Oponentský posudek doktorandské disertační práce Mgr. Pavla Ludvíka

„Isomorphic and isometric classification of spaces of continuous and Baire affine functions"

Předložená práce je tvořena pěti odbornými články doplněnými úvodem. Čtyři ze zařazených článků byly napsány spolu se školitelem, pátý je samostatný článek uchazeče. Přitom dva ze společných článků byly publikovány v zahraničních časopisech (Proc. Amer. Math. Soc. a Studia Math.), ostatní články byly zaslány k publikaci. První článek se týká zobecnění Banach-Stoneovy věty a vychází z uchazečovy diplomové práce; další tři články se týkají deskriptivních vlastností afinních funkcí na kompaktních konvexních množinách (zejména na duálních koulích Banachových prostorů); poslední článek se týká zobecnění funkcí první třídy na topologických prostorech. Dále proberu jednotlivé články a připomínky k nim.

Kapitola 1 obsahuje článek *Isomorphisms of spaces of continuous affine functions on compact convex sets with Lindelöf boundaries* napsaný spolu se školitelem a publikovaný v Proc. Amer. Math. Soc. v roce 2011. Jeho tématem je zobecněná varianta Banach-Stoneovy věty. Klasická Banach-Stoneova věta říká, že jsou-li K a L dva kompaktní prostory, pro něž jsou prostory spojitých funkcí $C(K)$ a $C(L)$ izometrické, jsou K a L homeomorfní. Stejný závěr platí, pokud existuje izomorfismus $T : C(K) \to C(L)$, splňující $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| < 2$ (D.Amir, 1965). Další zobecnění této věty je v článku [15] (z roku 1992) a říká:

Nechť X a Y jsou kompaktní konvexní množiny v lokálně konvexním prostoru a nechť existuje izomorfismus T prostorů spojitých afinních funkcí na těchto množinách splňující $\|T^{-1}\| \cdot \|T\| < 2$. Pokud každý extremální bod X i Y je „weak peak point" a navíc je splněna aspoň jedna z podmínek (1) X a Y jsou simplexy, (2) X a Y jsou metrizovatelné, (3) množiny extremálních bodů X i Y jsou uzavřené; pak $\operatorname{ext} X$ a $\operatorname{ext} Y$ jsou homeomorfní.

Hlavním výsledkem Kapitoly 1 předložené disertace je společné zobecnění případů (2) a (3) – stačí předpokládat, že $\operatorname{ext} X$ a $\operatorname{ext} Y$ jsou Lindelöfovy. Důkaz je modifikací důkazu v [15], frekvence odkazů na různá místa [15] činí článek téměř nečitelným. Pro pochopení postupu je naprosto nezbytné paralelně listovat článkem [15], což nepovažuji za optimální. Při tomto způsobu odkazování není zřejmé, co je netriviální tvrzení a co je snadno ověřitelné výpočtem. Například fakt, že „weak peak point" je „split face" je netriviální [15, Proposition 1], mnohé další kroky, na něž se odkazuje, jsou snadno ověřitelné výpočtem. Konkrétní připomínky:

(1-i) Na straně 7 uprostřed se tvrdí, že funkce $\widehat{\chi_{\{x\}}}$ je afinní s odkazem na [15, str. 73]. Je to sice správně, ale přesto obtížně srozumitelné. Nejprve se totiž použije [15, Proposition 1] (to je též na str. 73) k závěru, že $\{x\}$ je „split face"; a následně se použije tvrzení na straně 73 nahoře, které říká, že $\widehat{\chi_F}$ je afinní, kdykoli F je „split face". Protože jde o klíčové místo důkazu, stálo by to za lepší vyjádření.

(1-ii) Hned poté se odkazuje na [15, str. 77], aby se zdůvodnilo, že pro každé $y \in \operatorname{ext} Y$ existuje nejvýše jedno $x \in \operatorname{ext} X$, že $|T^{**}h_x(y)| > c$. Bylo by srozumitelnější, kdyby se pomocí odkazu zdůvodnilo, že $T^{**}h_x(y) = \lambda$, kde λ ono číslo z (1.1). Pak by jednoznačnost x byla zřejmá z prvního odstavce důkazu a bylo by to lépe čitelné.

