádcích napravo výběry a nalevo jejich hodnoty na konci dvacátého roku. Jelikož z úročených vkladů získáme výběry, musí být situace na konci dvacátého roku v rovnováze, z čehož plyne výše uvedená rovnice.

Celá podkapitola byla ukončena dvanácti neřešenými cvičeními určenými k procvičení látky; polovina z nich byla věnována finančním problémům.

Hodnocení učebnice

Učební látka byla v učebnici velmi pečlivě zpracována z teoretického i z praktického hlediska. Podrobná, přehledná a srozumitelná teorie byla doplněna rozumným množstvím řešených příkladů vhodných pro osvojení a prohloubení teoretických poznatků. K dalšímu utvrzení a „zažití“ těchto poznatků bylo určeno větší množství neřešených cvičení.

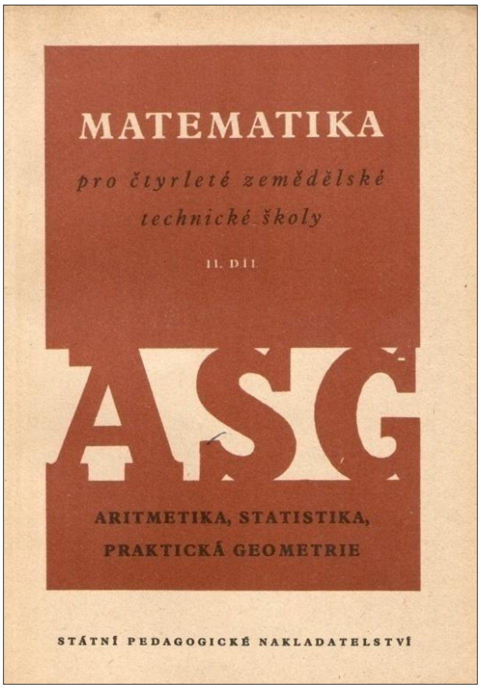
Podíváme-li se na škálu a objem finanční matematiky určených pro danou skupinu středoškoláků, měli by tito absolventi být schopni s přehledem sestavit spořící i umořovací plán. Což, jak uvidíme v učebnicích z pozdějších let, bylo světlou výjimkou. I když i zde se nacházela spousta úloh o zvyšování výroby a plnění plánů pětiletky, nebylo to na úkor základů finanční matematiky.

Otakar Hruška, Václav Pelant: ***Matematika pro zemědělské technické školy, II. díl, Aritmetika, Statistika, Praktická geometrie,***
1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1954, 212 stran.

Jednalo se o učebnici srovnatelné úrovně, rozsahu a náročnosti jako byla předešlá [KK]. Také textové „pozadí“ úloh bylo přibližně stejné. Procentuální nárůst úloh zaměřený na zemědělství a pokles úloh se zaměřením na technickou oblast byl vzhledem k cílové skupině studentů logický. U úloh s finanční tématikou byl však tento rozdíl takřka nepostřehnutelný.

Stejně jako u učebnice [KK] byla také zde první kapitola věnována posloupnostem. Čtvrtá podkapitola *Užití geometrických posloupností* v rozsahu sedmi stran obsahovala standardně vyučovanou část finanční matematiky.

Charakteristika podkapitoly



Struktura podkapitoly se významně neodlišovala od struktury předešlých učebnic. Zhruba dvoustránkový teoretický úvod obsahoval definice nejdůležitějších pojmů a objasnění základních vztahů (např. kvocient v procentech, pojmy *úročitel*, *diskontová míra*, *odúročitel*). Potřebné vzorce byly odvozeny pro základní, tj. klasické typy úloh. Poznamenejme, že v učebnici byla také zopakována pravidla logaritmování. Využití tabulek hodnot úročitelů bylo stručně zmíněno, ale student byl upozorněn na jejich určitou nepřesnost, a proto bylo preferováno využívání logaritmických tabulek a logaritmických pravítek.

Po teoretickém úvodu následovalo devět řešených příkladů, z nichž sedm obsahovalo otázky z finančnictví – od složeného úrokování jednoho obnosu po umořování dluhu. Příklady byly doplněny komentářem popisujícím aktuální situaci, s níž by se občan mohl setkat. Uveďme ukázku komentáře, který byl součástí deváté úlohy.

Pro všechny druhy zápůjček je zákonem stanovena amortisační lhůta; činí maximálně 10 let. Aby byl dluh v této lhůtě splacen, jsou stanoveny minimální splátky. ([HP], str. 20)

Rád bych vyzdvihl skupinu příkladů, v nichž se pracovalo s parametry. Jednotlivé údaje nebyly dány číselně, a proto student musel pracovat s „písmeny“. Podívejme se na sedmý příklad:

Ukládáme-li počátkem každého měsíce obnos α při p % p. a., vzrostou měsíční vklady do konce prvního roku na obnos K rovný $12 \cdot \alpha$ *+ jednoduchý úrok z jednotlivých měsíčních vkladů, tj. na obnos*

$$K = 12 \cdot \alpha + \frac{\alpha \cdot p}{100 \cdot 12} \cdot (12 + 11 + \ldots + 2 + 1).$$

Součet v závorce je součet aritmetické řady, proto

$$K = 12 \cdot \alpha + \frac{\alpha \cdot p}{100 \cdot 12} \cdot \frac{12}{2} \cdot (1 + 12) = 12 \cdot \alpha + \frac{\alpha \cdot p}{100 \cdot 12} \cdot 6 \cdot 13.$$

Ukládáme-li tímto způsobem po n let, je to totéž, jako bychom ukládali koncem každého roku právě vypočtený obnos a počítáme pak podle př. 6. Podobně tomu bude při všech vkladech v kratších lhůtách, než je úrokovací období (dnes jednotně 1 rok). ([HP], str. 19)

Vidíme, že se autoři zbytečně neopakovali a v maximální možné míře využívali učivo vyložené již v předešlých příkladech.

Podkapitola byla ukončena osmnácti neřešenými cvičeními, z nichž třináct se věnovalo financím. Úlohy tematicky dobře pokrývaly finanční transakce tehdejšího běžného občana – úročení vkladu, pohledávky, pravidelné střádání, financování fondu (renta), umořování dluhu atd.

Hodnocení učebnice

Tuto učebnici považuji za zcela srovnatelnou s učebnicí předešlou – stejná struktura, rozsah, náročnost, komentáře k řešeným příkladům, množství neřešených cvičení a celkový objem učebnice. Podtrhnout mohu navíc bohatost rozsahu slovních úloh, kde se autoři jednostranně neptali jen na budoucí hodnotu vkladu či půjčky, ale také na současnou hodnotu budoucího fondu či pravidelného střádání.

Josef Holubář, František Hradecký, Karel Hruša:
Algebra pro jedenáctý postupný ročník,
3. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1956, 124 stran.

Jednalo se o další vydání učebnice algebry pro střední všeobecně vzdělávací školy. První vydání bylo souborné pro devátý až jedenáctý ročník [HH] a bylo rozebráno výše. Při třetím vydání byla učebnice rozdělena na tři samostatné knihy. Podkapitola *Užití geometrických posloupností* zůstala nezměněna.

Josef Holubář, František Hradecký, Karel Hruša, Ema Kasková,
Milan Kolibiar, František Krňan:
Algebra pre 9–11 postupný ročník všeobecnovzdelávacích škôl,
2. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Bratislava, 1957, 348 stran.

Jednalo se o slovenské vydání učebnice algebry pro střední všeobecně vzdělávací školy; konkrétně o překlad české učebnice [HH], jež byla rozebrána výše. Podkapitola *Užití geometrických posloupností* byla bez jakýchkoliv faktických změn či grafických úprav pouze přeložena do slovenštiny.

Vítězslav Jozífek, František Hradecký, Josef Huka: *Matematika pro mimořádné způsoby studia na průmyslových školách (dvouleté studium),*
2. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1957, 320 stran.

Tato učebnice, přestože obsahovala kapitolu o posloupnostech a řadách, neobsahovala žádnou zmínku o finanční matematice. Rozsah učiva jednotlivých témat byl zčásti omezen, protože byl vybírán s ohledem na studenty, jimž byla učebnice určena. Poznamenejme, že mimořádným způsobem studia se rozuměly veškeré formy studia při zaměstnání. Teprve od roku 1964 se studium při zaměstnání stalo jednou z forem řádného studia a mimořádným či tzv. jiným způsobem studia byly míněny především kursy, které neměly charakter uceleného studia, tj. nebyly ukončeny například maturitní zkouškou.

Vratislav Hladovec, Vítězslav Jozífek, Antonín Kunc:
Matematika pro odborná učiliště a učňovské školy I,
3. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1958, 204 stran.

Tato učebnice byla z řady určené pro odborná učiliště a učňovské školy. Vzhledem k jejich převážně praktickému zaměření můžeme právem předpokládat její nižší náročnost. Přesto by v ní, podle mého názoru, neměly být opomenuty alespoň základní otázky finanční matematiky.

Učebnice obsahovala jen základy teorie posloupností s několika řešenými příklady a byl v ní uveden jediný příklad zabývající se financemi. Podívejme se na jeho znění:

Účet stoupl připočtením 2,5 % z prodlení na 500,60 Kčs. Na kolik zněl původně? ([HJ], str. 88, výsledek: 488,40 Kčs)

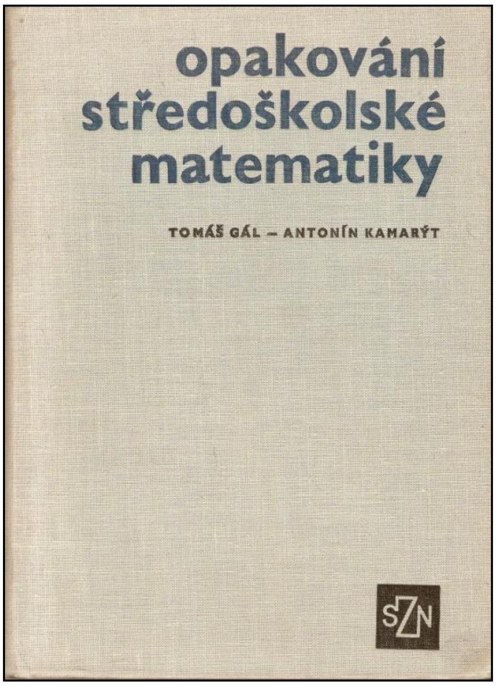
Vidíme, že se nejednalo o klasický příklad z finanční matematiky, kam obvykle řadíme úrokování, pravidelné střádání, rentu, umořování dluhu a podobně. Patří bezesporu do skupiny příkladů, na nichž se trénují jen operace s procenty. Tato učebnice tedy nepřinesla studentům vůbec žádné poznatky z finanční matematiky.

5.2 Druhá skupina učebnic

Vítězslav Jozífek, František Hradecký, Josef Huka:
Matematika pro studium pracujících na SPŠ (dvouleté studium),
7. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1962, 320 stran.

V novém vydání učebnice [JH], obsahující samostatnou kapitolu o posloupnostech a řadách, nenalezneme žádnou zmínku o finanční matematice. V průběhu jejích vydání nedošlo k žádným znatelným úpravám textu výše uvedené kapitoly. Doplňme, že vycházela téměř beze změn každý rok od roku 1956 do sedmého vydání roku 1962. Na počátku šedesátých let byla užívána souběžně s učebnicí *Matematika pro studium pracujících ve 3. a 4. ročníku středních průmyslových škol* (rozsah 445 stran) autorů Františka Kubíčka, Tadeáše Gajdoše a Bohumila Sobotky, která ji po roce 1962 nahradila.

Tomáš Gál, Antonín Kamarýt: ***Opakování středoškolské matematiky,***
1. vydání, Státní zemědělské nakladatelství ve spolupráci s Ústavem vědecko-technických informací MZLVH, Praha, 1963, 291 stran.



Tato souhrnná učebnice byla příručkou pro uchazeče o studium na vysokých zemědělských školách a byla schválena výnosem č. j. 13379/62-III/2b ministerstva školství a kultury ze dne 27. března 1962. Myslím si, že po jejím svědomitém prostudování byli uchazeči dobře připraveni k dalšímu studiu. U takového typu učebnic bývá stručná teorie doplněna přehledem nejdůležitějších vzorců, tato publikace však obsahovala navíc 241 řešených příkladů a 596 neřešených úloh s výsledky, které kompletně pokrývaly celou středoškolskou matematiku. Její kapitoly byly rozděleny do dvou skupin – *Algebra* a *Geometrie*.

Podívejme se na přínos učebnice ke vzdělanosti v oblasti financí. Dvanáctá kapitola *Posloupnosti* zahrnovala podkapitolu *Použití geometrických posloupností* se dvěma řešenými příklady. Jeden se týkal růstu počtu obyvatel města a druhý se ptal na procento odpisu ceny zařízení dílny po dobu deseti let. Ani v jednom se nejednalo o klasický příklad z finanční matematiky. Kapitola byla zakončena třinácti neřešenými úlohami, mezi nimiž se nalézaly následující dvě:

145. Jak velký vklad vzroste za 15 let na 1 346 Kčs při roční úrokové míře 2 %?

146. JZD si vypůjčilo 100 000 Kčs a zavázalo se, že půjčku splatí dvěma stejnými splátkami, z nichž jedna bude splatná za dva roky a druhá za čtyři roky ode dne vypůjčení. Jak velké budou tyto splátky při 2procentním celoročním složeném úrokování? (Návod. Počítejte hodnoty splátek ke dni vypůjčení.)

([GK], str. 145, výsledky: úloha 145. 1 000 Kčs, úloha 146. 53 050 Kčs)

S oběma typy úloh jsme se mohli setkat v řadě učebnic tohoto období. Lišily se pouze částkou, dobou uložení a úrokovou mírou. Ostatní, tedy dlužník JZD a počet splátek, zůstávalo nezměněno. Ve slovním zadání druhé úlohy musíme ocenit určení úrokovací doby, což nebývalo standardem, stejně jako uvedení stručného návodu. Vzhledem k tomu, že se jednalo o opakovací učebnici pro absolventy středních škol, lze zařazení těchto úloh považovat za, byť malý, ale přeci jen přínos k finanční vzdělanosti.

Miloš Jelínek: *Algebra pro střední školy pro pracující (Učebnice pro posluchače televizních kursů matematiky)*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1964, 324 stran.

Jednalo se o obsáhlou a dobře zpracovanou učebnici, jejíž cílovou skupinou byli pracující studující při zaměstnání využívající podporu pravidelných televizních kurzů.

Občan naší republiky měl v té době, jak jsem již uvedl, velmi omezený výběr nabídky bankovních ústavů. Lidé využívali především dlouhodobé ukládání finančních prostředků nebo dlouhodobé pravidelné spoření. V učebnici jsem objevil jedinou úlohu z této oblasti. Na straně 259 byla bez dalšího komentáře uvedena následující úloha:

Nač vzroste vklad a = 7 560 Kčs za 7 let při 5% úrokovací míře? ([JP], str. 259, výsledek: 10 637,70 Kčs)

Jednalo se o složené úrokování, o čemž však čtenář nebyl blíže informován. Úloha pouze procvičovala hledání konkrétního členu geometrické posloupnosti. Z hlediska finanční matematiky bylo zanedbáno také zdanění úroku z vkladu. Ocenit můžeme použití reálné výše úroku běžné v tehdejší době. Kritickým pohledem musím však konstatovat naprosto nulový přínos této učebnice k rozvoji základní finanční gramotnosti.

Karel Hruša, Emil Kraemer, Jiří Sedláček, Jan Vyšín, Rudolf Zelinka:
***Přehled elementární matematiky*, 4. nezměněné vydání,**
Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1964, 500 stran.

Tato publikace byla určena studujícím i absolventům středních škol k opakování a doplnění jejich matematických vědomostí. Kniha byla rozdělena na dvě základní části – *Algebra* a *Geometrie*. Byla přehledná, obsahovala definice, věty, úmluvy a několik řešených příkladů a vedla svědomitého studenta krok za krokem každým tématem k pochopení a porozumění příslušné látce.

Ve dvanácté kapitole části *Algebra* byly v rozsahu šestnácti stran vyloženy *Posloupnosti*. Žádné úlohy s finanční tématikou tento přehled neobsahoval, přestože zahrnoval řešené příklady pokrývající obvyklé spektrum středoškolské látky.

K rozvoji vzdělanosti v oblasti finančnictví tato publikace vůbec nepřispěla.

Emil Kraemer, Pavel Bartoš, Anna Hustá, Jiří Kabele, Jiří Mikulčák, Jan Voříšek: *Matematika pro II. ročník SVVŠ – větev přírodovědná,*
Doplněk k základní učebnici, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1965, 128 stran.

Je s podivem, že tato učebnice sepsaná pro přírodovědnou větev středních škol, přestože obsahovala kapitolu o posloupnostech a řadách, neuváděla žádnou zmínku o finanční matematice. Je tak pouze dalším důkazem nezájmu společnosti o finanční matematiku a její devastaci. Doplňme, že tato učebnice vycházela v nezměněné podobě až do druhé poloviny sedmdesátých let.

Emil Kraemer, Pavel Bartoš, Anna Hustá, Jan Voříšek, Michal Zöldy:
Matematika pro III. ročník SVVŠ,
1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1965, 316 stran.

Ani v této učebnici se samostatnou kapitolou o posloupnostech a řadách nebyla ani jediná zmínka o finanční matematice. To dokazuje úplnou devastaci finanční matematiky na našich středních školách tohoto období. Autoři nepředpokládali, že by všeobecně vzdělaný člověk potřeboval ovládat základní operace s financemi, a neuvedli praktické využití posloupností z této oblasti.

Vladimír Bruthans, Antonín Kejzlar:
Matematika – příručka pro přípravu na vysokou školu,
1. vydání, Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1965, 164 stran.

Tato praktická příručku vyšla v *polytechnické knižnici* ve II. řadě jako 41. svazek díky Československé společnosti pro šíření politických a vědeckých znalostí a Československé vědeckotechnické společnosti.

V každé její kapitole následovala po velmi stručném úvodu rozsáhlá skupina řešených příkladů s komentářem a v závěru skupina neřešených úloh. Podkapitola *Posloupnosti a řady* v rozsahu tří stran byla součástí čtvrté kapitoly *Funkce*. Neobsahovala však žádnou zmínku, příklad ani úlohu z finanční matematiky.

Poznamenejme, že tato příručka bez jakýchkoli změn vyšla ještě v roce 1970.

Viktor Borisovič Lidskij a kolektiv: *Úlohy z elementární matematiky,*
1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1965, 461 stran.

Při probírání titulů učebnic a sbírek pro střední školy používaných v tomto období narazíme vedle českých a slovenských autorů také na překlady (zejména sbírek) autorů ze „socialistického bloku". Jejich počet však nebyl příliš velký, uveďme proto pouze jednu charakteristickou ukázku.

Pod titulem *Úlohy z elementární matematiky* se skrývala sbírka náročnějších úloh z algebry, geometrie a trigonometrie. Z ruského originálu *Zadači po elementarnoj matematike* ji přeložil kolektiv českých autorů (Rudolf Zelinka, Miroslav Fiedler, Petr Liebl, Jaroslav Šedivý a Miroslav Šisler), z nichž většina měla bohaté zkušenosti s psaním vlastních učebnic a sbírek. V resumé sbírky bylo uvedeno, že je výběrem obtížnějších úloh z algebry, geometrie a trigonometrie, k nimž byla uvedena nebo nastíněna řešení. Kniha byla vhodná zejména pro účastníky *matematické olympiády*, učitele matematiky a studenty, kteří se připravovali k přijímacím zkouškám na vysoké školy.

První část sbírky *Algebra* měla rozsah necelých padesáti stran. Předpokládal jsem, že v kapitole nazvané *Slovní úlohy* (rozsah 8 stran) naleznu úlohy z finanční matematiky. Toto zaměření měla jediná úloha (číslo 214). Byla zadána obecně, aby byl student nucen pracovat s některými proměnnými jako s parametry.

Střadatel uložil základní vklad A na vkladní knížku s roční úrokovou mírou p % (předpokládalo se složené úrokování). Na konci každého roku vybral obnos B. Otázka zněla: *Po kolika letech bude na vkladní knížce trojnásobek původního vkladu A?* Vzhledem k obecnému zadání byl student poslední větou textu úlohy upozorněn, že musí uvažovat podmínky řešitelnosti celé úlohy. Pokusme se vyřešit úlohu prostředky dostupnými středoškolskému studentovi:

Na konci prvního roku po uskutečnění výběru bude na účtu částka:

$$K_1 = A\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)-B,$$

z čehož vyplývá základní podmínka řešitelnosti. Aby byl kapitál na konci prvního roku větší než A, musí být roční úrok $A\cdot\frac{p}{100}$ větší než B. Pokud zajistíme splnění této podmínky, lze zapsat vývoj hodnoty kapitálu následovně

$$\left(\left(\left(A\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)-B\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)-B\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)-B\right)\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)-B\ldots=3\cdot A,$$

na konci každého roku je tedy hodnota stávajícího kapitálu vynásobena výrazem $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ a od výsledku je odečtena hodnota výběru B. Celý tento proces vede po neznámém počtu let k výsledku $3\cdot A$, tj. trojnásobku původně vloženého kapitálu.

Pomocí algebraických úprav, znalostí vlastností geometrických posloupností a logaritmů upravíme nejprve levou stranu rovnice a získáme tvar:

$$A\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-B\cdot\frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-1}{\frac{p}{100}}=3\cdot A.$$

Poté vyjádříme závorku s hledaným exponentem a obdržíme rovnici:

$$\left(1+\frac{p}{100}\right)^n=\frac{\frac{p}{100}\cdot 3\cdot A-B}{\frac{p}{100}\cdot A-B}.$$

Po jejím zlogaritmování a zjednodušení nalezneme počet úrokovacích období (roků):

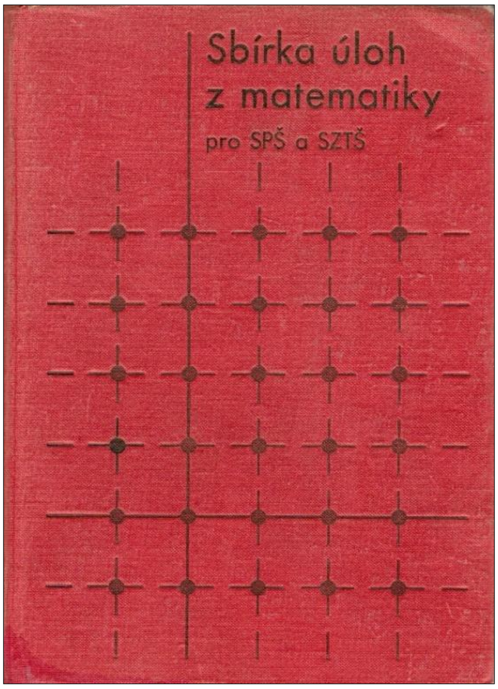
$$n=\frac{\log\left(\frac{p}{100}\cdot 3\cdot A-B\right)-\log\left(\frac{p}{100}\cdot A-B\right)}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)}.$$

Ve srovnání s dalšími sbírkami té doby, byla úloha velmi neobvyklá. Byla význačná zejména vstupní podmínkou řešitelnosti a svým obecným odvozením, při kterém žák musel využít znalosti dalších témat matematiky. Řadí se tak k úlohám s vyšší náročností. Při posouzení praktičnosti úlohy a reálnosti popisované situace, nás zarazí hledání trojnásobku na rozdíl dvojnásobku, na který ve sbírkách a učebnicích poměrně často narazíme. Rozsahem, záběrem a zpracováním se jednalo o velmi kvalitní sbírku úloh z matematiky, jež ocenil každý student připravující se k maturitní zkoušce. Avšak z pohledu finanční matematiky jsem kromě výše zmíněné úlohy neobjevil žádný její další přínos k výuce tohoto tématu.

Eduard Kriegelstein a kolektiv: *Sbírka úloh z matematiky pro střední průmyslové školy a střední zemědělské technické školy,* 2. upravené vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1966, 364 stran.

Toto druhé vydání poměrně rozsáhlé sbírky vyšlo v edici *Pomocné knihy pro žáky*; neslo doložku výnosu č. 51 825/64-II/1 ministerstva školství a kultury ze dne 18. prosince 1964 z prvního vydání a bylo označeno jako doplňková kniha pro střední průmyslové školy a střední zemědělské technické školy.

Sbírka svým rozsahem (více než 2 000 úloh) byla dobrým pomocníkem pro učitele i žáky. Osmnáctá kapitola nazvaná *Posloupnosti* zahrnovala celkem 66 úloh; osmnáct z nich se nacházelo v závěrečné podkapitole nazvané *Pravidelný vzrůst a pokles*.



Právě v ní jsem nalezl spolu s úlohami budovatelskými a fyzikálními také sedm úloh s finanční tématikou. Obsahovaly výpočet ceny pohledávky v závislosti na době splatnosti, splácení dluhu daným počtem splátek nebo danou výší splátky a pravidelné spoření. Uveďme dvě z nich.

První pracuje s odúrokováním ceny pohledávky při použití složeného úrokování.

18.54 Jakou cenu má dnes pohledávka 50 000 Kčs splatná a) za rok; b) za pět let? Úrokování je 3 %.([KRI], str. 213, výsledek: a) 48 543,69 Kčs; b) 43 130,44 Kčs)

Ve většině současných i minulých sbírek a učebnic narážíme na tiskové chyby početního i věcného charakteru. Ani tato sbírka nebyla výjimkou. Chybu jsem nalezl při řešení položky b) uvedené úlohy. Ve výsledcích byla uvedena hodnota 45 757,085 Kčs (nezvykle zaokrouhleno na polovinu haléře), která odpovídá splatnosti za tři roky. Ověřme údaj výpočtem:

splatnost za jeden rok: $\dfrac{50\ 000}{1{,}03} = 48\ 543{,}689$ Kčs;

splatnost za tři roky: $\dfrac{50\ 000}{1{,}03^3} = 44\ 5757{,}083$ Kčs;

splatnost za pět let: $\dfrac{50\ 000}{1{,}03^5} = 43\ 130{,}439$ Kčs.

Tuto chybu lze vysvětlit různými způsoby. Jako nejpravděpodobnější se nabízí tisková chyba – v zadání varianty b) mělo být uvedeno za tři roky, nebo přehlédnutí během řešení a korektur řešení – výpočet byl proveden se záměnou čísla 5 v počtu let s číslem 3 v počtu procent.

Druhou úlohu jsem zvolil proto, že byla početně nejnáročnější, neboť spojovala jednoduché i složené úrokování, a navíc měla nezvyklou hodnotu úrokové míry uvedenou ve tvaru složeného čísla.

18.60 Za jak dlouho nastřádáme 28 500 Kčs, jestliže ukládáme na počátku každého měsíce 500 Kčs při úrokování na $2^7/_8$ %. Měsíční splátky úrokujte ke konci roku jednoduchým úrokováním. ([KRI], str. 214, výsledek: 4,4 roku)

Rozpracujme úlohu podrobněji:

Úrokovou míru převedeme na zlomek v základním tvaru: $p = 2^7/_8\,\% = \dfrac{23}{800}$. Částka na konci prvního roku je $a = 500 \cdot \left(12 + \dfrac{78}{12} \cdot \dfrac{23}{800}\right) = 6\ 093{,}4375$ Kčs. Zlomek $\dfrac{78}{12}$ jsme získali ze součtu dob uložení jednotlivých vkladů, jedná se o součet prvních dvanácti členů aritmetické posloupnosti, v níž je první člen $a_1 = 1$ a diference $d = -\dfrac{1}{12}$. Částka a se další roky úrokuje celá podle pravidel složeného úrokování.

Částka na konci druhého roku je $K_2 = a \cdot \left(1 + \dfrac{23}{800}\right) + a = 12\ 362{,}0613$ Kčs. Nyní se hodnota celkového kapitálu K chová jako součet určitého počtu členů geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = a$ a kvocientem $q = \left(1 + \dfrac{23}{800}\right)$. Můžeme využít známého vzorce pro částečný součet členů geometrické posloupnosti. Zaměříme se na hodnotu po čtyřech a pěti letech, neboť chceme zjistit, kdy budeme mít naspořeno 28 500 Kčs.

Částka na konci čtvrtého roku je: $K_4 = a \cdot \left(\left(1 + \dfrac{23}{800}\right)^4 - 1\right) \cdot \dfrac{800}{23} = 25\ 445{,}1592$ Kčs.

Částka na konci pátého roku je: $K_5 = a \cdot \left(\left(1 + \dfrac{23}{800}\right)^5 - 1\right) \cdot \dfrac{800}{23} = 32\ 270{,}1450$ Kčs.

Odtud je zřejmé, že hledaný okamžik nastane v průběhu pátého roku. Vzhledem k hodnotám K_4 a K_5 vypočítáme částku připravenou k výběru na konci pátého a šestého měsíce pátého roku. Jednotlivé vklady pátého roku úročíme podle pravidel jednoduchého úrokování.

Částka na konci pátého měsíce v pátém roce je:

$$K_{4+5} = K_4 \cdot \left(1 + \frac{5}{12} \cdot \frac{23}{800}\right) + 500 \cdot \left(5 + \frac{15}{12} \cdot \frac{23}{800}\right) = 28\ 267{,}9400 \text{ Kčs.}$$

Částka na konci šestého měsíce v pátém roce je:

$$K_{4+6} = K_4 \cdot \left(1 + \frac{6}{12} \cdot \frac{23}{800}\right) + 500 \cdot \left(6 + \frac{21}{12} \cdot \frac{23}{800}\right) = 28\ 836{,}0896 \text{ Kčs.}$$

Požadovanou částku tedy nastřádáme až na počátku šestého měsíce pátého roku, kdy vložíme šestý vklad, jenž v součtu s již uloženou částkou překročí hodnotu 28 500

Kčs. Porovnejme přesnou odpověď s hodnotou, kterou získáme logaritmováním vzorce pro částečný součet členů geometrické posloupnosti. Po dosazení zadaných hodnot se neznámá x (udávající celkovou dobu uložení) nachází v exponentu:

$$28500 = 500 \cdot \left(\left(1 + \frac{23}{800} \right)^x - 1 \right) \cdot \frac{800}{23} .$$

Po algebraických úpravách a zlogaritmování vyjádříme neznámou x ve tvaru:

$$x = \frac{\log\left(\frac{28500}{500} \cdot \frac{23}{800} + 1 \right)}{\log\left(1 + \frac{23}{800} \right)} = 4{,}4511 \text{ roku},$$

čímž získáváme dostatečnou přesnost i při zanedbání rozdílného chování jednoduchého a složeného úrokování v pátém roce. Odpověď by však neměla být 4,4 roku, jak je uvedeno ve výsledcích ve sbírce, ale 4,5 roku. Ani tak odpověď není přesná, jak je zřejmé z prvního postupu, podle kterého to je první den šestého měsíce pátého roku.

Jednalo se o nejnáročnější úlohu z této podkapitoly. Domnívám se, že byla řešena pravděpodobně kratší, v pořadí druhou uvedenou metodou.

Hodnocení učebnice

Sbírka mě zaujala šíří vyložené látky, počtem a textovou rozmanitostí úloh. Neobsahuje však žádné řešené příklady, což svědčí o jejím pomocném charakteru.

Zahrnovala všechny základní typy úloh finanční matematiky až na úlohy pracující s tvorbou a vyplácením důchodu. Přesto ji hodnotím kladně. Jejím svědomitým propočítáním se student dostatečně seznámil s mnohými tehdejšími aplikacemi z finančního světa.

Petr Benda, Berta Daňková, Josef Skála:

Sbírka maturitních příkladů z matematiky,

4. upravené vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1968, 188 stran.

Sbírka byla určena studentům středních všeobecně vzdělávacích škol a později gymnázií k souhrnnému opakování učiva. Poprvé byla vydána v roce 1962 a další vydání následovala až do konce osmdesátých let (např. deváté vydání 1983).

Téma financí bylo zahrnuto ve dvou úlohách v kapitole nazvané *Geometrická posloupnost*. Jednalo se o dvojici úloh, které se s pouhou obměnou číselných hodnot opakovaly ve většině učebnic a sbírek z tohoto období. Jejich podrobný rozbor je uveden výše v analýze učebnice [GK].

S touto sbírkou jsem se poprvé setkal jako student, ale příliš mě nezaujala ani strukturou, ani volenými úlohami. Jako učitel jsem názor nezměnil. Z hlediska finanční matematiky musím konstatovat, že nebyla a není přínosem k rozvoji finanční gramotnosti studentů.

František Vejsada, František Talafous:
Sbírka úloh z matematiky pro SVVŠ (gymnasia),
1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1969, 688 stran.

Rozsáhlá sbírka úloh byla sepsána pro studenty středních všeobecně vzdělávacích škol (později gymnázií). Obsahovala více než čtyři tisíce úloh, z nichž necelých 300 bylo vzorově řešeno. Struktura, volba úloh a jejich množství byly vhodné také k souhrnnému opakování a přípravě k dalšímu studiu. Od standardních úloh byly odlišeny úlohy náročnější a také úlohy náležející do rozšiřujícího učiva. Jednalo se o kvalitní sbírku, která se bohužel nedočkala dalších vydání.

V desáté kapitole nazvané *Posloupnosti*, která obsahovala 232 úloh (rozsah 28 stran), jsem nalezl téměř dvě desítky úloh z finanční matematiky od nejjednodušších až k početně velmi náročným. Některé z nich obsahovaly krátký návod řešení, jedna byla vyřešena a okomentována. Jejich hlavním cílem bylo ukázat praktické využití matematických dovedností.

Přibližme dvě standardní úlohy z finanční matematiky:
149. Jakou částku, vloženou počátkem roku, se zajistí důchod ročních 1 000 Kčs, splatných vždy koncem každého roku a trvající 10 let při 2% celoročním složeném úrokování?* [*Návod: Počítejte hodnoty jednotlivých částek k počátku prvého roku.*]
151. Zaměstnanec podniku si nastřádal za osm let 42 000 Kčs na zakoupení auta. Jakou částku ukládal průměrně koncem každého roku? (3 % p. a.) Poznámka: Značka p. a. znamená celoroční slož. úrokování. ([VT], str. 260, výsledky: úloha 149. 8 983 Kčs; úloha 151. 4 723 Kčs; * označovala náročnější úlohu)

Vzhledem k nedostatečné výuce finanční matematiky na středních školách lze předpokládat, že i přes průměrnou náročnost výše uvedených úloh mělo s jejich řešením velké procento maturantů značné problémy. Každá úloha z finanční matematiky uvedená ve sbírce měla pro studenta bezesporu přínos, neboť vybízela k zamyšlení nad praktickým uplatněním matematiky v každodenním životě.

Hodnocení učebnice

S touto sbírkou jsem se poprvé setkal během studia na gymnáziu, neboť z ní často čerpal náš učitel, přestože pro nás jako pro žáky „nové koncepce" vycházela řada nových učebnic a sbírek. Později jsem v antikvariátu získal její výtisk a mohl jsem ji plně ocenit. Užívám ji dodnes, když zadávám svým studentům rozšiřující či jen zajímavé úlohy k probíraným tématům.

Od doby jejího prvního vydání uplynulo více než čtyřicet let, avšak dodnes, přestože za tu dobu vyšla řada jiných sbírek, jsem neobjevil žádnou stejné nebo vyšší úrovně. Stále v ní nacházím další a další podnětná témata, úkoly a otázky vhodné pro středoškoláky.

František Nimrichter, Irena Hubačková, Ladislav Schramm, Václav Topinka: *Matematika pro I. a II. ročník středních ekonomických škol,* 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1970, 534 stran.

První české vydání učebnice slovenských autorů přeložil Jaromír Dubský. Knihu schválilo ministerstvo školství výnosem č. 16 809/68-II/1 ze dne 23. 5. 1968 jako učebnici pro první a druhý ročník středních ekonomických škol.

V tématech určených studentům druhého ročníku se nacházela kapitola *Posloupnosti* s podkapitolou *Užití aritmetické a geometrické posloupnosti*, v níž byla v rozsahu devíti stran obsažena základní teorie a řešené příklady z finanční matematiky.

Charakteristika podkapitoly a její hodnocení

Učebnice byla určena studentům středních ekonomických škol, a proto není překvapením, že autoři finanční matematice věnovali celou podkapitolu. V jejím úvodu zdůraznili význam úloh o úrokování jistiny, střádání a umořování dluhu. Nejprve seznámili studenta se základními pojmy finančnictví. Pak vyložili jednoduché a složené úrokování, odvodili příslušné vzorce a zavedli výrazy úročitel a odúročitel. Teorii rozvrhli na 4 strany a oba druhy úročení pomocí grafů přirovnali k lineární funkci pro jednoduché úrokování, respektive k exponenciální funkci pro složené úrokování. Na zbylých 5 stranách podrobně vyřešili 9 úloh pokrývajících všechny základní otázky finanční aritmetiky, které by měly patřit do rejstříku problémů řešitelných středoškolákem.

Uveďme jeden z řešených příkladů, který se svou obecností vymyká:
Jaký dluh je možno amortizovat (umořit) n anuitami stejné velikosti po a Kčs při p % p. a., jsou-li anuity splatné na konci úrokovacích období?

Řešení: Dluh označme D_n. Jeho hodnota se skládá ze součtu diskontovaných hodnot jednotlivých anuit, tj.

$$D_n = a \cdot r^{-1} + a \cdot r^{-2} + a \cdot r^{-3} + \dots + a \cdot r^{-n} = a \cdot \left(r^{-1} + r^{-2} + r^{-3} + \dots + r^{-n}\right).$$

V závorce je součet členů geometrické posloupnosti, která má n členů a v níž

$a_1 = q = r^{-1}$. *Tento součet se rovná* $r^{-n} \cdot \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$, *tj.* $D_n = a \cdot r^{-n} \cdot \dfrac{r^n - 1}{r - 1}$.

V konkrétním případě dosadíme do výsledku za anuitu a, za úročitele r^n a za odúročitele r^{-n}. ([NI], str. 442–443)

Z textu řešení vidíme, že každý krok byl komentován, čímž publikace bezesporu získala na srozumitelnosti, neboť vedla studenta přes odvozování vzorců k řešení příkladů. Tento způsob výkladu ocenil nejen student, ale i vyučující, který s učebnicí při svých přípravách a vyučování pracoval.

Kapitola *Posloupnosti* byla zakončena padesáti úlohami, z nichž 14 obsahovalo problémy z finančnictví; škála jejich obtížnosti byla široká.

Domnívám se, že tato učebnice měla značný přínos ke vzdělávání v oblasti finanční matematiky. Nesmíme však zapomenout, že absolventi středních ekonomických škol, kteří ve svém budoucím životě ve velkém procentu pracovali na pobočkách spořitelen a bank, potřebovali kvalitní vzdělávání právě ve finanční aritmetice.

Zdeněk Opava: *Programovaná učebnice matematiky (aritmetika a algebra)*, 1. vydání, nakladatelství Práce, Praha, 1970, 709 stran.

Tato učebnice se zcela lišila od koncepce našich ostatních učebnic. Jednalo se o text využívající jednu z experimentálních výukových metod – *programované učení*, což je vyučovací metoda založená na řízení učební činnosti žáků využívající podobu učení – zpevnění, která je modifikací základního vzorce behaviorismu *stimul – reakce*. Jejím základním principem je zásada malých kroků, které studenta vedou k cíli, čímž je zvládnutí příslušného dílčího tématu. Malé kroky na sebe těsně navazují a odpovědi jsou vždy ihned kontrolovány. Učivo je předkládáno jako otázka či problémová situace a vyžaduje aktivní přístup studenta. Metoda otázek a odpovědí ho vede individuálním tempem. Proto je tento způsob vhodný k samostudiu. Omezuje však, v některých programech dokonce zcela vylučuje, roli učitele. Aplikované programy této metody se však liší možnostmi, které studentovi poskytují. Základními programy jsou: lineární – snadné otázky, pomalá a jistá cesta; výběrový – student se vrací s chybou a učí se opravou svých chyb; větvený – podle odpovědí program vede studenta, nadaný student nemusí procházet všemi kroky jako u lineárního a může postupovat rychleji.

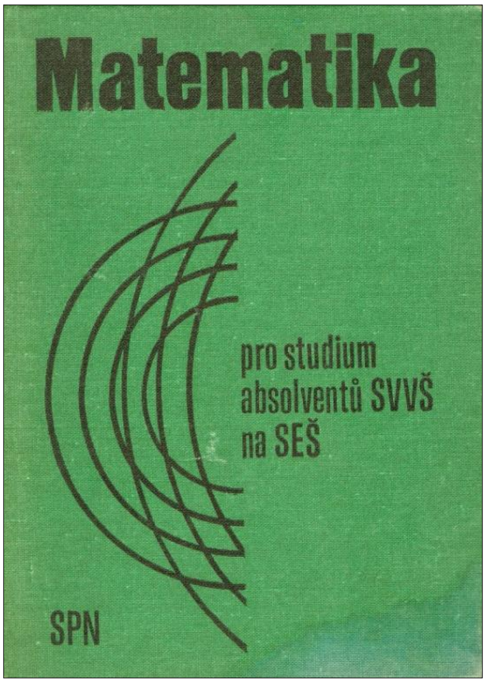
Zajímavostí ve stavbě struktury učebnice, která se v roce 1980 dočkala druhého vydání, bylo číslování nejen kapitol, ale i jednotlivých podkapitol od počátku knihy, tj. první podkapitoly neměly číslo 1, vyjma u první kapitoly, ale následné pořadové číslo podle poslední podkapitoly předešlé kapitoly. Tento systém podle autorů usnadňoval orientaci v textu. Objevil jsem dvě místa, kde byla zmíněna finanční matematika. Ani na jednom z nich jsem však nenašel zdůraznění její důležitosti.

První seznámení s výpočty ve finančnictví bylo v páté kapitole nazvané *Úměrnost*. V její podkapitole *Procenta* (pořadové číslo 45) byl oddíl nazvaný *Úrok*. Na čtyřech stranách bylo vedle dalších úloh umístěno 5 řešených úloh s finanční tématikou. V podstatě se však jednalo jen o elementární práci s procenty.

