Posudek disertační práce: On Selected Geometric Properties of Brownian Motion Paths

Mgr. Ondřej Honzl

Tato disertační práce se zabývá třemi odlišnými aspekty trajektorie Brownova pohybu. Za prvé jsou studovány kuželové body a jejich vztah ke kritickým bodům trajektorie Brownova pohybu v $\mathbb{R}^2$. Je dokázána věta, že pravděpodobnost existence dvou protilehlých $\pi+$ kuželových bodů, ležících v konkrétním daném směru, je rovna 0.

Za druhé jsou studovány asymptotické vlastnosti povrchu Wienerova párku. Je dokázáno asymptotické chování pro případ dimenze $d \geq 3$ s pomocí také dokázaného inverzního l'Hôspitalova pravidla pro Knesserovy funkce. V této části je také dokázána věta o rovnosti q-dimenzionálního Minkovkého obsahu a q-dimenzionálního S-obsahu omezené množiny v $\mathbb{R}^d$.

A za třetí jsou studovány asymptotické vlastnosti počtu spojených komponent komplementu Wienerova párku v rovině. Autor vychází z práce Le Galla (1991), ve které je dokázáno asymptotické chování počtu spojených komponent komplementu trajektorie Brownova pohybu. Tato práce je aplikována na Wienerův párek.

Téma a důkazy vět jsou technicky velmi obtížné a autor svojí prací dozajista prokázal schopnost samostatné vědecké práce. Důkazy jsou korektní. Na druhou stranu zpracování textových částí by si zasloužilo více pozornosti. Například v úvodu není vůbec zřejmé, co je shrnutím dosavadních výsledků a co je nová práce autorova. Úvod také místy připomíná závěry. Část závěry v disertační práci naprosto chybí.

Výsledky dosažené v práci v částech 1 a 2 jsou pro obor studia jednoznačným posunem vpřed. Ve třetí části je dokázáno limitní chování počtu spojených komponent komplementu Wienerova párku pro Wienerovy párky, které se nejprve musí limitně přiblížit trajektorii Brownova pohybu. Neboli autor počítá počet spojených komponent komplementu Wienerova párku, který je tak podobný trajektorii Brownova pohybu, že zakryje jen díry o tak malé velikosti, že takové díry neuvažujeme na základě vnějšího limitního přechodu. Domnívám se tedy, že tento výsledek nepřináší do oboru mnoho nového.

Celkově disertační práce splňuje kriteria kladená na disertační práci, a proto ji doporučuji k obhájení.

Otázky:

1) K části 3. V případě, že γ (velikost okolí trajektorie) bude pevné, je možné něco říci

o počtu spojených komponent? Tento počet bude mnohem menší, než počet uvažovaný v práci. Mohl by být tento počet dokonce konečný?

2) Dala by se věta 2.13 přepsat s pomocí kritických bodů?

3) Důkaz věty 2.13 končí omezením pravděpodobnosti průniku a tvrzením, že již snadno nahlédneme. Prosím o podrobnější dokončení důkazu.

Podřadné připomínky:

1) str. 9, ř. 11: $-B(\tau)$
2) str. 14, ods. 2: Definice kuželových bodů by měla být již v úvodu, kdy se o nich poprvé mluví.
3) str. 18, ř. 8: Místo množiny Z by mělo být M.
4) str. 18, odstavec za důkazem: Tato restrikce by si zasloužila vysvětlení.
5) str. 19, ř. 7: $(y + W(\pi + \delta, \xi))^C$
6) str. 20, Theorem 2.13, chybí čárka v rovnici.
7) Důkaz Lemma 2.19: Není zřejmá návaznost. ř. -4 Toto x je stejné jako výše? ř. - 3 Zde pokračujeme v tvrzení pro každé ϵ a α ,... ?
8) Obr. 2.5: Není chyba v popiscích kružnic? Druhá největší je bez popisu, třetí je popsána dvakrát. To značně znepřehledňuje čtení důkazu.
9) str. 24, ř. -2: R místo S.
10) str. 26, Na tomto místě čtenář neví nic o Minkowski obsahu a S-obsahu.
11) str. 28, ř. - 10: limita je nadbytečná. Navíc u tohoto tvrzení není zřejmé, kým bylo dokázáno.
12) str. 31, ř. 8: Thus, ... Tento krok je velmi nejasný. Delší vysvětlení by bylo na místě.
13) str. 32, ř. 15: 2-dimenzionální Minkowski ..., následující tvrzení, není jasné, kdo jej dokázal. Spitzer?
14) str. 38: Bylo by vhodnější zde dokazované nerovnosti uvést jako další lemmata.
15) str. 39: $Q_\lambda(r, R, \gamma)$ by bylo vhodnější značení.

doc. RNDr. Tomáš Mrkvička, Ph.D.