(1-iii) S Kapitolou 1 souvisí i chyba v Úvodu (strana 2 uprostřed), kde je chybně formulována Banach-Stoneova věta – místo „isomorphic" má být „isometric" (dvakrát).

Kapitoly 2–4 jsou tvořeny sérií tří článků napsaných spolu se školitelem (*Descriptive properties of elements of biduals of Banach spaces*, publikováno v roce 2012 ve Studia Math., *Baire classes of L_1 preduals and C^*-algebras*, zasláno k publikaci, *Baire classes of nonseparable L_1-preduals*, zasláno k publikaci). Tyto tři kapitoly mají společné téma. Základní situace, která se v nich zkoumá je následující: Nechť E je Banachův prostor, B_{E^*} nechť značí uzavřenou jednotkovou kouli duálního prostoru k E, opatřenou slabou* topologií. Pak prvky druhého duálu E^{**} lze chápat jako afinní funkce na B_{E^*}. Přesněji, E^{**} lze ztotožnit v reálném případě s prostorem všech omezených lichých afinních funkcí na B_{E^*} a v komplexním případě s prostorem všech omezených homogenních afinních funkcí na B_{E^*}. Přičemž E odpovídá podprostoru tvořenému spojitými funkcemi. V uvedených kapitolách se autoři zabývají deskriptivními vlastnostmi silně afinních prvků E^{**}. Zkoumají vztahy několika hierarchií baireovského typu, tedy hierarchií vytvořených z nějakého výchozího systému funkcí pomocí iterace bodových limit posloupností. Jsou-li výchozím systémem spojité funkce, jsou příslušné třídy značeny $\mathcal{C}_\alpha$ ($\alpha \in [0, \omega_1)$), dále se zkoumají (pro $\alpha \in [1, \omega_1)$) třídy

- Bof_α, jsou-li výchozím systémem funkce, pro které vzor otevřené množiny je spočetné sjednocení rozdílů otevřených množin;
- Baf_α, jsou-li výchozím systémem funkce, pro které vzor otevřené množiny je spočetné sjednocení rozdílů kozero množin;
- Hf_α, jsou-li výchozím systémem funkce, pro které vzor otevřené množiny je spočetné sjednocení H-množin.

Kromě toho se zkoumají afinní třídy, kdy výchozím systémem jsou spojité afinní funkce (značení $\mathfrak{A}_\alpha$), a vnitřní baireovské třídy Banachových prostorů (výchozím systémem je $E \subset E^{**}$, značení E^{**}_α).

K hlavním výsledkům patří následující věty (E je vždy Banachův prostor, $f \in E^{**}$ silně afinní funkce na B_{E^*}, na B_{E^*} se uvažuje slabá* topologie):

(1) Pokud $f|_{\overline{\operatorname{ext} B_{E^*}}}$ je ve třídě Hf_α, Bof_α nebo $\mathcal{C}_\alpha$, pak je v téže třídě i f na B_{E^*}. (Věta 2.1.1)
(2) Pokud $\operatorname{ext} B_{E^*}$ je Lindelöfův a $f|_{\operatorname{ext} B_{E^*}} \in \mathcal{C}_\alpha$, pak $f \in \mathcal{C}_{1+\alpha}$. (Věta 2.1.2)
(3) Pokud $\operatorname{ext} B_{E^*}$ je Lindelöfova H-množina, $\alpha \geq 1$ a $f|_{\operatorname{ext} B_{E^*}} \in \mathcal{C}_\alpha$, pak $f \in \mathcal{C}_\alpha$. (Věta 2.1.3)
(4) Je-li E reálný L^1-preduál, $\alpha \geq 2$ a $f \in \mathcal{C}_\alpha$, pak $f \in \mathfrak{A}_{1+\alpha}$. Pokud $\operatorname{ext} B_{E^*}$ je navíc Lindelöfova H-množina, pak dokonce $f \in \mathfrak{A}_\alpha$. (Věta 2.1.4)
(5) Totéž pro separabilní komplexní L^1-preduál. (Tvrzení 3.3.6)