Dále byl v patnácté kapitole *Posloupnosti* v podkapitole 98. *Použití posloupností* (rozsah 4 strany) ukázán obecný postup složeného úročení, naznačeno využití vlastností geometrických posloupností a vyřešena jedna úloha.

Přínos učebnice k finanční gramotnosti byl zanedbatelný; z dnešního pohledu je zajímavá jen zvláštním zpracováním. V časopise *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie* (13(1968), č.1, str. 33–42) nalezneme článek s ukázkami textu *Programovaná učebnice moderní matematiky* Jiřího Mikulčáka, který hodnotí předváděnou metodu skepticky, neboť vede k množství nedostatků – zdlouhavé odvozování poznatků, žák neví, k čemu úkoly směřují a co bude výsledkem, shrnutí nejsou uváděna, na závěr vyslovená definice či věta se jeví jako samostatný krok programu. Celkově autor pochybuje o vhodnosti takto zpracované učebnice pro vyučování, měla-li by být jedinou formou práce.

Josef Zahradník: ***Matematika pro I. a II. ročník studia absolventů SVVŠ (gymnázií) na středních ekonomických školách,*** **1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1971, 352 stran.**



Cíle absolventů středních ekonomických škol, které jsou zmíněny již při analýze učebnice [NI], dokládá i tato učebnice pro nástavbové studium. Schválena byla výnosem č. j. 16 267/70-II/1 ministerstva školství ČSR ze dne 14. května 1970 jako učebnice pro první a druhý ročník studia absolventů středních všeobecně vzdělávacích škol (gymnázií) na středních ekonomických školách, kteří se připravovali ke složení maturitní zkoušky s ekonomickým zaměřením. O její kvalitě hovoří také další dvě nezměněná vydání ze sedmdesátých let.

Základním cílem absolventů středních ekonomických škol bylo, připravit se na práci s financemi například za přepážkami poboček spořitelen a bank. V některých partiích se učebnice dokonce dotkla i vybraných kapitol vysokoškolské matematiky (např. lineární algebra, lineární programování). Absolventi tohoto nástavbového studia po vykonání maturitní zkoušky buď zastávali posty bankovních úředníků, účetních a úředníků ve správě, nebo pokračovali ve studiu na vysokých školách ekonomického zaměření.

Obsah učebnice

I. ročník

1. Základní pojmy z teorie množin (8 stran);
2. Číselné soustavy (21 stran);
3. Nerovnice (35 stran);
4. Posloupnosti (24 stran);

5. Složené úrokování (29 stran);
6. Základy matematické analýzy (80 stran).

II. ročník

1. Vektory (16 stran);
2. Matice (25 stran);
3. Řešení soustav lineárních rovnic a nerovnic (15 stran);
4. Předmět a význam lineárního programování (18 stran);
5. Simplexová metoda (24 stran);
6. Distribuční metoda (24 stran);
7. Grafická metoda řešení problémů lineárního programování (6 stran).

Charakteristika kapitoly *Složené úrokování*

V rozboru se zaměříme na pátou kapitolu prvního ročníku nazvanou *Složené úrokování*, neboť v ní nalezneme největší rozsah finanční matematiky vyučované na středních školách v šedesátých a sedmdesátých letech. Kapitola se skládala ze šesti podkapitol.

5.1 Úrokování jednoduché a složené

V první podkapitole autor seznámil čtenáře se základními pojmy finanční matematiky (tj. dlužník, věřitel, úrok, jistina, úroková míra, úrokovací období, úroková doba, počáteční jistina, konečná jistina, úročitel, jednoduché a složené úrokování). Kromě definic pojmů se zaměřil na popis základních úloh (výpočet výše úroku) a přehledně popsal rozdíl při jednoduchém a složeném úrokování.

Největší přínos podkapitoly spočíval v tom, že autor odvodil základní vzorce pro výpočet konečné jistiny při jednoduchém i složeném úrokování.

Pro jednoduché úrokování platí:

$$J_n = J_0 \cdot \left(1 + \frac{n \cdot p}{100}\right).$$

Pro složené úrokování:

$$J_n = J_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Ve vzorcích označil J_n – konečnou jistinu, J_0 – počáteční jistinu, p – úrokovou míru udanou v procentech a n – počet úrokovacích období. Rozdíl typů úrokování zdůraznil použitím grafů lineární a exponenciální funkce. Aby neodváděl pozornost čtenáře od teoretického výkladu, neuvedl v této podkapitole žádný příklad.

5.2 Řešení základních úloh složeného úrokování

V této podkapitole autor formuloval základní otázky užívané v hlavních typech úloh o složeném úrokování a odvodil příslušné vzorce. Pracoval s následujícími úlohami: výpočet konečné jistiny, výpočet počáteční jistiny (dodatečně zavedl pojmy odúrokování neboli diskontování a *odúročitel*), výpočet úrokové doby a výpočet úrokové míry (s využitím logaritmů). Ke každému typu podrobně vyřešil vzorové příklady; čtenáři nabídl dvanáct pečlivě komentovaných příkladů. Výbornou úroveň výkladu a svědomitý popis postupu řešení aplikoval i v dalších částech učebnice.

Příklady nebyly početně příliš náročné, jejich cílem bylo zasvětit čtenáře do tématu a vzbudit jeho zájem o finanční matematiku. Pro demonstraci uveďme jeden z příkladů:

Příklad 5.2.12:

Na kolik % p. a. musí být uložena jistina Kčs 2 500, aby za 10 let dosáhla stejné výše jako jistina Kčs 3 000 uložená na 3 % p. a.? ([ZJ], str. 106, výsledek: 4,9 % p. a.)

5.3 Střádání

Ve třetí podkapitole autor nejprve definoval pojem střádání jako pravidelné ukládání stále stejné částky (vkladu neboli anuity) ve stejných časových intervalech, ale neopomněl zmínit odlišnosti tohoto způsobu spoření (např. ukládání počátkem každého úrokovacího období, ukládání koncem každého úrokovacího období a zejména typ střádání, při němž periodicita vkladů nesouhlasí s úrokovacím obdobím). Zavedl také pojem *střadatel*.

V sedmi řešených příkladech se soustředil na výpočet výsledné hodnoty jistiny, výše vkladů nebo doby střádání. Uveďme jeden z nich:

Příklad 5.3.5:

Jak velkými na konci měsíce placenými vklady je možno při 3 % p. a. uspořit za 10 let Kčs 30 000? ([ZJ], str. 111, výsledek: Kčs 215,12)

5.4 Důchody a umořování dluhů

V této části autor definoval pojem důchod, zavedl pojem *anuita*, jako hodnotu vyplácené částky, pojmy *zásobitel* a *umořovatel* jako převrácenou hodnotu zásobitele. S důchodem a dluhem pracoval na stejné bázi, neboť ten, kdo vyplácí důchod, je vlastně dlužník vzhledem k příjemci, což považuji za největší přínos autorova přístupu k výkladu. V mnoha současných i minulých učebnicích chybí a chybělo položení vyplácení důchodu a splácení dluhu do jedné roviny.

Autor vyložil výpočet hodnoty důchodu, anuity, doby umořování a úrokové míry; vyřešil 8 vzorových příkladů. Uveďme jeden ze zajímavých příkladů, v němž periodicita splátky neodpovídala úrokovacímu období, a naznačme způsob jeho řešení:

Příklad 5.4.5:

Dluh Kčs 20 000 se má umořit při 4 % p. a. za 10 let pololetními anuitami placenými koncem každého pololetí. Jak velká bude anuita? ([ZJ], str. 116)

Řešení:

1. krok: Nejprve vypočítáme velikost roční anuity. Zatímco autor používal tabulku umořovatelů, hodnotu umořovatele dnes vypočítáme přímo s využitím známého vztahu

$$D_{10} = a \cdot r^{-10} \cdot \frac{r^{10} - 1}{r - 1} \Rightarrow a = D_{10} \cdot \frac{1}{r^{-10} \cdot \dfrac{r^{10} - 1}{r - 1}}$$

kde a je roční anuita, D_{10} je dluh, který má být v deseti letech splacen, r je úročitel a složený zlomek, kterým je dluh násoben, je hledaný umořovatel. Po dosazení známých hodnot: $D_{10} = 20\,000$ Kčs, $r = 1{,}04$ získáme hodnotu umořovatele 0,123 290 9 a následně hodnotu roční anuity $a = 2\,465{,}82$ Kčs.

2. krok: Dále můžeme vypočítat pololetní anuitu x pomocí roční anuity a. Z pravidel jednoduchého úrokování získáme následující rovnici:

$$x \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{100}\right) + x = a\,.$$

Po dosazení za a získáme hodnotu $x = 1\,220{,}70$ Kčs, což je hledaná hodnota pololetní anuity. Dluh tedy splatíme dvaceti pololetními splátkami výše uvedené hodnoty.

5.5 Umořovací plány

Autor v této části ukázal způsob zápisu splácení dluhů neboli tvorbu umořovacích plánů. Opíral se o teorii vyloženou v předchozí podkapitole, jednotlivé kroky zapisoval do řádků umořovacího plánu. Ve dvou příkladech zpracoval dva základní typy umořovacích plánů – byl-li dán počet anuit a byla-li dána velikost anuity. V tabulkách, do nichž zapisoval umořovací plány, operoval se sloupci – úrokovací období (rok), dluh počátkem roku, anuita koncem roku, úrok koncem roku a splátka koncem roku (úmor), což bylo v tehdejší době standardní. Umožnil tak čtenáři získat hlubší pohled na chování spláceného dluhu.

5.6 Cvičení

Zatímco prvních pět podkapitol autor věnoval výkladu a komentovanému řešení několika příkladů, neřešené úlohy umístil až do šesté, samostatné části. Uvedl 41 úloh úplně pokrývajících tématiku probranou v předchozích částech kapitoly.

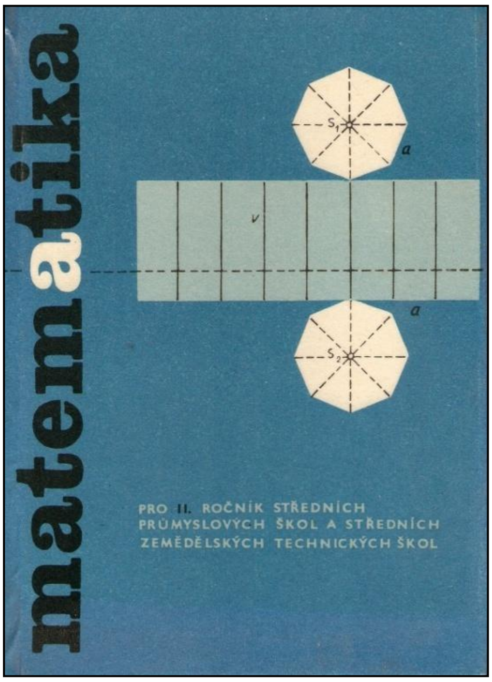
Hodnocení učebnice

Po prostudování učebnice musím vyzdvihnout její nezanedbatelný přínos k rozvoji finanční vzdělanosti, přestože si uvědomuji, že procento studentů, kteří se s ní mohli setkat, nebylo nijak velké. Odhaduji, že to bylo méně než pět procent absolventů středních všeobecně vzdělávacích škol, respektive gymnázií.

Domnívám se, že kdyby těchto dvacet devět stran bylo umístěno do běžných učebnic matematiky na středních školách, nemohli bychom již hovořit o devastaci finanční matematiky, protože rozsah kapitoly i způsob jejího zpracování by byly dostatečnou a vhodnou pomůckou téměř pro každého člověka, který by mohl získané vědomosti využít v budoucnu při jednání s bankovními institucemi a vyvaroval by se neuvážených kroků.

Antonín Pospíšil, František Kejla, Eduard Kriegelstein, Václav Pelant:
Matematika pro II. ročník středních průmyslových škol
a středních zemědělských technických škol,
3. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1971, 292 stran.

Jednalo se o značně rozšířenou a oblíbenou učebnici matematiky na středních průmyslových školách a středních zemědělských technických školách (1. vydání –



1965). Byla dobře zpracována z matematického i metodického hlediska a pomáhala studentům i při samostudiu (například v průběhu dlouhodobé absence).

V učebnici jsem se zaměřil na úlohy z finanční matematiky. V kapitole o posloupnostech jsem nalezl dva řešené příklady a jednu neřešenou úlohu na procvičení.

První příklad (viz strana 284) pojednával o výrobním družstvu, které si vypůjčilo částku splatnou ve dvou stejných splátkách. Jednalo se o příklad, s nímž jsme se již setkali s malými obměnami v celé řadě učebnic (dřívějších, např. [CP], [HH], [HP], [KRI], i pozdějších, např. [SN]). Přínosem jeho otištění bylo uvedení tří podrobných způsobů řešení závislých na volbě časového okamžiku, k němuž se hodnoty splátek a půjčky počítaly. Studenti museli pracovat s úrokováním i odúrokováním podle zvoleného okamžiku:

- čas celkového splacení (půjčka se pětkrát úročila, první splátka se dvakrát úročila a druhá se neúročila);
- čas půjčení (půjčka se neúročila, první splátka se třikrát odúročila a druhá se pětkrát odúročila);
- čas první splátky (půjčka se třikrát úročila, první splátka se neúročila a druhá se dvakrát odúročila).

Ve všech postupech získali rovnici o jedné neznámé (hodnota splátky), v níž na jedné straně byla „zpracovaná“ půjčka a na druhé součet „zpracovaných“ splátek. Samozřejmě, že všechny vedly ke stejnému výsledku, navíc byly přehledně a srozumitelně komentovány.

Obdobně formulována byla i neřešená úloha, která se lišila jen počtem splátek a hodnotou půjčky; úroková míra byla shodná.

Druhý příklad (viz strana 286) popisoval dlouhodobé pravidelné spoření a ukazoval praktické využití vlastností aritmetické a geometrické posloupnosti.

Zajímavý byl též v pořadí třetí řešený příklad, jenž sice neobsahoval přímo „finance“, ale z jeho formulace vyplývá jeho původ ve finanční matematice. Uveďme jeho plné znění:

Příklad 30: V lese bylo odhadnuto 90 000 m^3 stojatého dříví. Ročně přibývá 2 % dříví a kácí se 3 000 m^3. Kolik dříví bude v lese po dvanácti letech? ([PK], str. 289, výsledek: 73 906 m^3 dříví)

Úloha odpovídá klasickému problému finanční matematiky, kdy po zúročení vkladu část kapitálu vybereme a zbytek ponecháme k dalšímu úročení.

Autoři nejprve vyložili situaci bez kácení a kácený objem nechali imaginárně růst další roky, kdy tam již fakticky nebyl. „Vzrostlý" kácený objem za jednotlivé roky sečetli jako dvanáct členů geometrické posloupnosti a odečetli od objemu, který by vyrostl v lese bez kácení.

Tento příklad je dalším „důkazem", jak a kam během padesátých a šedesátých let zmizelo množství úloh s finanční tématikou.

Hodnocení učebnice

Učebnice byla strukturou, rozsahem, zpracováním i náročností vhodnou pomůckou studentů středních průmyslových škol a středních zemědělských technických škol. Jednalo se o velmi kvalitní středoškolskou učebnici matematiky. Její přínos ke vzdělanosti v oblasti finančnictví byl však jen sporadický.

Valentýn Melicher, Jozef Ivanič, Imrich Lečko: *Matematika pro střední zdravotnické školy, II. díl,* 5. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1978, 312 stran.

Tuto učebnici pro střední zdravotnické školy ze slovenštiny přeložil Josef Schmidtmayer v roce 1965. Ve stejném roce vyšlo první vydání, jež bylo schváleno výnosem č. 2824/64-II/1 ministerstva školství a kultury ze dne 14. ledna 1964 jako učebnice matematiky pro druhý a třetí ročník středních zdravotnických škol. Jednalo se o uznávanou učebnici, která vznikla podle učebních osnov platných od školního roku 1962–63, kdy se matematika začala vyučovat na tomto typu škol také ve třetím ročníku. Páté vydání oproti předchozím čtyřem (z let 1965, 1967, 1974 a 1976) nedoznalo žádných podstatných změn.

Poslední kapitola druhého dílu se věnovala posloupnostem a obsahovala podkapitolu nazvanou *Použití posloupností*, v níž byly vyloženy případy rovnoměrného vzrůstu (poklesu) a rovnoměrně zrychleného vzrůstu (zpomaleného poklesu), které odpovídaly jednoduchému a složenému úrokování a odúrokování. Z pojmů finanční aritmetiky byly zmíněny pouze úročitel a odúročitel.

Charakteristika podkapitoly

Celou podkapitolu autoři rozvrhli na devět stran. Po zavedení základních pojmů odvodili vzorce nezbytné pro složené úrokování a odúrokování:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \text{ a } K_n = K_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n,$$

kde K_n bylo označení konečné hodnoty kapitálu (jistiny), K_0 počáteční hodnoty kapitálu, p úrokové míry a n počtu úrokovacích období. Autoři však nehovořili konkrétně o kapitálu, jistině nebo úrokové míře, ale obecně o veličině K, která rostla či klesala rychlostí p % za určité období.

Dále zařadili šest řešených příkladů, z nichž tři obsahovaly prvky z finančnictví. Volili běžnou náročnost příkladů, které pojednávaly o hodnotě pohledávky, dlouhodobém pravidelném spoření a splacení půjčky. Textově i podle početní náročnosti bych příklady přirovnal k již zmíněným příkladům ze sbírky [KR]. Podkapitolu ukončili poměrně velkou skupinou úloh k procvičení (16 úloh), z nichž pět se věnovalo finanční matematice. Několik dalších zařadili do souhrnného opakování, některé však nebyly příliš dobře zvolené, neboť byly zcela odtržené od praxe. Uveďme bez dalšího komentáře jednu z nich:

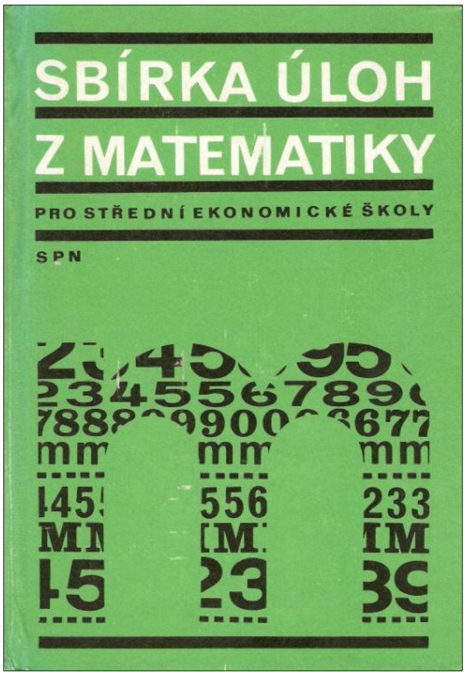
Za kolik let se částka a Kčs, uložená na p % (celoročně složené úrokování), zvětší k-krát? ([MI], str. 294, výsledek: za $\dfrac{\log k}{\log\left(1 + \dfrac{p}{100}\right)}$ let)

Hodnocení učebnice

Učebnice obsahovala základní problematiku finanční matematiky, tj. úrokování vkladu, dlouhodobé střádání a splácení dluhu. Pokud by tuto kapitolu obsahovala každá řada učebnic matematiky na všech typech středních škol, myslím si, že mohl být z velké části odvrácen současný žalostný stav finanční gramotnosti naší populace.

Myslím si, že učebnice byla vzhledem ke struktuře a způsobu zpracování kvalitní a dobrou pomůckou pro studenty i jejich učitele.

Ladislav Schramm, František Nimrichter, Václav Topinka:
Sbírka úloh z matematiky pro střední ekonomické školy,
4. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1978, 424 stran.



Sbírka úloh, která začala vycházet na počátku sedmdesátých let, byla schválena výnosem č. 6 188/1970-A/1 Ministerstva školství SSR dne 13. května 1970 jako pomocná kniha pro žáky středních ekonomických škol. První vydání vyšlo ve Slovenském pedagogickém nakladatelství, n. p., v roce 1971. Do češtiny ji přeložil ještě téhož roku Václav Vosáhlo.

Sbírka byla zpracována podle učebních osnov, které na středních ekonomických školách platily od školního roku 1966/67. Slovní úlohy kladly důraz na praktické využití matematických vědomostí.

Ve sbírce jsem nalezl celou skupinu úloh s finanční tématikou. Na stranách 210 až 215 mezi více než padesáti úlohami bylo spolu s řadou zajímavých příkladů z historie (např. úloha z Ahmesova papyru, úloha s kupcem, který si chce dát okovat koně, pšeničná zrna na šachovnici) uvedeno také třicet tři úloh z finanční matematiky. Tematicky pokrývaly veškeré základní aktivity tehdejšího bankovnictví – dlouhodobé uložení částky, pravidelné ukládání stejné částky, výpočet hodnoty pohledávky, jednorázové splacení dluhu, splacení dluhu více splátkami a stanovení výše důchodu.

Bohatost úloh ukazuje, že si autoři byli vědomi požadavků kladených na absolventy středních ekonomický škol. Žádný jiný typ středních škol nepracoval se sbírkou či učebnicí, která nabízela obdobné množství a tak rozmanitou škálu úloh z finanční aritmetiky.

Uveďme dva příklady, které „nadřazenost“ této sbírky dokreslují.

156. Začátkem každého roku ukládáme do spořitelny Kčs 1 200,– po 7 roků. Jakou částku budeme mít ve spořitelně koncem 10. roku při 3 % p. a.?

165. Jak velký je dluh, který má dlužník splácet vždy koncem roku deseti ročními anuitami po Kčs 1 000,– a koncem 11. roku anuitou Kčs 650,31? Úroková míra je 3 % p. a. ([SCH], str. 214, výsledky: úloha 156. Kčs 10 349,–; úloha 165. Kčs 9 000,–)

Při řešení většiny úloh nestačilo jen dosadit dané hodnoty do známých vzorců, využít tabulek střadatelů, zásobitelů a násobením či dělením dospět k výsledku. Bylo nutné pracovat s kombinacemi vzorců a jejich modifikacemi, které si student musel sám odvodit.

Podle mého názoru mohl každý student, který svědomitě propočítal tuto sbírku, získat dovednosti, díky nimž se nemusel obávat, že by byl při jednání s nějakou bankovní institucí zaskočen či jinak nemile překvapen.

Jana Müllerová, Václav Sýkora, Ondřej Šedivý:
Matematika pro střední pedagogické školy, III. díl,
1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1979, 164 stran.

Jednalo se o učebnici pro střední školy, na nichž matematika nebyla stěžejním předmětem, čemuž odpovídal i její rozsah. Autoři sice uvedli kapitolu o posloupnostech, ale vložili do ní pouze jednu úlohu s finanční tématikou.

Posuďme její náročnost:

Vklad 15 000 Kčs je ve spořitelně uložen na 3% úrok. Jakou hodnotu bude mít vklad po pěti letech? ([MS], str. 77, výsledek: 17 389 Kčs)

Vidíme, že se jednalo o úlohu, v níž studenti hledali konkrétní člen geometrické posloupnosti, tzn. otázka finanční matematiky byla vedlejší. Nezbývá nám než konstatovat, že tato učebnice vůbec nepřispěla k rozvoji finanční vzdělanosti.

Václav Sýkora, Oldřich Odvárko, Jozef Smida:
Matematika pro gymnázia, sešit 6 – část 2,
1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1979, 126 stran.

Sešitová učebnice matematiky pro gymnázia z řady, jejímž koordinátorem byl Miloslav Zedek, vycházela na přelomu sedmdesátých a osmdesátých let jako pomocné materiály pro studenty a učitele. Tým autorů byl složen z českých i slovenských učitelů, aby po překladu do obou jazyků byla jednotná forma výuky matematiky na gymnáziích v celé Československé republice, což byl trend panující od sedmdesátých let až do rozdělení Československa dne 1. ledna 1993.

Tato „sešitová řada“ předcházela nově vznikající řadu gymnaziálních učebnic matematiky tzv. „nové koncepce“, která začala vycházet v roce 1984. První učebnici řady nazvanou *Matematika pro 1. ročník gymnázií* autorů Jozefa Smidy, Júlie Lukátšové, Jaroslava Šedivého a Jindřicha Vocelky schválilo výnosem č. j. 16 483 /83-210 ministerstvo školství ČSR dne 2. května 1983 jako učebnici matematiky pro první ročník gymnázií.

Sešit 6 – část 2 obsahoval kapitolu o posloupnostech a řadách, ale neobsahoval ani jedinou zmínku o finanční matematice.

Jaroslav Šedivý, Václav Medek, Oldřich Odvárko, Beloslav Riečan, Václav Sýkora: *Matematika pro gymnázia, sešit 8,* 2. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1980, 245 stran.

Jednalo se o další sešit z řady „sešitových učebnic“, který se svým rozsahem více přiblížil klasické učebnici. Přínos řady k finanční vzdělanosti byl minimální, neboť byla uvedena jen jedna osamocená a nepříliš náročná úloha. Pro lepší posouzení uvedu celé její znění:

Počátkem roku uložíme 1 000 Kčs na 4% úrok za rok.
a) Na jakou částku vzroste tento vklad na konci pátého roku, jestliže žádné peníze nevkládáme ani nevybíráme? b) Na jakou částku vzroste vklad na konci pátého roku, jestliže na počátku každého roku uložíme dalších 1 000 Kčs? ([S8], str. 147, výsledky: a) 1 216,65 Kčs; b) 5 632,98 Kčs)

Leo Boček a kolektív:
Zbierka úloh z matematiky pre 2. ročník experimentálnych gymnázií,
1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Bratislava, 1981, 168 stran.

Tato sbírka nebyla žádným přínosem v rozvoji finanční vzdělanosti, protože obsahovala pouze jednu úlohu s finanční tématikou, v níž se hledal pouze konkrétní člen geometrické posloupnosti. Uveďme její text bez dalšího komentáře:

Na akú sumu sa zvýšil vklad 10 000 Kčs za štyri roky, ak je uložený na 3% úrok? ([EX2], str. 47, výsledek: 11 255 Kčs)

Jozef Smida, Jaroslav Šedivý:
Zbierka úloh z matematiky pre 3. a 4. ročník experimentálnych gymnázií,
1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Bratislava, 1983, 208 stran.

Uvedená sbírka sice měla samostatnou kapitolu o posloupnostech a řadách, neobsahovala však žádnou úlohu z finanční matematiky. Je zajímavé, že finanční úlohy na počátku osmdesátých let dvacátého století ze základních učebních textů úplně vymizely. Tento trend ve mně budí pocit, že široké veřejnosti měla být znalost tohoto odvětví zcela odepřena.

Edita Porubská a kolektiv: *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, 8. část,*
1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1986, 288 stran.

Učebnici z osmidílné řady používané dodnes jako základní učebnice matematiky na některých odborných školách a učilištích přeložila ze slovenského originálu Olga Klabanová. Schválilo ji výnosem č. j. 18 289/85–210 ministerstvo školství ČSR dne 13. června 1985 jako učebnici matematiky pro střední umělecko-průmyslové školy, střední knihovnické školy a střední zdravotnické školy. Poznamenejme, že do konce osmdesátých let vyšla čtyři její vydání.

V kapitole nazvané *Posloupnosti* lze najít několik úloh s finanční tématikou. V podkapitole *Užití geometrických posloupností* bylo uvedeno jednoduché a složené úrokování jako typický příklad využití geometrických posloupností v praxi. Ze čtyř řešených příkladů byly finanční matematice věnovány dva a ze šesti neřešených úloh o financích pojednávala jedna. Rozsahem a náročností odpovídala tato část výše popsané podkapitole v učebnici [MI].

Oldřich Odvárko, Emil Calda, Jana Kolouchová, Jana Řepová:
Matematika pre stredné odborné školy
a študijné obory stredných odborných učilíšť, 6. časť,
1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Bratislava, 1987, 288 stran.

Jednalo se o slovenskou učebnici matematiky z řady podobné jako výše analyzovaná učebnice [EP]. Rozsahem finanční matematiky je srovnat nelze, neboť v této učebnici se nacházel pouze jediný příklad téměř totožný s příkladem uvedeným ve sbírce [EX2]. Její přínos k finanční vzdělanosti můžeme proto označit jako nulový.

Jozef Smida: ***Matematika pro III. ročník gymnázií, Posloupnosti a řady reálných čísel,*** **1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1989, 80 stran.**

Jednalo se o dodatek k učebnici matematiky pro třetí ročník gymnázií zpracované kolektivem autorů pod vedením Jaroslava Šedivého, která vyšla pro „novou koncepci“ v roce 1986 a byla schválena výnosem č. j. 18 866/85–210 ministerstva školství ČSR dne 31. května 1985.

Dodatek nesl podtitul *Posloupnosti a řady reálných čísel* a skládal se z deseti kapitol. Ve čtvrté kapitole *Úlohy řešené pomocí aritmetických a geometrických posloupností* jsem očekával alespoň základní skupinu úloh z finančnictví. Nalezl jsem však pouze jedinou úlohu, jejíž znění je následující:

53. Kuřák prokouří ročně přibližně 2 000 Kčs. Kolik by ušetřil za 10 let, jestliže by tuto částku ukládal koncem každého roku na vkladní knížku se 4% úrokováním? ([G3], str. 36, výsledek: 24 012 Kčs)

Ani tento dodatek tedy neumožnil na gymnáziích sedmdesátých a osmdesátých let návrat zaniklého tématu *finanční matematika*. O tom se můžeme mj. přesvědčit v učebnici pro druhý ročník gymnázia [G2], která při rozsahu 120 stran měla samostatnou kapitolu o posloupnostech a řadách, ale neobsahovala ani jedinou zmínku o finanční matematice.

Rudolf Muzikář: *Repetitorium elementární matematiky*, 3. vydání, Vysoká škola ekonomická, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1989, 203 stran.

Roku 1979 vyšlo první vydání *Repetitoria*, které usnadnilo absolventům středních škol přípravu na přijímací zkoušky na vysokou školu ekonomickou.

Publikace byla rozdělena do sedmnácti paragrafů podle základních témat středoškolské matematiky. V každém paragrafu byla nejprve stručně zopakována teorie, pak následovalo několik řešených příkladů a skupina neřešených úloh k samostatnému procvičení.

Vzhledem k tomu, že autor sepsal publikaci pro budoucí studenty vysoké školy ekonomické, předpokládal jsem tomu odpovídající množství příkladů a úloh z finanční matematiky. Název *Posloupnosti* nesl třináctý paragraf v rozsahu čtrnácti stran, který obsahoval šestnáct řešených příkladů a třináct úloh na procvičení. Nenalezl však jsem ani nepatrnou zmínku o finanční matematice.

5.3 Třetí skupina učebnic

Jan Taišl, Josef Vojáček: ***Aritmetika pro sedmý ročník,***
12. nezměněné vydání, Státní pedagogické nakladatelství,
Praha, 1975, 150 stran.

Rozšířená a oblíbená učebnice pro sedmý ročník základní devítileté školy vycházela od roku 1962 do konce sedmdesátých let. Celkem se dočkala sedmnácti vydání.

Tuto učebnici a následující sbírku pro základní školy zde uvádím z prostého důvodu – obsahuje kapitolu a úlohy o úrokování. Jelikož byla určena pro základní školy, pracovala s ní drtivá většina populace. Byla rozdělena do pěti základních částí, jež byly dále rozděleny do podkapitol, čímž byla učebnice přehledná a vyhledávání informací bylo pohodlné.

Obsah:

I. Opakování;
II. Dělitelnost;
III. Zlomky;
IV. Poměr. Procenta;
V. Opakování.

Čtvrtá část o rozsahu šedesáti stran se dělila do sedmi podkapitol. Sedmá podkapitola *Procenta* o rozsahu devatenácti stran obsahovala oddíl nazvaný *Úrok* (6 stran s třemi obrázky rozprostírajícími se přes celé dvě strany). Celá podkapitola obsahovala vedle teoretického výkladu čtrnáct řešených příkladů (tři o úrocích) a 30 úloh na procvičení (šest o úrocích).

Nás bude tedy zajímat čtvrtá část, neboť jako jediná vykládá o úroku. V páté opakovací části jsem žádné podobné úlohy již neobjevil.

V teoretické části byly vyloženy pojmy jistina, úrok, úroková míra, výherní vkladní knížka. Žák byl seznámen s poskytovanou úrokovou mírou spořitelny (2 % z vkladů uložených na vkladní knížky bez výpovědi, 3 % z vkladů na vkladních knížkách s výpovědí a výherní vkladní knížky bez úroků avšak dvakrát do roka slosovávané s možností výhry 20 %, 100 % i 250 %). Teoretický výklad nabádal ke spořivosti a pojem úroku se způsobem jeho výpočtu velmi jasně vyjádřil.

Rozvážný občan neutratí hned všechny peníze, které vydělá ...

Státní spořitelny soustřeďují úspory občanů a pečují o jejich bezpečnost ... ([TV], str. 135)

Výpočet úroku. *Úrok za rok je tolik procent z uložené jistiny, kolik udává úroková míra. Úrok za dobu kratší než rok se vypočte tak, že se úrok za rok násobí příslušným zlomkem roku.* ([TV], str. 137)

Na ukázku uveďme dva příklady.

Příklad 14. Vypočtěte úrok z jistiny 7 264,65 Kčs při úrokové míře 2 % za dobu od 15. března do 12. října téhož roku. ([TV], str. 137, příklad byl podrobně vyřešen, výsledek: 83,54 Kčs)

30. Na kolik korun by vzrostla jistina 10 000 Kčs při 3% úrokové míry za 4 roky? Sestavte tabulku podle tabulky v učebnici. ([TV], str. 140, cvičení odkazuje na tabulku v řešeném příkladu 15, výsledek: 11 255,08 Kčs)

Hodnocení učebnice uvedu souhrnně s následující sbírkou.

Karel Kindl: *Sbírka úloh z aritmetiky pro 5. až 7. ročník*, 10. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1983, 328 stran.

Tato velmi rozšířená, často používaná a oblíbená sbírka úloh pro základní školy vycházela v letech 1958 až 1988; celkem se dočkala jedenácti vydání. Její název se v průběhu času měnil: nejprve to byla *Sbírka úloh z aritmetiky pro 6. a 7. ročník všeobecně vzdělávacích škol* a teprve v osmdesátých letech (tj. poslední dvě vydání z let 1983 a 1988), nesla výše zmíněný název. Obsah zůstával téměř beze změn.

Sbírka obsahovala, jak tvrdí autor, asi 2 000 sestavených příkladů a 1 000 slovních úloh s rozmanitými náměty. Byly seřazeny podle obtížnosti, jejich hlavním cílem bylo vypěstovat samostatnost žáků při řešení úloh a následné kontrole ve výsledcích. Nejobtížnější problémy byly označeny hvězdičkou.

Tematicky byly úlohy rozděleny do dvanácti částí (*Desítková soustava, Sčítání, Odčítání, Násobení, Dělení, Smíšené úlohy s přirozenými čísly, Dělitelnost, Zlomky, Desetinná čísla, Procenta, Diagramy, Přímá a nepřímá úměrnost*) podle probírané látky v příslušných ročnících. Zaměříme se na kapitolu *X. Procenta* (rozsah 20 stran), která se dělila na pět podkapitol. Pátá podkapitola nesla název

Úrok. Na čtyřech stranách bylo žákovi předloženo 27 úloh s pořadovými čísly od 130 do 156, avšak pouze k sedmnácti z nich nalezl žák odpověď v kapitole *Výsledky*.

Úlohy byly určeny pro žáky základní školy, kde autor předpokládal pouze ovládání práce s procenty. Uveďme dva příklady pro dokreslení náročnosti.

142. Kolik má na vkladní knížce uloženo žák, jestliže mu při 2%ní úrokové míře připsali za rok 16 Kčs úroků? ([KI], str. 264, výsledek: 800 Kčs, odpověď není v knize uvedena)

148. Zaměstnanec si vypůjčil 5 000 Kčs na opravu domu a půjčku bude splácet čtvrtletně po 500 Kčs kromě úroku.

a) Jak velká bude první splátka s 5%ním úrokem?

b) Za jakou dobu splatí půjčku? ([KI], str. 165, výsledek: a) 562,50 Kčs, b) dva a půl roku, výsledek b) není v knize uveden)

Hodnocení učebnice [TV] a sbírky [KI]

Na těchto knížkách nejvíce oceňuji to, že se žák seznámil se základními pojmy finanční matematiky. V učebnici [TV] mě potěšilo, že si žák podle návodu dokázal vypočítat dobu uložení jistiny s přesností na dny, ale postrádal jsem zde pojmy dluh, dlužník a věřitel – žádný příklad se netýkal splácení dluhu, bylo zde vysvětleno jen spoření. Naproti tomu ve sbírce [KI] byl žák v jedné úloze přímo dotázán k vysvětlení pojmů dlužník, věřitel, půjčka, splátka a dalších. Splácení dluhu se týkaly celkem tři úlohy ze zmiňovaných dvaceti sedmi.

Konstatuji, že rozmanitost úloh s finanční tématikou je velmi chudá, ale přesně odpovídá tehdejším požadavkům na znalosti občana vzhledem k nabídce spořitelen. Bohužel právě díky této chudobě se stalo toto téma nezáživným a dále upadalo v zapomnění.

5.4 Shrnutí

Z období let 1945 až 1989 jsem prostudoval téměř šedesát učebnic (včetně jejich dalších vydání). Zjistil jsem v některých případech postupnou, ale ve většině případů náhlou a ráznou devastaci finanční aritmetiky. Na všech typech středních škol s výjimkou středních ekonomických škol finanční úlohy vymizely. Několik posledních zástupců těchto problémů bylo vyučováno a řešeno bez vyložení příslušné teorie a uvedení hlubších souvislostí jen jako procvičování procent či posloupností. Z období od padesátých let do osmdesátých let dvacátého století lze vyzdvihnout pouze učebnice [NI] a [ZJ]. Domnívám se, že sbírka [SN], jež je v následující tabulce také označena, si toto zvýraznění také zaslouží, protože přes malý rozsah výkladu finanční matematiky bez řešených příkladů obsahuje poměrně velkou „zásobárnu" neřešených úloh.

Z provedených analýz učebnic a sbírek tohoto období vidíme trvalý a neúprosný úbytek úloh s finanční tématikou. Vše názorně shrnuje výše uvedená tabulka, do níž řadu publikací nebylo možno vůbec zařadit pro jejich nulový přínos. Situace na všech typech středních škol, vyjma ekonomických, vedla k úplnému ignorování tohoto matematického tématu. Studenti, jejich učitelé a rodiče neviděli důležitost a perspektivu znalostí finanční matematiky v budoucím praktickém životě. Nabídky bank, záložen a spořitelen byly strohé a jednoznačné – např. půjčka tolik a splátka tolik po danou dobu či při vkladu tolik na jistý úrok. Každý vystačil se základními znalostmi o procentech, které měl ovládnout na základní školy. Rozšířené nabídky finančních ústavů pro běžného občana, tak jak je známe dnes, neexistovaly.

Finanční matematika pro širokou veřejnost téměř přestala existovat. Zbylé úlohy, které se objevovaly v publikacích během šedesátých a sedmdesátých let, mizí v osmdesátých letech. Z vlastní zkušenosti vím, že úlohy, jež výjimečně zůstaly ve sbírkách a učebnicích, byly vyučujícími vynechávány jako nedůležité a zbytečné. Tímto postojem byl podtržen a utvrzen „vztah" mé generace k finančním výpočtům. Finance byly výrazem kapitál spojeny s kapitalismem a jeho stádiem imperialismem, tj. s něčím, co je špatné a pro socialistického občana nepřípustné. Absolventi středních škol znali pravidla počítání s procenty, znali vlastnosti aritmetických a geometrických posloupností. Nedokázali je však již spojit s finančnictvím.

Nelze se tedy divit, kolik lidí se po revoluci v roce 1989 během devadesátých let dvacátého století zadlužilo, a to jen díky neznalosti základních zákonů finanční matematiky. Tuto mezeru ve všeobecném vzdělání se snažíme zaplnit dodnes. O úspěšném postupu této snahy hovoří následující kapitola.

Podívejme se na závěr této kapitoly na tabulku shrnující základní charakteristiky publikací s alespoň minimálním přínosem k finanční vzdělanosti:

publikace – rok vydání	celkový rozsah	rozsah FM	počet ŘP FM	počet NÚ FM	jednoduché úrokování	složené úrokování	přínos
[JJ]–1947	**256**	**66**	**11**	**0**	**ano**	**ano**	**3**
[SE]–1948 *)	**57**	**57**	**49**	**245**	**ano**	**ano**	**4**
[EC]–1949	98	10	6	6	ano	ne	2
[BC1]–1950	132	12	9	5	ano	ne	2
[CP]–1951	177	6	2	10	ne	ano	1
[OM]–1951	232	5	5	0	ano	ano	2
[HJS]–1953	280	3	1	13	ano	ne	1
[HH]–1954	372	7	2	4	ne	ano	1
[KK]–1954	236	8	3	6	ne	ano	1
[HP]–1954	212	7	7	13	ne	ano	2
[HH1]–1956	124	7	2	4	ne	ano	1
[KRI]–1966	364	2	0	7	ne	ano	1
[VT]–1969	688	5	1	17	ne	ano	2
[NI]–1970	**534**	**9**	**9**	**14**	**ano**	**ano**	**3**
[ZJ]–1971	**352**	**30**	**29**	**41**	**ano**	**ano**	**4**
[MI]–1978	312	8	3	9	ne	ano	2
[SN]–1978	**424**	**6**	**0**	**34**	**ano**	**ano**	**3**

Zkratky použité v tabulce:

FM – finanční matematika; ŘP – řešený příklad; NÚ – neřešená úloha.

Přínos: 1 – minimální; 2 – základní; 3 – stěžejní; 4 – neocenitelný.

