Oponentský posudek disertační práce na MFF UK

Ondřej Honzl: Vybrané geometrické vlastnosti trajektorií Brownova pohybu

Téma v názvu disertační práce představuje klasickou problematiku na rozhraní teorie pravděpodobnosti a geometrie. Je nepřeberným zdrojem problémů různé obtížnosti, z nichž řada již byla vyřešena, některé zůstávají otevřené (viz např. http://www.math.washington.edu/~burdzy/open.php). Nejde však o čistě matematické záležitosti, mezi četné aplikace trajektorií Brownova pohybu patří např. spojité limity náhodných rovinných map ve velmi obecném pojetí.

Autor se v práci věnuje otázkám na rozhraní integrální geometrie, uvažuje paralelní rozšíření trajektorie, nazývané též Wienerova klobása (dále jen klobása), a zkoumá asymptotické vlastnosti jeho Minkowského funkcionálů. Vlastních matematických výsledků je dostatek, jsou jasně shrnuty v úvodu a jsou obsahem kapitol 2, 3, a 4.

V kapitole 2 jsou analyzovány vlastnosti α-kuželových bodů Brownova pohybu v rovině a vztaženého pojmu kritických bodů. Hypotézou je, že kritických bodů je skoro jistě nejvýš spočetně. Hlavní výsledek dává příbuznou vlastnost, že na libovolné přímce skoro jistě neleží dva $\pi+$ kuželové body s opačnou orientací. Mohl by autor vyjádřit svůj názor k otázce, nakolik je reálné prokázání formulované hypotézy?

Kapitola 3 diskutuje vztah objemu a povrchu klobásy, vzorce pro jejich střední hodnotu, a dospívá asymptotickému vzorci pro povrch ve smyslu skoro jistě. Technikou jsou Kneserovy funkce, pro tuto třídu jsou odvozeny obecné vlastnosti a použity ke studované problematice. Kapitola je zakončena protipříkladem a dvěma hypotézami. První je o existenci rovinné množiny, jejíž vzdálenostní funkce je Kneserova. Druhou hypotézu vztaženou k povrchu klobásy by měl autor u obhajoby komentovat, opět ve smyslu jak daleko je k jejímu prokázání.

V kapitole 4 se autor zabývá asymptotikou počtu souvislých komponent doplňku Wienerovy klobásy v rovině. Je-li $G(u,\gamma) = u(\log u)^2 N_\gamma[u,\infty)$, kde γ je poloměr klobásy a u plocha komponenty, je dokázáno, že

$$\lim_{u\to 0} G(u,\gamma) = 2\pi, \qquad 0 < \gamma < \left(\frac{u}{\pi}\right)^b$$

stejnoměrně v γ, $b > \frac{1}{2}$. Jde o rozšíření výsledku z le Gall (1991), kde je ukázáno $\lim_{u\to 0} G(u,0) = 2\pi$. Tento článek je v práci nesprávně citován, přitom je krok po kroku detailním návodem k uchazečovu postupu. Nakolik je předložené zobecnění zajímavé? V poznámce 4.16 je konstatováno, že neumožňuje získat limitní větu pro Eulerovu charakteristiku Wienerovy klobásy. Odstranit dominanci u nad γ je zřejmě netriviální nebo dokonce nemožné, zatímco výsledek v disertaci by se dal považovat za snadný, když hodnota limity a tvar funkce G byly předem známy. Ovšem vede k němu téměř dvacet stran důkazů, kterých částí z nich si autor nejvíc cení?

Jednotlivé připomínky a poznámky k textu:
str.2: $b(x, r)$ se zavádí jako otevřená koule, chápe se někde i jako uzavřená?
str.2: $T_r(x)$ první vstup Brownova pohybu B do $b(x, r)$ otevřené obecně nemusí být vstupem.
str.9: Definition 1.6: $T_r(x)$ není specielním případem T_M pro $M = b(x, r)$.
str.12: Symbol velké O, který je hlavním nástrojem v kapitole 4, se má definovat s absolutní hodnotou $|f(x)|$ (Jarník), což je rozdíl oproti disertaci.
str.16: V čem spočívá modernost důkazu z [5] oproti [15]?
str.16: jak zní Frostmanovo lemma?
str.26: Wienerova klobása se zavádí jako paralelní rozšíření otevřenou množinou, zatímco v literatuře, např. [19], je to uzavřenou množinou.
str.36: zajímalo by mě, zda lze stanovit $P(|C_{1+\gamma,R}(0, \gamma)| = 0)$.
str.38: v definici 4.6 má být předpoklad $R > 1 + \gamma$.
str.38: řád O ve vzorci (4.2) není správný.
str.40: první rovnost v (4.9) neplatí, druhá ano.
str.58: špatná citace [13] (klíčová pro kapitolu 4), ve skutečnosti jde o článek v knize, která má nějaké autory resp. editory.

Celkově lze říci, že autor zpracoval předložené téma s nadšením a velkou snahou. Použité metody jsou zejména v kapitolách 2 a 3 originální. V práci jsem nalezl jen vyjímečně drobné věcné nedostatky, domnívám se, že dosažené výsledky jsou správné. V každé z kapitol 2, 3 a 4 jsou původní výsledky, z části již publikované. Dále jsou formulovány hypotézy, otevřené problémy. Formální zpracování matematického textu je kvalitní, snad jen zavádění některých symbolů a pojmů by zasloužilo větší opatrnost. Použití anglického jazyka se nevyvarovalo gramatických nedostatků, ale ještě v únosné míře. Práce má nepochybně význam pro rozvoj stochastické geometrie, ani k aplikacím nemá daleko, i když ty nebyly jejím posláním. Autor prokázal předpoklady k samostatné tvořivé práci, disertaci doporučuji k obhajobě.

V Praze 2.11.2012

Prof. RNDr. Viktor Beneš, DrSc.
KPMS MFF UK