Dalšími výsledky jsou věty o rozšiřování funkcí:

(1) Nechť E je separabilní reálný L^1-preduál a f omezená reálná lichá funkce na $\operatorname{ext} B_{E^*}$, která patří do $\mathcal{C}_\alpha$. Pak f lze rozšířit na prvek $E^{**}_{1+\alpha}$. Pokud navíc je $\operatorname{ext} B_{E^*}$ typu F_σ a $\alpha \geq 1$, existuje rozšíření v E^{**}_α. (Věta 3.2.7)
(2) Nechť E je separabilní reálný L^1-preduál takový, že každá omezená reálná lichá funkce na $\operatorname{ext} B_{E^*}$, která patří do $\mathcal{C}_1$, lze rozšířit na prvek E^{**}_1. Pak $\operatorname{ext} B_{E^*}$ je F_σ. (Věta 3.2.8)
(3) Tytéž tvrzení pro separabilní komplexní L^1 preduály a komplexní homogenní funkce. (Věty 3.3.7 a 3.3.8)
(4) Nechť E je (neseparabilní) reálný L^1-preduál a f omezená reálná lichá funkce na $\operatorname{ext} B_{E^*}$, která patří do $\mathcal{C}_\alpha$. Pak f lze rozšířit na prvek $E^{**}_{1+\alpha}$. Pokud navíc je $\operatorname{ext} B_{E^*}$ Lindelöfova H-množina a $\alpha \geq 1$, existuje rozšíření v E^{**}_α. (Věty 4.2.14 a 4.2.15)

Kromě toho články obsahují i příklady dokumentující nutnost některých předpokladů (sekce 2.8) a aplikace výsledků na řešení jednoho problému (sekce 3.4).

Kapitoly 2–4 jsou psány pečlivě a srozumitelně. Určitou nevýhodou je rozdílné značení stejných věcí v různých kapitolách, což je způsobeno tím, že jde o jednotlivé články. Dále uvádím seznam připomínek ke kapitolám 2–4.

(2-i) Strana 20, řádek 8: Tvrdí se, že omezená baireovská funkce z množiny B se dá rozšířit na omezenou baireovskou funkci na X. Lemma 2.4.2 říká, že to platí pro omezenou spojitou funkci na B. Dále se má použít transfinitní indukce. Mělo by se naznačit, jak vypadá indukční krok: Nechť $f_n \to f$ na B, přičemž f_n lze rozšířit na baireovskou $\tilde{f}_n$ definovanou na X. Otázka je, jak definovat rozšíření f (limita $\tilde{f}_n$ nemusí existovat). Řešení znám (díky referátu školitele na semináři) – vezme se třeba $\limsup \tilde{f}_n$. Ale tento trik by se neměl nechávat na čtenáři.

(2-ii) Strana 20, Lemma 2.4.5: Dokonce platí rovnosti.

(2-iii) Strana 23, řádek 11: Spíše než Lemma 2.4.5 se používá jeho důkaz.

(2-iv) Strana 23, řádek 13 zdola: Je $f \in (\operatorname{span} \mathcal{G})_\beta$, ne $f \in \mathcal{G}_\beta$.

(2-v) Strana 30, řádek 8 zdola: Značení $e \circ \varphi$ je sice srozumitelné (φ je zobrazení s hodnotami v E^* a $e \in E \subset E^{**}$), přesto bych dal přednost zápisu $\varphi(x)(e)$ před $(e \circ \varphi)(x)$, nebo aspoň komentáři, jak se to myslí.

(2-vi) Strana 30 dole: Míra μ_x není určena jednoznačně. To sice ničemu nevadí, ale stálo by to za poznámku.

(2-vii) Strana 34, řádek 3 zdola: Píše se tam, že f není borelovská na $L \times \{0\}$, ale mělo by tam být, že f není „resolvably measurable“.