*) učebnice určena k výuce na obchodních akademiích, resp. středních ekonomických školách.

5.5 Seznam literatury a internetových zdrojů

Obecná literatura

[MP] Jiří Mikulčák: *Programovaná učebnice moderní matematiky,* str. 33–42, časopis Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, volume 13(1968), č. 1, JČMF, Praha, 1968, 404 stran.

[VK] Alena Vališová, Hana Kasíková a kolektiv: *Pedagogika pro učitele,* 1. vydání, Grada, Praha, 2007, 402 stran.

Učebnice

[BC] Jan Bílek, Eduard Čech, Karel Hruša, Vítězslav Jozífek, Karel Prášil, Karel Rakušan: *Aritmetika pro druhou třídu středních škol*, 2. vydání, Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1951, 132 stran.
(1. vydání – 1950, 132 stran)

[BC1] Jan Bílek, Eduard Čech, Karel Hruša, Vítězslav Jozífek, Karel Prášil, Karel Rakušan: *Aritmetika pro druhou třídu středních škol*, 1. vydání, Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1950, 132 stran.

[BD] Petr Benda, Berta Daňková, Josef Skála: *Sbírka maturitních příkladů z matematiky,* 4. upravené vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1968, 188 stran.
(1. vydání – 1959, 142 stran; 2. vydání – 1962, 135 stran; 3. nezměněné vydání – 1966, 135 stran; 5. upravené vydání – 1971, 189 stran; 6. upravené vydání – 1974, 189 stran; 7. upravené vydání – 1979, 189 stran; 8. přepracované vydání – 1983, 199 stran; 9. vydání – 1986, 199 stran; 10. vydání – 1988, 199 stran)

[BK] Vladimír Bruthans, Antonín Kejzlar: *Matematika – příručka pro přípravu na vysokou školu*, 1. vydání, Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1965, 164 stran.

[CB] Eduard Čech a kolektív: *Aritmetika pre III. triedu gymnázií*, 1. vydání, Štátne nakladateľstvo, Bratislava, 1951, 79 stran.

[CP] Eduard Čech a kolektiv: *Matematika pro III. třídu gymnasií*, 1. vydání, Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1951, 177 stran.

[EC] Eduard Čech: *Aritmetika pro II. třídu středních škol*, částečně změněný dotisk 1. vydání, Státní nakladatelství, Praha, 1949, 98 stran.

[EM] Karel Hruša, Emil Kraemer, Jiří Sedláček, Jan Vyšín, Rudolf Zelinka: *Přehled elementární matematiky*, 4. nezměněné vydání, Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1964, 500 stran.
(1. vydání – 1957, 497 stran; 2. revidované vydání – 1958, 498 stran; 3. znovu revidované vydání – 1962, 498 stran)

[EP] Edita Porubská a kolektiv: *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, 8. část*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1986, 288 stran.

[EX2] Leo Boček a kolektív: *Zbierka úloh z matematiky pre 2. ročník experimentálnych gymnázií*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Bratislava, 1981, 168 stran.

[EX3] Jozef Smida, Jaroslav Šedivý: *Zbierka úloh z matematiky pre 3. a 4. ročník experimentálnych gymnázií*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Bratislava, 1983, 208 stran.

[G2] Jozef Smida, Ladislav Kosmák, Oldřich Odvárko, Jaroslav Šedivý: *Matematika pro II. ročník gymnázia*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1980, 120 stran.

[G3] Jozef Smida: *Matematika pro III. ročník gymnázií, Posloupnosti a řady reálných čísel*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1989, 80 stran.

[GK] Tomáš Gál, Antonín Kamarýt: *Opakování středoškolské matematiky*, 1. vydání, Státní zemědělské nakladatelství ve spolupráci s Ústavem vědecko-technických informací MZLVH, Praha, 1963, 291 stran.

[HH] Josef Holubář, František Hradecký, Karel Hruša, Ema Kasková, Milan Kolibiar, František Krňan: *Algebra pro devátý až jedenáctý postupný ročník*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1954, 372 stran.

[HH1] Josef Holubář, František Hradecký, Karel Hruša: *Algebra pro jedenáctý postupný ročník*, 3. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1956, 124 stran.
(1. vydání – 1954, 114 stran; 2. nezměněné vydání – 1955, 114 stran)

[HHS] Josef Holubář, František Hradecký, Karel Hruša, Ema Kasková, Milan Kolibiar, František Krňan: *Algebra pre 9. – 11. postupný ročník všeobecno-*

vzdelávacích škôl, 2. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Bratislava, 1957, 348 stran.
(1. vydání – 1954, 371 stran)

[HJS] Josef Huka, Vítězslav Jozífek: *Matematika pro I. ročník strojnických škol*, 2. přepracované vydání, SPN, Praha, 1953, 280 stran.
(1. vydání – 1951, 260 stran)

[HJU] Vratislav Hladovec, Vítězslav Jozífek, Antonín Kunc: *Matematika pro odborná učiliště a učňovské školy I*, 3. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1958, 204 stran.
(1. vydání – 1952, 222 stran; 2. upravené vydání – 1953, 204 stran)

[HP] Otakar Hruška, Václav Pelant: *Matematika pro zemědělské technické školy, II. díl, Aritmetika, Statistika, Praktická geometrie,* 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1954, 212 stran.

[JH] Vítězslav Jozífek, František Hradecký, Josef Huka: *Matematika pro mimořádné způsoby studia na průmyslových školách (dvouleté studium),* 2. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1957, 320 stran.
(1. vydání – 1956, 320 stran)

[JH7] Vítězslav Jozífek, František Hradecký, Josef Huka: *Matematika pro studium pracujících na SPŠ (dvouleté studium)*, 7. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1962, 320 stran.
(1. vydání – 1956, 320 stran; 2. vydání – 1957, 320 stran; 3. nezměněné vydání – 1958, 320 stran; 4. nezměněné vydání – 1959, 320 stran; 5. nezměněné vydání – 1960, 320 stran; 6. nezměněné vydání – 1961, 320 stran)

[JJ] Josef Ježek: *Příručka kupecké, finanční a pojistné matematiky, II. část*, 10. opravené vydání, Česká grafická unie a. s., Praha, 1947, 256 stran.
(1. vydání – 1911; 4. rozšířené a opravené vydání – 1921, 143 stran (jen kupecká matematika); 7. rozšířené a opravené vydání – 1928, 238 stran; 8. opravené vydání – 1930, 169 stran (jen kupecká matematika); 9. nezměněné vydání – 1933, 268 stran; zbylá vydání se nepodařilo nalézt)

[JP] Miloš Jelínek: *Algebra pro střední školy pro pracující (Učebnice pro posluchače televizních kursů matematiky)*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1964, 324 stran.

[KI] Karel Kindl: *Sbírka úloh z aritmetiky pro 5. až 7. ročník*, 10. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1983, 328 stran.

(1. vydání – 1958, 327 stran; 2. nezměněné vydání – 1960, 327 stran; 3. nezměněné vydání – 1961, 327 stran; 4. nezměněné vydání – 1966, 327 stran; 5. nezměněné vydání – 1970, 327 stran; 6. upravené vydání – 1974, 327 stran; 7. vydání – 1976, 327 stran; 8. vydání – 1978, 327 stran; 9. vydání – 1979, 327 stran; 11. vydání – 1988, 327 stran)

[KK] Jiří Kabele, Jan Kotík, Eduard Kriegelstein, Antonín Pospíšil: *Matematika, II. díl, Učební text pro průmyslové školy (čtyřleté studium)*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1954, 236 stran.

[KRI] Eduard Kriegelstein a kolektiv: *Sbírka úloh z matematiky pro střední průmyslové školy a střední zemědělské technické školy*, 2. upravené vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1966, 364 stran.
(1. vydání – 1965, 343 stran)

[LI] Viktor Borisovič Lidskij: *Úlohy z elementární matematiky*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1965, 46 stran.

[MI] Valentýn Melicher, Jozef Ivanič, Imrich Lečko: *Matematika pro střední zdravotnické školy, II. díl*, 5. nezměněné vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1978, 310 stran.
(1. české vydání – 1965, 312 stran; 2. vydání – 1967, 312 stran; 3. vydání – 1974, 310 stran; 4. vydání – 1976, 310 stran)

[MS] Jana Müllerová, Václav Sýkora, Ondřej Šedivý: *Matematika pro střední pedagogické školy, III. díl*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1979, 164 strany.

[NI] František Nimrichter, Irena Hubačková, Ladislav Schramm, Václav Topinka: *Matematika pro I. a II. ročník středních ekonomických škol*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1970, 534 stran.

[OC] Oldřich Odvárko, Emil Calda, Jana Kolouchová, Jana Řepová: *Matematika pre stredné odborné školy a študijné obory stredných odborných učilíšť, 6. časť*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Bratislava, 1987, 288 stran.

[OM] Otokar Maška: *Přehled matematiky*, nové vydání upravené Borisem Gruberem, Jednota československých matematiků a fysiků, Přírodovědecké nakladatelství, Praha, 1951, 232 stran.
(1. až 11. vydání – 1923 až 1947, dvojdílná: 1. díl Aritmetika a algebra (96 stran), 2. díl Geometrie (160 stran))

[PJ] Josef Polák: *Přehled středoškolské matematiky*, 8. vydání, Prometheus, Praha, 2005, 608 stran.
(1. vydání – 1972, 627 stran; 2. vydání – 1977, 627 stran + dotisk 1978, 627 stran; 3. vydání – 1980, 627 stran; 4. vydání – 1983, 627 stran; 5. přepracované vydání – 1991, 608 stran; 6. vydání – 1995, 608 stran; 7. vydání – 2003, 608 stran; 9. přepracované vydání – 2008, 659 stran)

[PJ4] Josef Polák: *Přehled středoškolské matematiky*, 4. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1983, 627 stran.
(1. vydání – 1972, 627 stran)

[PK] Antonín Pospíšil, František Kejla, Eduard Kriegelstein, Václav Pelant: *Matematika pro II. ročník středních průmyslových škol a středních zemědělských technických škol*, 3. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1971, 291 stran.
(1. vydání – 1965, 286 stran; 2. doplněné vydání – 1966, 291 stran; 4. vydání – 1975, 291 stran; 5. vydání – 1977, 291 stran; 6. vydání – 1978, 291 stran)

[RR] Jozef Kroupa, Karel Rakušan, Anna Rakušanová, Jan Vyšín: *Matematika pro šestý postupný ročník*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1954, 274 stran.

[RZ] Rudolf Zelinka: *Učební texty pro aritmetiku, III. část*, 2. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1952, 190 stran.
(1. vydání – 1950, 188 stran + dotisk 1951, 188 stran)

[S6] Václav Sýkora, Oldřich Odvárko, Jozef Smida: *Matematika pro gymnázia, sešit 6 – část 2*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1979, 126 stran.
(2. vydání – 1981, 126 stran; 3. vydání – 1984, 126 stran)

[S8] Jaroslav Šedivý, Václav Medek, Oldřich Odvárko, Beloslav Riečan, Václav Sýkora: *Matematika pro gymnázia, sešit 8*, 2. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1981, 243 stran.
(1. vydání – 1980, 243 stran)

[SE] Václav Seliger: *Matematika III. (Učební text pro III. ročník obchodních akademií)*, 1. vydání, Státní nakladatelství, Praha, 1948, 57 stran.

[SN] Ladislav Schramm, František Nimrichter, Václav Topinka: *Sbírka úloh z matematiky pro střední ekonomické školy*, 4. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1978, 423 stran. (Ze stejnojmenného slovenského originálu přeložil Václav Vosáhlo.)

(1. vydání – 1972, 423 stran; 2. vydání – 1976, 424 stran; 3. vydání – 1977, 423 stran; 5. vydání – 1979, 423 stran; 6. vydání – 1981, 423 stran)

[TV] Jan Taišl, Josef Vojáček: *Aritmetika pro sedmý ročník*, 12. nezměněné vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1975, 152 stran.

(1. vydání – 1962, 152 stran; 2. nezměněné vydání – 1963, 152 stran; 3. nezměněné vydání – 1964, 152 stran; 4. vydání – 1966, 152 stran; 5. nezměněné vydání – 1967, 152 stran; 6. vydání – 1968, 152 stran; 7. vydání – 1969, 152 stran; 8. nezměněné vydání – 1971, 152 stran; 9. nezměněné vydání – 1972, 152 stran; 10. nezměněné vydání – 1973, 152 stran; 11. nezměněné vydání – 1974, 152 stran; 13. nezměněné vydání – 1976, 152 stran; 14. upravené vydání – 1977, 152 stran; 15. upravené vydání – 1978, 152 stran; 16. upravené vydání – 1979, 152 stran; 17. upravené vydání – 1980, 152 stran)

[V2] Emil Kraemer, Pavel Bartoš, Anna Hustá, Jiří Kabele, Jiří Mikulčák, Jan Vořìšek: *Matematika pro II. ročník SVVŠ – větev přírodovědná*, Doplněk k základní učebnici, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1965, 128 stran.

[V3] Emil Kraemer, Pavel Bartoš, Anna Hustá, Jan Vořìšek, Michal Zöldy: *Matematika pro III. ročník SVVŠ*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1965, 316 stran.

[VL] Josef Vlček: *Sbírka příkladů z matematiky pro střední školy*, 2. vydání, Komenium, učitelské nakladatelství, Brno, 1948, 72 stran.

(1. vydání – 1947, 73 stran)

[VSE] Rudolf Muzikář: *Repetitorium elementární matematiky*, 3. vydání, Vysoká škola ekonomická, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1989, 203 stran.

(1. vydání – 1984, 203 stran; 2. vydání – 1987, 203 stran)

[VT] František Vejsada, František Talafous: *Sbírka úloh z matematiky pro SVVŠ (gymnasia)*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1969, 688 stran.

(2. vydání – 1973, 688 stran)

[ZJ] Josef Zahradník: *Matematika pro I. a II. ročník studia absolventů SVVŠ (gymnázií) na středních ekonomických školách*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1971, 352 stran.

[ZO] Zdeněk Opava: *Programovaná učebnice matematiky (aritmetika a algebra)*, 1. vydání, nakladatelství Práce, Praha, 1970, 709 stran.
(2. doplněné vydání – 1980, 739 stran)

Internetové zdroje

[I01] Národní pedagogická knihovna J.A. Komenského, Praha: *http://www.npkk.cz*.

[I02] Online katalog Národní knihovny ČR: *http://www.nkp.cz*.

[I07] Wikipedia, otevřená encyklopedie: *http://cs.wikipedia.org*.

[I08] Wikipedia, the free encyclopedia: *http://en.wikipedia.org*.

6. Současná pozice finanční matematiky na středních školách (renesance finanční matematiky 1989 – současnost)

V roce 1989 se všichni občané naší republiky rozloučili s „vidinou“ komunistické společnosti, ve které bychom se obešli bez peněz a operací s nimi. Totalitní režim se zhroutil, lidé mohli začít svobodně podnikat, byly zakládány nové banky, pojišťovny a rozšířila se nabídka produktů postavených na operacích s financemi. V tento okamžik začala opět být životně důležitá dobrá znalost práce s penězi a finančními produkty. Podnikatelé k rozjezdu firem potřebovali vstupní kapitál, proto začali většinou kontaktovat finanční ústavy. Při jednání s bankami, spořitelnami, či záložnami nastaly pro podnikatele problémy a u nemalého procenta byly fatálního charakteru. V lepším případě si podnikatel včas uvědomil neúnosnost splácení půjček a jejich úroků, v tom horším případě na to doplatil po několika letech ztrátou firmy, majetku a také nadějí na další podnikání. V běžném životě se objevila nutnost rozšíření a doplnění základních znalostí z finanční matematiky.

První otázkou bylo nalezení vhodného prostoru pro obnovenou výuku základů finanční matematiky. Podle mého pohledu na strukturu obyvatelstva jsou nejvhodnější skupinou středoškolští studenti, neboť z nich vznikala většina budoucích podnikatelů. Ponechání výuky finanční matematiky jen na vysokých ekonomických školách zaměřujících se na výchovu budoucích odborníků finančních ústavů, či její rozšíření na další typy vysokých škol, by problém nevyřešilo, protože procento podnikatelů s vysokoškolským vzděláním, respektive vysokoškolským vzděláním finančního charakteru je mizivé.

Od roku 1989 postupně prochází finanční matematika obrozením zejména na středních školách, neboť ve druhé polovině dvacátého století byla na nich tato problematika vřazena pouze do kapitoly *Posloupnosti a řady*, v níž byly příklady procvičující jen jednoduché úročení (aritmetická posloupnost) a složené úročení (geometrická posloupnost). Nepatrně více se dozvěděli jen studenti středních ekonomických škol (dnes obchodní akademie) v rámci odborných ekonomických předmětů. Matematický aparát potřebný ke zvládnutí výpočtů ve finanční matematice bývá na středních školách vyložen a procvičen v hodinách matematiky již během prvních tří let. Výuku finanční matematiky je proto nejvhodnější zařadit do osnov třetího ročníku. Dalšími důvody je, že student vidí nové uplatnění získaných vědomostí a není ještě časově stresován maturitními zkouškami.

V této kapitole se pokusím analyzovat středoškolské učebnice a sbírky věnující se finanční matematice, které vyšly po roce 1989. Ukážu jejich vývoj, pokrok a aktualizaci jejich stavby v závislosti na společenských požadavcích. Je nutná vzhledem rozvoji bankovnictví a rozšiřování nabídek finančních produktů. Finanční ústavy se navzájem předbíhají v nabídkách, aby získaly klienta, a proto klient musí být schopen se v nich dobře a rychle orientovat.

Snažil jsem se vybrat takové učebnice a sbírky, abych co nejlépe pokryl všechny typy a úrovně středních škol. Zhodnotím následující učebnice:

- obchodní akademie: *Úvod do finanční matematiky* (B. Eichler);
- střední odborné školy: *Hospodářské výpočty* (B. Eichler);
- střední odborné školy a střední odborná učiliště: *Ekonomika*, 5. díl (J. Mlčoch);
- střední odborné školy a střední odborná učiliště: *Posloupnosti a finanční matematika* (O. Odvárko);
- gymnázia: *Matematika – Posloupnosti a řady* (O. Odvárko).

Budu se také věnovat speciálním učebnicím a příručkám oslovujícím veřejnost a středoškoláky bez rozlišení typu střední školy, tj. orientujících se především na zájemce o prohloubení základních znalostí. Jedná se o tyto učební pomůcky:

- střední školy: *Úlohy z finanční matematiky* (O. Odvárko);
- střední školy: *Finanční matematika s kalkulačkami Casio* (O. Odvárko, J. Robová);
- příprava na vysokou školu ekonomickou: *Finanční matematika v příkladech* (J. Radová; V. Chýna, J. Málek);
- veřejnost: *Finanční matematika pro každého* (J. Radová, P. Dvořák, J. Málek).

Na následujících stránkách zhodnotím zejména výše uvedené učebnice a sbírky, které pokrývají učivo většiny typů středních škol. Dále nahlédnu do dvou sbírek úloh z matematiky pro základní školy:

- *Sbírka úloh z matematiky pro ZŠ* (F. Běloun);
- *Sbírka úloh z matematiky pro 2. stupeň základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií, ARITMETIKA, ALGEBRA, FUNKCE* (P. Krupka).

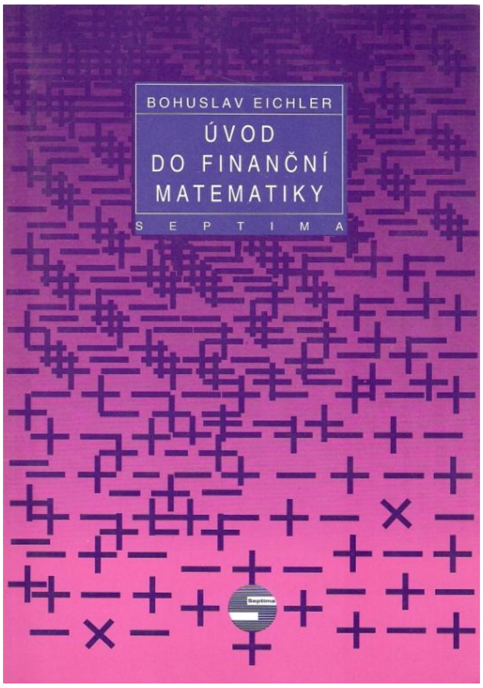
V závěru kapitoly připomenu existenci ještě jedné kvalitní učebnice finanční matematiky, která však z mého pohledu překračuje rozsahem, přístupem a náročností učivo střední školy:

- *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou* (T. Cipra).

6.1 Učebnice a sbírky pro střední školy

Bohuslav Eichler: ***Úvod do finanční matematiky*****,**

1. vydání, Septima, Praha, 1993, 80 stran.



Úvod do finanční matematiky je první učebnice finanční matematiky, se kterou jsem se jako středoškolský učitel setkal a využíval ji při výuce. Je určena především středoškolským studentům a dne 8. 2. 1993 ji schválilo Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR pod č. j. 11 673/93-23 k zařazení do seznamu učebnic pro obchodní akademie. Svou strukturou je vhodná i pro podnikatele, kteří se při své práci musí potýkat s mnoha finančními otázkami.

Učebnice není příliš matematicky náročná. Autor v ní předpokládá pouze elementární znalosti procentového počtu, aritmetických a geometrických posloupností. Je rozdělena na deset základních kapitol, které jsou dále členěny na menší části – podkapitoly, v nichž jsou ilustrovány jednotlivé aplikace finanční matematiky. Autor při výkladu nepracuje s daní z úroků, ale zaměřuje se na podrobnější charakteristiku činností finančních ústavů.

Rámcové osnovy matematiky na gymnáziu neposkytovaly v devadesátých letech dvacátého století příliš volnosti pro vložení celé další oblasti, a proto jsem vykládal finanční matematiku podle této učebnice na semináři z matematiky pro třetí ročníky. Rozsah osmdesáti stran velmi dobře vyhovoval omezenému času, který jsem mohl této problematice věnovat. Při dotaci dvou vyučovacích hodin týdně jsem látku vyložil a procvičil během dvou měsíců. Studenti ji byli schopni vstřebat a závěrečný test z finanční matematiky dopadl každý rok velmi dobře. Tento přístup však měl jednu obrovskou nevýhodu a to, že seminář byl volitelný a ne každý si ho tedy vybral a prošel základy finanční matematiky. Od studentů, kteří výklad absolvovali, jsem měl pouze kladné odezvy a mnoho dalších podnětných poznámek, z nichž jsem však většinu nemohl uskutečnit z výše zmíněných časových důvodů.

Jednalo se zejména o žádosti o rozšíření časové dotace finanční matematiky, návštěvy bank s rozborem jejich produktů, analýzy letáků, reklam a inzerátů, které nabízely různé druhy půjček a hypoték.

Obsah učebnice

1 Jednoduché úrokování (10 stran);

2 Výpočty na účtech v peněžních ústavech (10 stran);

2.1 Postupný způsob výpočtu úroků na účtech v peněžních ústavech;

2.2 Zůstatkový způsob výpočtu úroků na účtech v peněžních ústavech;

3 Složené úrokování (4 strany);

4 Kombinované úrokování (4 strany);

4.1 Úrokovací doba zahrnuje část prvního úrokovacího období a několik celých úrokovacích období;

4.2 Úrokovací doba zahrnuje několik celých let a část posledního úrokovacího období;

4.3 Úrokovací doba zahrnuje část prvního období, několik celých období a část posledního období;

5 Diskontování (2 strany);

6 Výpočet úrokovací doby a úrokové míry při složeném úrokování (3 strany);

7 Dlouhodobé střádání (7 stran);

7.1 Dlouhodobé střádání počátkem roku;

7.2 Dlouhodobé střádání koncem roku;

7.3 Dlouhodobé střádání počátkem měsíce;

7.4 Dlouhodobé střádání koncem měsíce;

8 Důchodový počet (3 strany);

9 Umořování dluhu (4 strany);

10 Početní technika kalkulace (20 stran);

10.1 Nákupní kalkulace;

10.2 Prodejní kalkulace;

10.3 Výrobní kalkulace;

Výsledky cvičení;

Příloha: tabulky úročitelů, odúročitelů, střadatelů, zásobitelů a umořovatelů.

Jednotlivé kapitoly umožňují studentům osvojení základů finanční matematiky, ale dávají i možnost hlubšího pochopení úloh s finanční tématikou. Pro učitele a zejména studenty je na konci učebnice připojena pětistránková příloha, která obsahuje tabulky důležitých parametrů finančnictví. Slouží ke kontrole výpočtů na kalkulátorech, neboť studenti mají ne zřídka problémy s použitím kalkulaček a nejsou si jisti ani svými výpočty.

Každá kapitola je uzavřena přibližně půlstránkovým shrnutím základních pojmů a vzorců. Učebnice obsahuje 38 vzorově řešených úloh a 30 neřešených příkladů, jejichž výsledky jsou uvedeny v závěru knihy. Text učebnice je stručný a jasný, koncepce i grafická úprava zvyšuje přehlednost a srozumitelnost prezentované látky.

Základní charakteristiky jednotlivých kapitol

1 *Jednoduché úrokování*

V této kapitole se student seznamuje se základními pojmy: kapitál, jistina, úroková míra, úrokovací období, úroková doba, úrok. Naučí se vypočítávat délku úrokovací doby, bez které by nebyl schopen úročit.

Pro výpočet délky úrokovací doby se používají dvě základní metody – přímá a odčítací. V obou metodách se uplatňuje pravidlo mezních dnů (den vkladu a den výběru), z nichž zahrnujeme pouze a právě jeden.

Přímá metoda postupuje od měsíce vkladu přes měsíce uložení k měsíci výběru. Počet dnů je součtem tří čísel: počet dnů uložení v měsíci vkladu, počet dnů měsíců uložení a počet dnů v měsíci výběru.

Odčítací metoda je na rozdíl od přímé méně pracná, ale pracuje jen se standardem 30A/360 (americká metoda – rok má 360 dnů a každý měsíc 30 dnů, jen v případě výběru 31. dne měsíce má tento poslední měsíc všech 31 dnů). Počet dnů je součtem rozdílu dne výběru a dne vkladu a třicetinásobku rozdílu měsíce výběru a měsíce vkladu.

Po vyložení těchto metod následují jednoduché praktické úlohy na jednoduché úročení.

Uveďme jeden příklad na ilustraci:

Na vkladní knížce úročené 9 % úroku p. a. bylo 31. 12. Kč 16 948,–. Knížka byla zřízena 4. 5. Vypočtěte původní jistinu a úroky. ([E1], str. 13, výsledek: jistina 16 000,– Kč, úroky 948,– Kč)

2 *Výpočty na účtech v peněžních ústavech*

Cílem této kapitoly je, aby se student naučil sledovat stav a pohyb peněz na svém účtu, vypočítat úrokovací dobu a úroky. Seznamuje se se dvěma základními způsoby:

- postupný způsob výpočtu úroků;
- zůstatkový způsob výpočtu úroků.

V úvodu autor naznačuje, že se v minulosti hledala nejpřehlednější a nejméně pracná metoda zaznamenávání finančních prostředků a úroků. Nejvíce se osvědčila metoda, při níž se účty po každém úrokovacím období uzavírají, vypočítává se úrok a tento úrok se připisuje k účtu. A právě tato metoda se pečlivě a dopodrobna vysvětluje a demonstruje na několika příkladech.

Pro jednoduchý a přehledný zápis je vytvořena tabulka, kde nejdůležitější jsou sloupce *Má dáti*, *Dal* a *Zůstatek*. Při studiu základů finanční aritmetiky se student učí sestavovat tyto tabulky.

Datum	Text	Jistina Kč		
		Má dáti	Dal	Zůstatek

Oba způsoby, s nimiž se student seznámí, se liší pouze ve výpočtu úroků. V postupném způsobu se úrok vypočítává z částky ve sloupci *Má dáti, Dal* nebo *Zůstatku* převedeného z minulého úrokovacího období a úrokovací doba se počítá do konce úrokovacího období. Při zůstatkovém způsobu se pracuje jen se sloupcem Zůstatek a úrokovací doba k jednotlivým zůstatkům je počet dnů, po kterých se zůstatek nemění.

Ukažme typický příklad:

Vypočtěte postupným a zůstatkovým způsobem úroky na vkladovém účtu úročeném 4 % p. a. Účet měl 1. 1. zůstatek Kč 16 245,–, 18. 2. na něj byly uloženy Kč 4 000,– a 4. 7. z něho bylo vybráno Kč 9 000,–. Sestavte vkladový účet a uzavřete jej koncem roku. ([E1], str. 23, výsledek: úroky 611,91 Kč, zůstatek 11 856,91 Kč)

3 *Složené úrokování*

Tato kapitola studenta seznamuje s nejčastějším typem úrokování – složeným úrokováním. Ukazuje, že sice existují tabulky úročitelů, ale výklad zdůrazňuje spojitost složeného úročení s geometrickou posloupností. Uvádí především zjednodušené úlohy z praxe (např. není uvažována daň z úroků), což usnadňuje pochopení probírané látky.

Následující příklad dobře ilustruje vyučovanou problematiku:

Jan Novák půjčil Josefu Adamovi Kč 35 000,– na 6 let a dohodli úrok ve výši 9 % ročně. Jak velkou částku splatí J. Adam půjčku i úroky? ([E1], str. 28, výsledek: úroky 23 698,50 Kč, splátka 58 698,50 Kč)

4 *Kombinované úrokování*

V této kapitole je studentovi přiblížena finanční praxe běžného života, neboť jistina většinou nebývá uložena první den a vybrána poslední den úrokovacího období, a proto musí student zvládnout také kombinované úrokování, tj. kombinaci jednoduchého a složeného úrokování. Podrobně jsou popsány tři typy situací, které mohou nastat:

- úrokovací doba zahrnuje část prvního úrokovacího období a několik celých úrokovacích období;
- úrokovací doba zahrnuje několik celých let a část posledního úrokovacího období;
- úrokovací doba zahrnuje část prvního období, několik celých období a část posledního období.

Ukázkový příklad:

Dne 4.9. 1993 si podnikatel pan Vorel půjčil na 6 let Kč 80 000,– na 15 % úroku ročně. Kolik korun bude činit jeho dluh (pokud nebude nic splácet) k 31. 12. 1997? ([E1], str. 32, výsledek: dluh Kč 146 741,62)

5 *Diskontování*

Autor nejprve vyloží pojem diskontovat neboli odúročit, což znamená vypočítat původní hodnotu kapitálu před daným počtem úrokovacích období. Zavádí pojem odúročitel, který je převrácenou hodnotou úročitele při složeném úročení, s nímž se nejčastěji pracuje při plánování, když chce investor do určité doby získat určitý kapitál a zná úrokovou míru. Diskontováním se zjistí výše nutného počátečního kapitálu. Autor připomíná i další oblast, kde se běžně pracuje s diskontováním, resp. diskontem, a to je při koupi a prodeji cenných papírů.

6 *Výpočet úrokovací doby a úrokové míry při složeném úrokování*

Jedná se o další kapitolu patřící do oblasti složeného úrokování. Student se seznámí s novými typy příkladů, s využitím tabulek úročitelů a hlouběji procvičí základní vzorec

$$j_n = j_0 \cdot r^n,$$

kde j_n je jistina po n úrokovacích obdobích, j_0 je počáteční jistina, r je úročitel jednoho úrokovacího období a n je počet úrokovacích období.

Jednotlivé úlohy se liší typem otázky, a tak hlavním úkolem studenta je vyjádření neznámé ze vzorce. Umístění neznámé ve vzorci v některých případech také nutí studenta pracovat s logaritmy. Autor tedy předpokládá, že student zvládl řešení exponenciálních a logaritmických rovnic.

Pro větší názornost uveďme příklad:

Za kolik let vzroste jistina 80 000,– Kč při 15 % na 160 908,86 Kč? ([E1], str. 37, výsledek: za 5 let)

Domnívám se, že student bude patrně postupovat takto:

Po dosazení zadaných hodnot do základního vzorce získá rovnici:

$$160\,908{,}56 = 80\,000 \cdot 1{,}15^x.$$

Zlogaritmováním, využitím základních vět o logaritmech a po úpravách dostává:

$$x = \frac{\log 160\,908{,}56 - \log 80\,000}{\log 1{,}15} = 5.$$

7 *Dlouhodobé střádání*

Sedmá kapitola je věnována dlouhodobému střádání. Dlouhodobým střádáním je chápáno pravidelné ukládání stále stejně velké částky, tzv. anuity. Student se učí řešit úlohy, v nichž se při složeném úrokování ukládá pravidelně stejná částka při neměnné úrokové míře. Probírány jsou čtyři okruhy:

- dlouhodobé střádání počátkem roku;
- dlouhodobé střádání koncem roku;
- dlouhodobé střádání počátkem měsíce;
- dlouhodobé střádání koncem měsíce.

V okruhu *Dlouhodobé střádání počátkem roku* je poprvé vysvětleno pravidelné ukládání peněz. Nejprve je zaveden pojem střadatel a uvedena tabulka střadatelů. Pro větší názornost jsou příklady počítány nejprve klasickým „postupným“ způsobem. Provádí se složené úrokování každého vkladu samostatně. Poté se ukáže souvislost dlouhodobého střádání s částečným součtem členů geometrické posloupnosti. Postupný výpočet pracuje tedy s každým vkladem jako se samostatnou jednotkou a teprve poté jsou všechny částečné hodnoty sečteny. Výsledek postupného výpočtu je porovnán s výsledkem postupu s využitím střadatele a je zdůrazněna nebezpečnost zaokrouhlování.

V okruhu *Dlouhodobé střádání koncem roku* jsou úlohy vysvětlovány s odkazem na předešlý okruh. Opět jsou ukázány oba základní postupy (tj. postupný výpočet a postup s využitím střadatele) a vysvětlena je jejich odlišnost. Ta spočívá v tom, že každý vklad je úročen o jeden rok méně. Jedná se tedy opět o součet několika členů geometrické posloupnosti, které jsou posunuté o jeden prvek doleva, tj. vždy k předcházejícímu členu.

V části *Dlouhodobé střádání počátkem měsíce* se předpokládá, že student umí aplikovat znalosti jednoduchého i složeného úrokování. Nejprve musí vypočítat tzv. roční úsporu, což je částka, kterou pravidelným ukládáním počátkem měsíce investor nastřádá během jednoho roku. Každý vklad je na účtu jinou dobu a je tedy úročen odlišně. Vzniklá částka je částkou na konci roku a student využije poznatků z předešlého okruhu, tj. částka ukládaná pravidelně na konci roku.

V části *Dlouhodobé střádání koncem měsíce* se vysvětluje jediný rozdíl od předešlé části, který spočívá ve výpočtu roční úspory. Při výpočtu roční úspory je každý vklad na účtu o jeden měsíc kratší dobu než v předešlé části. Při výpočtu této hodnoty se opět uplatňuje jednoduché úrokování a studentovi je vše vysvětlováno jako součet členů posloupnosti.

Ocitujme typický příklad z této kapitoly:

Pravidelně měsíčně střádáme Kč 200,– po dobu tří let při 9 % úroku ročně. Kolik korun nastřádáme při úložkách počátkem, resp. koncem každého měsíce? ([E1], str. 44, úspora 8 250,98 Kč, resp. 8 191,97 Kč)

8 Důchodový počet

V osmé kapitole je student podrobněji seznámen s podstatou důchodového počtu. Jsou zde zavedeny základní pojmy: zakládací jistina, důchod, zásobitel, dočasný a stálý důchod. Vše je vysvětleno na základě složeného úrokování a také pomocí názorných grafů. Praktické využití dočasných důchodů je předvedeno na úlohách o zajištění pravidelného příjmu po dobu studia nebo na problému doplňku starobního důchodu. Početně student vystačí se znalostmi z předešlých kapitol.

Ilustrační příklad:

Jak velkou zakládací jistinou si zajistíte měsíční důchod Kč 400,–, pobíraný počátkem měsíce, na dobu čtyř let při 9 % úroku ročně? ([E1], str. 44, úspora 8 250,98 Kč, resp. 8 191,97 Kč)

9 *Umořování dluhu*

Největší nebezpečí při práci s financemi spočívá v neschopnosti splácet dluh. Každý, kdo si potřebuje nebo jen chce půjčit finanční prostředky, by si měl udělat čas na prostudování této kapitoly. V ní je vysvětlen základní princip splácení dluhu a úroků z něho plynoucích pomocí pravidelných splátek. Novým pojmem je umořovatel, který je roven převrácené hodnotě zásobitele. Student se seznamuje se sestavováním umořovacích plánů a objevuje výhody a nevýhody dluhu.

Ukažme vše na jednom konkrétním příkladu.

Občan si vypůjčil Kč 80 000,– na tři roky při 18 % p. a. Kolik korun musí splácet koncem každého roku, aby uvedený dluh a úroky z něho plynoucí splatil? ([E1], str. 50)

Nejprve vypočteme podle známého vzorce roční anuitu, tj.

$$\alpha = D_n \cdot (a_n^{(i)})^{-1},$$

neboli $\alpha = 80\,000 \cdot 0{,}459\,923\,7.$

Symbol $(a_n^{(i)})$ označuje zásobitele, jeho převrácenou hodnotou je umořovatel. Jeho hodnotu 0,459 923 7 nalezneme v tabulce umořovatelů podle počtu úrokovacích období a úrokové míry. V učebnici je vysvětlen také postup výpočtu zásobitele pomocí vzorce, tj. bez použití tabulky. Jednoduchým výpočtem dospějeme k výsledku, že občan musí ročně splácet 36 793,90 Kč.

Student ze znalosti předchozích kapitol sestaví přehledný umořovací plán:

Rok	Dluh počátkem roku Kč	Anuita 36 793,90 Kč		Dluh koncem roku Kč
		úrok Kč	úmor Kč	
1	80 000,00	14 400,00	22 393,90	57 606,10
2	57 606,10	10 369,10	26 424,80	31 181,30
3	31 181,30	5 612,63	31 181,27	0,03

10 Početní technika kalkulace

Poslední, desátá kapitola je zaměřena na praktické potřeby podnikatelů, neboť jsou v ní vysvětlovány různé úlohy z podnikatelské praxe, výhody a nevýhody při různých finančních nabídkách a transakcích. Problematika rozvíjí logické podnikatelské uvažování, seznamuje s výpočetními algoritmy a vývojovými diagramy pro:

- nákupní kalkulace;
- prodejní kalkulace;
- výrobní kalkulace.

Ilustrujme obsah kapitoly jedním příkladem:

Výrobce lyží má možnosti prodávat výrobky takto:

– *dodat 400 párů lyží velkoobchodu po Kč 1 620,– za pár, zaplatit dopravné a pojistné do velkoobchodního skladu Kč 13 800,–;*

– *prodat 400 párů lyží drobným prodejcům po Kč 1 560,– s odběrem v odbytovém skladu výrobce lyží;*

– *vyvézt 400 párů lyží do SRN při ceně DEM 90,– za pár lyží (kurs DEM = Kč 18,40), zaplatit dopravné a pojistné do skladu odběratele v SRN Kč 64 800,–.*

([E1], str. 59, skutečná prodejní cena jednoho páru lyží: velkoobchod – 1 585,50 Kč; drobní prodejci – 1 560,– Kč; SRN – 1 494,– Kč)

Hodnocení učebnice

Tato učebnice je napsána tak, aby všem studentům umožnila pohled do světa finanční matematiky, tedy i těm, kteří dosud tu možnost neměli a znali „cosi“, co zbylo po redukci na jednoduché a složené úročení jednoho obnosu v kapitolách o posloupnostech a řadách. Student dostává možnost zamyslet se nad nabídkami a myšlením finančních ústavů a může zvažovat všechna pro a proti při výběru jejich produktů, kterých stále přibývá. Získává totiž nástroj, který mu umožní se mezi nimi orientovat.

Příklady uvedené v učebnici, řešené i na procvičení, jsou po obsahové stránce praktické, matematicky nejsou příliš náročné, textově jsou stručné a jasné. Nutí studenta přemýšlet a hodnotit situaci při práci s financemi.

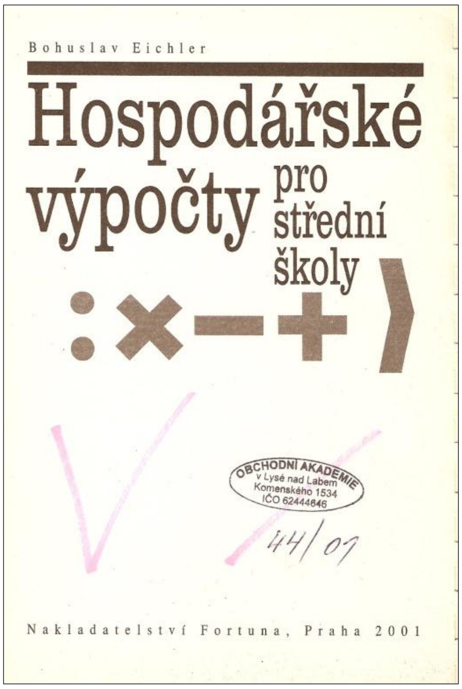
Učebnici z vlastní pedagogické zkušenosti hodnotím kladně, neboť podle mého názoru je přehledným a dobře napsaným úvodem do finanční matematiky. Ačkoli je poměrně stručná, tematicky pokrývá širokou problematiku finanční matematiky. Objemově je únosná, což jsem jako učitel velmi ocenil, neboť osnovy „klasické“ matematiky jsou velmi nabité. V současné době na většině středních škol neexistuje samostatný předmět finanční matematika. Studenti se této problematice mohou hlouběji věnovat, jak jsem již zmiňoval, jen na volitelných seminářích, ale i v nich je pozornost převážně zaměřena na přípravu k maturitní a přijímací zkoušce. Učitel je časově velmi svázán a navíc velké procento učitelů považuje finanční matematiku za aplikaci matematiky, kterou se není třeba speciálně zabývat. V globálu to tedy znamená, že stále velké procento středoškolských studentů neabsolvuje ani základní „kurs“ finanční aritmetiky během svého středoškolského studia. Pro vyvrácení názoru o nedůležitosti tohoto „kursu“ je třeba ještě vykonat mnoho. Jednou z cest by mohlo být vypisování seminářů pro učitele v rámci jejich dalšího vzdělávání.

Bohuslav Eichler: ***Hospodářské výpočty pro střední školy,***

1. vydání, Fortuna, Praha, 2001, 120 stran.

Druhá učebnice Bohuslava Eichlera je určena pro výuku hospodářských výpočtů, tj. samostatného předmětu na středních odborných školách a dne 3. 5. 2001 ji schválilo Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR pod č. j. : 16 745/2001-23 k zařazení do seznamu učebnic pro tento typ škol.

Finanční matematice je věnována pouze šestá kapitola nazvaná *Úrokový počet* (rozsah 31 stran).



Kapitola je rozdělena na následující podkapitoly:

6.1 Základní pojmy a vztahy úrokového počtu;
6.2 Výpočet úroku při jednoduchém úrokování;
6.3 Výpočet úroku z úrokových součinů dělením úrokovým dělitelem;
6.4 Výpočet společného úroku z několika jistin;
6.5 Další úlohy jednoduchého úrokového počtu (Výpočet původní jistiny, Výpočet úrokové míry);
6.6 Výpočty při zvětšené jistině;
6.7 Výpočty úroků na účtech v bankách;
6.8 Srovnání jednoduchého a složeného úrokování.

Učební text dává jen velmi povrchní pohled do světa financí a rozhodně není dostačující. Ve srovnání s *Úvodem do finanční matematiky* [E1] bychom mohli tuto kapitolu pojmenovat *Úvod k úvodu do finanční matematiky*.

Uveďme dva typické příklady, abychom ukázali témata probíraná v učebním textu:

Příklad 1:

Věřitel přijal Kč 430 666,67 jako splátku půjčky po 345 dnech a úroky ve výši 8 % p. a. Jak velká byla půjčka a jak velký byl úrok? ([E2], str. 109, půjčka 400 000,– Kč, úrok 30 666,67 Kč)

Příklad 2:

Podnikatel si půjčil 1. 1. 2001 na dobu pěti let Kč 2 000 000,– při úroku 9 % ročně. Úvěr i úroky bude splácet po pěti letech. Kolik korun bude platit? ([E2], str. 108, splátka 3 077 247,90 Kč)

Hodnocení učebnice

Cílem učebnice není jen finanční matematika, ale jsou to především hospodářské výpočty, které patří do obchodní, podnikatelské i manažerské praxe a rozhodují o dalším vývoji firmy, zakázky apod.

Učebnice je určena pro žáky středních odborných škol různého zaměření, a proto nemůže být jednostranně zaměřena. Autor také nemůže předpokládat matematickou úroveň studentů gymnázií či obchodních akademií. Jeho hlavní snahou je zmechanizovat některé již dříve (ze základní školy) známé početní postupy (např. trojčlenka, rozdělovací počet, směšovací počet), které procvičuje v prvních čtyřech kapitolách. Důraz klade na dovednost žáků použít tyto postupy v praxi, čemuž odpovídá struktura úloh. Pak následuje rozsáhlá pátá kapitola věnovaná procentovému počtu, kde jsou od základů vyložena všechna pravidla pro práci s procenty. Na tuto kapitolu bezprostředně navazuje kapitola vysvětlující základy úrokového počtu. Její rozsah i obsah je vhodný právě jen pro výklad jednoduchého a složeného úročení. Studenti se s finanční matematikou seznámí prostřednictvím jednoduchých řešených a neřešených příkladů. Kladem je, že kapitola umožňuje vhled do finanční matematiky poměrně velké skupině žáků odborných škol a podporuje tedy obrození této tématiky.

Jan Mlčoch: *Ekonomika pro střední školy,*
5. díl: Bankovnictví a pojišťovnictví. Daně a cla,
1. vydání, Fortuna, Praha, 1992, 54 stran.

Na některých odborných školách (např. integrované střední školy obchodního zaměření, podnikatelské střední školy) a zejména na obchodních akademiích existuje samostatný povinný nebo volitelný předmět ekonomika. Jeho úkolem je seznámit žáka se základními ekonomickými pojmy, s cíli a formami podnikání, s evidencí zboží, zásob a financí, platebním stykem, s jednoduchým účetnictvím, marketingem, managementem a také s bankovnictvím, pojišťovnictvím, daněmi a clem.

Téma bankovnictví a pojišťovnictví zahrnuje vztah podnikatele a banky, podnikatele a pojišťovny a rozhodování o investicích.

Řadu učebnic ekonomiky autorů Zdeňka Novotného (1. díl: *Základní ekonomické pojmy*; 2. díl: *Cíle a formy podnikání*; 3. díl: *Prvotní evidence a platební styk. Jednoduché účetnictví*), Jana Trunečka (4. díl: *Marketing a management*) a Jana Mlčocha (5. díl: *Bankovnictví a pojišťovnictví. Daně a cla*) v letech 1992 a 1993 schválilo Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy České republiky k zařazení do seznamu učebnic pro střední školy.

řada je zaměřena na přípravu budoucích úředníků či podnikatelů. Jednotlivé kapitoly seznamují studenta s nejrůznějšími aspekty podnikání. Struktura, obsah i výklad je podřízen praktickým potřebám budoucího podnikatele.

Podíváme se podrobněji pouze na pátý díl sepsaný Janem Mlčochem, který stručně analyzuje vztahy podnikatel – banka – investice.

Obsah 5. dílu

5 Bankovnictví a pojišťovnictví. Daně a cla;

5.1 Bankovnictví a pojišťovnictví;

5.1.1 Podnikatel a banka;

5.1.2 Rozhodování o investicích;

5.1.3 Podnikatel a pojišťovna;

5.2 Daně a cla;

5.2.1 Daňový systém;

5.2.2 Cla a mezinárodní obchod;

List řešení úloh.

Jak je z výše uvedeného obsahu patrné, pátý díl obsahuje dvě základní kapitoly. Za každou kapitolou autor uvádí přehledný seznam základního učiva a vodítko pro další studium, které pomáhá žákovi při opakování látky. Rozboru podrobíme jen první kapitolu *Bankovnictví a pojišťovnictví*, neboť obsahuje učivo, které patří do finanční matematiky.

V této kapitole je 12 řešených příkladů a 10 neřešených úkolů. Řešené úkoly obsahují podrobný návod a komentář postupu řešení.

Ukažme vše na příkladu:

Příklad výpočtu anuit při spotřebě uložené hodnoty

Na vkladní knížce s úrokovou sazbou 10 % ročně máme uloženo 100 Kčs (složité úrokování). Chceme tuto částku během 5 let vybrat tak, že každý rok vybereme stejnou částku. Jaká je její velikost?

Řešení: Dosadíme do vzorce pro výpočet anuity ze současné hodnoty:

$$s_u = 0{,}1,\ r = 1 + 0{,}1 = 1{,}1,\ n = 5$$

$$a_s = \frac{r^n \cdot s_u}{r^n - 1} = \frac{1{,}1^5 \cdot 0{,}1}{1{,}1^5 - 1} = \frac{1{,}610\,51 \cdot 0{,}1}{1{,}610\,51 - 1} = 0{,}263\,79$$

Výsledným anuitním koeficientem vynásobíme kapitál, který máme k dispozici:

$$100 \cdot 0{,}26379 = 26{,}38$$

Ročně si za uvedených podmínek můžeme vybrat vždy 26,38 Kčs. ([M5], str. 15)

Cílem autora je ukázat, jak se kapitál zvyšuje o úrok z minulého roku a klesá o pravidelně vypočtenou částku 26,38 Kčs. Vše shrne do tabulky.

Stav na vkladní knížce se postupně vyvíjí takto (údaje v Kčs):

	Počátek	*Výběr 1. ledna*	*Zůstatek*	*Roční úrok*	*Konec*
1. rok	*100,00*	–	*100,00*	*10,00*	*110,00*
2. rok	*110,00*	*26,38*	*83,62*	*8,36*	*91,98*
3. rok	*91,98*	*26,38*	*65,60*	*6,56*	*72,16*
4. rok	*72,16*	*26,38*	*45,78*	*4,58*	*50,36*
5. rok	*50,36*	*26,38*	*23,98*	*2,40*	*26,38*
6. rok	*26,38*	*26,38*	–	–	–

([M5], str. 16)

Učebnice vyšla v roce 1992 v Československu, proto byla použita zkratka měny Kčs, tj. korun československých.

V tabulce jsou kromě výsledku údaje o postupném vývoji disponibilního kapitálu. Abychom porozuměli jednotlivým hodnotám, je třeba se zaměřit na vlastní postup výpočtu hodnot jednotlivých buněk, což můžeme shrnout do tří kroků, tedy

1. *Počátek – Výběr = Zůstatek*;
2. *Zůstatek · Úroková míra = Roční úrok*;
3. *Zůstatek + Roční úrok = Konec*, což je *Počátek* pro následující rok.

Výše hodnot a zanedbání daně z úroků podporuje tento autorův cíl.

Základní charakteristika jednotlivých podkapitol

5.1.1 Podnikatel a banka

V této podkapitole se student seznámí s bankovní soustavou, rolí peněz a zejména vztahem banka a klient. Je zde charakteristika základních bankovních služeb (vkladní knížky, účty, úvěrová činnost, směnárenská činnost, operace s cennými papíry atd.). Autor nejprve vysvětlí pojem úrok a úroková sazba, pak uvede jednoduchou úlohu na výpočet úroků a úlohu na porovnání růstu hodnoty kapitálu při jednoduchém a složeném (zde pojem složitém) úrokování. V komentáři řešení úlohy autor využívá také názorný grafický popis.

V dalších příkladech počítá budoucí kapitál a vysvětluje výpočet pravidelných ročních plateb – anuit. Vzorce uvádí v konečném tvaru bez odvození. Spojitost vzorců s posloupnostmi je zmíněna jen v komentáři řešené úlohy.

Příklad pro ilustraci náročnosti:

Jaké budou celkové úrokové náklady při úvěru 100 Kčs spláceném v pravidelných pololetních splátkách 4 roky při roční úrokové sazbě 10 %? ([M5], str. 18)

Při řešení se použije hodnota 22,5 % nalezená v tabulce souhrnných koeficientů (viz níže) a pak se jen vypočítá tato procentová část z hodnoty úvěru, který je nezvykle malý. Nedokážu si představit, že by někdo žádal o úvěr o hodnotě 100 korun.

Tabulka souhrnných koeficientů ([M5], Tab. 3, str. 18):

Úroková sazba	*Doba splácení úvěru v letech*					
% p.a.	*0,5*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
10	*5,00*	*7,50*	*12,50*	*17,50*	***22,50***	*27,50*
11	*5,50*	*7,25*	*13,75*	*19,25*	*24,75*	*30,25*
12	*6,00*	*9,00*	*15,00*	*21,00*	*27,00*	*33,00*
13	*6,50*	*9,75*	*16,25*	*22,75*	*29,25*	*35,75*
14	*7,00*	*10,50*	*17,50*	*24,50*	*31,50*	*38,50*
15	*7,50*	*11,25*	*18,75*	*26,25*	*33,75*	*41,25*

Velkou pomoc studentovi poskytuje tabulka zobrazující vývoj úvěru, která je uvedena v poznámkách k řešení. Úvěr je splacen osmi pololetními splátkami ve výši 12,50 Kčs + úrokové náklady. V konečné sumarizaci úrokových nákladů je pak částka 22,50 Kčs, kterou jsme si již předem vypočítali pomocí hodnoty úvěru a souhrnného koeficientu a nyní ji máme ověřenou z postupného vývoje úvěru.

5.1.2 Rozhodování o investicích

Ve druhé podkapitole se student seznámí se základními metodami investování. Vyloženy jsou všechny základní priority investora: náklady, výnosnost, doba návratnosti a peněžní toky.

Uveďme jeden konkrétní příklad:

Vypočtěte dobu návratnosti úvěru 100 000 tis. Kčs za těchto podmínek:

konstantní tržby		*100 000 tis. Kčs/rok*
konstantní náklady		*75 000 tis. Kčs/rok*
úroková sazba		*12 % ročně*
daň ze zisku		*–*
odpisy	*1. rok*	*3 400 tis. Kč*
	dále	*6 900 tis. Kčs*

([M5], str. 26)

Řešení je pro zvýšení přehlednosti zapsáno v názorné tabulce:

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6 a dále*
Tržby	*100 000*	*100 000*	*100 000*	*100 000*	*100 000*	*100 000*
Náklady	*75 000*	*75 000*	*75 000*	*75 000*	*75 000*	*75 000*
Hrubý zisk	*25 000*	*25 000*	*25 000*	*25 000*	*25 000*	*25 000*
Úroky	*12 000*	*10 032*	*7 408*	*4 469*	*1 177*	*–*
Zisk	*13 000*	*14 968*	*17 592*	*20 531*	*23 823*	*25 000*
Daň	*–*	*–*	*–*	*–*	*–*	*–*
Zisk po zdanění	*13 000*	*14 968*	*17 592*	*20 531*	*23 823*	*25 000*
Odpisy	*3 400*	*6 900*	*6 900*	*6 900*	*6 900*	*6 900*
Podnikový efekt	*16 400*	*21 868*	*24 492*	*27 431*	*30 723*	*31 900*
Splátky úvěru	*16 400*	*21 868*	*24 492*	*27 431*	*9 809*	*–*
Zůstatek úvěru	*83 600*	*61 732*	*37 240*	*9 809*	*–*	*–*
Volné zdroje	*–*	*–*	*–*	*–*	*20 914*	*31 900*

([M5], Tab. 4, str. 26)

V příkladu se počítá umořování dluhu nestejnými anuitami, kdy se na splácení úvěru použije kompletní podnikový efekt. Student se naučí, že tímto způsobem se dluh umoří v nejkratší možné době. Současně se v komentáři dozví, že při plánování takovéhoto splácení je nutné mít vše zahrnuté ve smlouvě.

Hodnota úroku se vypočítává jako 12 % ze zůstatku úvěru v minulém roce. Tedy každá splátka je až na konci roku, i v případě pátého roku, i když by byl podnik schopen půjčku splatit dříve.

Celková doba splácení, tj. doba návratnosti úvěru, se zde počítá pro pátý rok klasickou úměrou. Tedy doba návratnosti jsou 4 roky a taková část pátého, která je rovna podílu splátky úvěru a podnikového efektu (v uvedeném příkladu 0,32).

5.1.3 Podnikatel a pojišťovna

V poslední podkapitole se autor věnuje pojišťovnictví a jeho významu pro podnikatele. Zdůrazňuje především podnikatelská rizika, kterým se podnikatel může částečně bránit pojištěním.

Student se seznámí s úvodem do pojistné matematiky, naučí se počítat základní pojistné sazby a sazby pojistné prémie, aby dosáhl optimálního výnosu.

Principy pojistné matematiky jsou pro studenta novou aplikací dovedností získaných ve finanční matematice. Vyčíslení míry rizika pojišťovnou na základě statistických údajů má podobu spolehlivé předpovědi, která je založena na dlouhodobých zkušenostech. Tato předpověď slouží k ochraně pojišťovny i podnikatele. Ochranou je míněna ochrana před různými riziky (např. podnikatelskými, věcně technickými, obchodně ekonomickými). Mechanismus ochrany proti rizikům rizika omezuje, rozvrhuje, přesouvá, přenáší, kompenzuje, neutralizuje a dělí. Vše závisí na typu existujících rizik, které v některých případech podnikatel ovlivnit může, ale v jiných nikoli.

Pracuje se s pojmy *zásobitel* a *střadatel*, které jsou známé z finanční matematiky probírané v první části páté kapitoly.

Příklad na ilustraci:

Roční pojistné hmotného majetku je 500 Kčs. Protože jsme dosáhli mimořádného zisku, máme zájem toto pojistné zaplatit jednorázově na dobu 10 let. Kolik bude činit jednorázově zaplacené pojistné (r = 1,08)? Výsledky zaokrouhlete na celé Kčs.

Řešení:

Dosadíme do vzorce pro výpočet zásobitele pro n = 10

$$\frac{1{,}08^{10}-1}{1{,}08^{10}\cdot 0{,}08} = 6{,}710\,08.$$

Vynásobíme roční platbou pojistného

$$500 \cdot 6{,}71008 = 3\ 355\ \text{Kč}.$$

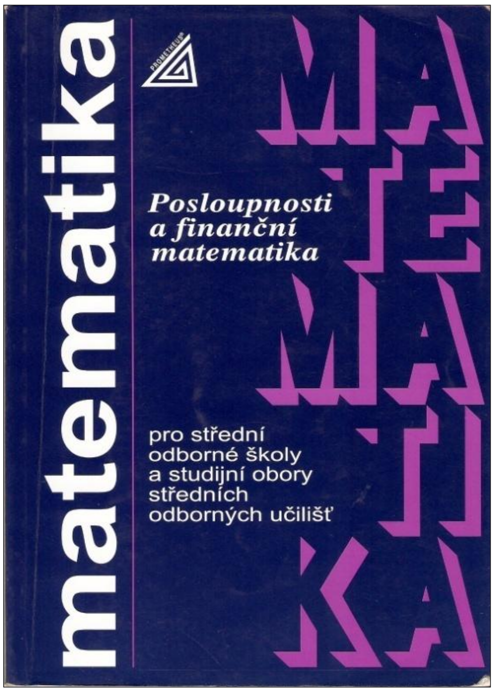
Jednorázově zaplatíme 3 355 Kčs. ([M5], str. 35)

Porovnání částky 3 355 Kčs již není následně porovnáno s deseti splátkami po 500 Kčs. Tím může být celý efekt snížen. Při výpočtu používáme jen známé vzorce z dřívějších kapitol věnovaných finanční matematice.

Hodnocení učebnice

Tato série učebnic představuje cenného rádce budoucího podnikatele. Znalost finanční matematiky je pro něho nezbytností, ale není jediným tématem, které musí zvládnout. Proto rozsah probírané problematiky finanční matematiky, který je obsahem jen části pátého dílu, není vyčerpávající. Myslím si, že může dobře posloužit jako základní odrazový můstek k dalšímu samostudiu, ale není naprosto postačující k úplnému pochopení celé šíře finanční matematiky, což však nebylo účelem této série učebnic.

Oldřich Odvárko: *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť – Posloupnosti a finanční matematika*, 1. vydání, Prometheus, Praha, 2002, 124 stran.



Tato učebnice autora, který se dlouhodobě zabývá finanční matematikou, je věnována posloupnostem a patří do řady učebnic pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť. Finanční matematika je obsažena v jedné čtvrtině jako aplikace posloupností. Učebnici schválilo MŠMT ČR č. j. 17024/02-23 dne 21. 5. 2002 k zařazení do seznamu učebnic pro střední školy. Pokrývá jedno ze základních témat středoškolské matematiky, se kterým se studenti setkávají u maturity nebo u přijímacích zkoušek na vysoké školy. Pro nás je cenná tím, že zdůrazňuje výše zmíněnou aplikaci posloupností.

Obsah učebnice

1. Posloupnosti a jejich vlastnosti (14 stran);
2. Aritmetické a geometrické posloupnosti (20 stran);
3. Posloupnosti a finanční matematika (45 stran);
4. Limity posloupností a nekonečné řady (28 stran);

Historická poznámka; Výsledky úloh; Rejstřík.

K výkladu základů finanční matematiky se autor dostává po důkladné přípravě studenta na práci s posloupnostmi, jak aritmetickými (potřebné při jednoduchém úročení), tak geometrickými (nutné při složeném úročení).

Třetí kapitola věnující se finanční matematice je nejrozsáhlejší kapitolou učebnice, čímž jasně naznačuje hlavní zaměření učebnice, tj. jedno z hlavních praktických využití posloupností. Ve všech kapitolách autor svědomitě graficky rozlišuje základní a rozšiřující učivo (postranní čára tvořená trojúhelníčky). Také náročnější úlohy viditelně označil hvězdičkou.

Třetí kapitola má následující strukturu:

- 3.1 Úroková míra a úrok;
- 3.2 Jednoduché úročení;
- 3.3 Úroková doba;
- 3.4 Složené úročení;
- 3.5 Úrokovací období;
- 3.6 Spoření;
- 3.7 Splácení dluhů.

Autor nabízí studentovi přehled základních objektů a operací s nimi, kterými se zabývá finanční matematika (tj. vklad, spoření, úvěr, splácení) a dává mu nástroj ke kontrolním či plánovacím výpočtům finančních operací. Finanční matematice je věnováno 45 stran, což jasně hovoří o důrazu, který autor této aplikaci posloupností přikládá.

Struktura výkladu v jednotlivých podkapitolách třetí kapitoly studenta vede od definic přes vzorce a jejich odvození k řešení konkrétních úloh. V řešených příkladech je každý důležitý krok popsán a věřím, že většina středoškolských studentů by zvládla tuto látku s touto učebnicí i formou samostudia.

Základní charakteristiky jednotlivých podkapitol

V první podkapitole *Úroková míra a úrok* jsou definice pojmů: úrok, úroková míra, depozitní certifikát, doba splatnosti a zdaňovací koeficient. Autor předpokládá znalost práce s procenty a uvádí jednoduché úlohy na procvičení. Jeho cílem je, aby si každý student v případě problémů s těmito úlohami zopakoval základní pravidla pro počítání s procenty. Jejich neznalost by měla v dalších podkapitolách vážnější charakter.

Ukažme typický příklad:

Pan Koňák uložil do banky na jeden rok 4 800 Kč s úrokovou mírou 3,8 %. Banka zúročila vklad v den jeho splatnosti; daň z úroku je 15 %. Vypočítejte úrok před zdaněním, úrok po zdanění a celkovou částku, kterou pan Koňák obdrží. ([O3], str. 45, výsledek: 182,40 Kč, 155 Kč, 4 955 Kč)

Ve druhé podkapitole *Jednoduché úročení* je uvedena definice tohoto typu úročení a jeho vazba na aritmetickou posloupnost. Autor zavádí vzorec až po vyřešení vzorového příkladu, kterým vtahuje studenta do problematiky.

Autor použil tento příklad:

Pan Král půjčil paní Roubalové 150 000 Kč na čtyři roky. Každý rok bude požadovat jako úrok 10 % z poskytnuté půjčky. Půjčený kapitál spolu s úroky splatí paní Roubalová najednou, až po čtyřech letech. Kolik korun dostane pan Král celkem?

Řešení: půjčený kapitál ... 150 000 Kč

dluh po 1. roce ... 150 000 Kč + 0,1 · 150 000 Kč

dluh po 2. roce ... 150 000 Kč + 0,1 · 150 000 Kč + 0,1 · 150 000 Kč =

= 150 000 Kč + 2 · 0,1 · 150 000 Kč

dluh po 3. roce ... 150 000 Kč + 3 · 0,1 · 150 000 Kč

dluh po 4. roce ... 150 000 Kč + 4 · 0,1 · 150 000 Kč =

= [*150 000* · (*1* + *4* · *0,1*)] *Kč*

Pan Král obdrží od paní Roubalové celkem 210 000 Kč. ([O3], str. 46)

Autor k úloze neopomene zdůraznit, že pro legální půjčování má pan Král oprávnění a řádně odvádí státu daň z příjmu.

V následujícím příkladě autor pracuje se zdaňováním úroku a zavádí vzorec pro výpočet hodnoty kapitálu se zdaňovacím koeficientem

$$U_n = k \cdot i \cdot n \cdot K_0 \,,$$

$$K_n = K_0 \cdot (1 + k \cdot i \cdot n),$$

kde U_n je úrok, K_n je kapitál po n letech, k je zdaňovací koeficient, i je úroková míra vyjádřená desetinným číslem a K_0 je počáteční kapitál, tedy vklad nebo úvěr.

Ve třetí podkapitole *Úroková doba* je definice této doby a jsou uvedeny různé metody jejího výpočtu. Při řešení příkladů je zvolena jedna z nich – a to obchodní metoda neboli evropský standard (tj. finanční rok má 360 dní a finanční měsíc má 30 dní). Autor navíc zdůrazňuje, že do úrokovací doby se započítává právě jeden ze dnů vkladu a výběru, a volí, že on bude započítávat den výběru či splatnosti.

Náročnost příkladů můžeme posoudit z následující ukázky:

Klient banky uložil 7. 3. na vkladní knížku bez výpovědní lhůty částku 5 000 Kč a 23. 5. částku 7 500 Kč. Obě částky spolu s úroky vybral 14. 7. téhož roku. Po celou dobu byla úroková míra 1,4 %; banka vložený kapitál zúročila při výběru peněz; daň z úroku je 15 %. Kolik korun banka klientovi vyplatila? ([O3], str. 54)

Řešení: Podle daných pravidel můžeme velmi jednoduše vypočítat, že první suma byla na vkladní knížce 127 dní, tj. úrok po zdanění činí 21 Kč, a druhá suma 51 dní, tj. úrok po zdanění činí 12,60 Kč. Z toho plyne, že klientovi banka vyplatila 12 533,60 Kč.

Ve čtvrté podkapitole *Složené úročení* je uvedena definice tohoto typu úročení a je zdůrazněna jeho vazba na geometrickou posloupnost. Autor zavádí vzorec po objasnění motivačního příkladu. Ve výkladu uvádí způsoby zaokrouhlování v bankách na haléře po každém úrokovacím období, což v porovnání s výsledky, které obdrží podle vzorce

$$K_n = K_0 \cdot (1 + k \cdot i)^n,$$

vede k chybám v řádu desetihaléřů. Dále upozorňuje na pracnost a zdlouhavost při oddělených výpočtech po jednotlivých zdaňovacích obdobích a nejednotnost zaokrouhlování v bankách.

Úlohy také nutí studenta porovnávat jednoduché a složené úročení:

Jeden půjčil druhému 10 000 Kč na 10 let s úrokovou mírou 10 %. Úročí se jednou ročně. Zjistěte, kolik druhý splatí po deseti letech prvnímu, jde-li a) o jednoduché úročení, b) o složené úročení.

([O3], str. 45, výsledek: a) 20 000 Kč, b) 25 937,40 Kč)

V páté podkapitole *Úrokovací období* autor zdůrazňuje základní možnosti délky úrokovacího období (roční, pololetní, čtvrtletní, měsíční, týdenní a denní) a uvádí modifikaci vzorce pro složené úročení

$$K_m = K_0 \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot k \cdot i\right)^m,$$

kde t je počet dní tvořících jedno úrokovací období, m je celkový počet úrokovacích období, k je zdaňovací koeficient, i je úroková míra, K_0 je počáteční a K_m je konečný kapitál.

V šesté podkapitole *Spoření* autor představuje první z nejrozšířenějších aplikací finanční matematiky. Rozšiřuje složené úročení, tedy výpočet konkrétního členu geometrické posloupnosti, o práci s více vklady, tedy částečným součtem prvních n členů geometrické posloupnosti s kvocientem q.

Vše je pro studenta srozumitelné po zavedení vzorce:

$$S_m = K \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1}, \text{ kde } q = 1 + \frac{t}{360} \cdot k \cdot i,$$

t je počet dní tvořících jedno úrokovací období, m je celkový počet úrokovacích období, k je zdaňovací koeficient, i je úroková míra, S_m je kapitál dosažený pravidelným spořením stejných částek a K je částka naspořená v jednom úrokovacím období a na konci tohoto úrokovacího období zúročená.

Uveďme jeden z náročnějších příkladů, který je studentovi předložen:
Slečna Malá spoří od začátku roku na počátku každého měsíce 200 Kč. Banka úročí na konci každého kalendářního čtvrtletí, úroková míra je stále 4,4 %; daň z úroku je 15 %. a) Kolik korun bude mít slečna Malá na konci druhého roku? b) Kolik korun z toho činí úrok? ([O3], str. 77, výsledek: a) 4 991 Kč, b) 191 Kč)

V sedmé podkapitole *Splácení dluhů* autor představuje druhou z nejrozšířenějších aplikací finanční matematiky. Rozšiřuje složené úročení o složené úročení dlužné částky a představuje operace při jejím splácení. Opět zdůrazňuje související vlastnosti geometrické posloupnosti a na jejich základě odvozuje vzorec pro splácení dluhu stejnými částkami. Potřebné vyjádření neznámé obsahuje kvocient q, jehož hodnotu spočítá podle výše uvedeného vzorce. Se známou hodnotou kvocientu se zaměřuje na výši splátky. Hodnotu splátky s tak počítá pomocí vzorce

$$s = \frac{D \cdot q^n \cdot (q - 1)}{q^n - 1},$$

kde D je počáteční výše dluhu a q zmiňovaný kvocient.

Na nutnost znalostí operací s algebraickými výrazy student naráží v této učebnici velmi často. Také ve finanční matematice je množství otázek, které nelze

odpovědět jen pomocí jednoduchých výpočtů ze základních vzorců. S řadou takových problémů se setkáváme i v této učebnici, jak dokládá příklad:
Slečna R. si chce půjčit 30 000 Kč s tím, že by měsíčně splácela 2 000 Kč. Kolik měsíců by musela dluh splácet? Předpokládáme, že by úroková míra byla 15 % a úrokovací období 1 měsíc. Slečna R. by začala dluh splácet po jednom měsíci od poskytnutí půjčky. ([O3], str. 85, výsledek: 17 měsíců a poslední splátka bude nižší, a to 1 432 Kč)

Hodnocení učebnice

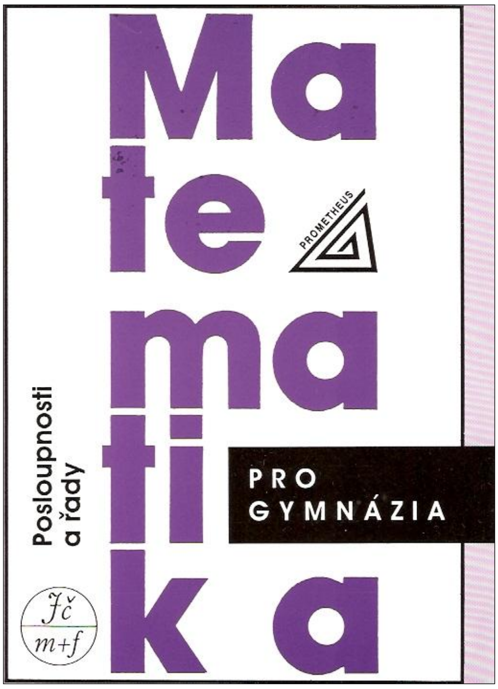
Jedná se o svědomitě sepsané a vyložené základy finanční matematiky, které považuji za „životní" minimum pro existenci v dnešním světě financí.

Struktura jednotlivých kapitol vede od jednoduchého praktického příkladu řešeného krok za krokem, z něhož je odvozen příslušný vzorec, k řešeným složitějším příkladům. Mezi řešenými příklady jsou uvedeny potřebné definice pojmů a v závěru kapitol je dostatečné množství neřešených úloh a obtížnější z nich jsou označeny hvězdičkou. Látka zařazená do rozšiřující je po straně označena trojúhelníky. Text je přehledný a student se v něm může lehce orientovat. Pro vyučujícího, který si připravuje výklad, je spolupráce s takovouto učebnicí velkým ulehčením.

V řešených příkladech je uveden celý postup s komentářem i odvozením vzorce či vyjádření neznámé ze vzorce. Není opomenut žádný krok, v němž by student mohl mít nějaký problém. Úlohy sloužící k procvičení probrané látky jsou textově bohaté, aby si student mohl velmi jasně představit situaci, kterou musí řešit.

Přestože je hlavním úkolem učebnice seznámit studenta s posloupnostmi, jsou zde řešeny nejdůležitější otázky finanční matematiky. To osobně velmi postrádám v učebnici [O2], kterou hodnotím níže. Myslím si, že také studenti gymnázií by měli zvládnout základy finanční matematiky. Tento nedostatek se vyřešil až v roce 2005 vydáním učebnice a sbírky [O1] (viz níže) stejného autora, která je uceleným kurzem základů finanční matematiky.

Oldřich Odvárko: ***Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady,***
1. vydání, Prometheus, Praha, 1995, 128 stran.



V řádných hodinách matematiky je málo volného prostoru pro dokonalé procvičení povinné látky, nemluvě o látce, která jde nad její rámec. Učitel má sice dnes možnost rozvrhnout si časovou dotaci jednotlivých kapitol sám, ale přesto je stále ve velkém časovém presu. A to zejména na gymnáziích, kde kromě maturity je další prioritou příprava na přijímací zkoušky na vysoké školy. Do přijímacích zkoušek z matematiky ještě téma finanční mate-matiky bohužel nepronikl0, což dokládá, že mu ještě není věnována dostatečná pozornost.

Jediné místo, kam je vhodné umístit prvky finanční matematiky, nacházíme u posloupností, neboť jedna uložená jistina se svou hodnotou chová buď jako člen aritmetické nebo geometrické posloupnosti podle toho, jestli se jedná o jednoduché nebo složené úrokování.

V řadě monotematických učebnic matematiky pro gymnázia se jedna učebnice zabývá posloupnostmi a řadami. Právě zde by měl vyučující žáka upozornit na aplikace posloupností ve světě financí a seznámit ho alespoň se základními finančními operacemi (tj. úročení, spoření a umořování (splácení) dluhu).

V podkapitole nazvané *Užití geometrických posloupností* nalezneme čtyři nejjednodušší řešené úlohy z finanční problematiky (jednoduché a složené úrokování). Dále je zde 11 neřešených úloh, z nichž jsou tři označeny symbolem pro složitější úlohy a tři symbolem pro úlohy přesahující rámec povinného učiva, tzn. že při snížených hodinových dotacích matematiky na gymnáziu většina vyučujících během běžných hodin projde se studenty jen elementární příklady. Domnívám se, že i ten nejobtížnější příklad patří mezi základní úlohy finanční matematiky. Uveďme jeho zadání:

Banka poskytla podnikateli počátkem roku 1994 úvěr ve výši 2 500 000 Kč, a to na dobu pěti let s roční úrokovou mírou 15,5 % (úrokovací období je 1 rok). Podnikatel *bude dluh splácet pravidelně ve stejných ročních splátkách, první po jednom roce od poskytnutí úvěru. Vypočítejte výši jedné splátky.* ([O2], str. 67)

Z vlastní zkušenosti vím, že se řešení předložené studentem, který absolvoval základní kurz finanční matematiky (například na hodinách semináře), a studentem bez těchto znalostí bude značně odlišovat, i když by se oba měli dobrat stejného výsledku.

Z textu příkladu vyplývá, že se jedná o klasické umořování dluhu. Student, který nemá žádné znalosti z finanční matematiky, pracuje pouze se znalostmi geometrické posloupnosti.

Úvěr má hodnotu D = 2 500 000 Kč, úroková sazba i = 0,155, úročitel r = 1,155 a a je hledaná roční anuita. Student pravděpodobně použije označení x, y, jak je zvyklý z řešení rovnic a nerovnic. Pokud se budeme držet značení z finanční matematiky, zapíše rovnici:

$$\left(\left(\left((D \cdot 1{,}155 - a) \cdot 1{,}155 - a\right) \cdot 1{,}155 - a\right) \cdot 1{,}155 - a\right) \cdot 1{,}155 - a = 0,$$

kde „$\cdot$ 1,155 – a" je operace prováděná s hodnotou úvěru na konci každého roku – tedy nejprve úročení, poté splátka.

Po jednoduchých algebraických úpravách vidíme jeden ze základních vzorců finanční matematiky:

$$D \cdot 1{,}155^5 - a \cdot 1{,}155^4 - a \cdot 1{,}155^3 - a \cdot 1{,}155^2 - a \cdot 1{,}155 - a = 0,$$
$$D \cdot 1{,}155^5 = a \cdot 1{,}155^4 + a \cdot 1{,}155^3 + a \cdot 1{,}155^2 + a \cdot 1{,}155 + a,$$
$$D \cdot 1{,}155^5 = a \cdot \left(1{,}155^4 + 1{,}155^3 + 1{,}155^2 + 1{,}155 + 1\right),$$

$$D \cdot 1{,}155^5 = a \cdot \frac{1{,}155^5 - 1}{1{,}155 - 1},$$
$$a = D \cdot 1{,}155^5 \cdot \frac{1{,}155 - 1}{1{,}155^5 - 1},$$
$$a = D \cdot 1{,}155^5 \cdot \frac{0{,}155}{1{,}155^5 - 1},$$
$$a = D \cdot \frac{0{,}155}{1 - 1{,}155^{-5}}.$$

Tedy v obecném případě vzorec pro výpočet anuity a:

$$a = D \cdot \frac{i}{1 - r^{-n}}.$$

Student bez znalosti vzorců finanční matematiky dospěje k předposlednímu řádku a vypočítá hodnotu a (a = 754 637 Kč). Při studiu finanční matematiky student tímto způsobem odvodí závěrečný vzorec jen jedenkrát při řešení prvního příkladu a pak jej již zná, standardně používá a po jeho aplikaci má ihned po druhém kroku správný výsledek. Úkolem finanční matematiky není samozřejmě opomíjet, jak byl používaný vzorec odvozen na základě matematických pravidel, ale zmechanizovat řešení daného typu úloh. Prvořadým cílem uvedené úlohy je však prohloubení znalostí o posloupnostech. Domnívám se, že finanční matematika je v tomto případě jen vhodnou ukázkou praktického využití matematických znalostí v běžném životě, po kterém studenti často volají.

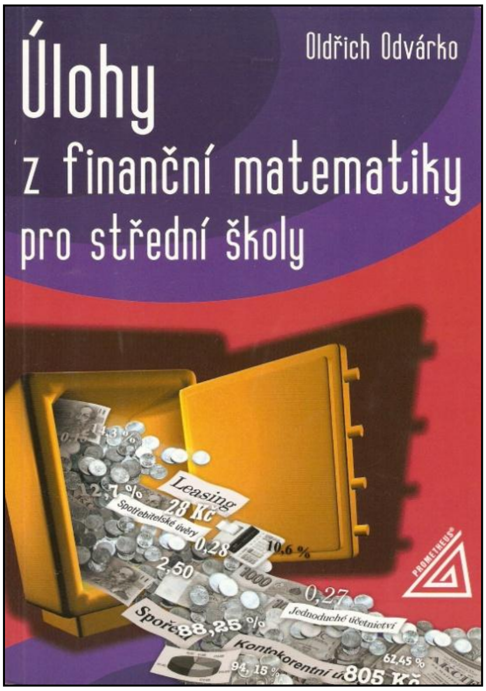
Charakteristika učebnice

Tato učebnice je kvalitní učebnicí matematiky pro gymnázia, ale pro finanční matematiku nemá skoro žádný přínos. Jejím cílem je vyložit a naučit jednu ze zásadních kapitol středoškolské matematiky – posloupnosti a řady. Finanční matematika je pouze jednou z aplikací, kde se využívají vlastnosti elementárních posloupností, a proto není ani příliš zdůrazněna její důležitost. Přesto si myslím, že u zvídavého studenta může i malé množství těchto úloh s finanční tématikou vzbudit zájem o tuto problematiku, o níž slyší dennodenně kolem sebe.

Z hlediska finanční matematiky není důvod pro hlubší rozbor této učebnice. Jak jsem již dříve zmiňoval, problém neexistence vhodné učebnice základů finanční matematiky pro střední školy vyřešila až učebnice a sbírka [O1], kterou analyzuji níže.

Oldřich Odvárko: *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy,* 1. vydání, Prometheus, Praha, 2005, 200 stran.

Tato sbírka úloh vyšla v roce 2005 a ihned mě jako učitele zaujala. Představuje průvodce finančnictvím se zaměřením na žáky středních škol. Jsou v ní definice pojmů, vysvětlení základních myšlenek a řada příkladů. Autor knihy nepředpokládá žádné předchozí znalosti z finanční matematiky, což je nesporným kladem pro studenty i učitele.



Většina studentů středních škol má problém obsáhnout a zvládnout větší objem daného předmětu a teprve maturita je donutí tento problém řešit. Domnívám se, že zopakování a připomenutí dříve probrané látky na vhodném místě učebnice je z didaktického hlediska nezbytností. Právě tato sbírka kombinovaná s učebnicí pečlivě dodržuje výše uvedené pravidlo. Studentovi je v ní postupně znovu předloženo vše od procent až po posloupnosti, vše je vyloženo v teoretické i praktické rovině a vysvětleno na příkladech.

Obsah učebnice

Několik úmluv

1 Začínáme od začátku (37 stran);

1.1 Úroková míra a úrok;

1.2 Daň z úroku;

1.3 Pásmové úročení;

1.4 Standardy;

1.5 Sankce a rizika;

1.6 Podílové listy a akcie;

1.7 Inflace;

2 Jednoduché úročení (33 stran);

2.1 Podstata jednoduchého úročení;

2.2 Jednoduché úročení a aritmetická posloupnost;

2.3 Skonto;

2.4 Diskont a diskontní míra;

2.5 Eskont směnky;

2.6 Kontokorentní účet;

3 Složené úročení (36 stran);

3.1 Podstata složeného úročení;

3.2 Složené úročení a jednoduché úročení;

3.3 Úrokové míry neměnné i pohyblivé;

3.4 Složené úročení a geometrická posloupnost;
3.5 Užití vzorců pro složené úročení;
3.6 Úrokovací období;
4 Úvěry a leasing (36 stran);
4.1 Umořovací plány;
4.2 Anuitní splátky;
4.3 Spotřebitelské úvěry, prodej na splátky;
4.4 Hypoteční úvěry;
4.5 Leasing;
5 Spoření (29 stran);
5.1 Podstata spoření;
5.2 Od jednoduchých případů ke složitějším;
5.3 Jak si naspořit;
5.4 Důchodové spořící programy;
Přehled základních vzorců z finanční matematiky;
Stručně o posloupnostech;
Výsledky cvičení.

Autor rozdělil učebnici do pěti základních částí, jež pokrývají celé základní spektrum finanční matematiky. Jednotlivé kapitoly mají přehlednou strukturu. Začínají definicemi základních pojmů, které student nachází ve zvýrazněných barevných rámečcích, jež umožňují snadnou orientaci v textu, a pokračují výkladem jednotlivých témat finanční matematiky prostřednictvím řešených příkladů doplněných komentáři.