(3-i) Strana 40, Důsledek 3.2.5 a jeho důkaz:

(a) Není mi jasné, proč se to jmenuje Důsledek a čeho je to vlastně důsledek.

(b) Má být v předpokladech separabilita X? Není tam jmenovaná, ale používá se Tvrzení 3.2.3, které ji předpokládá. Je-li X separabilní, pak pro $\alpha = 0$ lze postupovat takto: Nechť f je lichá silně afinní funkce, pro kterou $f|_{\text{ext}\, B_{X^*} \cup \{0\}}$ je spojitá. Podle Tvrzení 3.2.3 je $f = Tf$. Podle [52, Theorem 4.4] existuje lichá spojitá afinní funkce g, pro kterou $g = f$ na $\text{ext}\, B_{X^*}$. Podle Tvrzení 3.2.3 je $g = Tf$, tedy $f = g$, neboli f je spojitá, což znamená, že $f \in X$. Není-li X separabilní, není mi jasné, jak postupovat.

(c) Použití transfinitní indukce pro vyšší třídy by mělo být okomentováno. Není-li X separabilní, nevidím, jak by se mělo postupovat, takže předpokládám, že X je separabilní. Jak by měl vypadat indukční krok: Nechť tvrzení platí pro $\alpha' < \alpha$ a nechť f je silně afinní lichá funkce, pro kterou $f|_{\text{ext}\, B_{X^*} \cup \{0\}}$ patří do C_α. Podle Tvrzení 3.2.3 víme, že $f = Tf$. Nechť f_n je posloupnost funkcí nižších tříd na $\text{ext}\, B_{X^*} \cup \{0\}$, která na této množině konverguje k f. Pak $Tf_n \to Tf$ (dle důkazu Tvrzení 3.2.4). Ale co víme o Tf_n?

(d) Jiný pohled: Je-li X separabilní, pak za uvedených předpokladů je $\text{ext}\, B_{X^*}$ F_σ. Tedy stačí použít Tvrzení 3.2.4 pro případ $\alpha \geq 1$ a [52, Theorem 4.4] pro $\alpha = 0$ a doplnit v obou případech Tvrzením 3.2.3. Pak by to byl opravdu snadný důsledek, ale uvedený důkaz je krkolomný a nesrozumitelný. Pokud X má být neseparabilní, je třeba postupovat nějak jinak.

(3-ii) Strana 40, poslední tři řádky: Místo Tvrzení 3.2.6 by bylo jednodušší použít rovnou Tvrzení 3.2.4.

(3-iii) Strana 43, Věta 3.2.11: Existuje analogický příklad, aby nejen množiny extremálních bodů byly homeomorfní, ale aby dvojice $(\overline{\text{ext}\, B_{X^*}}, \text{ext}\, B_{X^*})$ a $(\overline{\text{ext}\, B_{Y^*}}, \text{ext}\, B_{Y^*})$ byly homeomemorfní?

(3-iv) Strana 47, Důsledek 3.3.5:

(a) Používá se implicitně tvrzení, že $f_n \to f$ na $\text{ext}\, B_{X^*}$ implikuje $Tf_n \to Tf$. Toto tvrzení se používá opakovaně a stálo by za vypíchnutí.

(b) Místo důkazu [65, Theorem 9] lze použít jen znění této věty a Tvrzení 3.3.3.

(3-v) Strana 48, Věta 3.3.8: Mělo by se též dokázat, že f je první Baireovy třídy.

(4-i) Strana 58, Lemma 4.2.5: Složitě se opisuje použití Stone-Weierstrassovy věty.

Kapitola 5 je tvořena článkem *Distances to space of first H-class mappings*, jehož jediným autorem je uchazeč a který byl zaslán k publikaci. Jeho tématem je vztah funkcí první H-třídy, funkcí fragmentovaných a σ-fragmentovaných a několik souvisejících otázek. Článek obsahuje několik zajímavých výsledků, byť ne velmi hlubokých. Téma je zajímavé a pravděpodobně perspektivní. Nicméně uspořádání výsledků a ozřejmění jejich návaznosti na výsledky známé je slabší. Následují připomínky – nejprve konkrétní připomínky k textu, potom celkové připomínky ke koncepci a širším souvislostem.

(5-i) Strana 64, charakterizace H-množiny: $I \subset [0, \kappa)$ nemá být interval, ale libovolná množina. To je klíčový rozdíl, pro interval bychom dostali jen rozdíly otevřených množin.

(5-ii) Strana 67, řádek 3 zdola: Symbol $\in$ je tam navíc.

(5-iii) Strana 70, Věta 5.3.7: V poslední rovnosti chybí konstanta 2 (nebo $\frac{1}{2}$, podle toho, kam se napíše).

(5-iv) Strana 74, důkaz Lemmatu 5.5.6:

(a) Na druhém řádku má být dvakrát f_γ místo f.

(b) Závěr důkazu je příliš rychlý – nejprve je třeba usoudit, že $\beta(f, \varepsilon) \leq \kappa$. Tedy, pro každé $\varepsilon > 0$ platí $\beta(f, \varepsilon) < \omega_1$, vezmeme-li supremum přes $\varepsilon > 0$, dostaneme $\beta(f) < \omega_1$.

(5-v) Strana 74, Lemma 5.5.7: Formulace je krkolomná. Lepší by byla $\beta(h \circ f) \leq \beta(f)$.

(5-vi) Strana 74, Příklad 5.5.8: Důkaz není uveden, asi je považován za zřejmý. On tedy vcelku zřejmý je, dokonce $\beta(f) = 3$. Nicméně, i s ohledem na to by příklad stál za pečlivější komentář.

(5-vii) Strana 77, Lemma 5.5.15:

(a) Proč se znění omezuje právě na $\alpha \leq \omega_1$? Buď by mělo být $\alpha < \omega_1$ a prostor X_α separabilní nebo by mohl být α libovolný ordinál a X_α ne nutně separabilní ($densX_\alpha \leq \max(card(\alpha), \aleph_0)$).

(b) Při konstrukci $A_{\alpha+1}$ se používá zbytečně složitý vzorec. Stačilo by vzít $A_{\alpha+1} = \{p\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_\alpha \times \{n\}$.

(c) Na dvou místech byl použit neurčitý člen, zatímco „the" by bylo správně, („the following topology", „the characteristic function").

(d) Metrizovatelnost prostorů X_α není zdůvodněna. Je jasné, že metrizovatelnost se zachová při limitním kroku, ale zachování v izolovaném kroku by se mělo dokázat. Není to těžké, ale mělo by se to naznačit.

(e) Tvrdí se, že zkonstruované prostory jsou dědičně Baireovy. Je to tak, dokonce jsou úplně metrizovatelné (tedy pro $\alpha < \omega_1$ polské). A ověření úplné metrizovatelnosti je rozhodně snazší než přímé ověřování dědičné bairevskosti.

(5-viii) Strana 79, Poznámka 5.5.19: To není vůbec překvapivé, když X není separabilní. (Spojité zobrazení definované na neseparabilním prostoru má velmi často neseparabilní obor hodnot a β vyjde vždy 1.)

(5-ix) Strana 79, Příklad 5.5.22: Ani toto není překvapivé, protože $\mathbb{Q}$ není dědičně Baireův. Zajímavější je otázka σ-fragmentovanosti v takovém případě.

(5-x) K celkové koncepci Sekce 5.3: V této sekci jsou klíčová abstraktní Tvrzení 5.3.1 a 5.3.2, která jsou pak pomocí Tvrzení 5.3.5 a 5.3.6 aplikována k důkazu Věty 5.3.7. Domnívám se, že tato koncepce není šťastná a že se zde poněkud chaoticky míchá několik odlišných problémů. Lepší systém by byl tento:

(a) Tvrzení 5.3.1 a 5.3.2 nahradit jedním tvrzením: Označme $Fr_\sigma(X, E)$ množinu všech σ-fragmentovaných funkcí z X do E. Pak pro každou $f : X \to E$ platí

$$\tfrac{1}{2}\sigma\text{-frag}(f) \leq d(f, Fr_\sigma(X, E)) \leq \sigma\text{-frag}(f).$$

Pokud $E = \mathbb{R}$, je $\frac{1}{2}\sigma\text{-frag}(f) = d(f, Fr_\sigma(X, \mathbb{R}))$.