Učebnice obsahuje 48 vzorově řešených úloh s komentářem a 234 neřešených úloh na další procvičení. Jsou pestré, spojené s realitou a potřebami běžného života a je jich dostatečný počet. Celková grafická úprava textu zvyšuje názornost a přehlednost. Poznamenejme, že vzorce použité při výpočtech jsou pečlivě odvozovány a student tak vidí cestu jejich vzniku. Stávají se tak pro něho jasnější a srozumitelnější, než kdyby je autor uvedl bez odvození a komentáře a student by se je měl učit nazpaměť bez hlubšího porozumění.

Autor učebnici uzavírá samostatným oddílem – přehledem všech vzorců, které se v jednotlivých kapitolách vyskytují.

Uveďme pro zajímavost způsob odvození nejdůležitějšího vzorce finanční matematiky – vzorce pro složené úročení – a z něho plynoucí vzorec pro celkový úrok:

*Kapitál K_1 na konci **prvního** úrokovacího období (po zúročení bankou):*

$$K_1 = K_0 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot K_0 = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right).$$

*Kapitál K_2 na konci **druhého** úrokovacího období:*

$$K_2 = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i * \frac{t}{360}\right) + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right) =$$

$$= K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right) \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right) =$$

$$= K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^2.$$

*Kapitál K_3 na konci **třetího** úrokovacího období:*

$$K_3 = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^2 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^2 =$$

$$= K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^2 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right) =$$

$$= K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^3.$$

⇣

⇣

⇣

*Kapitál K_n na konci **n**-tého úrokovacího období:*

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^{n-1} + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^{n-1} =$$

$$= K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right) =$$

$$= K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n.$$

*Celková částka na konci **n**-tého úrokovacího období:*

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n.$$

*Celkový úrok po zdanění na konci **n**-tého úrokovacího období:*

$$U_n = K_n - K_0 = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \tfrac{t}{360}\right)^n - K_0,$$

$$U_n = K_0 \cdot \left[\left(1 + k \cdot i \cdot \tfrac{t}{360}\right)^n - 1\right].$$ ([O1], str. 81–82)

Poznamenejme, že označení jednotlivých veličin, o nichž jsme hovořili již dříve, je stejné: n – počet úrokovacích období, K_0 – počáteční kapitál, K_n – kapitál po n úročeních, i – úroková míra (desetinné číslo), k – zdaňovací koeficient, t – počet dní jednoho úrokovacího období, U_n – úrok po zdanění po n úrokovacích obdobích.

Výklad jednotlivých problémových okruhů finanční matematiky je přehledný, srozumitelný a obsahuje kvalitní komentáře. Text je doplněný tabulkami a grafy, s nimiž se setkáváme v médiích, informačních letácích, reklamách apod.

Základní charakteristika jednotlivých kapitol

Několik úmluv

V úvodu učebnice autor stanovuje základní pravidla, na nichž jsou výpočty v učebnici založeny:

1) používaný standard 30E/360 (tj. evropský standard) – každý měsíc má 30 dnů a každý rok 360 dnů;
2) dosažený úrok je daněný patnácti procenty;
3) úroky z vkladů a úvěrů jsou zaokrouhlovány na haléře, při vyplácení úroků z vkladů na koruny nahoru a při splácení úroků z úvěrů na koruny podle matematických pravidel;
4) do úrokovací doby se nezapočítává den vkladu či půjčení, den splatnosti se započítává.

1 Začínáme od začátku

V této kapitole student najde definice nejdůležitějších pojmů finanční matematiky: úrok, roční úroková míra (sazba), daň z úroku, doba splatnosti, termínovaný vklad (účet), úroková doba, standard 30E/360, 30A/360, ACT/360, ACT/365, vkladní knížka bez a s výpovědní lhůtou, zdaňovací koeficient, podílové listy, podílové fondy, hrubý a čistý výnos, míra výnosu, inflace, míra inflace, nominální úroková míra, reálná úroková míra, reálná hodnota kapitálu. Pak jsou řešeny úlohy, v nichž jsou prakticky využity dříve definované pojmy, čímž student získává názornější přehled o jejich aplikaci a významu.

Kapitola pracuje jen s jednoduchým úročením a student se seznamuje se základními aspekty ukládání peněz. Jsou ukázány a vysvětleny možnosti uložení peněz nejen na termínované účty, ale i vklady do podílových listů a akcií, které sice na jedné straně slibují větší výnosnost, ale na druhé straně mohou klesnout i do „záporných" procent.

Student se v této kapitole setkává s reálným světem financí. Je upozorněn na sankce při nedodržení výpovědních lhůt, na rizika při krachu banky i na vliv inflace na hodnotu finančních prostředků.

Uveďme na ukázku jeden typický příklad z první kapitoly:

Podnikatel Mareš získal od banky na půl roku úvěr ve výši 250 000 Kč s úrokovou mírou 9,9 %. Úvěr splatí jednorázově, v den splatnosti. Kolik korun celkem bance zaplatí? ([O1], str. 26, výsledek: 262 375 Kč)

2 *Jednoduché úročení*

Ve druhé kapitole jsou nejprve definovány nové pojmy: úrokovací období, jednoduché úročení, dluhopis (obligace), skonto, diskont, diskontní míra, směnka, eskont směnky, eskontní provize, kontokorentní účet (kontokorent), kreditní úrok, kreditní úroková míra, debetní úrok, debetní úroková míra, úvěrový rámec.

Student se v úvodu kapitoly seznámí s podstatou jednoduchého úročení, jehož základy objevil již v první kapitole. Autor uvádí řadu názorných příkladů, které studentovi pomáhají orientovat se ve světě financí. Předveďme jeden z jich i s řešením; ukazuje problematiku jednoduchého úročení zcela obecně:

Do banky byl uložen kapitál K_0 s úrokovou mírou i (která je vyjádřena desetinným číslem), zdaňovací koeficient je k. Banka používá standard 30E/360. Úrokovací období je t dní, počet úrokovacích období je n. Úrok se stále počítá z počátečního kapitálu K_0, jde tedy o jednoduché úročení. Určíme celkový úrok po zdanění na konci n-tého úrokovacího období a celkovou částku, na kterou vzroste kapitál K_0 do konce n-tého úrokovacího období, tj. po n úročeních.

Řešení:

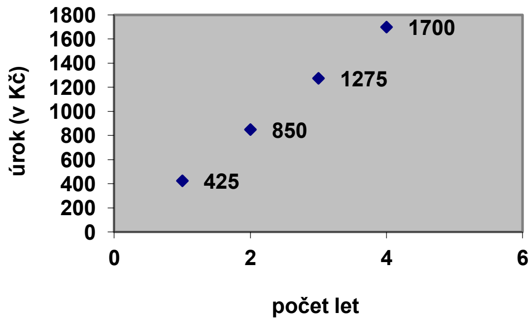
Celkový úrok po zdanění:

$$U_n = k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot K_0 \cdot n.$$

Celková částka:

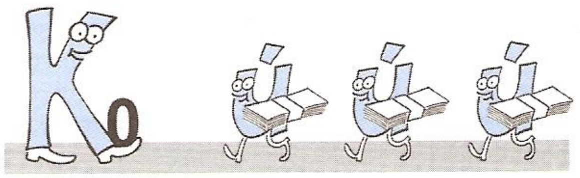
$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot n\right). \text{ ([O1], str. 46)}$$

V této kapitole je student podrobně seznámen nejenom s jednoduchým úročením, ale i s oblastmi jeho využití. Vhled do probírané problematiky je zjednodušen názorným grafickým zpracováním vazby jednoduchého úročení s aritmetickou posloupností.



(Využita data z příkladu 1, [O1], str. 50–52)

Body grafu můžeme proložit přímku, úrok narůstá lineárně. Na následujícím obrázku vidíme, že hodnota úroku je pro každé úrokovací období stejná.



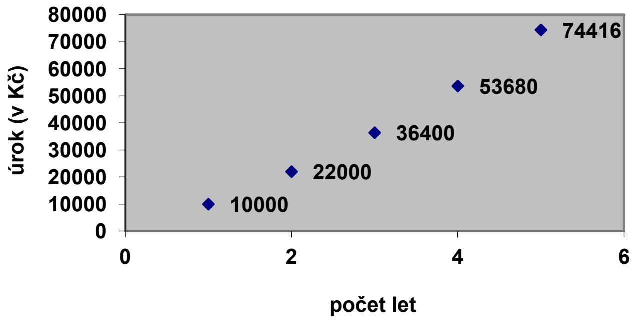
([O1], str. 47)

Na běžných příkladech z praxe jsou ukázány typy slev při dřívějším zaplacení či splacení půjčky. Jsou vysvětleny pojmy diskont a diskontní míra a jejich využití v praxi. Pracuje se se splátkou vyplácenou dlužníkem věřiteli na konci úrokové doby a její úrokovou mírou, o kterou je úvěr na počátku snížen, tj. úrokovou míru banka odečte ihned při poskytnutí úvěru z požadované částky a podnikatel pak po roce splatí požadovanou částku (tj. úroky se platí předem).

Vyloženy jsou také operace s cennými papíry, kdy při nákupu (eskontu) před dnem splatnosti dochází ke slevě z nominální hodnoty, a existence kontokorentního účtu, což je typ běžného účtu, při němž je zvýhodněno poskytování úvěrů. Zavedeny jsou též pojmy kreditní a debetní zůstatek.

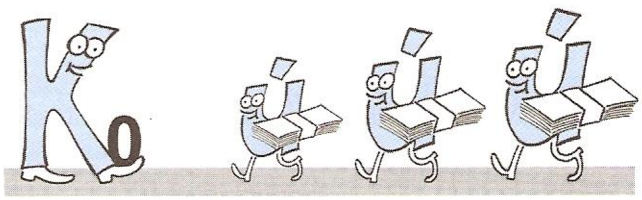
3 *Složené úročení*

Ve třetí kapitole jsou nejprve definovány pojmy: složené úročení, efektivní úroková míra, spojité úročení. Pak je vysvětlena podstata složeného úročení. Autor pracuje s pojmem úrok z úroku a ukazuje jeho uplatnění v praxi. Graficky znázorňuje zásadní rozdíl mezi úročením jednoduchým a složeným a upozorňuje na možnost změny úrokové míry v čase. Aby zjednodušil vhled do popisované problematiky, ukazuje souvislosti mezi složeným úročením a geometrickou posloupností.



(Využita data z příkladu 1, [O1], str. 96–98)

Body grafu můžeme proložit exponenciálu, úrok tedy narůstá exponenciálně. Na obrázku vidíme, že hodnota úroku je pro každé následující úrokovací období větší.



([O1], str. 81)

Autor zde v celé „kráse“ odvozuje zjednodušení postupu při výpočtu cílové částky při složeném úročení, tj. základní vzorec

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n,$$

kde k je zdaňovací koeficient úroku, i je úroková míra, t je počet dnů úrokovacího období, n je počet úrokovacích období a K_0 je vstupní kapitál (odvození viz výše).

Použití vzorce demonstruje na několika příkladech. Pracuje s možnostmi variability délky úrokovacího období a zavádí pojem spojitého úročení, kdy se délka úrokovacího období limitně blíží k nule. Předešlý vzorec se při spojitém úročení mění na tvar

$$K_n = K_0 \cdot e^{kim},$$

kde k je zdaňovací koeficient úroku, i je úroková míra, m je počet roků a e je Eulerovo číslo (e = 2,718 281 828 459 0...; základ přirozených logaritmů).

Uváděné příklady jsou úzce spjaty s praxí a ukazují studentovi možnosti uplatnění znalostí z finanční matematiky, jak dokládá následující příklad.

Klient získal na začátku roku úvěr na tři roky ve výši 100 000 Kč s úrokovou mírou 15 % s tím, že zapůjčený kapitál spolu s úrokem splatí najednou, po třech letech. Banka úročí jednou ročně, vždy na konci roku; na konci prvního roku vypočítá úrok jako 15 % z půjčené částky, na konci druhého a třetího roku je úrok 15 % z částky, která se rovná celkovému dluhu z konce předchozího roku. Vypočítáme, kolik korun bude muset klient na konci třetího roku bance celkem splatit. ([O1], str. 78, výsledek 152 088 Kč)

4 *Úvěry a leasing*

Ve čtvrté kapitole jsou zavedeny pojmy: úmor dluhu, umořovací plán, anuitní splátka (anuita), spotřebitelský úvěr (spotřební úvěr), účelový a neúčelový spotřebitelský úvěr, akontace, hypoteční úvěr, leasing, operativní a finanční leasing, zůstatková hodnota.

Autor dále objasňuje nejdůležitější typy půjček, o něž se v současné době lidé nejčastěji zajímají. Rodiny chtějí stavět, bydlet a berou si hypoteční úvěr, chtějí si vybavit byt a zařizují si spotřebitelské úvěry, chtějí si koupit auto, a proto si berou leasing. Je to tím, že ne vždy mají vlastní prostředky k okamžitému řešení situace.

Tato rozsáhlejší kapitola je rozdělena do pěti podkapitol.

V první podkapitole jsou uvedeny úlohy, v nichž se požaduje sestavení umořovacího plánu s nestejnými splátkami. Studenti se učí na problémech ze života sestavovat umořovací tabulku. Uveďme na ukázku jeden z příkladů s celou tabulkou:

Nestejnými splátkami podnikatel umoří dluh 1 000 000 Kč za tři roky (viz tabulka).

	Splátka v Kč	*Úrok v Kč*	*Úmor v Kč*	*Stav dluhu v Kč*
Počáteční stav				*1 000 000*
Konec 1. roku	*300 000*	*140 000*	*160 000*	*840 000*
Konec 2. roku	*400 000*	*117 600*	*282 400*	*557 600*
Konec 3. roku	*635 664*	*78 064*	*557 600*	*0*

([O1], str. 114)

Tabulce předchází rozpis všech výpočtů hodnot pro jednotlivé buňky. Autor studenta vede krok za krokem. Komentuje dění na účtu na konci každého roku, tj. připsání úroku bankou, splátka podnikatele a stav dluhu na konci roku. Vše pak zapíše do přehledné tabulky, která slouží především ke shrnutí a zobrazení vývoje dluhu.

Ve druhé podkapitole je pozornost věnována anuitním splátkám, tj. výpočtu roční splátky pro umořování dluhu, která má během celého splácení stejnou hodnotu. Studenti po výpočtu anuity sestavují umořovací plán podle výkladu z předešlé podkapitoly.

Třetí podkapitola pojednává o spotřebitelských úvěrech a prodeji na splátky. Autor uvádí zajímavé úlohy z praxe (například splácení dluhu měsíčními anuitami) a rozvíjí tak základní principy z předešlé kapitoly.

V následující podkapitole se student seznámí s účelovými hypotečními úvěry. Dozví se, že účelovým úvěrem může být i spotřebitelský úvěr, pokud je určen k získání konkrétního zboží nebo služeb (např. elektronika, sportovní potřeby, dovolená, studium, svatba). Hlavní pozornost je však věnována tzv. klasickým hypotečním úvěrům, při nichž jsou peníze poskytnuty bankou na financování koupě či rekonstrukce nemovitosti. Veškeré typy úvěrů, které autor považuje za důležité, a jejich vlastnosti jsou objasněny na konkrétních praktických příkladech.

Poslední podkapitola vysvětluje formy pronájmu různých zařízení, tj. leasing. Jedná se o téma velmi aktuální, protože na leasingové společnosti student v budoucnosti jistě narazí. Vyloženy jsou především typy operativního a finančního leasingu. Je objasněna jejich podstata, tj. že při operativním leasingu se vrací pronajatý předmět zpět leasingové společnosti a při finančním leasingu končí převodem vlastnických práv.

5 *Spoření*

V poslední kapitole jsou zavedeny pojmy: spořící účet (vkladový účet, bankovní konto), stavební spoření, důchod (renta), rentový účet (bankovní renta).

Ve čtyřech podkapitolách jsou ukázány možnosti uložení finančních prostředků pro pozdější využití. Jsou vysvětleny klady a zápory různých spořících programů. Na praktických příkladech je doloženo, že vhodné uložení finančních prostředků mírní vliv inflace a navíc prostředky zhodnocuje. Početní algoritmy jsou známé již z předešlých kapitol. Jedná se jen o další důležité využití získaných znalostí z finanční matematiky, jak dokazuje následující příklad.

Pan Mrázek uložil na začátku roku na rentový účet s úrokovou mírou 3,1 % částku 85 000 Kč. Dále už peníze neukládal. Spořící fáze trvá 5 let. Podle smlouvy má výběrová fáze též délku 5 let; důchod je roční, první výběr se uskuteční na konci šestého roku, poslední na konci desátého roku. Úrokovací období je 1 rok. Vypočítejte výši ročního důchodu. ([O1], str. 177, výsledek 20 918 Kč)

Hodnocení učebnice

Tato učebnice poskytuje hlubokou sondu do finanční matematiky. Jasné, stručné a přesné definice základních pojmů napomáhají v lepší orientaci v peněžních problémech, dobrému využití a zhodnocení finančních prostředků. Podle mého názoru se jedná o nejpřehlednější a zároveň nejkomplexnější zavedení nejdůležitějších pojmů finanční matematiky pro studenty středních škol. Základní početní pravidla a metody jsou velmi dobře popsány a vysvětleny a umožní studentům plánovat a kontrolovat jejich vlastní finanční transakce v budoucím životě.

Myslím si, že učebnice byla zamýšlena především pro studenty gymnázií, neboť ostatní typy středních škol mají obvykle pro své předměty, které tuto tématiku obsahují, vlastní učebnice (viz např. [E1] nebo [E2] uvedené výše). Při výuce finanční matematice na gymnáziu však nastává problém, neboť metodické příručky či nové školní vzdělávací programy dávají výuce tohoto tématu poměrně velkou volnost. Záleží jen na vyučujícím matematiky nebo matematického semináře, kolik hodin bude finanční matematice věnovat. Bohužel jsou i tací, kteří nezmíní o této problematice více, než je uvedeno v kapitole učebnice *Posloupnosti a řady* ([O2], viz výše). Každý učitel má ve svém předmětu oblasti oblíbené více a oblasti oblíbené méně. Doufám, že to však neznamená, že si kvalitní učitel dovolí vynechat téma, které ho nebaví. Co se týká finanční matematiky, je situace trochu jiná. Samostatné téma finanční matematiky se strukturou, která shrnuje základní dovednosti, jež by měl student po absolvování střední školy neekonomického zaměření zvládat, není nikde výrazně zviditelněno. Většina současných učitelů matematiky navíc neprošla při svém studiu dostatečnou přípravou na výuku tohoto tématu. Můžeme tedy na jednu stranu být shovívaví a označit opomíjení finanční matematiky za nevědomé. Vzhledem k tomu, že na nás „finanční" problémy hledí z plakátů a novin, vidíme je v televizi a slyšíme v rádiu, lze o tom úspěšně pochybovat. Podle mého názoru by jedním z důležitých bodů dalšího vzdělávání učitelů matematiky měla být právě finanční matematika.

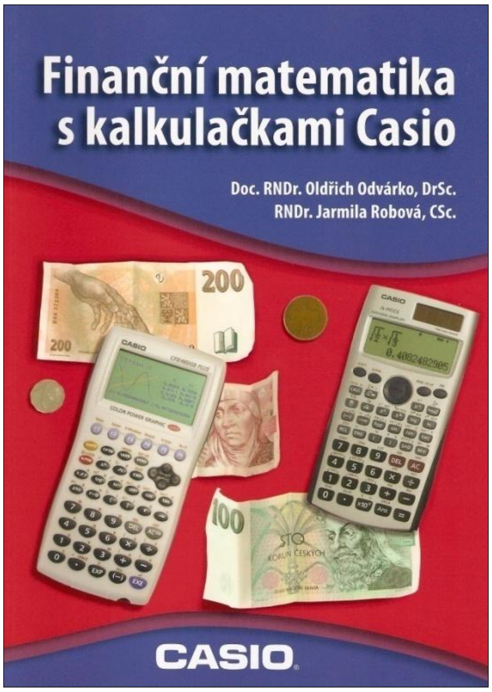
Při výuce matematiky jsem se na střední škole snažil věnovat finanční matematice dostatečný prostor, ale nelze to provést na úkor jiných témat, a to ani v matematickém semináři. Hlavní prioritou je totiž příprava studenta na maturitní zkoušku a přijímací zkoušky na vysoké školy. Když se mi poprvé dostala do rukou tato učebnice ([O1]), viděl jsem její obrovský přínos na cestě za odstraněním handicapu všeobecné neznalosti finanční matematiky. Problém nastal v okamžiku tvorby příprav na vyučování a při vyučování samotném. Důvodem byl především čas. V hodinách, jež jsou vyhrazeny finanční matematice, jsem nemohl obsáhnout celou tuto učebnici. A tak jsem se vrátil k používání učebnice [E1], která je na semináři objemově zvládnutelná. Učebnici [O1] jsem studentům doporučil k samostudiu a při hodinách semináře jsme z ní probírali jen jejich dotazy, které se týkaly zejména úloh, případně jejich modifikací. Definice pojmů finanční matematiky a produktů finančních ústavů byly bez problémů. Tato cesta je však pouze pro studenty svědomité, talentované nebo nadšené pro finanční matematiku. Vzhledem k tomu, že „finance" budou studenty obklopovat celý život, je žádoucí nepodceňovat jejich výuku. Myslím si, že jediná cesta k vyřešení tohoto problému je zavedení samostatného semináře finanční matematiky. Tady však obvykle narazíme na podmínky otevření semináře – tj. minimální počet studentů, maximální počet volených seminářů atd. To tedy znamená, že studenti gymnázia nemají většinou možnost navštěvovat samostatný předmět věnující se finanční matematice. Přitom by se mělo jednat o základnu inteligence, o níž se opírá celá společnost. Jak tento problém vyřešit? Na jedné straně je tu omezený počet volitelných seminářů a financování nepovinných předmětů, na druhé straně je potřeba zvládnout alespoň základy finanční matematiky.

Zatím musíme být vděčni za každou část finanční matematiky, kterou studentům zvládneme časově předat a kterou pochopí a naučí se aplikovat v každodenním životě. Je však stále velké procento lidí, kteří při vyjednávání půjčky či hypotéky ignorují základní pravidla, opomíjejí i zobrazené hodnoty RPSN, což je roční procentní sazba nákladů, kterou je dlužník povinen zaplatit věřiteli z dlužné částky za jeden rok, a nevšímají si dalších parametrů půjček a hypoték. Nezamýšlejí se nad zdrojem financí a často doplácejí na praktiky lichvářů a končí v exekucích. Člověk, který si nedokáže propočítat splacenou částku na základě jednotlivých splátek, jejich počtu, poplatků za vyřízení a vedení úvěru, by neměl o něm ani uvažovat.

Téma finančnictví mělo v hodinách semináře velmi kladný ohlas. Studenti byli po několika vyřešených problémech schopni s přijatelnou přesností odhadnout podstatné veličiny v dalších úlohách, tj. například velikost jednotlivých splátek, velikost celkové sumy, kterou dlužník zaplatí, doba trvání dluhu. To byl také hlavní cíl, jehož jsem chtěl ve svých hodinách dosáhnout. Každý klient banky či jiného finančního ústavu by měl být schopen hrubého odhadu toho, co získá při spoření a co zaplatí při splácení úvěru.

6.2 Učebnice a sbírky pro školy a veřejnost

Oldřich Odvárko, Jarmila Robová: *Finanční matematika s kalkulačkami Casio*, Prometheus, Praha, 1. vydání, 2005, 100 stran.



Tento učební text vyšel v roce 2005 jako další pomůcka pro výuku finanční matematiky. Autoři publikaci sestavili jako praktický manuál základů finanční matematiky s ohledem na využití kalkulaček. Důraz kladli na chronologii a popis jednotlivých kroků při řešení úloh tak, aby text mohl být využíván také při samostudiu.

Obsah publikace

1 Seznámení s kalkulačkami (7 stran);
2 Marže (5 stran);
3 Úrok a úroková míra (7 stran);
4 Standardy (10 stran);
5 Jednoduché úročení (11 stran);
6 Složené úročení (13 stran);
7 Efektivní úroková míra (5 stran);
8 Spoření (11 stran);
9 Úvěry (15 stran);
10 Oceňování investic (9 stran).

Publikace je rozdělena do deseti kapitol, každá má jasný cíl, s čím studenta seznámí a co procvičí. Kromě první má každá následující strukturu:

- definice pojmů a zavedení vzorců;
- řešený příklad a neřešená úloha.

Charakteristika jednotlivých kapitol

1 *Seznámení s kalkulačkami*

V této kapitole se student podrobněji seznámí s kalkulačkami Casio FX-991ES a Casio CFX-9850GB PLUS. Kalkulačka Casio FX-991ES má dvouřádkový negrafický display, v současné době s ní nebo typově podobnou pracuje většina studentů. Obvykle se ve třídě objeví jeden až dva studenti, v budoucnu to bude jistě více, kteří pracují s grafickým typem kalkulaček. Tohoto typu je druhá zmiňovaná kalkulačka Casio CFX-9850GB PLUS. Tato kalkulačka pracuje s ikonovým menu, má funkční klávesy, které známe z klávesnice počítače a je programovatelná.

Kapitola 2 až 10

Jak už jsem se zmínil, od druhé kapitoly text začíná stručnou teorií a přehledem vzorců, pak následuje vzorově řešený a komentovaný příklad. Řešení každého příkladu se skládá ze tří částí:

- standardní matematické řešení;
- výpočet na dvouřádkové kalkulačce;
- výpočet na grafické kalkulačce.

Postup řešení je velmi podrobně rozpracován. Práce s kalkulačkami, zejména s grafickou, je popisována krok za krokem. Pro použití grafické kalkulačky jsou uvedeny poznámky, v nichž student najde další cenné rady (návrat do menu, přepnutí režimu, popis a aktivace příkazů, kombinace kláves ...).

Po vzorově řešeném příkladu následuje vždy jedna neřešená úloha; celkem je uvedeno 35 řešených příkladů a 35 neřešených úloh.

Kapitoly 3, 4, 5, 6, 8 a 9 obsahují ty části finanční matematiky, které jsem již podrobně charakterizoval při rozboru učebnice [O1].

Samostatnou charakteristiku uvedu tedy jen u kapitol 2, 7 a 10.

2 *Marže*

V této kapitole student pracuje s pojmem marže, který je spjat s obchodováním, a udává procentuální rozdíl mezi nákupní a prodejní cenou. Základem tohoto procentového počtu je prodejní cena, která zajímá prodejce i zákazníka. Student zde pozná problematiku cesty zboží od výrobce přes prodejce až k zákazníkovi a nahlédne pod pokličku stanovování cen.

Předveďme styl zavedení pojmu:

MARŽE *M je dána vztahem*

$$M = \frac{P - N}{N} \cdot 100\%,$$

kde P je prodejní cena zboží a N je nákupní cena zboží. Jde tedy o určitou charakteristiku postihující rozdíl mezi cenou prodejní a cenou pořizovací. ([OR], str. 13)

Uveďme pro zajímavost jeden příklad:

Nákupní cena jednoho kusu zboží činí 235 Kč, jeho prodejní cena je 399 Kč. Jak vysoká je marže prodejce? ([OR], str. 13, výsledek 41,1%)

7 Efektivní úroková míra

V této kapitole této učebnice je rozebírán rozdíl mezi nominální a efektivní úrokovou mírou. Podstata spočívá v tom, že nominální úroková míra může mít jiné úrokovací období než jeden rok. Aby byl člověk schopen porovnávat více finančních produktů, je nutné umět přepočítávat nominální úrokové míry na úrokové míry pro úrokovací období jeden rok, tj. efektivní úrokové míry.

Problematiku názorně osvětluje následující ilustrační příklad:

Paní Hlavatá uložila 57 000 Kč na termínovaný vklad na 1 rok. Banka úročí tento vklad s úrokovou mírou 2,40 %, úrokovací období je jeden měsíc, jde o složené úročení. Určete úrokovou míru vkladní knížky s ročním úrokovacím obdobím, na které by paní Hlavatá při vkladu 57 000 Kč získala za jeden rok stejný úrok. ([OR], str. 61, výsledek 2,43 %)

10 Oceňování investic

V závěrečné kapitole autoři operují s výdaji na různé projekty a transakce. Ukazují, jak posuzovat výhodnost investice, nebo jak se rozhodovat při jejich výběru. Pracují s pojmy čisté budoucí a čisté současné hodnoty a vnitřní míry výnosnosti.

Pomocí konkrétních příkladů dokládají, že se jedná o oblast finanční matematiky, která velkým i malým firmám umožňuje posuzovat návratnost a zisk z různých nákupů nemovitostí a jejich zařízení či dlouhodobých investic do cenných papírů. Pomoc zde naleznou také jednotlivci a to zejména ti, kteří jednorázově získali větší finanční obnos (dědictví, výhra apod.).

Pro každého podnikatele i jednotlivce je dobré umět si při investici vypočítat zisk a míru zisku v závislosti na počátečních a průběžných výdajích a na plánovaných příjmech. Na straně výdajů jsou obvykle nákupy strojů, budov, cenných papírů apod., na straně příjmů je prodej vyrobeného zboží, budov, cenných papírů apod.

Ukažme jeden příklad a vyřešme jej.

Stavební firma hodlá investovat do výstavby hotelu. Podle investičního projektu je třeba začátkem roku zakoupit pozemek za 5 milionů Kč a zároveň investovat 10 milionů do zahájení výstavby. Částky ve výši 10 milionů Kč bude nutno ještě investovat na konci prvního a druhého roku výstavby hotelu. Po třech letech bude možno dokončený hotel prodat za 40 milionů Kč. Rozhodněte, zda je tento investiční projekt finančně výhodnější než stejná investice do státních dluhopisů s mírou výnosu 7 %. ([OR], str. 93)

Řešení:

Vidíme, že investiční plán výstavby počítá se ziskem 5 milionů Kč z investovaných 35 milionů. Tuto výši zisku musíme porovnat s alternativním možným ziskem, pokud bychom částku 35 milionů investovali do státních dluhopisů:

Na začátku prvního roku je k dispozici 15 milionů Kč:

$$15\,000\,000 \cdot 1{,}07^3 = 18\,375\,645 \text{ Kč}.$$

Na začátku druhého roku je k dispozici dalších 10 milionů Kč:

$$10\,000\,000 \cdot 1{,}07^2 = 11\,449\,000 \text{ Kč}.$$

Na začátku posledního třetího roku ještě jednou 10 milionů Kč:

$$10\,000\,000 \cdot 1{,}07 = 10\,700\,000 \text{ Kč}.$$

Celkový objem prostředků na konci třetího roku ve státních dluhopisech činí:

$$18\,375\,645 + 11\,449\,000 + 10\,700\,000 = 40\,524\,645 \text{ Kč}.$$

Porovnání částky 40 milionů Kč, které by firma získala za hotel, a částky získané z dluhopisů při stejné sekvenci investic, tj. 15 milionů na tři roky, 10 milionů na dva roky a 10 milionů na jeden rok, je podstatou firemního plánování.

Vidíme, že investice do státních dluhopisů je výhodnější než výstavba hotelu o více než půl milionu korun, tj. přibližně o 11 % vyšší zisk. Dodatečnou otázkou ovšem zůstává, jakou by firma získala výstavbou nového hotelu reklamu a přísun nových zakázek, což v úloze zakotveno není. Podobné další aspekty by svědomití plánovači firmy měli zahrnout do svých analýz také. Potom by však odpověď byla komplikovanější a úloha by přesahovala stanovený rámec finanční matematiky.

Hodnocení publikace

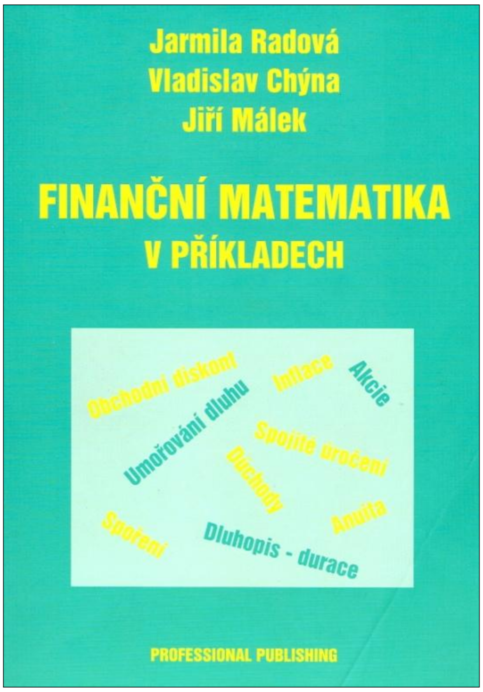
Publikace seznamuje uživatele se základními pojmy finanční matematiky a učí s nimi pracovat. Objem učiva není příliš velký, ale autoři vedou čtenáře k řešení krok za krokem a výklad doplňují kompletním komentářem. Díky propracované struktuře a vhodně zvolené grafice, zejména při popisu práce s kalkulačkami, je učebnice použitelná i pro samostudium. Z mého pohledu se jedná o cenný přírůstek do skupiny literatury věnující se finanční matematice.

Největší přínos tohoto učebního textu vidím kromě ukázkově řešených úloh především v pečlivém výkladu použití kalkulaček. Z mnohaleté učitelské praxe totiž vím, že je velké procento studentů, a to i na gymnáziích, kteří si myslí, že když zvládnou základní početní operace a možná i goniometrické funkce, umí dobře pracovat s kalkulačkou. Ale při práci se závorkami, složenými zlomky, mocninami a dalšími složitějšími výrazy se zcela ztrácejí a docházejí k naprosto nesprávným výsledkům, které nejsou schopni vysvětlit, neumějí odhalit chyby ve výpočtu, zápisu apod. V horším případě nesmyslnému výsledku bezmezně věří, protože to přece „řekla“ kalkulačka.

Tuto publikaci mohu vřele doporučit každému vyučujícímu matematiky na střední škole a není třeba, aby ji používal jen při výkladu finanční matematiky. V textu je mnoho číselných výrazů, na kterých lze se studenty procvičit práci s kalkulačkami, což velmi ocení i v další předmětech (fyzika, chemie, biologie).

Jarmila Radová, Vladislav Chýna, Jiří Málek:
Finanční matematika v příkladech,
1. vydání, Professional Publishing, Praha, 2005, 160 stran.

Tato publikace je všeobecně málo známá, neboť nemá doložku Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy České republiky, a proto není užívána ani běžně nabízena školám. Dokud jsem nezačal přímo pátrat po učebnicích a sbírkách věnujících se finanční matematice na úrovni střední školy, tak jsem o ní vůbec nevěděl. Kniha využívá převážně matematický aparát, který student získá během studia střední školy. Jsou zde však výjimky, kdy autoři používají parciální derivace



a v dodatku připomínají Taylorův rozvoj. Přesto si myslím, že ji nemohu opominout. Patří na rozhraní střední a vysoké školy a jejím hlavním cílem je zopakovat všechny důležité vzorce a pojmy z finanční matematiky a dát studentovi do rukou množství řešených a neřešených příkladů.

Obsah učebnice

1. Jednoduché úročení (9 stran);
2. Obchodní diskont (10 stran);
3. Složené úročení (10 stran);
4. Efektivní úroková sazba (3 strany);
5. Spojité úročení (2 strany);
6. Smíšené úročení (6 stran);
7. Inflace, jmenovitá a reálná úroková míra (4 strany);
8. Spoření – budoucí hodnota anuity (10 stran);
9. Důchody – současná hodnota anuity (16 stran);
10. Umořování dluhu (15 stran);
11. Čistá současná hodnota a vnitřní výnosové procento (5 stran);
12. Dluhopis – cena (15 stran);
13. Dluhopis – rendita a běžná výnosnost (5 stran);
14. Dluhopis – realizovaná výnosnost (6 stran);
15. Dluhopis – durace (11 stran);
16. Časová struktura úrokových sazeb (výnosové křivky) (5 stran);
17. Spotové a forwardové úrokové míry (4 strany);
18. Akcie (8 stran);
19. Použitá a doporučená literatura;

Dodatek A – Posloupnosti;

Dodatek B – Kvadratické rovnice;

Dodatek C – Taylorův vzorec;

Dodatek D – Vybrané teoretické otázky.

Osmnáct základních kapitol učebnice má stejnou strukturu, což pomáhá při orientaci a studiu. Každá je rozdělena do tří částí; první obsahuje vzorce a jejich výklad, druhá řešené příklady a třetí neřešené příklady.

Základní charakteristiky jednotlivých kapitol

1. Jednoduché úročení

Autoři nejprve zavedou základní vzorec pro jednoduché úročení a zmíní standardy, podle nichž se vypočítává doba uložení kapitálu. Připomínají, že tento typ úročení se používá při uložení kapitálu na dobu kratší než jedno úrokovací období. Pak uvádějí vzorové příklady; při řešení některých z nich užívají také tabulkový procesor MS Excel. Typy příkladů jsou obdobné jako v učebnicích, které jsem zmiňoval a hodnotil již dříve.

2. Obchodní diskont

V této kapitole autoři pracují s obchodním diskontem, s nímž se můžeme setkat při obchodování s některými cennými papíry (směnka, depozitní certifikát). Při řešení úloh užívají vzorce pro jednoduché úročení. Vše je vidět na následujícím příkladu:

Firma eskontovala dne 2. 11. na banku následující směnky (splatná částka – datum splatnosti): 10 000 Kč – 9. 11.; 15 000 Kč – 2. 12. a 8 000 Kč – 7. 12.

Jakou částku firma od banky obdržela, pokud banka používá diskontní míru 10 % p. a.? ([R1], str. 20)

Řešení:

Autoři připomenou základní vzorec $K_0 = K_n \cdot \left(1 - i_d \cdot \frac{t}{360}\right)$,

který použijí na přepočet hodnot všech tří směnek:

$$K_{01} = 10\ 000 \cdot \left(1 - 0{,}1 \cdot \frac{7}{360}\right) = 9\ 980{,}56\,\text{Kč},$$

$$K_{02} = 15\ 000 \cdot \left(1 - 0{,}1 \cdot \frac{30}{360}\right) = 14\ 875{,}00\,\text{Kč},$$

$$K_{03} = 8\ 000 \cdot \left(1 - 0{,}1 \cdot \frac{35}{360}\right) = 7\ 922{,}22\,\text{Kč}.$$

Firma od banky obdržela součet těchto tří hodnot, tj. 32 778 Kč.

3. *Složené úročení*

V předchozích rozborech učebnic se zmiňuji o počítání s daní z úroků. Autoři této knihy neužívají zdaňovací koeficient (viz např. předešlá učebnice), ale pracují přímo se srážkovou daní z úroků (ve vzorci je označena d). Používají vzorec

$$K_0 = K_n \cdot \left(1 + \frac{i \cdot (1-d)}{m}\right)^n,$$

který se od základního vzorce pro složené úročení liší především ve své pružnosti. Proměnná m totiž označuje, kolikrát za rok se úročí, tedy ročně – $m = 1$, pololetně – $m = 2$, měsíčně – $m = 12$ apod., a proměnná n je počet zdaňovacích období, tj. m-krát počet roků. Autoři navíc zmiňují i možnost $d = 0$, tedy složené úročení bez srážkové daně.

Zadání úloh se nijak neodlišuje od jiných učebnic, jen zde autoři více pracují se splácením úvěrů. Ocitujme jeden typický příklad:

Půjčka ve výši 200 000 Kč má být splacena dvěma nominálně stejnými splátkami, splatnými za rok a za tři roky. Určete výši těchto splátek při úrokové sazbě 15 % p. a. a čtvrtletním připisování úroků. ([R1], str. 35, výsledek: 132 804,59 Kč)

4. *Efektivní úroková sazba*

Autoři vysvětlují možnost porovnání více úrokových sazeb s odlišnou úrokovací dobou. Vedou čtenáře k tomu, aby dokázal přepočítat úrokovou sazbu na jednotnou úrokovací dobu jednoho roku. Uvádějí spojité úročení, kdy úrokovací doba limitně klesá k nule, a proto se mění základní užívaný vzorec

$$i_e = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1,$$

kde m je počet úrokovacích období za jeden rok a i úroková míra, na vzorec

$$i_e = e^i - 1.$$

5. *Spojité úročení*

Spojitému úročení se podrobněji věnuje samostatná pátá kapitola této učebnice, v níž autoři v jednom řešeném příkladu uvádějí i odvození výše uvedeného vzorce s odvoláním na jednu ze základních limit matematické analýzy, kterou je

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = e\,.$$

Odvození vzorce pro spojité úročení kapitálu na n roků vypadá takto:

$$K_n = \lim_{m\to\infty} K_0 \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n} = K_0 \cdot \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{m}{i}}\right)^{\frac{m}{i}}\right]^{i\cdot n} = K_0 \cdot e^{i\cdot n}\,.$$

([R1], str. 41)

6. *Smíšené úročení*

Autoři v této kapitole kombinují dříve vysvětlené typy úročení. Objasňují, že smíšené úročení nastává v okamžiku, kdy je kapitál uložen na necelý počet úrokovacích období. Ukazují, že celá úrokovací období počítáme pomocí složeného úročení a necelá úrokovací období (může se to týkat prvního nebo posledního nebo těchto obou úrokovacích období, pokud nejsou celá) počítáme každé zvlášť pomocí jednoduchého úročení.

Postup tedy vypadá takto:

1. krok: Zúročíme kapitál pomocí jednoduchého úročení za dobu do konce prvního necelého úrokovacího období.

2. krok: Zúročíme výsledný kapitál pomocí složeného úročení za období celých úrokovacích období.

3. krok: Zúročíme výsledný kapitál pomocí jednoduchého úročení za dobu posledního necelého úrokovacího období.

Pokud je kapitál vložen, resp. vybrán v okamžiku začátku nového úrokovacího období, vynecháme první, resp. třetí krok.