(b) Vždy platí $Fr_\sigma(X, E) \subset Hf_1(X, E)$. (To plyne z výsledků sekce 5.2.)

(c) Rovnost, tedy obrácená inkluze, někdy platí a někdy ne. To je docela zajímavý problém – věnují se tomu Tvrzení 5.3.5 a 5.3.6 (pozitivní případy) a Příklady 5.3.3 a 5.3.4 (protipříklady). Tento problém by stál za důkladnější analýzu, navíc úzce souvisí s jiným známým problémem. Podrobněji:

(c1) Je-li X dědičně Baireův, je σ-fragmentovanost totéž co fragmentovanost a také totéž, jako vlastnost bodu spojitosti (viz třeba [47]). Tedy jde o otázku, zda funkce první H-třídy má vlastnost bodu spojitosti. Tomu byla věnována například má diplomová práce a několik článků. Například je konsistentní s ZFC, že odpověď je vždy kladná (za axiomu konstruovatelnosti, $V = L$); ke konstrukci protipříkladu je třeba použít měřitelný kardinál; za předpokladu existence dvouhodnotově měřitelného kardinálu existuje úplně regulární protipříklad (viz mé články *New Examples of Hereditarily t-Baire Spaces* (Bull. Acad. Polon. Sci., 46 (2) (1998), 197-210) a *Note on Connections of the Point of Continuity Property and Kuratowski Problem on Function Having the Baire Property* (Acta Univ. Carolinae, 38 (1) (1997), 3-12)). Příklad 5.3.4 převzatý z [47] je za předpokladu existence reálně měřitelného kardinálu nejvýše rovnému kontinuu, je Hausdorffův a není jasné, zda může být regulární. Další výsledky na toto téma lze najít třeba v článcích P. Holického.

(c2) Když X není dědičně Baireův, je situace odlišná – k protipříkladu nejsou třeba velké kardinály, stačí Martinův axiom a negace hypotézy kontinua (Příklad 5.3.3, který je víceméně totožný s [47, Example 2.4(3)]). Tento problém by stál za podrobnější prozkoumání. Například je přirozená otázka, zda existuje protipříklad v ZFC nebo zda je konsistetní, že odpověď je vždy kladná (nabízí se axiom $V = L$). Tato otázka může být i velmi obtížná, ale měla by se určitě alespoň zmínit.

Závěr: Práce obsahuje nové netriviální výsledky, z nichž některé byly publikované. Většinu práce tvoří články společné se školitelem – k uchazečově podílu na nich se jistě vyjádří školitel. Článek v první kapitole obsahuje zajímavý výsledek, je však čitelný pouze při paralelní četbě článku, který zobecňuje. Další tři články tvoří jednotný celek, důkladně a téměř vyčerpávajícím způsobem zkoumají problematiku přenosu deskriptivních vlastností funkcí na extremálních bodech na celou kompaktní konvexní množinu. Článek v páté kapitole je samostatným článkem uchazeče, obsahuje zajímavé a netriviální výsledky, je však psán poněkud chaoticky. Bylo by žádoucí jej ještě před publikací podstatně přepracovat.

Připomínky k jednotlivým článkům jsou uvedeny výše. Většina z nich není zásadní. Rád bych však, aby se uchazeč vyjádřil zejména k připomínkám (2-i), (2-vi), (3-i), (3-v), (5-vii). Kromě toho by mne zajímalo, zda zkoumal otázky uvedené v (3-iii) a (5-x-c2).

Celkově se domnívám, že práce splňuje předpoklady kladené na doktorandskou disertační práci a že prokazuje, že uchazeč je schopen samostatné tvořivé práce.

Ondřej Kalenda

V Praze dne 10. února 2014

Doc. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D., DSc.
KMA MFF UK