7. Inflace, jmenovitá a reálná úroková míra

Autoři nejprve definují pojem inflace, poté ukazují její vliv na znehodnocení kapitálu a možnosti vhodné obrany (např. výhodné uložení finančních prostředků). Vysvětlují, že porovnáním kupní síly získáme z nominální (jmenovité) úrokové míry v závislosti na inflaci úrokovou míru reálnou, která je pro nás podstatná. Její hodnota ukazuje nárůst kupní síly, a tedy skutečné zhodnocení uloženého kapitálu.

Zdůrazňují, že inflace způsobuje nárůst ceny zboží a služeb:

$$K = K_0 \cdot (1 + \pi),$$

kde π je míra inflace.

Při složeném úročení našeho vloženého kapitálu ukazují, jak přepočítat budoucí hodnotu kapitálu na budoucí cenu zboží a služeb:

$$K = K_0 \cdot [1 + i_{nom} \cdot (1 - d)] = K_0 \cdot (1 + i_{real}) \cdot (1 + \pi),$$

V poslední rovnosti je uveden základní vztah pro výpočet reálné úrokové míry.

Praktický příklad osvětlí podstatu inflace, kterou mnoho lidí z neznalosti opomíjí či úmyslně neuvažuje:

Komerční banka nabízí termínovaný vklad úročený 5 % ročně. Daň z úroků je 15 % a očekávaná inflace 5,1 %. Jaká je reálná úroková míra na tento vklad? ([R1], str. 52, výsledek: –0,809 %)

8. *Spoření – budoucí hodnota anuity*

V úvodu kapitoly je vyložena podstata spoření. Jednoduše řečeno, základem spoření je pravidelné ukládání stejné úložky. Jedná se tedy o jednoduché úročení pro jednotlivá úrokovací období a složené úročení částek vzniklých v jednotlivých úrokovacích období. Střadatele zajímá součet více částek, které jsou úročeny smíšeně, tj. částečný součet aritmetické posloupnosti dává první člen geometrické posloupnosti, u níž chceme opět najít její částečný součet. Podle délky trvání spoření rozlišujeme spoření dlouhodobé a krátkodobé. Poznamenejme, že krátkodobé spoření nepřesahuje jedno úrokovací období.

V této kapitole se autoři podrobněji zmiňují o spoření předlhůtním a polhůtním, které ovlivňuje tvar vzorce pro jedno úrokovací období (zdůrazňují např. rozdíl mezi pravidelným ukládáním částky na začátku nebo na konci měsíce a rozdíl v zisku finančních prostředků).

Předveďme vše na příkladu:

Kolik naspoří klient, který ukládá po dobu pěti let vždy počátkem čtvrtletí 1 250 Kč při roční úrokové sazbě 10 % a pololetním připisování úroků? ([R1], str. 60)

Řešení:

Nejprve vypočítáme s použitím vzorce pro jednoduché úročení stav účtu na konci prvního úrokovacího období:

$$a = 1250 \cdot (1 + 0{,}05) + 1250 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}05\right) = 1250 \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{2+1}{2 \cdot 2} \cdot 0{,}05\right) = 2\ 593{,}75\,\text{Kč}.$$

Představíme si, že tato částka 2 593,75 Kč je anuitou, kterou ukládáme na konci každého z deseti úrokovacích období (je to 10 pololetí). Tyto anuity jsou úročeny složeně; první devětkrát, druhá osmkrát až poslední nulakrát. Je zřejmé, že jde o prvních deset členů geometrické posloupnosti v obráceném pořadí od a_{10} po a_1. Kvocientem je $q = (1+i)$ a s_{10} vyjádříme vzorcem

$$s_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1},$$

který upravíme na tvar užívaný ve finanční matematice a obdržíme

$$s_{10} = a \cdot \frac{(1+i)^{10} - 1}{i}, \text{ tj. } s_{10} = 2\ 593{,}75 \cdot \frac{(1+0{,}05)^{10} - 1}{0{,}05} = 32\ 623{,}9\,\text{Kč}.$$

9. *Důchody – současná hodnota anuity*

V této kapitole čtenář vystačí se vzorci pro jednoduché a složené úročení. Autoři nejprve vysvětlí, co je podstatou důchodu. Jedná se o to, že nějaké finanční instituci poskytneme náš kapitál a ten se úročí a je nám z něho vyplácena určitá částka.

Autoři vyloží všechny základní typy důchodů. Nejdříve rozliší důchod stálý (tj. trvalý) a dočasný; v případě důchodu stálého je vyplácen pouze úrok, v případě vyplácení většího obnosu je částka po určité době vyčerpána a jedná se o důchod dočasný. Poté objasní další alternativy, jež jsou závislé na okamžiku první výplaty, tj. zda se vyplácí tato částka okamžitě po založení důchodu, či až po několika úrokovacích období.

Podstatu opět ihned pochopíme z konkrétního příkladu:

Jaká je počáteční hodnota důchodu 6 000 Kč vyplácených na počátku každého čtvrtletí po dobu 10 let? Úrokovací sazba je 5 % p. a. s ročním připisováním úroků.

Řešení:

V jednom úrokovacím období (rok) se důchod vyplácí 4x (každé čtvrtletí). Důchod je vyplácen 10 let, tj. 10 úrokovacích období. Úroková sazba na úrokovací období je 5 % a jde o důchod předlhůtní.

$$D = X \cdot k \cdot \left[1 + \frac{k+1}{2 \cdot k} \cdot i\right] \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

$$D = 6000 \cdot 4 \cdot \left[1 + \frac{4+1}{2 \cdot 4} \cdot 0{,}05\right] \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1+0{,}05}\right)^{10}}{0{,}05} = 191\ 112{,}94$$

Počáteční hodnota důchodu je 191 112,94 Kč. ([R1], str. 65–66)

Podle dosazení vidíme, že X je vyplácená anuita důchodu, k je počet výplat v jednom úrokovacím období, i je úroková sazba na úrokovací období, n je počet úrokovacích období a v je diskontní faktor $\left(v = \frac{1}{1+i}\right)$. Výše uvedený finální vzorec vznikl kombinací vzorců pro součet k členů aritmetické posloupnosti a n členů geometrické posloupnosti. Jeho podrobné odvozování však v učebnici postrádám.

10. Umořování dluhu

Tato kapitola hovoří o umořování dluhu. Při svém vlastním výkladu studenty vedu k představě výměny rolí banky a klienta. Závěr je pro ně velmi povzbuzující, neboť se nemusí učit nic nového. Lze si totiž jednoduše představit, že důchod je v podstatě umořování dluhu bankou vůči vkladateli. Role se vymění, ale matematická pravidla a vzorce zůstávají stejné.

Jak jsem naznačil, umořováním dluhu se míní jeho splácení věřiteli, kterým je v současné době nejčastěji nějaký bankovní ústav. Při výpočtech se využívají částečné součty geometrických posloupností, složené úročení a další již dříve vyložené vzorce. Podstatné pro výši splátek je, zda chceme mít konkrétní anuity, konstantní anuitu, konstantní úmor nebo určitý počet splátek. Při sestavování skupin příkladů se autoři řídí právě těmito požadavky.

Těsnou příbuznost umořování dluhu s důchody předvedeme na konkrétním příkladu:

Půjčka ve výši 100 000 Kč má být splacena 10 stejnými ročními anuitami. Vytvořte umořovací plán, jestliže banka používá úrokovou míru 10 % p. a. ([R1], str. 80)

Řešení:

Nebudeme sestavovat umořovací plán, jen se podíváme na výpočet roční anuity. Protože se jedná o anuitu roční (splácí se jedenkrát za úrokové období), použijeme vzorec ve tvaru

$$D = a \cdot \frac{1-v^n}{i},$$

a odtud plyne, že

$$a = D \cdot \frac{i}{1-v^n},$$

a tedy po dosazení zadaných hodnot

$$a = 100\ 000 \cdot \frac{0{,}1}{1-\left(\frac{1}{1+0{,}1}\right)^{10}} = 16\ 274{,}54\,\text{Kč}.$$

K těmto výpočtům lze podle mého názoru i názoru autorů velmi dobře využít tabulkový procesor MS Excel. Práce s nástroji tohoto softwaru včetně tvorby vzorců je zařazena na středních školách do předmětu informační a výpočetní technika. Protože jsem vyučoval základní kurz počítačů, tj. včetně tabulkového procesoru MS Excel, mohl jsem studentům ukázat výhody, nevýhody, časovou i odbornou náročnost. Studenti oceňovali praktické využití tvorby vzorců v tabulkovém procesoru a uvědomovali si zejména časovou náročnost tvorby formuláře pro jednotlivé typy úloh.

Další kapitoly

Od 11. do 18. kapitoly autoři pracují zejména s dluhopisy, akciemi, úrokovými sazbami a měrami. Je to látka určená především studentům, kteří se zajímají o finanční matematiku hlouběji a plánují například její studium na vysoké škole zejména ekonomického směru. Rozhodně již nepatří do základů finanční matematiky vyučovaných na středních školách, ačkoli vlastní matematický aparát není příliš složitý. V jednotlivých kapitolách jsou objasněny zejména finanční transakce s dluhopisy a akciemi. Autoři vysvětlují např. kupónové dluhopisy, diskontované dluhopisy, konzole, akcie, jejich renditu, výnosnost, duraci, změnu ceny při změně úrokové sazby, dividendy, operují s portfolii, výnosovými křivkami a riziky investice.

Hodnocení učebnice

Struktura učebnice a jednotlivých kapitol svědčí o tom, že autoři předpokládají základní znalosti z oblasti finanční matematiky. Tato publikace je vhodná k opakování již probraných oblastí finanční matematiky. Myslím si, že optimální cílovou skupinou jsou studenti prvních ročníků vysokých škol s ekonomickým zaměřením.

Domnívám se, že první dvě třetiny učebnice mohou používat vyučující finanční matematiky i na středních školách. Uváděné úlohy jsou praktické, jasně formulované a student při jejich četbě vidí, že získané znalosti v budoucnu využije. Matematický aparát této učebnice se odlišuje od ostatních učebnic jen v některých tvarech vzorců a způsobech jejich odvození; od páté kapitoly se využívají jen modifikace zavedených vzorců na základě zaměření příslušné kapitoly. Z vlastní pedagogické zkušenosti vím, že právě při modifikacích studenti narážejí na největší problémy, proto považuji zařazení těchto kapitol za velmi důležité. Autoři učebnice kladou hlavní důraz na využití vzorců a jejich modifikací v konkrétních úlohách a teoretický podklad zmiňují převážně v poznámkách. Domnívám se, že používat samostatně tuto publikaci bez další literatury by nebylo vhodné. Student by při studiu postrádal hlubší teoretický vhled.

Kromě šíře záběru a množství příkladů je kladem této učebnice-sbírky využití počítačů při „mechanickém počítání“. Tak jako autoři předešlé učebnice [OR] pracují s kalkulačkami, autoři této publikace se snaží vysvětlit, jak a proč k výpočtům používat tabulkový procesor MS Excel. Nejlépe je to vidět při sestavování umořovacích plánů, které jsou časově náročné. Při tvorbě vzorců v excelovských buňkách vedou autoři studenta krok za krokem a pro snadnou orientaci a pochopení stačí jen elementární znalost tohoto tabulkového procesu.

K výuce základního kurzu finanční matematiky bych si tuto knihu nevybral. Zvolil bych ji až k souhrnnému procvičování již probrané látky, neboť její koncepce (stručný souhrn nezbytné teorie, dostatečné množství řešených a neřešených příkladů) dobře vyhovuje samostatné práci a především umožní hlubší procvičení studované tématiky.

Jarmila Radová, Petr Dvořák: *Finanční matematika pro každého,*
1., 2., 3. a 4. vydání, Grada, Praha, 1993, 1997, 2001, 2003.

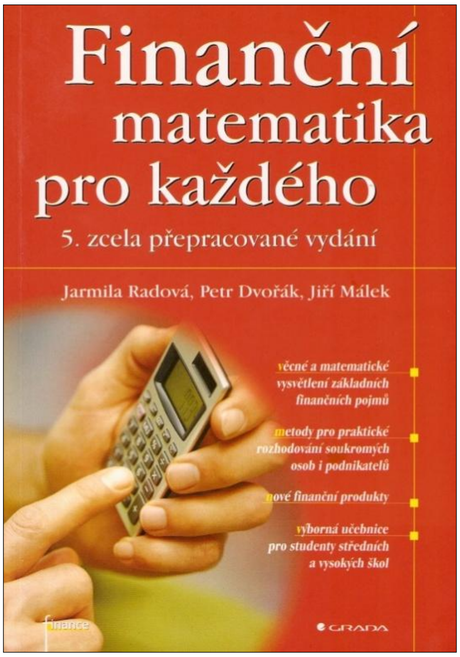
Kniha je určena zejména těm, kteří během svých studií nenarazili na finanční matematiku, je spolehlivým průvodcem touto tématikou a od čtenářů nevyžaduje rozsáhlé ani matematické, ani ekonomické znalosti. Jejím cílem je srozumitelně popsat a vysvětlit základní matematické postupy využívané ve finanční matematice, přiblížit svět bankovnictví a finančnictví i s příslušnými definicemi a naučit čtenáře aplikovat vyložené postupy v konkrétních finančních otázkách.

O zájmu veřejnosti o tohoto průvodce hovoří i počet vydání; od roku 1993 do roku 2009 jsme se dočkali již sedmi. Každé pružně reaguje na nové skutečnosti ve světě financí, na nové produkty a aplikace. Každé vydání můžeme rozdělit na dvě části. V první autoři vysvětlují matematické metody a postupy užívané v oblasti financí (úročení, spoření, důchody, splácení atd.). Ve druhé pracují s jejich aplikacemi u všech nejdůležitějších bankovních a finančních produktů (směnky, skonto, účty, hypoteční a spotřebitelské úvěry, leasing, dluhopisy, akcie, devizové obchody atd.).

Výklad všech témat je velmi přehledný a dobře propracovaný. Jednotlivé příklady jsou názorné, krok za krokem řešené a vysvětlované. Publikaci však chybí neřešené úlohy k procvičování.

Všichni recenzenti knihy hovoří pochvalně o její celkové struktuře a šíři vykládané látky. Velmi pozitivní a výstižnou recenzi napsali na třetí, podstatně rozšířené vydání z roku 2001 doc. Ing. Petr Marek, CSc., z katedry financí a oceňování podniku VŠE Praha, a Ing. Jiří Sedláček, Ph.D., z katedry mezinárodního obchodu VŠE Praha. Vyšla v Softwarových novinách 12(2001), roč. 12, č. 9, str. 112, pod názvem *Precizní a srozumitelná finanční matematika*. Z vlastních učitelských zkušeností se domnívám, že každý, pro koho je publikace určena a kdo ji prostudoval, ji shledal velmi užitečnou.

Jarmila Radová, Petr Dvořák, Jiří Málek: *Finanční matematika pro každého*, 5. zcela přepracované vydání, Grada, Praha, 2005, 288 stran.



Zhodnotíme podrobněji páté přepracované vydání, které obsahuje již sedmnáct kapitol a dosahuje téměř 300 stran. Rozšířený kolektiv autorů zachovává strukturu a hlavní cíle publikace, tj. nejprve uvádí stručnou teorii, pak srozumitelně a přehledně podává řešení všech základních úloh. Podíváme-li se na obsah, zjistíme, že učebnice pokrývá celou šíři činností bankovních a finančních ústavů. Měla by být pohodlným a pohotovým rádcem zejména těm, kteří se otázkám finanční matematiky nevěnují pravidelně.

Obsah průvodce

1. Základní pojmy (15 stran);
2. Úročení (22 stran);
3. Složené úročení (34 stran);
4. Spoření (28 stran);
5. Důchody jako pravidelné platby z investice (19 stran);
6. Splácení úvěru (25 stran);
7. Směnky a směnečné obchody (10 stran);
8. Skonto (4 strany);
9. Běžné účty (4 strany);
10. Hypoteční úvěry (11 stran);
11. Spotřebitelské úvěry (5 stran);
12. Forfaiting, faktoring a leasing (16 stran);
13. Dluhopisy (24 stran);
14. Durace, konvexita, imunizace (18 stran);
15. Akcie (18 stran);
16. Měnový kurz a devizové obchody (6 stran);
17. Finanční termínované obchody (14 stran).

Charakteristika jednotlivých kapitol

1. *Základní pojmy*

V úvodní kapitole autoři zdůrazňují, že finanční matematika není nic jiného než využití matematiky ve finanční oblasti. Uvádějí pojmy procentového počtu, lineární funkci, nepřímou úměrnost, exponenciální funkci, logaritmickou funkci, průměr aritmetický, geometrický a vztah mezi nimi. Celou podkapitolu věnují aritmetickým a geometrickým posloupnostem a řadám. V této kapitole řeší pouze dva příklady na procvičení procent, vše ostatní je teoretický základ nutný pro následující kapitoly.

2. *Úročení*

Ve druhé kapitole autoři definují pojmy úrokové míry, úroku, úrokové sazby a představují typy úročení včetně standardů pro počítání doby uložení či vypůjčení finančních prostředků. Vysvětlují jednoduché úročení polhůtní, uvádějí nutné vzorce a rovnice u něj používané, současnou a budoucí hodnotu při jednoduchém úročení, diskont, vztah mezi polhůtní úrokovou sazbou a diskontní sazbou.

Typově podobné úlohy jsme ukazovali v rozborech předešlých učebnic, proto uvedeme jen nejzajímavější příklad této kapitoly:

Dne 17. 2. 2005 se konala holandská aukce státních pokladničních poukázek o jmenovité hodnotě 1 000 000 Kč.

Den emise	*Den splatnosti*	*Objem aukce*	*Požadováno*	*Emitent odkoupil*	*Průměrná cena*
18. 2. 2005	*20. 5. 2005*	*8 mld. Kč*	*27,83 mld. Kč*	*10 mld. Kč*	*994 694,7 Kč*

Jaká je roční výnosnost této pokladniční poukázky? ([K5], str. 45)

K řešení použijeme známé vzorce pro jednoduché úročení. V den splatnosti, tj. za 91 dní (podle standardu ACT/360) dostaneme za investici (průměrná cena) jmenovitou hodnotu. Míru výnosnosti tedy vypočítáme

$$i = \frac{1\,000\,000 - 994\,694{,}7}{994\,694{,}7} \cdot \frac{360}{91} = 0{,}0211 = 2{,}11\%.$$

3. *Složené úročení*

Ve třetí kapitole autoři vysvětlují základní vztahy pro toto úročení polhůtní, dále ukazují kombinaci jednoduchého a složeného úročení, tedy smíšené úročení. Pak se věnují výpočtům doby splatnosti, současné hodnoty při složeném úročení, výnosnosti, úroku, srovnávají jednoduché a složené úročení. Zavádějí také pojem efektivní úrokové sazby, spojitého úročení, nominální a reálné úrokové sazby, hrubého a čistého výnosu. Většinu z nich jsme již vysvětlili při rozboru učebnice [R1] a předešlých učebnic. Ukažme nyní jen příklad na výpočet čisté výnosnosti:

Jaké čisté roční výnosnosti dosáhne klient, jestliže uložil na počátku roku částku 100 000 Kč na šestiměsíční termínovaný vklad při 2% úrokové sazbě p. a. a v polovině roku kapitál včetně vyplacených úroků znovu okamžitě uložil na šestiměsíční termínovaný vklad při 2,5% úrokové sazbě p. a.? Úroky z vkladů podléhají dani z příjmů vybírané srážkou ve výši 15 %. ([K5], str. 76–77, výsledek: 1,92 % p.a.)

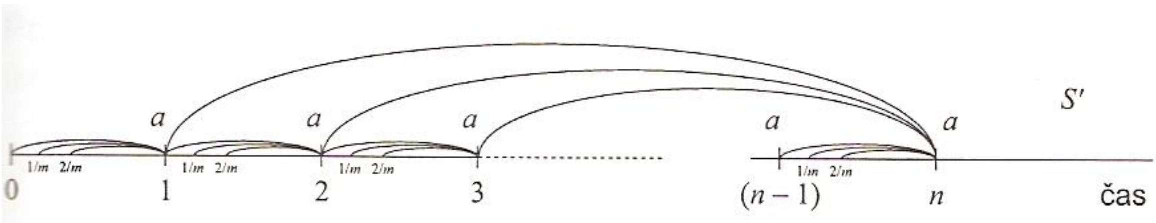
4. *Spoření*

Ve čtvrté kapitole autoři osvětlují problematiku krátkodobého a dlouhodobého střádání. U každé úlohy objasňují, že nejprve musíme počítat se spořením krátkodobým (jedno úrokovací období a tudíž pracujeme s jednoduchým úročením) a pak s dlouhodobým. Aby zvýšili přehlednost textu, využívají pro znázornění doby úročení jednotlivých vkladů tabulek a schémat, které pomáhají při tvorbě a pochopení příslušných vzorců.

Spoření rozdělují na krátkodobé předlhůtní, krátkodobé polhůtní, dlouhodobé předlhůtní a dlouhodobé polhůtní. Připomeňme, že předlhůtní znamená vklad na počátku období a polhůtní na konci období (rozdíl je vidět nejen ve vzorcích, ale i ve schématech uvedených níže). V úlohách ukazují praktické situace, kdy dochází ke kombinaci těchto spoření. Kapitolu uzavírají podkapitolou o stavebním spoření, které využívá poměrně velké procento občanů.

Podívejme se na užívaná schémata, z nichž se dá vyčíst doba uložení a získat přehled, kdy se jedná o částečný součet aritmetické posloupnosti a kdy geometrické. Posuďte sami v případech, kdy je m vkladů během jednoho úrokovacího období a spoří se n období:

Schéma kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření předlhůtního:



([K5], str. 97, obrázek 4.5)

Pro jedno úrokovací období dostáváme součet dob uložení jednotlivých vkladů

$$\frac{m}{m}+\frac{m-1}{m}+\frac{m-2}{m}+\ldots+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{m}{m}+\frac{1}{m}\right)\cdot m=\frac{m+1}{2}$$

a z toho získáváme vztah pro částku vzniklou z vkladů včetně úroků na konci prvního úrokovacího období (vklad = x, úroková sazba = i):

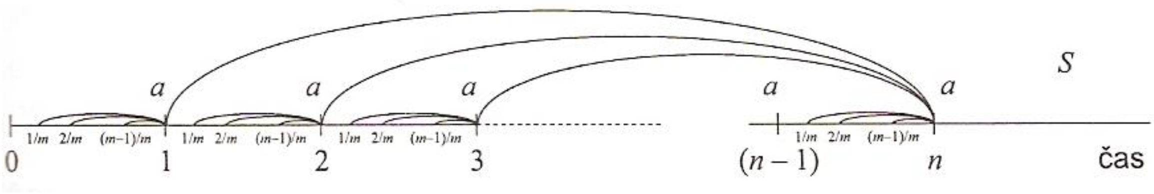
$$a=x\cdot\left(m+\frac{m+1}{2}\cdot i\right).$$

Tuto anuitu máme nově na účtu na konci každého z n úrokovacích období. Anuity jsou úročeny složeně a výsledkem je tedy nám známý a ze schématu čitelný částečný součet geometrické posloupnosti. Po úpravách dostáváme finální vzorec:

$$S' = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = x \cdot \left(m + \frac{m+1}{2} \cdot i \right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i \right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Vytknutí *m* z první závorky zdůrazňuje počet vkladů za jedno úrokovací období, jiný důvod úprava nemá. Čárku v označení celkově naspořené částky *S′* používají autoři pro předlhůtní vklady.

Schéma kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření polhůtního:



([K5], str. 101, obrázek 4.6)

Pro jedno úrokovací období dostáváme součet dob uložení jednotlivých vkladů

$$\frac{m-1}{m} + \frac{m-2}{m} + \frac{m-3}{m} + \ldots + \frac{0}{m} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{m-1}{m} + \frac{0}{m} \right) \cdot m = \frac{m-1}{2}$$

a získáváme vztah pro částku vzniklou z vkladů včetně úroků na konci roku (vklad = x, úroková sazba = i):

$$a = x \cdot \left(m + \frac{m-1}{2} \cdot i \right).$$

Tuto anuitu máme opět nově na účtu na konci každého úrokovacího období. Tyto částky jsou jako v předešlém případu úročeny složeně a výsledkem je obdobný vzorec:

$$S = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = x \cdot \left(m + \frac{m-1}{2} \cdot i \right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i \right) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Použití výše uvedených vzorců předvádějí autoři na konkrétních řešených příkladech.

Ocitujme znění dvou z nich:

Kolik naspoříme za tři roky, ukládáme-li počátkem každého měsíce 1 000 Kč při úrokové sazbě 2,8 % p. a. a čtvrtletním úrokovém období? ([K5], str. 100, výsledek: 37 593,48 Kč)

Kolik budeme mít k dispozici na účtu na konci roku, jestliže jsme na počátku roku uložili částku 10 000 Kč a koncem každého měsíce spoříme na tento účet 1 000 Kč?

Úroková sazba je 2,5 % p. a. s pololetním připisováním úroků. ([K5], str. 101, výsledek: 22 389,45 Kč)

Vidíme, že úlohy jsou velmi podobné úlohám již dříve zmíněným v předešlých publikacích, liší se jen v drobnostech – výše vkladu, popis situace.

5. *Důchody jako pravidelné platby z investice*

Pátá kapitola také patří mezi základní pilíře finanční matematiky. Jejím obsahem je důchod. Autoři vysvětlují smysl a základní typy důchodů, tj. důchod bezprostřední, odložený a věčný, a typy jeho plateb, tj. předlhůtní a polhůtní; známe je již z předešlých rozborů. Používají také obdobná schémata jako v předešlé kapitole a stejnou cestu odvozování vzorců. Zavádějí nové nezbytné pojmy: střadatel, zásobitel a diskontní faktor. Podívejme se jen na zajímavé úlohy.

Máme k dispozici 30 000 Kč. Touto částkou si chceme zajistit roční polhůtní důchod na pět let s tím, že s jeho výplatou začneme za dva roky. Jak vysoké budou výplaty při neměnné 4% roční úrokové sazbě? ([K5], str. 118)

Řešení:

Z rozboru zadání vyplývá, že první dva roky se částka složeně úročí čtyřmi procenty, během třetího také a na jeho konci je první výplata. Zmenšená částka o výplatu se úroční ve čtvrtém roce a na jeho konci je opět výplata atd. Na konci sedmého roku je úročená částka rovna výplatě. Zapišme rovnici, kde K = 30 000 Kč a a je výplata (anuita)

$$\Big(\big(((K \cdot 1{,}04^2 \cdot 1{,}04 - a) \cdot 1{,}04 - a) \cdot 1{,}04 - a\big) \cdot 1{,}04 - a\Big) \cdot 1{,}04 - a = 0.$$

Odstraníme-li závorky a převedeme-li členy se záporným znaménkem na pravou stranu rovnice, obdržíme rovnici

$$K \cdot 1{,}04^7 = a \cdot 1{,}04^4 + a \cdot 1{,}04^3 + a \cdot 1{,}04^2 + a \cdot 1{,}04 + a.$$

Na pravé straně vidíme součet prvních pěti členů geometrické posloupnosti, a proto ji můžeme upravit na tvar

$$K \cdot 1{,}04^7 = a \cdot \frac{1{,}04^5 - 1}{1{,}04 - 1}.$$

Z rovnice vyjádříme a, dosadíme za K a vypočítáme a

$$a = \frac{K \cdot 1{,}04^7 \cdot 0{,}04}{1{,}04^5 - 1} = \frac{30\ 000 \cdot 1{,}04^7 \cdot 0{,}04}{1{,}04^5 - 1} = 7\ 288{,}70.$$

Částka 7 288,70 Kč je roční polhůtní důchod vyplácený podle podmínek úlohy.

Některé uvedené úlohy mají stejnou matematickou podstatu, ale jejich otázka se zaměřuje na investiční rozhodnutí.

Kolik budeme ochotni nyní investovat, jestliže nám z investice vždy na konci měsíce plyne platba ve výši 1 000 Kč po dobu pěti let? Uvažujeme úrokovací sazbu 5 % p. a. a pololetní úrokové období. ([K5], str. 126, výsledek: 53 059,39 Kč)

Každý typ důchodu je podrobně popsán a řešení úloh je velmi dobře okomentováno. Na žádnou důležitou modifikaci typu úloh a podmínek výplat nebylo zapomenuto.

6. *Splácení úvěru*

Šestá kapitola je poslední kapitolou vysvětlující matematický aparát finanční matematiky. Tato část je pro praktický život tou nejdůležitější. Pokud špatně investujeme, tak máme malý zisk a nebo ztratíme mnoho svých prostředků. Zde však je řeč o prostředcích, které nám jsou zapůjčeny a za půjčení platíme poplatky. Při problémech může dojít až k exekuci našeho majetku a takových případů rok od roku stále přibývá.

Autoři nejprve definují úvěr neboli dluh neboli půjčku jako poskytnutí peněžní částky na určitou dobu za odměnu zvanou úrok. Následně rozdělují typy úvěru podle jejich základních parametrů, tedy doby splatnosti a způsobu úmoru neboli splacení. Podle doby je rozdělují na krátkodobé (do jednoho roku), střednědobé (do čtyř let) a dlouhodobé (nad čtyři roky) a podle způsobu umořovaní na splatné najednou včetně úroků, najednou po výpovědi, pravidelnými platbami při konstantní anuitě, při konstantním úmoru a při rostoucí anuitě.

Popsanou problematiku můžeme převést na již známá pravidla finanční matematiky. Nejen využití způsobu úrokování, ale celou situaci můžeme v již vyložené látce objevit. Stačí si vzpomenout, co je důchod. Někam někomu jsme dali své finanční prostředky a ty jsou úročeny a nám výplatami spláceny. U úvěru si bankovní ústav k nám „uloží“ finanční prostředky, ty jsou podle stanovených pravidel úročeny a my je splácíme. Vidíme, že to není nic nového, jak jsem již popsal v rozboru předešlé publikace. Je obtížně pochopitelné, proč si to tolik lidí stále odmítá uvědomit. Autoři tuto souvislost zmiňují, ale dále nerozvádějí z důvodu šíře možností způsobu splácení úvěru. Každý učitel by při svém výkladu měl tuto souvislost zdůraznit a na vhodných příkladech předvést.

Vše posoudíme na konkrétních příkladech.

Úvěr 40 000 Kč má být umořen polhůtními ročními anuitami za šest let při neměnné roční 5% úrokové sazbě. Určete výši anuity a sestavte umořovací plán. ([K5], str. 132)

Řešení:

Porovnejme situaci s příkladem ze strany 118 této publikace (viz výše) a ihned souvislosti objevíme. Na místo K budeme používat D jako dluh, vše ostatní zůstane zachováno. Sledujme vývoj hodnoty úvěru a na závěr zobrazme umořovací plán.

$$\left(\left(\left(\left((D \cdot 1{,}05 - a) \cdot 1{,}05 - a\right) \cdot 1{,}05 - a\right) \cdot 1{,}05 - a\right) \cdot 1{,}05 - a\right) \cdot 1{,}05 - a = 0.$$

$$D \cdot 1{,}05^6 = a \cdot 1{,}05^5 + a \cdot 1{,}05^4 + a \cdot 1{,}05^3 + a \cdot 1{,}05^2 + a \cdot 1{,}05 + a,$$

$$D \cdot 1{,}05^6 = a \cdot \frac{1{,}05^6 - 1}{1{,}05 - 1},$$

$$a = \frac{D \cdot 1{,}05^6 \cdot 0{,}05}{1{,}05^6 - 1}.$$

Do tohoto finálního vzorce dosadíme zadanou hodnotu úvěru:

$$a = \frac{40\,000 \cdot 1{,}05^6 \cdot 0{,}05}{1{,}05^6 - 1} = 7\,880{,}70.$$

Autoři používají vzorec $a = D \cdot \dfrac{i}{1 - v^n}$, kde $v = \dfrac{1}{1+i}$ je diskontní faktor. Jedinou algebraickou úpravou můžeme náš odvozený vzorec převést na jejich a to rozšířením zlomku n-tou mocninou diskontního faktoru.

Částka 7 880,70 Kč je roční polhůtní anuita. Správnost výpočtů můžeme ověřit umořovacím plánem.

Období	Anuita	Úrok	Úmor	Zůstatek úvěru
0				40 000,00
1	7 880,70	2 000,00	5 880,70	34 119,30
2	7 880,70	1 705,97	6 174,73	27 944,57
3	7 880,70	1 397,23	6 483,47	21 461,10
4	7 880,70	1 073,05	6 807,64	14 653,45
5	7 880,70	732,67	7 148,03	7 505,43
6	7 880,70	375,27	7 505,43	0,00

Další příklady se liší jen typem podmínek splácení úvěru.

Úvěr 500 000 Kč se má splácet ročními anuitami ve výši 90 000 Kč při 7% roční úrokové sazbě. Máme určit počet anuit, výši poslední splátky a sestavit umořovací plán. ([K5], str. 137, výsledek: 8 splátek, osmá ve výši 25 710,86 Kč)

Úvěr 120 000 Kč má být splacen ročními polhůtními splátkami (včetně úroků). První splátka je o rok odložena, tedy bude splatná za dva roky ve výši 24 000 Kč. Každá další splátka je vždy o 20 000 Kč vyšší. Sestavte umořovací plán, je-li úroková sazba 10 % p. a. ([K5], str. 150, výsledek: úvěr bude splacen čtyřmi splátkami v celkové výši 169 677,20 Kč)

Úlohy s pevně danou i proměnnou velikostí anuity patří mezi běžné a při práci bankovních ústavů na ně také často narazíme.

Touto problematikou končí základní část průvodce. Jak zmiňuji již v základním popisu, druhá část se věnuje konkrétním důležitým bankovním a finančním produktům. Na nich jsou aplikovány postupy vyložené v první části. Náplň odpovídá nárokům budoucího investora a je tudíž nadstavbou pro středoškolské studenty.

Z pohledu požadavků z finanční matematiky kladených na středoškolského studenta hlubší analýza následujících jedenácti kapitol není nutná. Nezbytný matematický aparát byl vyložen v prvních šesti kapitolách a další kapitoly jen využívají v závislosti na produktu jeho modifikace. Pro lepší orientaci v popisované problematice uvedeme z každé kapitoly jeden ilustrační příklad, který pracuje se zkoumaným produktem. Některé příklady si každý může bez problémů každý čtenář přepočítat sám, k jiným je třeba nastudovat další teorii.

Firma odprodala dne 2. 9. 2003 směnku bance, znějící na částku 150 000 Kč, se splatností 2. 10. 2003. Jaká byla při diskontní úrokové sazbě 10 % p. a. částka, kterou banka firmě vyplatila? ([K5], kapitola 7, str. 154, výsledek: 148 750 Kč)

Prodávající firma dodala zboží v celkové prodejní ceně 200 000 Kč. Částka je splatná do čtyř týdnů, přičemž při zaplacení do jednoho týdne nabízí prodávající firma možnost skonta ve výši 2 % z prodejní ceny. V případě okamžitého zaplacení by musela kupující firma nákup financovat krátkodobým úvěrem, úroková sazba činí

12 % p. a. Je pro kupující firmu za daných podmínek výhodné využít skonta a zaplatit zboží do týdne či nikoliv? ([K5], kapitola 8, str. 165, výsledek: skonto 4 000 Kč, úrok 1 372 Kč, skonto s využitím úvěru je výhodnější)

Určete, jaký bude stav běžného účtu na konci roku, jestliže na něm byl během roku následující pohyb: 1. 1. stav účtu 3 000 Kč, 15. 4. vklad 1 500 Kč, 15. 6. výběr 1 000 Kč, 1. 10. vklad 1 000 Kč. Předpokládáme, že úrokové období je roční, vycházíme ze standardu 30/360 – měsíc počítáme jako 30 dní a rok 360 dní; úroková sazba 1 % zůstává po celý rok neměnná, od zdanění úroků abstrahujeme. ([K5], kapitola 9, str. 167, výsledek: 4 537,71 Kč)

Žadatel mladší 36 let chce získat hypoteční úvěr na koupi rodinného domu s jednou bytovou jednotkou, jehož cena je 2 500 000 Kč. Jakou částku mu banka poskytne? Jak vysoké budou měsíční anuity při úrokové sazbě 5 % p. a., počítá-li, že úvěr splatí za patnáct let? Jak vysoké budou anuity v případě poskytnutí státní podpory? ([K5], kapitola 10, str. 176, výsledek: výše hypotéky 1 750 000 Kč, měsíční anuita 13 839 Kč, státní podpora 1 %, rozdíl měsíčních anuit 723 Kč)

Porovnejte z hlediska klienta dvě varianty spotřebitelských úvěrů a rozhodněte, která pro něj bude výhodnější. V obou případech se jedná o úvěr ve výši 100 000 Kč jednorázově čerpaný se splatností 1 rok.
1. varianta: Za sjednání si banka účtuje poplatek 500 Kč (splatný při sjednání smlouvy), úvěr je splatný během jednoho roku ve čtyřech pravidelných čtvrtletních splátkách ve výši 27 000 Kč.
2. varianta: Za sjednání úvěru banka neúčtuje žádný poplatek, úvěr je splatný během jednoho roku ve dvanácti pravidelných měsíčních splátkách ve výši 9 000 Kč.
([K5], kapitola 11, str. 184, výsledek: 1. RPSN 13,21 %, 2. RPSN 15,45 %, 1. je výhodnější)

Porovnejte jako právnická osoba výhodnost zakoupení osobního automobilu v pořizovací ceně 300 000 Kč na úvěr a na leasing, pokud banka a leasingová společnost nabízejí následující podmínky:

Leasing		*Úvěr*	
Akontace	*100 000 Kč*	*úroková sazba p. a.*	*10 %*
Roční leasingová splátka	*64 500 Kč*	*doba splatnosti*	*čtyři roky*
Doba trvání leasingu	*čtyři roky*	*roční úmor*	*75 000 Kč*

Pro výpočet dále uvažujme lineární způsob odpisování dle zákona o daní z příjmů a sazbu daně z příjmů 24 %. ([K5], kapitola 12, str. 200, odpověď: výhodnější je leasing)

Vypočítejte teoretickou cenu dluhopisu s pevnou kuponovou platbou s kuponovou sazbou 5 % p. a., s jmenovitou hodnotou 1 000 Kč, se splatností tři roky a při tržní úrokové míře 5,5 %. ([K5], kapitola 13, str. 206, výsledek: 986,50 Kč)

Vypočítejte duraci dluhopisu s pevnou kuponovou úrokovou sazbou 8 %, jestliže jmenovitá hodnota dluhopisu je 1 000 Kč, doba do splatnosti tři roky, aktuální tržní cena dluhopisu je 920,25 Kč, a tedy výnosnost do doby splatnosti (tržní úroková sazba) činí 10 % (kuponové platby jsou vypláceny jedenkrát ročně, první bude následovat ode dneška za jeden rok). ([K5], kapitola 14, str. 228, výsledek: 2,79)

Stanovte vnitřní hodnotu akcie firmy za předpokladu, že očekáváte výši dividendy na konci prvního roku 120 Kč a uvažujete 14% požadovanou míru výnosnosti, přičemž předpokládáte a) konstantní absolutní výši dividend v jednotlivých letech, b) konstantní roční míru růstu dividend ve výši 10 %. ([K5], kapitola 15, str. 248, výsledek: a) 857 Kč, b) 3 000 Kč)

Stanovte termínovou cenu akce k termínu za šest měsíců, pokud je aktuální promptní kurz 1 000 Kč a šestiměsíční úroková sazba činí 4 % p. a. Během této doby, předpokládejme v termínu realizaci obchodu (T_1), bude vyplacena na 1 akcii čistá dividenda ve výši 100 Kč. ([K5], kapitola 17, str. 273, výsledek: 920 Kč)

V úlohách autoři pracují jen s již definovanými pojmy, vždy přesně charakterizují danou situaci, popíší její podmínky a položí srozumitelnou otázku. Při nejasnostech čtenář ve všech případech může nahlédnout do následného autorského řešení, které neobsahuje vždy všechny elementární kroky, ale základní strukturu postupu autoři nezanedbávají.

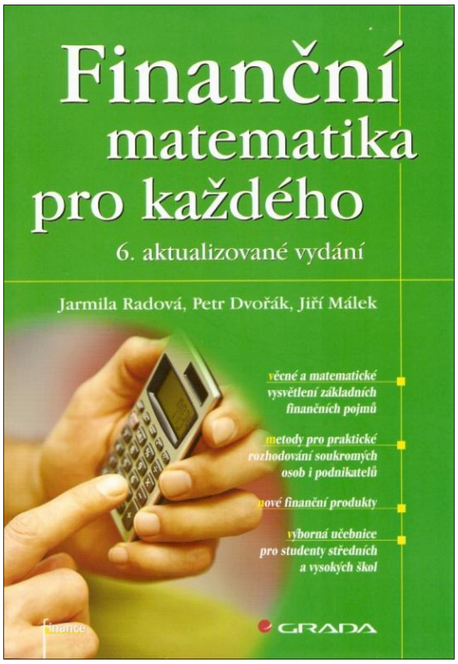
Hodnocení průvodce

Autoři chtějí oslovit každého zájemce o finanční matematiku. Definují pojmy, popisují aplikace, odvozují vzorce, tvoří a řeší úlohy stylem, který nás o tom nenechá na pochybách.

Rozsah jednotlivých kapitol i celé publikace ukazuje význam, jaký autoři finanční matematice přikládají. Prvních šest kapitol obsahuje kompletní matematický aparát nutný ke zvládnutí základů finanční matematiky, poté autoři systematicky představují produkty bankovního a finančního světa, na něž může člověk narazit v běžném každodenním životě.

Každému, zejména těm, kteří již odrostli školnímu věku, mohu tohoto průvodce světem financí jen doporučit. I přes těch několik tiskových chyb, které jsem v publikaci objevil, se jedná o velmi kvalitní a dobře propracovanou publikaci sledující jasný cíl – pomoci těm, kteří ve finanční matematice tápají.

Jarmila Radová, Petr Dvořák, Jiří Málek: *Finanční matematika pro každého*, 6. aktualizované vydání, Grada, Praha, 2007, 296 stran.



Aktualizace šestého vydání spočívá ve vložení nové kapitoly, která se věnuje portfoliu. *Měření výkonnosti portfolia* v rozsahu 6 stran najdeme před kapitolou o akciích a seznámíme se se dvěma váženými metodami měření – časově váženou metodou (TWR) a peněžně váženou metodou (MWR). Pomohou nám změřit výkonnost portfolia v případě, kdy dochází např. k peněžním tokům, neboli investice není konstantní.

Jejich význam můžeme pochopit z následujícího příkladu:

Předpokládejme měsíční časovou periodu (30 dnů). Na počátku je hodnota portfolia 50 000 Kč, desátý den je vloženo 20 000 Kč a dvacátý den je vybráno 10 000 Kč. Konečná hodnota portfolia třicátý den je 70 000 Kč. ([K6], str. 249)

Úkolem je vypočítat měsíční výnosovou míru, tj. vnitřní výnosové procento (užívaná zkratka IRR) do doby splatnosti.

Autoři ve vzorovém řešení využívají vztah

$$V_E = V_T \cdot (1+r)^T = \sum \left[C(t) \cdot (1+r)^{(T-t)} \right],$$

kde T je délka časového horizontu, V_E je konečná hodnota portfolia, V_T je počáteční hodnota portfolia, $C(t)$ je peněžní tok v čase t a r je vnitřní výnosové procento za čas T.

Upozorňuji, že neexistuje explicitní vzorec pro vyjádření r a že je třeba použít nějakou vhodnou numerickou metodu.

Ze zadání příkladu sestavíme rovnici, v níž exponenty označují počet dekád:

$$70\,000 = 50\,000 \cdot (1 + r)^3 + 20\,000 \cdot (1 + r)^2 - 10\,000 \cdot (1 + r).$$

Hodnota r představuje desetidenní výnosovou míru. Autoři uvádějí výsledek $r = 20{,}22$ %, s čímž nesouhlasím. Aproximační metodou mi hodnota r vychází mezi 5,287 % a 5,288 %. Předvedu potvrzení své pochybnosti. Nahraďme výše uvedenou rovnici funkcí y:

$$y = 50\,000 \cdot (1 + r)^3 + 20\,000 \cdot (1 + r)^2 - 10\,000 \cdot (1 + r) - 70\,000.$$

Nyní hledejme průsečík této funkce s osou x, hodnoty peněz snížíme na desetitisícinu a pro zjednodušení ještě provedeme substituci $x = 1 + r$. Dostáváme tedy:

$$y = 5 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - x - 7.$$

Hodnota hledaného x musí být větší než 1, neboť portfolio prokazuje kladný výnos (s nulovým výnosem bychom měli na konci hodnotu portfolia jen 60 tisíc Kč). Pomocí první derivace funkce y podle x nalezneme stacionární body, tj. body podezřelé z lokálních extrémů:

$$y' = 15 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 1 = 0.$$

Přibližná hodnota stacionárních bodů je $x_1 \doteq -0{,}424$ a $x_2 \doteq 0{,}157$. Podle znaménka první derivace jednoduše zjistíme, že na intervalu $(-\infty; x_1)$ je funkce rostoucí, na intervalu $(x_1; x_2)$ je klesající a na intervalu $(x_2; +\infty)$ je opět rostoucí. Nás zajímá jen poslední interval, protože lokální maximum v bodě x_1 má y-ovou souřadnici zápornou. Monotonie funkce na tomto intervalu zajišťuje existenci maximálně jednoho průsečíku grafu funkce s osou x. Z předpisu funkce velmi jednoduše nalezneme potřebné funkční hodnoty:

$$f(1) = -1 \text{ a } f(2) = 39$$

a pomocí aproximace nalezneme

$$f(1{,}052\,87) = -0{,}000\,082\,051\,85 \quad \text{a} \quad f(1{,}052\,88) = +0{,}000\,116\,345.$$

Vrátíme-li se k substituci $x = 1 + r$ zjistíme, že hodnota r náleží intervalu (5,287 %; 5,288 %) a nemůže tedy být 20,22 %, jak je uvedeno v knize. Připomeňme, že vypočítané *r* udává desetidenní výnosovou míru a hledaná měsíční výnosová míra je pak její trojnásobek.

Novému vydání musím vytknout to, že autoři neodstranili tiskové chyby předešlého vydání. Když porovnávám text nového vydání s předešlým, v němž mám nalezeno několik chyb, jsou opět na stejných místech. Uveďme dvě z nich.

Příklad 10-2 ([K5], str. 176–177; resp. [K6], str. 176–177)

V části vzorce je chybně dosazena úroková míra – na místo 4 % uvedeno 5 % z jiné části příkladu, ale výsledek je správný:

$$a_{p.m.} = \frac{1\,500\,000 \cdot \frac{0{,}04}{12} \cdot \left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right)^{10\cdot 12}}{\left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)^{10\cdot 12} - 1} = 15\,187.$$

Správně mělo být:

$$a_{p.m.} = \frac{1\,500\,000 \cdot \frac{0{,}04}{12} \cdot \left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)^{10\cdot 12}}{\left(1 + \frac{0{,}04}{12}\right)^{10\cdot 12} - 1} = 15\,187.$$

Příklad 13-3 ([K5], str. 214; resp. [K6], str. 214)

Chybně je uvedena a použita 10% kuponová sazba nebo je špatně proveden výpočet:

$$r_R = \frac{C}{P_0} + \frac{P_k - P_0}{k \cdot P_0} = \frac{100}{950} + \frac{1150 - 950}{1 \cdot 950} = 0{,}221.$$

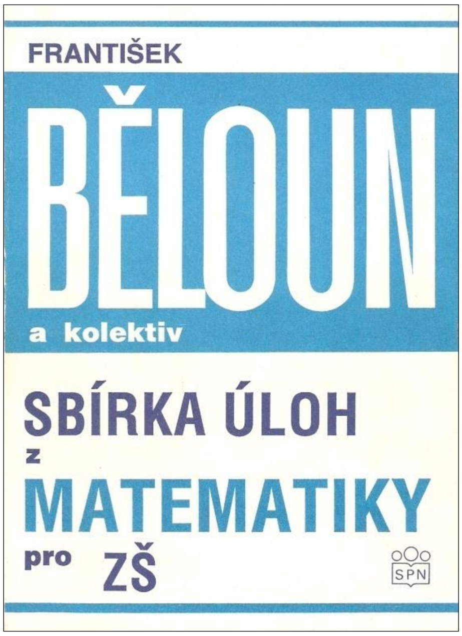
Výsledek odpovídá 1% kuponové sazbě. Pak jsou dosazeny hodnoty:

$$r_R = \frac{C}{P_0} + \frac{P_k - P_0}{k \cdot P_0} = \frac{10}{950} + \frac{1150 - 950}{1 \cdot 950} = 0{,}221.$$

Stejné hodnoty s touto chybou jsou použity v *příkladu 13-4* řešeného na straně 216 v obou vydáních.

6.3 Učebnice a sbírky pro základní školy

František Běloun a kolektiv: *Sbírka úloh z matematiky pro základní školy*, 6. přepracované vydání, SPN, Praha, 1992, 204 stran.



Bez této sbírky si žádný žák končící základní školu a připravující se na přijímací zkoušky z matematiky nedokázal své studium představit. O její vznik se přičinili autoři: František Běloun, Ivan Bušek, Vlastimil Macháček, Jana Müllerová, Květa Sovíková a Václav Šůla. První vydání bylo určeno pro první absolventy tzv. nové koncepce základní školy s osmiletou docházkou. Mezi ně jsem patřil také já a jako většina žáků osmé třídy základní školy ve školním roce 1983–84 jsme ji se svědomitou učitelkou matematiky zcela propočítali. O její kvalitě nemůže nikdo, kdo její příklady vypočítal, pochybovat.

Uveďme pro zajímavost jednotlivá vydání:

- 1. vydání, SPN, Praha, 1984, 312 stran;
- 2. vydání, SPN, Praha, 1985, 312 stran;
- 3. doplněné vydání, SPN, Praha, 1985, 387 stran;
- 4. vydání, SPN, Praha, 1986, 387 stran;
- 5. vydání, SPN, Praha, 1987, 387 stran;
- 6. přepracované vydání, SPN, Praha, 1992, 204 stran;
- 7. vydání, SPN, Praha, 1994, 206 stran;
- 8. upravené vydání, SPN, Praha, 1998, 254 stran.

Zaměřme se na zlom mezi pátým a šestým vydáním. Podívejme se na třetí kapitolu ve starším vydání [B5] nazvanou *Úlohy na procenta* a v novějším [B6] *Procenta*. Ve vydání [B5] nenarazíme na jedinou úlohu, která by operovala s uložením peněz. Drtivá většina úloh na procvičení procent zmiňuje JZD, traktoristy, pionýry a podobně. Následující vydání [B6] z roku 1992 obsahuje tři úlohy na jednoduché úrokování. Právě těmito úlohami se finanční matematika vrátila na základní školy jako praktické využití znalostí procent. Obávám se však, že rozsahu z období Rakousko-uherské monarchie a první republiky již nikdy nedosáhne.

Uveďme zmíněné tři úlohy:

32. Vypočítejte, o kolik Kčs vzroste uložený vklad 6 450 Kčs za jeden rok, je-li úročen 4,5 % za rok.

33. Vklad byl uložen jeden rok při ročním úroku 7,5 %. Po připsání úroků vzrostl na částku 36 012,50 Kčs. Určete původní vklad.

34. Vklad 27 500 Kčs byl uložen čtvrt roku při ročním úroku 3,6 %. O jakou částku vzrostl?

([B6], str. 29, výsledky: 32. nárůst o 290,25 Kčs, 33. původní vklad 33 500 Kčs, 34. nárůst o 247,50 Kčs)

Jako žák jsem tuto sbírku velmi ocenil, neboť pokrývá všechna témata matematiky základní školy. Navíc náročnější úlohy byly odlišeny hvězdičkou. Bohužel současný trend přijímacího řízení nenutí žáky k rozsáhlé přípravě na přijímací zkoušky na střední školy. Podle zpráv, které mám od svých kolegů ze základních škol, je procento počtářů této sbírky mizivé. V porovnání s obdobím druhé poloviny osmdesátých let, kdy téměř každý z žáků, jenž se hlásil na střední školu, vypočítal většinu úloh této sbírky, je tento trend alarmující.

Peter Krupka: *Sbírka úloh z matematiky pro 2. stupeň základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií, Aritmetika, algebra, funkce,* 1. vydání, Global, Praha, 1995, 359 stran.

S touto rozsáhlou dvoudílnou sbírkou úloh pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií jsem se setkal a ocenil ji až jako učitel. První díl pokrývá kromě geometrie všechna témata matematiky základní školy a je tedy pro studenty prvních ročníků středních škol velmi vhodný k opakování a oživení probrané látky. Druhý díl nazvaný *Geometrie* obsahuje planimetrii, úlohy s rovinnými obrazci, tělesy, tj. konstrukce, výpočty obvodů, obsahů, povrchů a objemů.

První díl sbírky, na nějž jsem se při analýze zaměřil, se díky své kvalitě dočkal několika vydání:

- 1. vydání, Global, Praha, 1995, 359 stran;

- 2. vydání, Global, Praha, 1996, 359 stran;
- 3. přepracované vydání, Prometheus, Praha, 2002, 367 stran;
- 4. vydání, Prometheus, Praha, 2006, 367 stran.

Počet příkladů v tomto dílu sbírky je více než čtyřnásobný oproti sbírce [B5] či její novější verzi [B6]. Také v ní jsou označeny složitější úlohy. Na místo hvězdičky autor použil puntík, respektive dva u velmi náročných úloh. Navíc je zde uvedena kapitola *Nápovědy*, která pomáhá žákům a studentům při samostatném tréninku.

Úlohy z finanční matematiky nalezneme v deváté kapitole nazvané *Procenta*, a to v její druhé podkapitole nazvané *Slovní úlohy*. Je zde 48 úloh, z nichž šest se zabývá úročením vkladů. Uveďme dvě z nich, které vzhledem k použití složeného úrokování přesahují rozsah sbírky [B6].

2.32 Vklad na vkladní knížce je úročen 11 %. Kolik je třeba na knížku uložit, abychom mohli za tři roky vybrat 10 000 Kč? S vkladem během té doby nemanipulujeme.

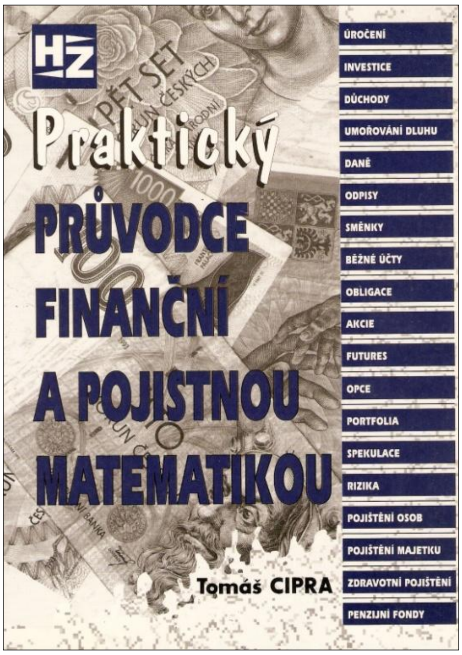
2.34 Kolika procenty by musel být úročen vklad na vkladní knížce, aby se vklad zdvojnásobil po pěti letech?

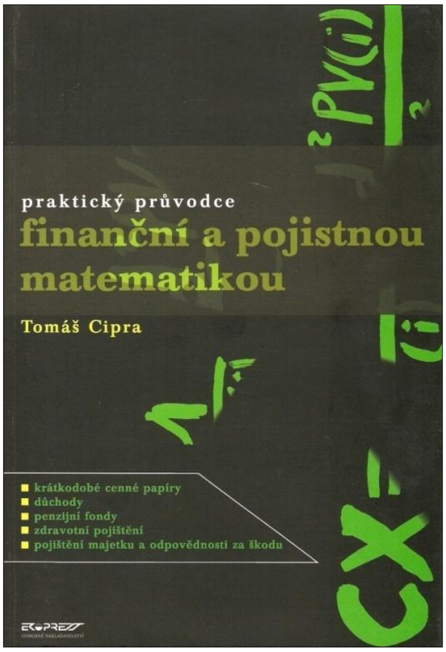
([KR], str. 227, výsledky: 2.32 požadovaný vklad 7 312 Kč, 2.34 úroková míra 14,87 %, v nápovědách autor opakovaně úročí a sestavuje rovnice: třikrát úročit = 10 000, tj. $1{,}11 \cdot 1{,}11 \cdot 1{,}11 \cdot x = 10\,000$ Kč; resp. $x^5 = 2$)

Na sbírce oceňuji zejména její tematickou bohatost a množství úloh od těch nejjednodušších až k dosti složitým. Výjimečností jsou nápovědy k úlohám. Z pohledu rozsahu finanční matematiky se však nejedná o nijak zvláštní sbírku. Objevuje se v ní jednoduché i složené úrokování, ale úlohy nejsou nijak komplikované.

6.4 Praktický průvodce

Tomáš Cipra: *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou,*
1. vydání, HZ, Praha, 1995, 320 stran
(2. vydání, Ekopress, Praha, 2005, 308 stran).





V této rozsáhlé publikaci autor velmi podrobně vykládá základní kapitoly finanční matematiky, objasňuje všechny podstatné produkty finančních ústavů a zabývá se také pojištěním. Navazuje tak na své dřívější publikace *Finanční matematika v praxi* (1994) a *Pojistná matematika v praxi* (1993).

Autor danou problematiku přednáší na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze a na Vysoké škole ekonomické v Praze. Knihu pojal jako ucelenou učebnici a výkladový slovník finanční a pojistné matematiky nejen pro studenty příslušných vysokých škol, ale snažil se látku přístupně prezentovat i široké veřejnosti. Veškeré uvedené početní postupy předvedl na praktických příkladech. V závěru knihy připojil množství užitečných finančních tabulek, které známe z učebnic první poloviny dvacátého století, a které umožňují, aby počtáři vystačili s pouhým násobením bez mocnin.

Učebnice byla povolena ediční komisí Fakulty informatiky a statistiky Vysoké školy ekonomické v Praze dne 9. 5. 1995 jako vysokoškolský učební text a byla také doporučena MŠMT ČR dne 16. 6. 1995, č. j. 17603/95-23, jako učební pomůcka pro gymnázia a střední školy obchodního zaměření. Její druhé vydání s těmito doložkami vyšlo v roce 2005 v nezměněné struktuře v nakladatelství Ekopress v Praze. Aktualizace se týkaly zejména finančních a pojistných produktů a úrokových měr. Rozšířeny byly finanční tabulky a doplněn byl výklad na výpočtovou metodiku, tj. částečné vynechání „stárnoucích“ praktických detailů.

Obsah učebnice

1. Úvod (3 strany);
2. Jednoduché úročení a diskontování (13 stran);
3. Krátkodobé cenné papíry (18 stran);
4. Složené úročení (16 stran);
5. Časová hodnota peněz a investiční rozhodování (14 stran);
6. Důchody (15 stran);
7. Umořování dluhu (5 stran);
8. Obligace (30 stran);
9. Akcie (38 stran);
10. Termínované obchody (21 stran);
11. Spekulace s cennými papíry (11 stran);
12. Analýza portfolia (17 stran);
13. Co je pojištění (2 strany);
14. Úmrtnostní tabulky (16 stran);
15. Výpočet pojistného v pojištění osob (16 stran);
16. Pojistná rezerva v pojištění osob (8 stran);
17. Penzijní fondy (6 stran);
18. Zdravotní pojištění (3 strany);
19. Pojištění majetku a odpovědnosti za škody (12 stran);

Příloha: Finanční tabulky (36 stran);

Literatura (7 stran);

Rejstřík (12 stran).

Charakteristika průvodce

Vzhledem k našemu zájmu se zaměříme na prvních dvanáct kapitol. V nich nalezneme 86 podrobně a přehledně řešených příkladů a vedle klasického řešení na

„papír“ autor uvádí návody na řešení v tabulkovém procesoru Excel. Všechny příklady mají kvalitní komentář.

Při studování této učebnice nás zaujme precizní grafická struktura – definice pojmů, znění a následné řešení příkladů, množství doplňujících poznámek, systematické značení proměnných finanční matematiky atd.

Autor svědomitě dodržuje symboliku běžnou ve finančnictví. Pokud tato značení uváděli ve svých knihách jiní autoři (např. [E1]), v samotných výpočtech a odvozování jsme se jim mohli vyhnout. Právě značení proměnných finanční matematiky (např. $\ddot{a}_{4n\rceil j/4}$ – současná hodnota jednotkového předlhůtního čtvrtletního důchodu) mi činilo při studiu prvotní problémy. Ať už hovořím za studenty středních škol či jejich učitele matematiky, nesetkáváme se a nepracujeme běžně s těmito symboly.

V učebnici objevíme rozsáhlou přílohu s finančními tabulkami a právě proto je nezbytné, abychom si zvykli na používání výše zmíněných symbolů pro finanční proměnné. Jejich vyhledání v konkrétních tabulkách nám následně usnadní výpočty a ušetří čas. Je zde ovšem skryté nebezpečí, že nás přestane zajímat původní způsob výpočtu hodnot těchto proměnných a matematická podstata se skryje. Řešení problému zkrátíme na minimum, ale nebudeme vidět matematiku, budeme jen mechanicky násobit a dělit. Na tento „nešvar“ jsem upozornil v této kapitole již dříve.

Tato učebnice označená jako praktický průvodce obsahuje kapitoly finanční matematiky, které jsem rozebíral již v předešlých učebnicích. Zaměřím se proto jen na ukázku definice a řešení dvou vybraných příkladů.

Kapitola 4.5. *Reálná úroková míra* ([C1], str. 48–50)

***Inflace** je znehodnocení měny v důsledku růstu cen. Obvykle se měří pomocí tzv. cenových indexů založených na maloobchodní ceně spotřebního koše vybraných položek zboží a služeb (např. Retail Price Index RPI ve Velké Británii, Consumer Price Index CPI v USA, index spotřebitelských cen v ČR).*

***Příklad 4.5.2.** Jaká je čistá reálná míra zisku, jestliže hrubá nominální míra zisku je 13 %, daň ze zisku je 25 % a míra inflace je 10,5 %? (Aby posouzení zisku bylo realistické, je nutné vzít v úvahu nejen daně, ale také inflaci. Často se pak ukáže, že zdánlivý zisk je vlastně ztráta.)*

***Řešení:** Čistá nominální míra zisku je*

$$i_{nom} = 0{,}13 \cdot 0{,}75 = 0{,}097\,5,$$

tj. 9,75 %.

Reálná míra zisku je pak podle (4.5.2)

$$i_{real} = \frac{i_{nom} - i_{infl}}{1 + i_{infl}} = \frac{0{,}975 - 0{,}105}{1 + 0{,}105} = -0{,}006\,8,$$

tj. –0,68 %.

Ve skutečnosti se tedy jedná o ztrátu ve výši 0,68 %. Jestliže pro srovnání počítáme i_{real} *pomocí aproximace z (4.5.2), dostaneme srovnatelný výsledek*

$$i_{real} \sim i_{nom} - i_{infl} = 0{,}087\,5 - 0{,}105 = -0{,}007\,5, \textit{ tj. } -0{,}75\ \%.$$

Během řešení autor nevynechává žádné podstatné kroky a studujícímu vyloží také další možné varianty řešení. V tomto příkladu se konkrétně jedná o postup využívající aproximaci. Pro snadnou orientaci v učebnici autor označil každý důležitý vzorec číslem kapitoly a pořadovým číslem v kapitole a při řešení příkladů se odvolává na toto značení, což ocení každý student, jemuž to ušetří čas při vyhledávání.

Kapitola *6.4. Hypoteční úvěr* ([C2], str. 82)

Příklad 6.4.1. *Klient chce koupit nemovitost za 1 450 000 Kč. Při uzavření smlouvy zaplatí hotově 450 000 Kč (tj. 31 % ceny) a zbytek má splatit v měsíčních hypotečních splátkách vždy na konci měsíce během 20 let. Kolik činí měsíční splátka, je-li úroková míra připadající na vrub klienta 5,4 %?*

Řešení: *Podle postupů z této kapitoly (viz také příklad 6.2.5) pro*

PV = 1 450 000 – 450 000 = 1 000 000, j = 0,054, m = 12, n = 20 je

$$K = PV/a_{mn\rceil j/m} = 1\,000\,000/a_{12\cdot 20\rceil 0{,}054/12} = 1\,000\,000/a_{240\rceil 0{,}0045} =$$

$$= 1\,000\,000/\frac{1-(1/1{,}0045)^{240}}{0{,}0045} = 1\,000\,000/146{,}573\,49 = 6\,823\ K\text{č}.$$

V Excelu bychom příslušnou výši měsíční splátky z tohoto příkladu snadno zjistili pomocí finanční funkce tvaru

=*PLATBA*(5,4%/12;240;1000000;1).

Ve jmenovateli vzorce vidíme současnou hodnotu jednotkového polhůtního měsíčního důchodu, kterou však nemůžeme v příslušné tabulce nalézt vzhledem k atypické úrokové míře. Řešitel tedy musí hodnotu 146,573 49 vypočítat podle vzorce

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i},$$

jenž zná z předešlých rozborů (i – úroková míra pro jedno úrokovací období, n – počet úrokovacích období, v – diskotní faktor, tj. odúročitel).

Pokud by úroková míra byla násobkem poloviny procenta (např. 5,5 %), nalezneme hodnotu měsíčního důchodu v tabulce 7 nazvané *Jaká částka umožní platby 1 Kč vždy na konci měsíce během dané doby?* ([C2], str. 288). V řádku 20 roků ve sloupci 5,5% roční úrokové míry → 145,3726.

Autor vybral vhodné, názorné a praktické příklady, na nichž si student může ověřit své znalosti nastudované v předcházející teoretické části.

Hodnocení učebnice

Strukturu a výklad doplněný přehledem podrobných definic následovaným pečlivě vyřešeným rozumným počtem praktických příkladů ocení každý zájemce o studium finanční matematiky.

Středoškolští studenti, především ti, kteří budou z nějakého důvodu donuceni k samostudiu, narazí na několik úskalí – v některých pasážích jsou přílišné podrobnosti (jedná se o vysokoškolský text) a je používáno nejasné a komplikované značení zavedené ve finančnictví. Domnívám se, že ne malé procento raději sáhne po jiné učebnici a s výbavou, kterou tam získají, se možná později vrátí k tomuto kvalitnímu a obsáhlému průvodci.

Člověk, který se zabývá nebo chce zabývat prací s běžnými produkty finančních ústavů, zde nalezne odpovědi na drtivou většinu svých otázek. Pro začátečníka v průvodci postrádám podrobný výklad a rozbor různých typů spoření podle frekvence vkladů a jejich časového rozpisu (např. ukládání konstantní částky na počátku měsíce po dobu více úrokovacích období, ukládání konstantní částky na konci měsíce po dobu více úrokovacích období), různých typů výplat důchodu (např. důchod vyplácený na počátku měsíce po dobu více úrokovacích období, důchod vyplácený na konci měsíce po dobu více úrokovacích období). Také při výpočtech je hodně užíváno vyhledávání hodnot ve finančních tabulkách a student není vždy nucen „vidět“, jak se k nim dospělo. Autor předpokládá, že čtenář tyto vědomosti získal již během dřívějšího studia.

Učebnice není matematicky příliš náročná, autor svědomitě používá výhradně středoškolský matematický aparát. Zaměřuje se však především na rozsáhlý a velmi podrobný výklad, definice finančních objektů a práci s nimi. Řešení úloh nejsou komplikovaná, postupy jsou jasné, stručné a výstižné.

Tento praktický průvodce je dalším významným nástrojem podporujícím finanční vzdělanost. Jeho kvality (odbornost, struktura, přehlednost i grafika) ho bezpochyby řadí na přední místo našich současných učebnic. Myslím si, že většina studentů, kteří nejsou obeznámeni se základy finanční matematiky, jej bude pokládat za velmi náročný. Jako rozšiřující či doplňkovou učebnici bych jej však doporučil i běžnému uživateli finančních produktů. Navíc bych vyzdvihl, že obsahuje rozsáhlé a přehledné kapitoly o pojistné matematice, do níž „vidí“ jen velmi malé procento populace.

6.5 Shrnutí

Z předchozí analýzy vidíme, že nových učebnic a sbírek věnujících se finanční matematice vzniklo a vzniká značné množství. Publikace se liší šířkou, hloubkou, úrovní a náročností teorie, odvozováním vzorců, rozbory řešených příkladů, množstvím úloh na procvičení atd. Každý zájemce o toto téma má tedy možnost vše potřebné nalézt, prostudovat, propočítat a pochopit. Propočítání je velmi důležité, neboť slouží k pochopení postupu, hlubšímu porozumění studovanému problému i ke zlepšení odhadu výhod a rizik. Z výše uvedeného důvodu nestačí seznámit se a setrvat jen u jedné učebnice, neboť pohled jiného autora může přinést lepší pochopení a podnítit širší nadhled. Může také vést k odhalení numerických, tiskových, přepisových a jiných chyb, zanedbání podmínek či opomenutí reálných situací. Každému mohu poskytnout jednu důležitou radu, kterou již určitě od svých učitelů mnohokrát slyšel: *Při studiu určitého tématu musíte pracovat s více než jedním zdrojem informací, nemůžete se spolehnout na jedinou osamělou knihu.*

Porovnejme z pohledu finanční matematiky hodnocené publikace pro střední školy přehledně v tabulce.

publikace	odvozování vzorců	počet řešených příkladů	počet neřešených příkladů
E1	ano	38	30
E2	ano	13	42
M5	ne	17	14
O1	ano	48	234
O2	ano	4	12
O3	ano	32	59
OR	ne	35	35
R1	ne	123	141
K5	ano	111	0
K6	ano	115	0
C1/C2	ano	86	0

Když k tomuto výčtu knih přidáme další existující učebnice, sbírky a průvodce (např. učební texty Tomáše Cipry, sbírky a učebnice Oldřicha Odvárky nebo Bohuslava Eichlera, průvodce Otakara Macháčka, Ludvíka Prouzy a Josefa Jílka), má každý, kdo má zájem, k dispozici dostatečně širokou škálu vhodného studijního materiálu. Jestliže se tedy někdo „spálí", protože podcenil přípravu, či přecenil své znalosti nebo informace získané například při pohovoru při sjednávání úvěru či z reklamních letáků finančních institucí, může to dávat za vinu jen sobě samému.

6.6 Seznam literatury a internetových zdrojů

Obecná literatura

[VK] Alena Votálišová, Hana Kasíková a kolektiv: *Pedagogika pro učitele,* 1. vydání, Grada, Praha, 2007, 402 stran.

Učebnice

[B5] František Běloun a kol.: *Sbírka úloh z matematiky pro základní školy,* 5. vydání, SPN, Praha, 1987, 387 stran.
(1. vydání – 1984, 312 stran; 2. nezměněné vydání – 1985, 312 stran; 3. doplněné vydání – 1985, 387 stran; dotisk 3. doplněného vydání – 1986, 387 stran; 4. vydání – 1986, 387 stran; 5. vydání – 1987, 387 stran; 6. přepracované vydání – 1992, 204 stran; 7. vydání – 1994, 206 stran; 8. upravené vydání – 1998, 254 stran)

[B6] František Běloun a kol.: *Sbírka úloh z matematiky pro základní školy,* 6. přepracované vydání, SPN, Praha, 1992, 204 stran.

[C1] Tomáš Cipra: *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou,* 1. vydání, HZ, Praha, 1995, 320 stran.

[C2] Tomáš Cipra: *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou,* 2. vydání, Ekopress, Praha, 2005, 308 stran.

[E1] Bohuslav Eichler: *Úvod do finanční matematiky,* 1. vydání, Septima, Praha, 1993, 80 stran.

[E2] Bohuslav Eichler: *Hospodářské výpočty pro střední školy,* 1. vydání, Fortuna, Praha, 2001, 120 stran.

[K] Jarmila Radová, Petr Dvořák: *Finanční matematika pro každého,* 1. vydání, Grada, Praha, 1993, 170 stran.
(2. vydání – 1997, 224 stran; 3. rozšířené vydání – 2001, 264 stran; 4. vydání – 2003, 260 stran; 5. zcela přepracované vydání – 2005, 288 stran; 6. aktualizované vydání – 2007, 296 stran; 7. aktualizované vydání – 2009, 293 stran)

[K5] Jarmila Radová, Petr Dvořák, Jiří Málek: *Finanční matematika pro každého,* 5. zcela přepracované vydání, Grada, Praha, 2005, 288 stran.

[K6] Jarmila Radová, Petr Dvořák, Jiří Málek: *Finanční matematika pro každého,* 6. aktualizované vydání, Grada, Praha, 2007, 296 stran.

[KR] Peter Krupka: *Sbírka úloh z matematiky pro 2. stupeň základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií, Aritmetika, algebra, funkce*, 1. vydání, Global, Praha, 1992, 359 stran.

[M5] Jan Mlčoch: *Ekonomika pro střední školy, 5. díl: Bankovnictví a pojišťovnictví. Daně a cla*, 1. vydání, Fortuna, Praha, 1992, 54 stran.

[O1] Oldřich Odvárko: *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy*, 1. vydání, Prometheus, Praha, 2005, 200 stran.

[O2] Oldřich Odvárko: *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*, 1. vydání, Prometheus, Praha, 1995, 128 stran.
(2. vydání – 2001, 126 stran; 3. vydání – 2008, 126 stran)

[O3] Oldřich Odvárko: *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť – Posloupnosti a finanční matematika*, 1. vydání, Prometheus, Praha, 2002, 124 stran.

[OR] Oldřich Odvárko, Jarmila Robová: *Finanční matematika s kalkulačkami Casio*, 1. vydání, Prometheus, Praha, 2005, 100 stran.

[R1] Jarmila Radová, Vladislav Chýna, Jiří Málek: *Finanční matematika v příkladech*, 1. vydání, Professional Publishing, Praha, 2005, 160 stran.

Internetové zdroje

[I01] Národní pedagogická knihovna J.A. Komenského, Praha: *http://www.npkk.cz*.

[I02] Online katalog Národní knihovny ČR: *http://www.nkp.cz*.

Závěr

Prošli jsme s finanční matematikou více než 100 let a dostali jsme se do současnosti. Mnohdy to byla velmi trnitá cesta a rány osudu uvrhly tuto důležitou kapitolu matematiky do ústraní až zapomnění. Ani zvýšená nutnost a potřeba znát její aplikace, ani vědomí odstrašujících případů bankrotů a jiných finančních selhání neurychlilo její renesanci. Ze všech médií se na nás hrnou informace o finančních problémech na jedné straně a „úžasné“ nabídky finančních úvěrů a hypoték na straně druhé. Kdy si všichni odpovědní uvědomí své povinnosti pro budoucí generace? Jsou finanční poradci stále hodnoceni pouze podle počtu sjednaných smluv? Nebo i za počet splácení schopných klientů? Tito poradci by spolu se školami měli nést největší míru odpovědnosti!

Současný stav finanční vzdělanosti u nás není vůbec uspokojivý. Množství občanů přicházejících do bank, spořitelen a záložen má jen základní představu o fungování finančního světa, je však také nezanedbatelné procento těch, kteří se stále nechávají zlákat různými letáky a reklamami, které podávají částečné, zkreslené nebo přímo lživé informace, v lepším případě podstatu věci zobrazují nejdrobnějším možným písmem. Je zřejmé, že se snaží vydělávat na neznalosti potenciálních klientů. Vždyť mnoho lidí si ani nepředstaví rozdíl mezi poskytnutou částkou a součinem hodnoty splátky s jejich počtem. Je nutné podporovat rozvoj alespoň základní finanční vzdělanosti, protože zadlužení z neznalosti či nedbalosti se týká celé společnosti a nejen postiženého jedince.

Problém nedostatečné finanční gramotnosti si uvědomuje řada lidí a institucí, a proto věnují zlepšení situace mnoho času a prostředků. Uveďme nejdůležitější výsledky jejich všestranných snah.

- Národní ústav odborného vzdělávání vydal tiskovou zprávu *Finanční gramotnost: nový prvek školní výuky* (Praha, 29. září 2008, 2 strany), v níž informuje o vydání příručky pro učitele základních a středních škol. Příručka nazvaná *Finanční gramotnost – obsah a příklady z praxe škol* (Praha, 2008, 100 stran) byla připravena v rámci projektu MŠMT autorským týmem pod vedením Petra Klínského. Příručka si neklade za cíl být učebnicí, ale chce učitele seznámit s tím, co se rozumí finanční gramotností, co je jejím obsahem, a proto vysvětluje její standardy stanovené a schválené v rámcově vzdělávacím programu (RVP) pro střední školy. Po jejím prostudování získají učitelé jasnou představu o náplni výuky základů finanční matematiky, která je podložena množstvím praktických příkladů.

- Ministerstvo financí ČR, Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR a Ministerstvo průmyslu a obchodu ČR navrhlo *Systém budování finanční gramotnosti na základních a středních školách.* Jedná se o dokument vypracovaný na základě usnesení vlády č. 1594 ze dne 7. prosince 2005 (16 stran); obsahuje popis základních kroků finančního vzdělávání – východiska, standardy, programy, aktivity. Na internetu je k dispozici aktualizovaná verze z roku 2007. Vysvětluje především systém zavádění finanční gramotnosti na základních a středních školách, definuje finanční gramotnost a připomíná začlenění jejích standardů do RVP a následně do školních vzdělávacích programů (ŠVP) jednotlivých škol. Jako v předešlém případě se nejedná o učebnici, ale o stručný metodický pokyn objasňující náplň budoucí výuky finanční matematiky.
- Česká národní banka vystavila na svých internetových stránkách materiály nazvané *Ochrana spotřebitele a finanční gramotnost* (viz http://www.cnb.cz/cs/spotrebitel/index.html), které informují mimo jiné o učebnici autorů Michala a Evy Skořepových *Finanční a ekonomická gramotnost* (1. vydání, 2008, 197 stran). Na výše uvedené stránce lze nalézt obsah a ukázky z této učebnice. Vystavené texty jsou příkladem zdařilého manuálu pro učitele základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. V učebnici jsou podrobně zpracované standardy finanční gramotnosti. Nechybí ani odkazy na praktické situace a problémové úlohy. Učebnice však není příliš vhodná k samostudiu, neboť žák základní školy potřebuje užší spolupráci a přímý kontakt s vyučujícím. Na této internetové stránce mohou zájemci z řad učitelů nalézt termíny seminářů finanční gramotnosti určených právě jim.
- Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR vytvořilo výše zmíněný RVP, který mj. uvádí definici finanční gramotnosti a její členění. Určuje cíle výuky finanční matematiky na základních a středních školách (dokument je ke stažení na http://rvp.cz/informace/dokumety-rvp). Povinností každé základní a střední školy bylo při vypracovávání ŠVP respektovat tento dokument a začlenit příslušné kapitoly do osnov matematiky. Finanční

matematika je stručně zmíněna např. v *Rámcově vzdělávacím programu pro gymnázia* (Praha, 2007, 104 stran) v kapitole *5.2 Matematika a její aplikace* v části *Závislosti a funkční vztahy* na straně 24 je mezi očekávanými výstupy žáka uvedeno – *interpretuje z funkčního hlediska složené úrokování, aplikuje exponenciální funkci a geometrickou posloupnost ve finanční matematice*. Z mého pohledu, ze zkušeností a z informací, které jsem získal na několika školách, učitelé dost často vyčkávali a ve většině případů neprojevovali vlastní iniciativu k urychlení začlenění finanční matematiky do výuky.

- Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR vyhlásilo *soutěž Finanční gramotnosti pro základní a střední školy*; její první ročník proběhl ve školním roce 2009/2010 a pro velký ohlas byl na školní rok 2010/2011 vyhlášen druhý ročník (viz http://www.fgsoutez.cz). Třetí ročník vyhlášený na školní rok 2011/2012 se opět setkal se zájmem žáků a studentů. Okresních kol se v tomto ročníku zúčastnilo 43 552 soutěžících z 670 škol. Struktura a náplň soutěže je přehledná a výrazně motivuje k samostatnému studiu. Soutěží se v teoretických a praktických znalostech, jež patří do oblasti finanční gramotnosti. Soutěžící jsou rozděleni do dvou kategorií – druhý stupeň základních škol a střední školy. Každý ročník soutěže je čtyřkolový. První tři kola (školní, okresní a krajská) probíhají distanční elektronickou formou přes webové rozhraní. Čtvrté celostátní kolo probíhá v prostorách České národní banky v Praze za přítomnosti jejího guvernéra, poroty, médií a diváků. Výsledky soutěžících slouží také k ověření úrovně finanční gramotnosti, což je podle mého názoru druhý velký přínos vedle motivování žáků a studentů k účasti v této soutěži ze strany vyučujících a médií.

Informace získané různými průzkumy a anketami od našich spoluobčanů nejsou však příliš lichotivé. Například portál www.mesec.cz uveřejnil následující hrozivou větu: *„Pětinu Čechů osobní finance nezajímají, zhruba třetina považuje finanční plánování za zbytečné a čtvrtina nedokáže určit výnos z investice.“*

K uspokojivé finanční gramotnosti a správnému hospodaření s finančními prostředky je třeba vykonat ještě spoustu práce. Nabízejí se veřejné přednášky, besedy, nové učebnice, školení učitelů základních i středních škol, tisk rozumného množství kvalitních letáků vydávaných finančními ústavy pro všechny skupiny občanů apod. Je zajímavé, že zaměstnavatelé jsou ze zákona povinni zajistit svým zaměstnancům několik pravidelných školení, především jsou to *Bezpečnost a ochrana zdraví při práci* (*BOZP*) a *Požární ochrana* (*PO*). Proč by školení finanční gramotnosti nemohlo být v budoucnu jedním z nich? Bohužel se zde narazí na několik podstatných problémů – nebude stačit jen přednesení faktů, bude nutné pochopení zákonitostí, nebude stačit jeden půlden, bude nutná těsná zpětná vazba, bez níž by vše opět ztratilo smysl. Pokud by vláda začala o tomto způsobu povinného vzdělávání uvažovat, muselo by se nejprve vyřešit několik základních otázek – stanovení týmu odborníků, kteří určí frekvenci školení, počet hodin, sestaví studijní materiály a vyškolí první budoucích školitele. To je v tomto okamžiku jen mé zbožné přání, jak by to mohlo fungovat. V nejbližší budoucnosti je potřeba zajistit, aby finanční matematika nebyla jen formální náplní ŠVP na všech základních a středních školách, ale aby učitelé k její výuce přistupovali zodpovědně. Paralelně s tím je nutné podporovat školou povinnou mládež a motivovat ji k zájmu o finanční matematiku.

Reforma školních vzdělávacích programů bude nejschůdnější a řadu učitelů a možná i rodičů to také přiměje, aby nebyli k otázce finanční gramotnosti lhostejní. V současné době se stále častěji setkáváme s celoplošnými výzkumy, zejména na základních a středních školách, zaměřenými na posuzování úrovně znalostí žáků a studentů a jejich schopností, jak vědomosti použít. Kdyby jedním ze zkoumaných odvětví byla finanční vzdělanost, byl by to kvalitní nástroj, jak přimět školy zodpovědně se postavit k otázce finanční gramotnosti. Zde vidím nejkratší a také nejschůdnější cestu nápravy. Podle mého názoru by stačilo, aby například Ministerstvo školství určilo komisi pro stanovení základních požadavků, která by navázala na práci týmu Petra Klínského zmíněného výše. Školy by v časovém horizontu maximálně jednoho roku mohly obdržet dokument, v němž by bylo jasně stanoveno povinné učivo finanční matematiky pro příslušný typ školy. Počínaje následujícím rokem by byla finanční gramotnost nedílnou součástí celoplošných průzkumů a každá škola by se musela zodpovídat z případného fiaska svých žáků, resp. studentů. Povinný obsah finanční matematiky by se mohl postupně rozvíjet. Zpočátku bychom velmi ocenili základní znalosti jednoduchého a složeného úrokování bez komplikovaných úloh. V dalších letech by se obsah krok za krokem rozšiřoval. Podle mne by jednotlivé etapy byly:

- jednoduché a složené úrokování v základních úlohách;
- splácení dluhu a spoření;
- jednoduché a složené úrokování v náročnějších případech;

- tvorba důchodů;
- dluhy a důchody v náročnějších případech;
- …

Podrobnější strukturu a náplň výuky by určili odborníci se zkušenostmi z této oblasti, tj. vyučující finanční matematiky na vysokých školách, např. na MFF UK v Praze, VŠE v Praze, Vysoké škole finanční a správní v Praze, Bankovním institutu v Praze. Ovšem distribuci a povinnosti škol z toho plynoucí by muselo kontrolovat Ministerstvo školství. Poté již žádný ředitel školy nebude moci hledat výmluvy, proč ve školním vzdělávacím programu není téměř zařazena finanční matematika. Ze své vedoucí pozice může zajistit vyučujícím matematiky (resp. ekonomických předmětů) kvalitní školení z nabídky Ministerstva školství. V nedávných letech probíhala školení počítačové gramotnosti, která byla rozdělena na základní a pokročilou úroveň. Toto rozdělení a propracované metody školení bychom mohli využít i při zvyšování finanční gramotnosti. Základní úroveň by byla povinná pro každého učitele a pokročilá pro každého učitele, který bude finanční matematiku vyučovat. Při ideálním průběhu, pokud částečně opomineme rozhodovací prodlevy mezi jednotlivými kroky, dostáváme tyto etapy:

- první rok: tvorba dokumentů;
- druhý rok: školení základní úrovně;
- třetí rok: rozšíření dokumentů, zavedení základní úrovně do výuky na základních a středních školách;
- čtvrtý rok: školení pokročilé úrovně;
- pátý rok: zavedení pokročilé úrovně do výuky na středních školách.

Po polovině dekády bychom mohli sklízet první „ovoce" a pak již jen aktualizovat dokumenty a odstraňovat nedostatky zavedeného systému.

Myslím si, že nejsem první, koho napadlo popsané řešení. Zbývá nalézt hybnou sílu a ochotu k prosazení potřebného námětu a přesvědčení příslušných orgánů o nezbytnosti, nutnosti a prospěšnosti tohoto řešení. Impulsy, z nichž některé jsem jmenoval výše, nechávají bohužel řadu lidí chladnými.

Seznam literatury a internetových zdrojů

Obecná literatura

[BE] Martina Bečvářová: *Česká matematická komunita v letech 1848 – 1918*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, 1. vydání, Matfyzpress, Praha, 2008, 355 stran.

[BŠ] Bohumil Bydžovský: *Naše středoškolská reforma*, 1. vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, Praha, 1937, 331 stran.

[CŠ] Otokar Chlup: *Cesta k socialistické škole*, výbor z díla uspořádali Karel Galla, Jaroslav Doležal a Richard Sedlář, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1965, 345 stran.

[JR] Jana Jarošová: *Václav Příhoda a jeho přínos české reformní pedagogice*, bakalářská práce, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Teologická fakulta, katedra pedagogiky, České Budějovice, 2009, 44 stran.

[MM1] Martin Melcer: *Možnost uložení a získání finančních prostředků*, časopis Učitel matematiky 15(2006/2007), č. 1, Praha, str. 47–53.

[MM2] Martin Melcer: *Možnost uložení a získání finančních prostředků (2)*, časopis Učitel matematiky 15(2006/2007), č. 2, Praha, str. 107–113.

[MM3] Martin Melcer: *Možnost uložení a získání finančních prostředků (3)*, časopis Učitel matematiky 15(2006/2007), č. 3, Praha, str. 181–190.

[MM4] Martin Melcer: *Možnost uložení a získání finančních prostředků (4)*, časopis Učitel matematiky 15(2006/2007), č. 4, Praha, str. 247–256.

[MN] Jiří Mikulčák: *Nástin dějin vzdělávání v matematice (a také školy) v českých zemích do roku 1918*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 42, 1. vydání, Matfyzpress, Praha, 2010, 312 stran.

[MP] Jiří Mikulčák: *Programovaná učebnice moderní matematiky*, str. 33–42, časopis Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, volume 13(1968), č. 1, JČMF, Praha, 1968, 404 stran.

[MŠ] František Morkes: *Kapitoly o školství, o ministerstvu a jeho představitelích (období let 1848–2001)*, 1. vydání, Pedagogické muzeum J. A. Komenského, Praha, 2002, 122 stran.

[MU] František Morkes: *Učitelé a školy v proměnách času (pokus o základní chronologii 1774–1946)*, 1. vydání, Pedagogické muzeum, Plzeň, 1999, 59 stran.

[PŠ] Jiří Potůček: *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900–1945, I. díl, Vznik a vývoj jednotlivých typů škol a jejich osnov matematiky*, 1. vydání, Pedagogické centrum, Plzeň, 1998, 50 stran.

[PV] Jiří Potůček: *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900–1945*, díl 1 a 2, Pedagogické centrum, Pedagogická fakulta Západočeské univerzity, Plzeň, 1992, 1993, 55 stran, 42 stran.

[ŠI] Karel Šindelář: *Vzpomínka na akademika Bohumila Bydžovského*, str. 325–328, Časopis pro pěstování matematiky, ročník 105, číslo 3, Jednota československých matematiků a fyziků, Praha, 1980.

[TD] Dana Trkovská: *Geometrické výsledky a reformní aktivity Felixe Kleina*, str. 106–109, in M. Bečvářová (ed.): 28. mezinárodní konference Historie matematiky, Jevíčko, Matfyzpress, Praha, 2007, 122 stran.

[VJ] František Veselý: *100 let Jednoty československých matematiků a fyziků: 1862–1962*, předmluvu sepsal František Kahuda, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1962, 127 stran.

[VK] Alena Vališová, Hana Kasíková a kolektiv: *Pedagogika pro učitele*, 1. vydání, Grada, Praha, 2007, 402 stran.

Učebnice

[B1D] Bohumil Bydžovský: *Aritmetika pro IV. – VII. třídu škol středních, díl první*, 1. vydání, Jednota českých matematiků a fysiků, Praha, 1920, 187 stran.
(druhé až páté vydání – 1921–1924, 176 stran)

[B2D] Bohumil Bydžovský: *Aritmetika pro IV. – VII. třídu škol středních, díl druhý*, 1. vydání, Jednota českých matematiků a fysiků, Praha, 1920, 160 stran.
(2. vydání – 1921, 160 stran, 3. vydání – 1924, 144 stran)

[B4] Bohumil Bydžovský, Stanislav Teplý, František Vyčichlo: *Aritmetika pro IV. třídu středních škol*, 6. vydání, Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1934, 108 stran.

(7., v podstatě nezměněné vydání – 1940, 108 stran, dotisky 7. vydání – 1945–1948)

[B45] Bohumil Bydžovský: *Arithmetika pro IV. a V. třídu gymnasií a reálných gymnasií*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1910, 182 stran.
(2. vydání – 1913, 182 stran, 3. vydání – 1917, 182 stran)

[B5] František Běloun a kol.: *Sbírka úloh z matematiky pro základní školy*, 5. vydání, SPN, Praha, 1987, 387 stran.
(1. vydání – 1984, 312 stran; 2. nezměněné vydání – 1985, 312 stran; 3. doplněné vydání – 1985, 387 stran; dotisk 3. doplněného vydání – 1986, 387 stran; 4. vydání – 1986, 387 stran; 5. vydání – 1987, 387 stran; 6. přepracované vydání – 1992, 204 stran; 7. vydání – 1994, 206 stran; 8. upravené vydání – 1998, 254 stran)

[B57] Bohumil Bydžovský: *Arithmetika pro V. až VII. třídu škol reálných*, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1911, 196 stran.

[B58] Bohumil Bydžovský, Stanislav Teplý, František Vyčichlo: *Aritmetika pro V. – VII. třídu středních škol*, 6. vydání, Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1935, 212 stran.
(dotisk 6. vydání – 1947, 208 stran)

[B6] František Běloun a kol.: *Sbírka úloh z matematiky pro základní školy*, 6. přepracované vydání, SPN, Praha, 1992, 204 stran.

[B67] Bohumil Bydžovský: *Arithmetika pro VI. a VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1911, 156 stran.

[BC] Jan Bílek, Eduard Čech, Karel Hruša, Vítězslav Jozífek, Karel Prášil, Karel Rakušan: *Aritmetika pro druhou třídu středních škol*, 2. vydání, Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1951, 132 stran.
(1. vydání – 1950, 132 stran)

[BC1] Jan Bílek, Eduard Čech, Karel Hruša, Vítězslav Jozífek, Karel Prášil, Karel Rakušan: *Aritmetika pro druhou třídu středních škol*, 1. vydání, Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1950, 132 stran.

[BD] Petr Benda, Berta Daňková, Josef Skála: *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*, 4. upravené vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1968, 188 stran.

(1. vydání – 1959, 142 stran; 2. vydání – 1962, 135 stran; 3. nezměněné vydání – 1966, 135 stran; 5. upravené vydání – 1971, 189 stran; 6. upravené vydání – 1974, 189 stran; 7. upravené vydání – 1979, 189 stran; 8. přepracované vydání – 1983, 199 stran; 9. vydání – 1986, 199 stran; 10. vydání – 1988, 199 stran)

[BK] Vladimír Bruthans, Antonín Kejzlar: *Matematika – příručka pro přípravu na vysokou školu*, 1. vydání, Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1965, 164 stran.

[BM1] Rudolf Bendl, Jindřich Muk: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních, díl I.*, 1. vydání, Ústřední spolek českých professorů, Praha, 1910, 88 stran.
(2. změněné vydání – 1921, 130 stran, 3. obsahem podstatně nezměněné vydání – 1923, 128 stran)

[BM2] Rudolf Bendl, Jindřich Muk: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních, díl II.*, 1. vydání, Ústřední spolek českých professorů, Praha, 1910, 92 stran.
(2. změněné vydání – 1921, 107 stran, 3. obsahem podstatně nezměněné vydání – 1924, 111 stran)

[BM3] Rudolf Bendl, Jindřich Muk: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních, díl III.*, 1. vydání, Ústřední spolek českých professorů, Praha, 1911, 138 stran.
(2. změněné vydání – 1921, 149 stran, 3. obsahem podstatně nezměněné vydání – 1925, 148 stran)

[BS] Bohumil Bydžovský, Stanislav Teplý, František Vyčichlo, Jan Vojtěch: *Sbírka úloh z matematiky pro IV.–VIII. třídu středních škol*, 4., úplně přepracované vydání, Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1936, 274 stran.
(1. vydání – 1912, 332 stran, 2. vydání – 1920, 332 stran, 3. vydání – 1924, 335 stran, 4. přepracované vydání – 1936, 274 stran, dotisky 4. vydání – 1945–1948, 274 stran)

[BV] Bohumil Bydžovský, Jan Vojtěch: *Mathematika pro nejvyšší třídu reálek*, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1912, 176 stran.

[BVS] Bohumil Bydžovský, Jan Vojtěch: *Sbírka úloh z mathematiky pro vyšší třídy středních škol*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1912, 332 stran.
(2. vydání – 1920, 332 stran, 3. vydání – 1924, 335 stran, 4. úplně přepracované vydání – 1936, 274 stran)

[C1] Tomáš Cipra: *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*, 1. vydání, HZ, Praha, 1995, 320 stran.

[C2] Tomáš Cipra: *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*, 2. vydání, Ekopress, Praha, 2005, 308 stran.

[CB] Eduard Čech a kolektív: *Aritmetika pre III. triedu gymnázií*, 1. vydání, Štátne nakladateľstvo, Bratislava, 1951, 79 stran.

[CE1] Eduard Čech: *Aritmetika pro I. třídu středních škol*, 1. vydání, Knihtiskárny Prometheus, Praha, 1943, 114 stran.

[CE2] Eduard Čech: *Aritmetika pro II. třídu středních škol*, 1. vydání, Knihtiskárny Prometheus, Praha, 1943, 86 stran.

[CE3] Eduard Čech: *Aritmetika pro III. třídu středních škol*, 1. vydání, Knihtiskárny Prometheus, Praha, 1943, 91 stran.

[CEP] Eduard Čech: *Poznámky k učebnicím aritmetiky pro 1. – 3. třídu středních škol*, 1. vydání, Knihtiskárny Prometheus, Praha, 1944, 32 stran.

[CL1] Ladislav Červenka: *Arithmetika pro I. třídu středních škol*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1910, 94 stran.
(2. vydání – 1911, 92 stran, 3. vydání – 1919, 92 stran, 4. vydání – 1921, 92 stran, 5. vydání – 1923, 92 stran, 6. přepracované vydání –1932, 100 stran, 7. přepracované vydání –1934, 100 stran)

[CL2] Ladislav Červenka: *Arithmetika pro II. třídu středních škol*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1910, 80 stran.
(2. nezměněné vydání – 1911, 80 stran, 3. vydání – 1919, 80 stran, 4. upravené vydání – 1921, 80 stran, 5. upravené vydání – 1923, 84 stran, 6. pozměněné vydání – 1930, 92 stran + 12 stran doplňku, 7. rozšířené vydání – 1932, 103 stran, 8. přepracované vydání – 1934, 119 stran)

[CL3] Ladislav Červenka: *Arithmetika pro III. třídu středních škol*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1911, 104 stran.
(2. nezměněné vydání – 1918, 104 stran, 3. vydání – 1920, 104 stran, 4. upravené vydání – 1922, 106 stran, 5. upravené vydání – 1925, 108 stran, 6. přepracované vydání –1933, 108 stran, 7. přepracované vydání –1934, 108 stran)

[CP] Eduard Čech a kolektiv: *Matematika pro III. třídu gymnasií*, 1. vydání, Státní nakladatelství učebnic, Praha, 1951, 177 stran.

[E1] Bohuslav Eichler: *Úvod do finanční matematiky*, 1. vydání, Septima, Praha, 1993, 80 stran.

[E2] Bohuslav Eichler: *Hospodářské výpočty pro střední školy*, 1. vydání, Fortuna, Praha, 2001, 120 stran.

[EC] Eduard Čech: *Aritmetika pro II. třídu středních škol*, částečně změněný dotisk 1. vydání, Státní nakladatelství, Praha, 1949, 98 stran.

[EM] Karel Hruša, Emil Kraemer, Jiří Sedláček, Jan Vyšín, Rudolf Zelinka: *Přehled elementární matematiky*, 4. nezměněné vydání, Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1964, 500 stran.
(1. vydání – 1957, 497 stran; 2. revidované vydání – 1958, 498 stran; 3. znovu revidované vydání – 1962, 498 stran)

[EP] Edita Porubská a kolektiv: *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, 8. část*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1986, 288 stran.

[EX2] Leo Boček a kolektív: *Zbierka úloh z matematiky pre 2. ročník experimentálnych gymnázií*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Bratislava, 1981, 168 stran.

[EX3] Jozef Smida, Jaroslav Šedivý: *Zbierka úloh z matematiky pre 3. a 4. ročník experimentálnych gymnázií*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Bratislava, 1983, 208 stran.

[FR] Ladislav Fryček: *Počtářství na českých školách měšťanských v úlohách*, tisk a náklad Karel Šolc, Kutná Hora, 1910, 262 stran.

[G2] Jozef Smida, Ladislav Kosmák, Oldřich Odvárko, Jaroslav Šedivý: *Matematika pro II. ročník gymnázia*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1980, 120 stran.

[G3] Jozef Smida: *Matematika pro III. ročník gymnázií, Posloupnosti a řady reálných čísel*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1989, 80 stran.

[GK] Tomáš Gál, Antonín Kamarýt: *Opakování středoškolské matematiky*, 1. vydání, Státní zemědělské nakladatelství ve spolupráci s Ústavem vědeckotechnických informací MZLVH, Praha, 1963, 291 stran.

[HH] Josef Holubář, František Hradecký, Karel Hruša, Ema Kasková, Milan Kolibiar, František Krňan: *Algebra pro devátý až jedenáctý postupný ročník*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1954, 372 stran.

[HH1] Josef Holubář, František Hradecký, Karel Hruša: *Algebra pro jedenáctý postupný ročník*, 3. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1956, 124 stran.
(1. vydání – 1954, 114 stran; 2. nezměněné vydání – 1955, 114 stran)

[HHS] Josef Holubář, František Hradecký, Karel Hruša, Ema Kasková, Milan Kolibiar, František Krňan: *Algebra pre 9. – 11. postupný ročník všeobecno-vzdelávacích škôl*, 2. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Bratislava, 1957, 348 stran.
(1. vydání – 1954, 371 stran)

[HJS] Josef Huka, Vítězslav Jozífek: *Matematika pro I. ročník strojnických škol*, 2. přepracované vydání, SPN, Praha, 1953, 280 stran.
(1. vydání – 1951, 260 stran)

[HJU] Vratislav Hladovec, Vítězslav Jozífek, Antonín Kunc: *Matematika pro odborná učiliště a učňovské školy I*, 3. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1958, 204 stran.
(1. vydání – 1952, 222 stran; 2. upravené vydání – 1953, 204 stran)

[HP] Otakar Hruška, Václav Pelant: *Matematika pro zemědělské technické školy, II. díl, Aritmetika, Statistika, Praktická geometrie*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1954, 212 stran.

[JH] Vítězslav Jozífek, František Hradecký, Josef Huka: *Matematika pro mimořádné způsoby studia na průmyslových školách (dvouleté studium)*, 2. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1957, 320 stran.
(1. vydání – 1956, 320 stran)

[JH7] Vítězslav Jozífek, František Hradecký, Josef Huka: *Matematika pro studium pracujících na SPŠ (dvouleté studium)*, 7. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1962, 320 stran.
(1. vydání – 1956, 320 stran; 2. vydání – 1957, 320 stran; 3. nezměněné vydání – 1958, 320 stran; 4. nezměněné vydání – 1959, 320 stran; 5. nezměněné vydání – 1960, 320 stran; 6. nezměněné vydání – 1961, 320 stran)

[JJ] Josef Ježek: *Příručka kupecké, finanční a pojistné matematiky, II. část*, 10. opravené vydání, Česká grafická unie a. s., Praha, 1947, 256 stran.
(1. vydání – 1911; 4. rozšířené a opravené vydání – 1921, 143 stran (jen kupecká matematika); 7. rozšířené a opravené vydání – 1928, 238 stran;

8. opravené vydání – 1930, 169 stran (jen kupecká matematika); 9. nezměněné vydání – 1933, 268 stran; zbylá vydání se nepodařilo nalézt)

[JM1] Karel Jon, Antonie Maxová: *Početnice pro pražské školy občanské, díl I. pro první třídu,* Česká grafická unie a. s., Praha, 1922, 115 stran.

[JM2] Karel Jon, Antonie Maxová: *Početnice pro pražské školy občanské, díl II. pro druhou třídu*, Česká grafická unie a. s., Praha, 1923, 116 stran.

[JM3] Karel Jon, Antonie Maxová: *Početnice pro pražské školy občanské, díl III. pro třetí třídu*, Česká grafická unie a. s., Praha, 1923, 116 stran.

[JM4] Karel Jon, Antonie Maxová: *Početnice pro školy měšťanské, díl IV. pro jednoroční učebné kursy (IV. třídy)*, Česká grafická unie a. s., Praha, 1924, 120 stran.

[JP] Miloš Jelínek: *Algebra pro střední školy pro pracující (Učebnice pro posluchače televizních kursů matematiky)*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1964, 324 stran.

[K] Jarmila Radová, Petr Dvořák: *Finanční matematika pro každého,* 1. vydání, Grada, Praha, 1993, 170 stran.

(2. vydání – 1997, 224 stran; 3. rozšířené vydání – 2001, 264 stran; 4. vydání – 2003, 260 stran; 5. zcela přepracované vydání – 2005, 288 stran; 6. aktualizované vydání – 2007, 296 stran; 7. aktualizované vydání – 2009, 293 stran)

[K5] Jarmila Radová, Petr Dvořák, Jiří Málek: *Finanční matematika pro každého,* 5. zcela přepracované vydání, Grada, Praha, 2005, 288 stran.

[K6] Jarmila Radová, Petr Dvořák, Jiří Málek: *Finanční matematika pro každého,* 6. aktualizované vydání, Grada, Praha, 2007, 296 stran.

[KI] Karel Kindl: *Sbírka úloh z aritmetiky pro 5. až 7. ročník*, 10. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1983, 328 stran.

(1. vydání – 1958, 327 stran; 2. nezměněné vydání – 1960, 327 stran; 3. nezměněné vydání – 1961, 327 stran; 4. nezměněné vydání – 1966, 327 stran; 5. nezměněné vydání – 1970, 327 stran; 6. upravené vydání – 1974, 327 stran; 7. vydání – 1976, 327 stran; 8. vydání – 1978, 327 stran; 9. vydání – 1979, 327 stran; 11. vydání – 1988, 327 stran)

[KJ] Jan Kozák: *Pátá početnice pro třídy s 6., 7. a 8. školním rokem na školách vícetřídních*, Císařský královský školní knihosklad, Praha, 1914, 212 stran.

[KK] Jiří Kabele, Jan Kotík, Eduard Kriegelstein, Antonín Pospíšil: *Matematika, II. díl, Učební text pro průmyslové školy (čtyřleté studium)*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1954, 236 stran.

[KR] Peter Krupka: *Sbírka úloh z matematiky pro 2. stupeň základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií, Aritmetika, algebra, funkce*, 1. vydání, Global, Praha, 1992, 359 stran.

[KRI] Eduard Kriegelstein a kolektiv: *Sbírka úloh z matematiky pro střední průmyslové školy a střední zemědělské technické školy*, 2. upravené vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1966, 364 stran.
(1. vydání – 1965, 343 stran)

[LI] Viktor Borisovič Lidskij: *Úlohy z elementární matematiky*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1965, 46 stran.

[LT] Miloslav Valouch, Miloslav A. Valouch: Sedmimístné logaritmy čísel od 1 do 120000, 1. vydání, Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1932, 247 stran.
(2. vydání – 1946, 247 stran, dotisk 2. vydání – 1950, 247 stran, 2. dotisk 2. vydání – 1953, 247 stran, 3. vydání – včetně tabulek goniometrických funkcí, 1956, 487 stran)

[M1] Jindřich Muk: *Aritmetika pro nižší třídy škol středních, díl I.*, 4. změněné vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, s. r. o., Praha, 1931, 130 stran.
(1., 2. a 3. vydání – viz [BM1], 5. celkem nezměněné vydání – 1935, 119 stran)

[M2] Jindřich Muk: *Aritmetika pro nižší třídy škol středních, díl II.*, 4. změněné vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, s. r. o., Praha, 1932, 140 stran.
(1., 2. a 3. vydání – viz [BM2], 5. celkem nezměněné vydání – 1934, 148 stran)

[M3] Jindřich Muk: *Aritmetika pro nižší třídy škol středních, díl III.*, 4. změněné vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, s. r. o., Praha, 1933, 146 stran.
(1., 2. a 3. vydání – viz [BM3], 5. celkem nezměněné vydání – 1934, 122 stran)

[M5] Jan Mlčoch: *Ekonomika pro střední školy, 5. díl: Bankovnictví a pojišťovnictví. Daně a cla*, 1. vydání, Fortuna, Praha, 1992, 54 stran.

[MA] Augustin Matolín: *Pátá početnice pro obecné školy vícetřídní, pátý školní rok*, opravené vydání dle osnov z roku 1915, Císařský královský školní knihosklad, Praha, 1916, 72 stran.

[MI] Valentýn Melicher, Jozef Ivanič, Imrich Lečko: *Matematika pro střední zdravotnické školy, II. díl*, 5. nezměněné vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1978, 310 stran.
(1. české vydání – 1965, 312 stran; 2. vydání – 1967, 312 stran; 3. vydání – 1974, 310 stran; 4. vydání – 1976, 310 stran)

[MJ1] Jindřich Muk: *Aritmetika pro čtvrtou třídu reálek*, 1. vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, spol. s r. o., Praha, 1924, 209 stran.
(2. vydání – 1928, 206 stran)

[MJ2] Jindřich Muk: *Aritmetika pro pátou třídu reálek*, 1. vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, spol. s r. o., Praha, 1925, 174 stran.
(2., v podstatě nezměněné vydání – 1930, 184 stran)

[MJ3] Jindřich Muk: *Aritmetika pro šestou a sedmou třídu reálek*, 1. vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, spol. s r. o., Praha, 1926, 168 stran.
(2., v podstatě nezměněné vydání – 1930, 184 stran)

[MJ4] Jindřich Muk: *Aritmetika pro vyšší třídy reálek*, 3. vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, spol. s r. o., Praha, 1936, 339 stran.
(1. a 2. vydání – viz [MJ2] a [MJ3])

[MJ5] Jindřich Muk: *Aritmetika pro čtvrtou a pátou třídu gymnasií a reálných gymnasií*, 1. vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, spol. s r. o., Praha, 1924, 261 stran.
(2. vydání – 1928, 260 stran)

[MJ6] Jindřich Muk: *Aritmetika pro šestou třídu gymnasií a reálných gymnasií*, 1. vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, spol. s r. o., Praha, 1925, 123 stran.

[MJ7] Jindřich Muk: *Aritmetika pro sedmou třídu gymnasií a reálných gymnasií*, 1. vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, spol. s r. o., Praha, 1927, 148 stran.

[MJ8] Jindřich Muk: *Aritmetika pro vyšší třídy gymnasií, reálných gymnasií a reformovaných reálných gymnasií*, 2. upravené vydání, Profesorské nakladatelství a knihkupectví, spol. s r. o., Praha, 1935, 303 stran.
(1. vydání – viz [MJ6] a [MJ7]; dotisky 2. upraveného vydání – 1945–1948)

[MP] Augustin Matolín: *Početnice pro horní stupeň obecných škol (čtvrtá početnice pro ménětřídní školy obecné), pro 6., 7. a 8. školní rok*, Státní nakladatelství, Praha, 1926, 175 stran.
(1. vydání – 1913, 175 stran, další vydání (bez číslování) – 1924, 175 stran, 1926, 175 stran, nezměněný otisk vydání z roku 1926 – 1927, 175 stran, 6. vydání – 1929, 175 stran, 7. opravené vydání – 1932, 171 stran)

[MS] Jana Müllerová, Václav Sýkora, Ondřej Šedivý: *Matematika pro střední pedagogické školy, III. díl*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1979, 164 strany.

[MT] Jiří Mikulčák a kolektiv: *Matematické, fyzikální a chemické tabulky & vzorce pro střední školy*, dotisk 1. vydání, Prometheus, Praha, 2007, 280 stran.

[MV] Hans-Jochen Bartsch: *Matematické vzorce*, 2. revidované vydání, Nakladatelství technické literatury, Praha, 1987, 832 stran.

[NI] František Nimrichter, Irena Hubačková, Ladislav Schramm, Václav Topinka: *Matematika pro I. a II. ročník středních ekonomických škol*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1970, 534 stran.

[O1] Oldřich Odvárko: *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy*, 1. vydání, Prometheus, Praha, 2005, 200 stran.

[O2] Oldřich Odvárko: *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*, 1. vydání, Prometheus, Praha, 1995, 128 stran.
(2. vydání – 2001, 126 stran; 3. vydání – 2008, 126 stran)

[O3] Oldřich Odvárko: *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť – Posloupnosti a finanční matematika*, 1. vydání, Prometheus, Praha, 2002, 124 stran.

[OC] Oldřich Odvárko, Emil Calda, Jana Kolouchová, Jana Řepová: *Matematika pre stredné odborné školy a študijné obory stredných odborných učilíšť, 6. časť*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Bratislava, 1987, 288 stran.

[OM] Otokar Maška: *Přehled matematiky*, nové vydání upravené Borisem Gruberem, Jednota československých matematiků a fysiků, Přírodovědecké nakladatelství, Praha, 1951, 232 stran.
(1. až 11. vydání – 1923 až 1947, dvojdílná: 1. díl Aritmetika a algebra (96 stran), 2. díl Geometrie (160 stran))

[OR] Oldřich Odvárko, Jarmila Robová: *Finanční matematika s kalkulačkami Casio*, 1. vydání, Prometheus, Praha, 2005, 100 stran.

[OZ] Metoděj Ostrý: *Aritmetika v úlohách ke zkouškám z II. a III. odboru měšťanských škol, pro žactvo střed. škol a učitelských ústavů*, Československá grafická Unie a. s., Praha, 1936, 290 stran.

[PA] Alois Pižl: *Algebra a politická arithmetika pro vyšší školy obchodní. Díl III. Arithmetika finanční*, 1. vydání, vydal František Řivnáč nákladem Sboru pro vydržování Československé akademie obchodní v Praze, Praha, 1906, 196 stran.
(2. vydání – 1917, 137 stran, 3. změněné vydání – 1923, 148 stran, 4. změněné vydání – 1937, 138 stran)

[PJ] Josef Polák: *Přehled středoškolské matematiky*, 8. vydání, Prometheus, Praha, 2005, 608 stran.
(1. vydání – 1972, 627 stran; 2. vydání – 1977, 627 stran + dotisk 1978, 627 stran; 3. vydání – 1980, 627 stran; 4. vydání – 1983, 627 stran; 5. přepracované vydání – 1991, 608 stran; 6. vydání – 1995, 608 stran; 7. vydání – 2003, 608 stran; 9. přepracované vydání – 2008, 659 stran)

[PJ4] Josef Polák: *Přehled středoškolské matematiky*, 4. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1983, 627 stran.
(1. vydání – 1972, 627 stran)

[PK] Antonín Pospíšil, František Kejla, Eduard Kriegelstein, Václav Pelant: *Matematika pro II. ročník středních průmyslových škol a středních zemědělských technických škol*, 3. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1971, 291 stran.
(1. vydání – 1965, 286 stran; 2. doplněné vydání – 1966, 291 stran; 4. vydání – 1975, 291 stran; 5. vydání – 1977, 291 stran; 6. vydání – 1978, 291 stran)

[PP] Jan Kozák, Jan Roček: *Početnice pro 6., 7. a 8. školní rok všech škol obecných*, nově zpracovali: František Pátek a kolektiv, 1. vydání, Státní nakladatelství, Praha, 1927, 228 stran.
(2. pozměněné vydání – 1931, 194 stran)

[PS1] kolektiv členů Početního sdružení: *Početnice pro I. třídu měšťanských škol (6. postupný ročník),* 1. vydání, Školní nakladatelství pro Čechy a Moravu, Praha, 1943, 119 stran.

[PS2] kolektiv členů Početního sdružení: *Početnice pro II. třídu měšťanských škol (7. postupný ročník),* 1. vydání, Školní nakladatelství pro Čechy a Moravu, Praha, 1943, 120 stran.

[PS3] kolektiv členů Početního sdružení: *Početnice pro III. třídu měšťanských škol (8. postupný ročník),* 1. vydání, Školní nakladatelství pro Čechy a Moravu, Praha, 1943, 127 stran.

[PT] František Pátek, Josef Trajer a kolektiv členů Početního sdružení: *Mladý počtář – Početnice pro 6. až 8. postupný ročník českých škol obecných*, 1. vydání, Státní nakladatelství, Praha, 1939, 224 stran.

[R1] Jarmila Radová, Vladislav Chýna, Jiří Málek: *Finanční matematika v příkladech*, 1. vydání, Professional Publishing, Praha, 2005, 160 stran.

[RM] František rytíř Močnik: *Početnice pro školy obecné, vydání trojdílné. Stupeň vyšší*, Císařský královský školní knihosklad, Praha, 1909, 136 stran.

[RP] Karel Rakušan: *Z říše čísel – Pracovní kniha počtů pro měšťanské školy, díl III.*, 1. vydání, Školní nakladatelství pro Čechy a Moravu, Praha, 1940, 200 stran.

[RR] Jozef Kroupa, Karel Rakušan, Anna Rakušanová, Jan Vyšín: *Matematika pro šestý postupný ročník*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1954, 274 stran.

[RZ] Rudolf Zelinka: *Učební texty pro aritmetiku, III. část*, 2. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1952, 190 stran.
(1. vydání – 1950, 188 stran + dotisk 1951, 188 stran)

[Ř1] Alois Říha: *Aritmetika pro učitelské ústavy. Díl první. Pro první ročník*, 1. vydání, Československá grafická Unie a. s., Praha, 1935, 168 stran.

[Ř2] Alois Říha: *Aritmetika pro učitelské ústavy. Díl druhý. Pro druhý ročník*, 1. vydání, Československá grafická Unie a. s., Praha, 1936, 116 stran.

[Ř3] Alois Říha: *Aritmetika pro učitelské ústavy. Díl třetí. Pro třetí a čtvrtý ročník,* 1. vydání, Československá grafická Unie a. s., Praha, 1937, 186 stran.

[S6] Václav Sýkora, Oldřich Odvárko, Jozef Smida: *Matematika pro gymnázia, sešit 6 – část 2,* 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1979, 126 stran.
(2. vydání – 1981, 126 stran; 3. vydání – 1984, 126 stran)

[S8] Jaroslav Šedivý, Václav Medek, Oldřich Odvárko, Beloslav Riečan, Václav Sýkora: *Matematika pro gymnázia, sešit 8*, 2. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1981, 243 stran.
(1. vydání – 1980, 243 stran)

[SE] Václav Seliger: *Matematika III. (Učební text pro III. ročník obchodních akademií),* 1. vydání, Státní nakladatelství, Praha, 1948, 57 stran.

[SN] Ladislav Schramm, František Nimrichter, Václav Topinka: *Sbírka úloh z matematiky pro střední ekonomické školy*, 4. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1978, 423 stran. (Ze stejnojmenného slovenského originálu přeložil Václav Vosáhlo.)
(1. vydání – 1972, 423 stran; 2. vydání – 1976, 424 stran; 3. vydání – 1977, 423 stran; 5. vydání – 1979, 423 stran; 6. vydání – 1981, 423 stran)

[SP1] Václav Starý, Josef Pithardt: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních I.*, 10. vydání, upravené dle učebních osnov z r. 1909, nákladem České grafické akciové společnosti Unie, Praha, 1910, 52 stran.
(Všechna vydání se mi nepodařilo objevit. 3. přepracované vydání – 1877, 372 stran, 4. opravené vydání – 1882, 279 stran, 5. zkrácené vydání – 1888, 224 stran, 6. opravené vydání – 1893, 284 stran)

[SP2] Václav Starý, Josef Pithardt: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních II.*, 10. vydání, upravené dle učebních osnov z r. 1909, nákladem České grafické akciové společnosti Unie, Praha, 1911, 76 stran.

[SP3] Václav Starý, Josef Pithardt: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních III.*, 10. vydání, upravené dle učebních osnov z r. 1909, nákladem České grafické akciové společnosti Unie, Praha, 1912, 107 stran.

[ST] František Josef Studnička: *Kapesní tabulky logarithmické, jakož i jiné důležité tabulky pomocné*, 9. rozmnožené vydání, J. G. Calvé, Praha, 1905, 160 stran.

(1. vydání – 1870, 143 stran, 2. rozmnožené vydání – 1875, 156 stran, 3. rozmnožené vydání – 1879, 156 stran, 6. skoro nezměněné vydání – 1893, 156 stran, 7. zdokonalené vydání – 1898, 156 stran, 8. nezměněné vydání – 1901, 156 stran, 9. rozmnožené vydání – 1905, 160 stran, 10. nezměněné vydání – 1909, 160 stran, 11. téměř nezměněné vydání – 1913, 160 stran, 14. nezměněné vydání – 1927, 160 stran)

[TV] Jan Taišl, Josef Vojáček: *Aritmetika pro sedmý ročník*, 12. nezměněné vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1975, 152 stran.

(1. vydání – 1962, 152 stran; 2. nezměněné vydání – 1963, 152 stran; 3. nezměněné vydání – 1964, 152 stran; 4. vydání – 1966, 152 stran; 5. nezměněné vydání – 1967, 152 stran; 6. vydání – 1968, 152 stran; 7. vydání – 1969, 152 stran; 8. nezměněné vydání – 1971, 152 stran; 9. nezměněné vydání – 1972, 152 stran; 10. nezměněné vydání – 1973, 152 stran; 11. nezměněné vydání – 1974, 152 stran; 13. nezměněné vydání – 1976, 152 stran; 14. upravené vydání – 1977, 152 stran; 15. upravené vydání – 1978, 152 stran; 16. upravené vydání – 1979, 152 stran; 17. upravené vydání – 1980, 152 stran)

[UD] Karel Domin: *Arithmetika v úlohách pro ústavy učitelské*, 4. nezměněné vydání, tisk a náklad Karel Šolc, Kutná Hora, 1911, 319 stran.

(1. vydání – 1899, 319 stran, 2. nezměněné vydání – 1903, 319 stran, 3. nezměněné vydání – 1908, 319 stran, 5. vydání – nenalezl jsem, 6. přepracované vydání – 1923, 470 stran)

[UP] Václav Posejpal: *Arithmetika pro ústavy ku vzdělání učitelů a učitelek*, s přílohou: *Úlohy k arithmetice*, 1. vydání, Česká grafická akciová společnost UNIE, Praha, 1908, 206 stran (+ 75 stran přílohy).

(2. přepracované vydání – 1916, 208 stran (bez přílohy), 3. přepracované vydání – 1922, 250 stran + 128 stran přílohy)

[V2] Emil Kraemer, Pavel Bartoš, Anna Hustá, Jiří Kabele, Jiří Mikulčák, Jan Voříšek: *Matematika pro II. ročník SVVŠ – větev přírodovědná*, Doplněk k základní učebnici, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1965, 128 stran.

[V3] Emil Kraemer, Pavel Bartoš, Anna Hustá, Jan Voříšek, Michal Zöldy: *Matematika pro III. ročník SVVŠ*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1965, 316 stran.

[VA] Miloslav A. Valouch, Miloslav Valouch: *Tabulky logaritmické*, 10. přepracované vydání, Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1937, 203 stran.
(1. vydání – 1904, 149 stran; 2. vydání – 1913, 168 stran; 3. rozšířené vydání – 1919, 188 stran; 4. vydání – 1921, 188 stran; 5. rozšířené vydání – 1923, 203 stran; 6. vydání – 1926, 203 stran; 7. vydání – 1929, 203 stran; 8. částečně změněné vydání – 1931, 203 stran; 9. vydání – 1935, 203 stran)

[VL] Josef Vlček: *Sbírka příkladů z matematiky pro střední školy*, 2. vydání, Komenium, učitelské nakladatelství, Brno, 1948, 72 stran.
(1. vydání – 1947, 73 stran)

[VSE] Rudolf Muzikář: *Repetitorium elementární matematiky*, 3. vydání, Vysoká škola ekonomická, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1989, 203 stran.
(1. vydání – 1984, 203 stran; 2. vydání – 1987, 203 stran)

[VT] František Vejsada, František Talafous: *Sbírka úloh z matematiky pro SVVŠ (gymnasia)*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1969, 688 stran.
(2. vydání – 1973, 688 stran)

[ZJ] Josef Zahradník: *Matematika pro I. a II. ročník studia absolventů SVVŠ (gymnázií) na středních ekonomických školách*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1971, 352 stran.

[ZO] Zdeněk Opava: *Programovaná učebnice matematiky (aritmetika a algebra)*, 1. vydání, nakladatelství Práce, Praha, 1970, 709 stran.
(2. doplněné vydání – 1980, 739 stran)

Internetové zdroje

[I01] Národní pedagogická knihovna J.A. Komenského, Praha: *http://www.npkk.cz*.

[I02] Online katalog Národní knihovny ČR: *http://www.nkp.cz*.

[I03] Jednota českých matematiků a fyziků: *http://www.jcmf.cz*.

[I04] Metodický portál RVP: *http://clanky.rvp.cz*.

[I05] Metodický portál RVP: *http://wiki.rvp.cz*.

[I06] Metodický portál RVP: *http://rvp.cz*.

[I07] Wikipedia, otevřená encyklopedie: *http://cs.wikipedia.org*.

[I08] Wikipedia, the free encyclopedia: *http://en.wikipedia.org*.

[I09] Akademický bulletin: *http://abicko.avcr.cz*.

[I10] Soutěž finanční gramotnosti: *http://www.fgsoutez.cz*.

[I11] Česká národní banka: *http://www.cnb.cz/cs*.

Seznam použitých zkratek

a. s. – akciová společnost;

ant., anticip. – anticipativně;

apod., a p. – a podobně;

atd. – a tak dále;

c. k. – císařský královský;

celor. – celoroční;

č., čís. – číslo;

č. j. – číslo jednací;

dl. – dlužní;

ed. – editor;

král. – království;

maj. – majitel;

měs. – měsíc, měsíčně;

mil. – milion;

mj. – mimo jiné;

mld. – miliarda;

n. p. – národní podnik;

např. – například;

násl. – následující;

nemoc. – nemocenská;

nomin. – nominální;

obr. – obrázek;

odst. – odstavec;

okres. – okresní;

p. a. – per annum;

p. d. – per diem;

p. m. – per mensem;

p. q. – per quartale;

p. s. – per semestre;

pol. – pololetní;

r. – rok;

resp. – respektive;

roč. – roční, ročník;

RVP – rámcově vzdělávací program;

sl., slož. – složené, složité;

spol. s r. o. – společnost s ručením omezeným;

str. – strana;

ŠVP – školní vzdělávací program;

t. j., tj. – to jest;

t. r. – tohoto roku;

tab. – tabulka;

tis. – tisíc;

tzn. – to znamená;

tzv., t. zv. – tak zvaný;

úr. – úrok, úročení, úrokování.